

抵抗の変分

概要

圧力分布が僅かに変った時の抵抗の変化分を与える式によって検討する。

それを今影響関数 (influence function) と呼ぶ事にしよう。もしそれが定数となるならば排水量一定の条件下で最小抵抗を与える圧力分布あるいは滑走面であるが、それは圧力分布の二次形式なので幾らでも0に近づけるから、抵抗の最小値は0である。

従って適当な拘束条件と分布形状の下で抵抗の最小化を計る事に既にのべる。

ここではさらに圧力分布を少し変化させた場合、それが抵抗にどのように影響するかを見たいような時への応用として影響関数について知る。

順序として2次元問題から始める。

なお直接床面の微小変形による影響関数も同様に考えられるが少し複雑になり、あまり便利ではないようなので省略する。

1. 2次元

圧力抵抗係数は

$$\frac{D_p}{\frac{1}{2}\rho U^2 L} = C_{dp} = - \int_1' p(x) \cdot v(x,0) dx, \quad (1.1)$$

$$p = \frac{\text{圧力}}{\rho U^2}, \quad v(x,0) = -\phi_y(x,0) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi: \text{ポテンシャル}$$

$$v(x,0) = -\frac{1}{\pi} \int_1' p(\xi) \left\{ \frac{1}{\xi-x} + K S_0(K\sqrt{x-\xi}, 0) \right\} d\xi, \quad (1.2)$$

$$S_0(x, y) = -P.V. \int_0^y \frac{e^{kx} \sin kx}{k-k'} dk + \pi e^y \cos x, \quad (1.3)$$

p が僅かに変化して δp だけ増えたとするとそれに
よる抵抗の変分は

$$\delta C_{dp} = - \int_1' [v(x,0) \delta p(x) + p(x) \delta v(x,0)] dx, \quad (1.4)$$

で

$$\delta v(x,0) = -\frac{1}{\pi} \int_1' \delta p(\xi) \left\{ \frac{1}{\xi-x} + K S_0(K\sqrt{x-\xi}, 0) \right\} d\xi, \quad (1.5)$$

であるが今 $\delta p(x)$ は有限と仮定すると (1.4) 右辺第
2項の積分は順序を変える事が出来て (1.2) より

$$\begin{aligned} - \int_1' p(x) \delta v(x,0) dx &= + \frac{1}{\pi} \int_1' \delta p(\xi) d\xi \left[\int_1' p(x) \left\{ \frac{1}{\xi-x} + K S_0(K\sqrt{x-\xi}, 0) \right\} dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_1' \delta p(x) dx \left[\int_1' p(\xi) \left\{ \frac{1}{x-\xi} + K S_0(K\sqrt{\xi-x}, 0) \right\} d\xi \right], \quad (1.6) \end{aligned}$$

となるから (1.3) を使って、

$$\delta C_D = 2K \int_{-1}^1 \delta p(x) dx \int_{-1}^1 p(\xi) \cos K(x-\xi) d\xi, \quad (1.7)$$

もうる。

さて (1.3) を ^{定常} 高速度開分と自由波形にわけて自由波成分のみを積分にうつす^{2Kの} 形を示めると

$$\bar{v}_H(x, 0) = -2K \int_{-1}^1 p(\xi) \cos K(x-\xi) d\xi, \quad (1.8)$$

したがって

$$\delta C_D = - \int_{-1}^1 \bar{v}_H(x, 0) \delta p(x) dx, \quad (1.9)$$

つまりこの $[-\bar{v}_H(x, 0)]$ が影響関数であり、またこれは速度抵抗係数の高分に等しい。

即ち

$$\frac{D_w}{\frac{\rho}{2} U^2 L} = C_w = K |\bar{F}(K)|^2 = K \int_{-1}^1 p(x) dx \int_{-1}^1 p(\xi) e^{iK(x-\xi)} d\xi, \quad (1.10)$$

$$\therefore \bar{F}(K) = \int_{-1}^1 p(x) e^{iKx} dx, \quad (1.11)$$

であるから

$$\delta C_w = 2K \int_{-1}^1 \delta p(x) dx \int_{-1}^1 p(\xi) \cos K(x-\xi) d\xi, \quad (1.12)$$

従って逆に言うと速度抵抗は $[\delta p < \infty]$ ならば変化しないという事になる。

* これは自由波速のものではないので (一) 印で区別する。 ($\bar{v}_H = \frac{1}{K} \int_{-1}^1 p \cos K(x-\xi) d\xi$)

