

HIS

H-126

No.

Date 1.3.19

M.B.

3次元滑流板の理論

概要	頁 0
1. 速度ポテンシャル, 境界条件.	1
2. 逆流	5
3. 可逆定理.	7
4. 抵抗.	13~16
附録A 核関数	A-1~2
" B 積分 $\int \frac{x}{y^2 r} dy$, $\iint \frac{r}{y^2} dx dy$, $\int \frac{\partial x}{\partial r} dy$	B-1~2
" C 飛沫積分	C-1~3

概要

問題の根拠を月日覚書の不備を補う事が
おぼろげであるが、それでは浸水時の変化も所定と
して議論を進めたので前縁吹出しは最終的に口と
すものとして、^{の式}断続など不備であつた。

今回は浸水面は変化しないとして考察した。
これは舷側が略々垂直で Transonic Stern
の船の数学的模型を提せると考えられる。

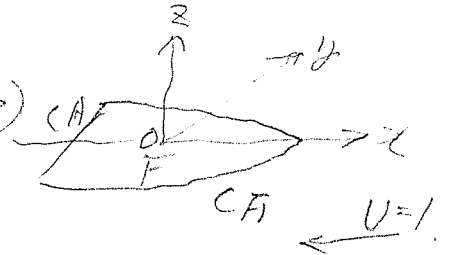
これは高速で速度水頭が船の吃水より充分大ならば
良い近似であると考えられる。

2次元では後流^{平均}水面は無限後方まで降下するが、3次元
では恢復するので少し様子は異なるが、定性的には
よく似ていて、船首前縁吹出しは水をせきとめる効果
を表わしていて直接吃深とは関係ないと考えられる。

また3次元ではライズ・オブ・フパーを表現するのに
前縁吹出しは欠かせない。

1. 速度ポテンシャル等

一様な流速, 密度を単位として

圧力分布 $p(x, y)$, 速度ポテンシャル $\phi(x, y, z)$ 水面垂位を $\zeta(x, y)$ とすると

$$\phi(x, y, 0) = \zeta_x(x, y) \quad (1.1)$$

$$\phi_x(x, y, 0) + K\zeta(x, y) = -p(x, y), \quad (1.2) \quad K = 2/\nu^2 = 2$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + K\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(x, y, 0) = -p(x, y), \quad (1.3)$$

水線面をF, それを囲む境界線の上流側をCF,

下流側をCAとし, 速度ポテンシャルはF上の圧力分布

 p とCF上の吐出量 $A(y)$ によって表わされるとしよう。

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & \iint_F p(\xi, \eta) S(x-\xi, y-\eta, z) d\xi d\eta \\ & + K \int_{CF} A(\eta) T(x-\xi_F, y-\eta, z) d\eta, \quad (1.4) \end{aligned}$$

ξ_F は $A(\eta)$ の x 成分

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) = & \iint_F p(\xi, \eta) S_2(x-\xi, y-\eta, 0) d\xi d\eta \\ & + \int_{CF} A(\eta) S(x-\xi_F, y-\eta, 0) d\eta, \quad (1.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_x(x, y, 0) = \zeta_x(x, y) = & \iint_F p(\xi, \eta) S_{2x}(x-\xi, y-\eta, 0) d\xi d\eta \\ & + K \int_{CF} A(\eta) S_{2x}(x-\xi_F, y-\eta, 0) d\eta, \quad (1.6) \end{aligned}$$

模態数は所録参照。

充分後流では

$$\phi(x, y, z) \doteq \frac{k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx \sec^2 \theta (z + i\sqrt{z})} H^*(kx \sec^2 \theta, \theta) |\sec^3 \theta| d\theta, \quad (1.7)$$

$$\zeta(x, y) \doteq \frac{k}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx \sec^2 \theta} H^*(kx \sec^2 \theta, \theta) |\sec^3 \theta| \sec \theta d\theta, \quad (1.8)$$

$$\tilde{\omega}(\theta) = x \cos \theta + y \sin \theta,$$

$$H(k, \theta) = \iint_F p(x, y) e^{-ik \tilde{\omega}(\theta)} dx dy, \quad (1.9)$$

$$H^*(k, \theta) = H(k, \theta) + i \oint_{CF} A(y) e^{-ik(x_F \cos \theta + y \sin \theta)} dy, \quad (1.10)$$