実際、飛沫抵抗 D_s は

$$\frac{D_s}{\frac{\rho}{2} U^2 L} = C_s = \frac{\pi}{4} a^2, \quad (1.13)$$

$$a = \lim_{x \rightarrow 1} [P(x) \sqrt{1-x^2}]$$

と与えられる。

そこで今 逆流れて $\tilde{v}_s(x, 0) = 0$ となるような圧力分布 $\tilde{P}_s(x)$ は定数を除いて一意に定まるが、クツタの条件は満たせない。

そこで

$$\tilde{P}_s(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{D_s}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4}{\pi \sqrt{1-x^2}}, \quad D_s = \frac{4}{\pi}, \quad (1.14)$$

となるように定数を定めておくと可逆定理により

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-1}^{1-\varepsilon} \tilde{P}_s(x) v(x, 0) dx = - \int_{-1}^{1-\varepsilon} P(x) v_s(x, 0) dx = 0 \right], \quad (1.15)$$

となり

$$\int_{-1}^1 \tilde{P}_s(x) v(x, 0) dx = \frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{P}_s(x) dx \int_{-1}^1 \frac{P(\xi)}{x-\xi} d\xi = 0, \quad (1.16)$$

となる。結局

$$\int_{-1}^1 \tilde{P}_s(x) v(x, 0) dx = 0 \quad (1.17)$$

もうる。

それ故 σ の実分は $\delta p < \infty$ とすれば積分順序はかえり換える。

$$\delta\sigma = \int_{-1}^1 \vec{P}_S(x) \delta v(x,0) dx = \int_{-1}^1 \delta p(x) v_S^2(x,0) dx = 0, \quad (1.18)$$

即ち 飛沫は変化せず 従って 飛沫期は不変となる。

註)

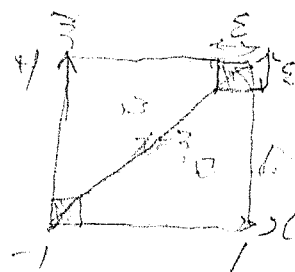
$$I = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p_1(x) dx \int_{-1}^1 \frac{p_2(x)}{x-\frac{1}{2}} dx \quad \text{の積分}$$

この積分は図の右隅の部分を除けば

対称性から明らかに 0 となる。

よって 充分小さい ε を ε について考えると (1.13) の

ように近似出来、又 更に $p_1(-1) = p_2(-1) = 0$ とすると、



$$I = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{2\pi} \int_{-1-\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_{-1-\varepsilon}^1 \frac{dx}{x-\frac{1}{2}} = \frac{2\sigma_1 \sigma_2}{\pi} \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} du \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{dv}{v^2-u^2}$$

$$= \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\pi} \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{du}{u} \lg \left| \frac{v-\sqrt{\varepsilon}}{v+\sqrt{\varepsilon}} \right| = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\pi} \int_0^1 \lg \left(\frac{1-t}{1+t} \right) \frac{dt}{t} = \frac{\pi}{4} \sigma_1 \sigma_2$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{p_2(t)}{1+t} \frac{dt}{t} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

2. 3次元

圧力抵抗係数は

$$\frac{D_p}{\rho U^2 \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \gamma_{pp} = - \iint p(x, y) w(x, y) dx dy, \quad (2.1)$$

$$w(x, y) = - \frac{\partial \psi}{\partial x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \phi_{\frac{1}{2}}(x, y, 0) \quad (2.2)$$

$$w(x, y) = - \phi_{\frac{1}{2}}(x, y, 0) = - \iint R(\xi, \eta) S_{\frac{1}{2}}(x-\xi, y-\eta, 0) d\xi d\eta, \quad (2.3)$$

2-12

$$S_{\frac{1}{2}}(x, y, 0) = - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} T(x, y, 0)$$

$$= \frac{i}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{ik(x\cos\theta + y\sin\theta)}}{k\cos\theta - K + i\mu\cos\theta} dk$$

$$= \frac{i}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{ik(x\cos\theta + y\sin\theta)}}{k\cos\theta - K + i\mu\cos\theta} dk d\theta + \frac{i}{4\pi^2} \iint \frac{e^{ik(x\cos\theta + y\sin\theta)}}{k\cos\theta - K + i\mu\cos\theta} dk d\theta$$

$$= \frac{x}{2\pi y^2 \sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{i}{4\pi^2} P.V. \iint \frac{e^{ik(x\cos\theta + y\sin\theta)}}{k\cos\theta - K} dk d\theta \quad (2.4)$$

$$+ \frac{K}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos[K \sec^2\theta (x\cos\theta + y\sin\theta)] \sec^2\theta d\theta, \quad (2.4)$$

とるに右辺第1項は x の奇関数、第2項は偶関数であり、また第1項は特異積分となり、 $p < \infty$ でなければ積分順序の変更は出来ない。

これを(2.3)に代入し、(2.1)の積分を実行すると対称性が成り立つ項の積分は消えて

$$V_p = V_s + V_w, \quad (2.5)$$

$$V_s = \frac{1}{2\pi} \iint p(x, y) dx dy \iint \frac{P(\xi, \eta) d\xi d\eta}{(y-\eta) \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}, \quad (2.6)$$

$$V_w = \frac{2K}{\pi} \iint p(x, y) dx dy \iint P(\xi, \eta) d\xi d\eta P_s(Kx-\xi, Ky-\eta, 0) d\xi d\eta, \quad (2.7)$$

$$P_s(x, y, 0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \operatorname{secc} \theta) \cos(y \operatorname{secc} \theta) \operatorname{secc} \theta d\theta, \quad (2.8)$$

あるいは(2.7)を自由流系と局部流系と分けてその自由流のみ積分して

$$\bar{w}_F(x, y) = - \iint p(\xi, \eta) S_{EF}(x-\xi, y-\eta, 0) d\xi d\eta, \quad (2.9)$$

$$S_{EF}(x, y, 0) = \frac{2K}{\pi} P_s(Kx, Ky, 0), \quad (x \text{ の正負の符号を } \angle), \quad (2.10)$$

なる形を計算すると

$$V_w = -\frac{1}{2} \iint p(x, y) \bar{w}_F(x, y) dx dy, \quad (2.11)$$

p が δp だけ増えると流は抵抗の増分は

$$\delta V_w = - \iint \delta p(x, y) \bar{w}_F(x, y) dx dy, \quad (2.12)$$

であるから、 $-\bar{w}_F$ は影響関数である。

従って前同様に排水量一定、即ち

$$\iint \delta p(x, y) dx dy = 0, \quad (2.13)$$

の条件下で 造浪抵抗が極値があるためには 明らかに

$$\overline{w}_H(x, y) = \text{Const.}, \quad (2.14)$$

でなければならぬ。

しかし (2.9) からわかるように w_H は p に S_{ZF} を含んだ式をかけて積分したものであるから、 p に 有限個の条件 (排水量、重心位置、飛沫なし等) を附してもなおかつ w_H が殆ど判る所で 0 となるように p を定められる。

(核関数 (2.10) の特異性が強いので この手では 直接上の主張は困難に見えるが $w_H = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^4 \overline{w}_H$

$$\overline{w}_H(x, y) = -\frac{1}{\pi^2} \iint p(\xi, \eta) P_1(x-\xi, y-\eta, 0) d\xi d\eta, \quad (2.15)$$

と書くとすれば $\overline{w}_H$ の後は 対数的特異性 があるので $\overline{w}_H = a + bx + cx^2 + dx^3$ となる p を計算しようと主張出来る (従って $\overline{w}_H = 0$ とは 言えないよう)

それ故 造浪抵抗の最小値は 常に 0 となる。

しかし 造浪抵抗 0 の船型は かなり非現実的であり 実際には 圧力分布の型を指定して 最小値問題をして 抵抗の小さい船型を探索する。

このように 得られた船型について さらに w_H を計算して

おけば、この改良が流線の指針となる。

特に、実用的な船首部形を求める為、要する断面を変えたり、船首根を深くした...などの時、その抵抗への寄与が一目でわかる点大層利便と感がある。
さて、この時、流体抵抗はどうかっているだろうか。

(2.6) の積分は、2次元同様、前縁附近のみで積分すると考えられ、その附近で

$$p(x, y) \doteq \frac{\sigma(y)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (2.16)$$

のように表わされるとし、また、前縁の y 軸との傾きは充分小さいものと仮定して、次の積分を考えよう。

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a d\tilde{z} \int_{y-a}^{y+a} \frac{p(\tilde{z}, \eta) (x-\tilde{z}) d\tilde{z} d\eta}{(y-\eta)^2 \sqrt{(x-\tilde{z})^2 + (y-\eta)^2}} \quad (1 \gg a \gg a \text{ と } \tilde{z})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{(x-\tilde{z}) d\tilde{z}}{\sqrt{1-\tilde{z}^2}} \int_{y-a}^{y+a} \frac{\sigma(\eta) d\eta}{(y-\eta)^2 \sqrt{(x-\tilde{z})^2 + (y-\eta)^2}}$$

$$= \frac{\sigma(y)}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{(x-\tilde{z}) d\tilde{z}}{\sqrt{1-\tilde{z}^2}} \int_{-b}^b \frac{d\eta}{\eta^2 \sqrt{(x-\tilde{z})^2 + \eta^2}} \quad (2.17)$$

$$\int_{-b}^b \frac{d\eta}{\eta^2 \sqrt{\tilde{z}^2 + \eta^2}} = \frac{1}{\tilde{z}^2} \int_{-\frac{b}{\tilde{z}}}^{\frac{b}{\tilde{z}}} \frac{du}{u^2 \sqrt{1+u^2}} \xrightarrow{\frac{b}{\tilde{z}} \gg 1} \frac{2}{\tilde{z}^2} \left[-\frac{\sqrt{1+u^2}}{u} \right]_{u=\infty} = -\frac{2}{\tilde{z}^2}, \quad (2.18)$$

となるから、結局

$$I = -\frac{\sigma(y)}{\pi} \int_{1-a}^1 \frac{dz}{(x-z)\sqrt{1-z^2}}, \quad (2.19)$$

同様にして

$$\begin{aligned} \gamma_s &= \frac{1}{\pi} \iint p(x, y) \sigma(y) dx dy \int_{1-a}^1 \frac{dz}{(z-x)\sqrt{1-z^2}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int \sigma^2(y) dy \int_{1-a}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_{1-a}^1 \frac{dz}{(z-x)\sqrt{1-z^2}} \\ &= \frac{\pi}{4} \int \sigma^2(y) dy, \end{aligned} \quad (2.20)$$

を得 (1.13) のように、の場合にはより低い。。

そこで再び、 $\tilde{w}_s(x, y, 0) = 0$ とするような圧力分布 $\tilde{p}_s(x, y)$ を考えると、クッタの条件は満たされないが、 y 方向の任意性を除いて一義的に定まる。

そこで前縁付近で

$$\tilde{p}_s(x, y; \gamma) \rightarrow \frac{4\delta(\gamma)}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \quad (\text{前縁が } x=1 \text{ 付近では } \frac{4}{\pi\sqrt{1-x^2}}), \quad (2.21)$$

として、その任意性を除いて置く。但し δ についてはデルタ関数とする。

このような圧力分布と今考えている圧力分布について可逆定理を適用すると (1.17) を導いたのと同等になる。

$$\iint \tilde{p}_s(x, y; \gamma) w(x, y, 0) dx dy = \sigma(\gamma), \quad (2.22)$$

を得る。

無限 2:2 の関係 変化を考えると

$$\delta \sigma(Y) = \iint \delta p \, \vec{w}_s \, dx dy = 0, \quad (2.23)$$

となるので、この変分では船体形状は変わらない。
($\delta p < 0$)

しかし (2.22) から w が変化する時の船体形状の増減は見積れるわけである。

この様な $\tilde{p}$ の計算法を少し考えておこう。

簡単のために矩形面分布で考えよう (そうならければ (2.21) の定義も考慮
直す必要がある)

前縁の要素の長さを x 方向に a , y 方向に b としておくと

一般には (2.16) により

$$\int_{y-b}^{y+b} \int_{x-a}^{x+a} \tilde{p}(x, y) \, dx = b \, \tilde{\sigma}(y) \int_{x-a}^{x+a} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = b \, \tilde{\sigma}(y) \alpha, \quad \alpha = 2 \sin^{-1} \sqrt{\frac{a}{2}},$$

となるから、 a, b が充分小さいとすれば、この要素の p (一定) の値として (2.21) により

$$\tilde{p} = \frac{\alpha}{a} \tilde{\sigma}(y) = \frac{4\alpha}{\pi a} \delta(y-Y),$$

と置けばよい事になる。

境界積分方程式は $f(y)$ を任意関数として

$$\tilde{\zeta}(x, y) = f(y) = \iint \tilde{p}(x, z) \tilde{\zeta}_2(x-z, y-b) \, dx dz,$$

と採り、上式の条件を指定してこれを解けば $f(y)$ も定まる。