さて 船体表面の境界条件は、船底のオフセットを $\zeta(x, y)$ トリムを τ 、上昇量を h とすると

$$\zeta(x, y) = f(x, y) + \tau x + h, \quad (1.11)$$

で フックの条件 $\nabla^2 \zeta = 0$ となる。

$$p(x, y) = 0 \quad \text{on } CA \quad (1.12)$$

の下に (1.5) を解けばよい。

数理論的には

$$S_x(x, y) = f_x(x, y) + \tau, \quad (1.13)$$

を (1.6) に入れて (1.12) の条件の下に解けばよいが、
フックの条件を満たすには やはり $A(y)$ が必要のようである。

$A(y)$ を 0 とし フックの流出条件を満たして (1.6) を
解く事は出来ると思われるが その時 この解から $S(x, y)$
を計算すると

$$S(x, y) = f(x, y) + \tau x + H(y), \quad (1.14)$$

なる y の関数 分 から出て来る。

(ライズ・オブ・フロアー)

つまり $A(y)$ を導入するが、ライズ・オブ・フロアー分を
出た所 勝負にまかせるか、どちらかにしなければならぬ。

整理論では 上反角の影響は 線型的には問題にならなかつたが、滑走板では 滑走面が変化するのが
無視する 訳には ゆがない。

高速では 姿勢の変化は 著しく、トリム、上昇量
速度の関数である事を考えて、(1.11) の境界条件を
分解し、又 後の便のため 次の 解を考えよう。

表 1

$p(x, y)$	$\zeta(x, y)$ on F	$A(y)$ on CF	
$p_f(x, y)$	$f(x, y)$	$A_f(y)$	0
$p_\tau(x, y)$	x	$A_\tau(y)$	0
$p_c(x, y)$	$\frac{1}{2}(x^2 - 1)$	$A_c(y)$	0
$p_A(x, y)$	1	$A_A(y)$	0
$p_\delta(x, y; \eta)$	$\delta(y - \eta)$	$A_\delta(y; \eta)$	✓

$$\text{例 1} \quad \int \delta(y) dy = 1$$

そうすると 例 1 は (1.11) に 対応する 2 階以上 2 次の 式に 表わされる。

$$p(x, y) = p_f(x, y) + \tau p_\tau(x, y) + \frac{1}{2} p_c(x, y) \quad (1.15)$$

2. 逆流れ

一様流れを逆にした流れを考えて 諸量に $(\sim)$ を付けたらう。

$$\tilde{\phi}_2(x, y, 0) = -\tilde{\zeta}_x(x, y), \quad (2.1)$$

$$-\tilde{\phi}_x(x, y, 0) + K \tilde{\zeta}_1(x, y) = -\tilde{p}(x, y), \quad (2.2)$$

$$\tilde{\phi}_{1x}(x, y, 0) + K \tilde{\phi}_2(x, y, 0) = \tilde{p}_x(x, y), \quad (2.3)$$

核函数に依りては 流の方向が逆になっているから

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\zeta}_1(x, y, z) \\ \tilde{\zeta}_2(x, y, z) \\ \tilde{\zeta}_3(x, y, z) \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} \zeta(-x, y, z) \\ \zeta_2(-x, y, z) \\ \zeta_3(-x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

となるから

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x, y, z) = & \iint_{\bar{H}} \tilde{p}(\xi, \eta) \tilde{\zeta}_1(x-\xi, y-\eta, z) d\xi d\eta \\ & + K \int_{CA} \tilde{A}(\eta) \tilde{\zeta}_2(x-\xi, y-\eta, z) d\eta, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_1(x, y) = & \iint_{\bar{H}} \tilde{p}(\xi, \eta) \tilde{\zeta}_3(x-\xi, y-\eta, 0) d\xi d\eta \\ & + \int_{CA} \tilde{A}(\eta) \tilde{\zeta}_2(x-\xi, y-\eta, 0) d\eta, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_2(x, y, 0) = -\tilde{\zeta}_x(x, y) = & \iint_{\bar{H}} \tilde{p}(\xi, \eta) \tilde{\zeta}_2(x-\xi, y-\eta, 0) d\xi d\eta \\ & - K \int_{CA} \tilde{A}(\eta) \tilde{\zeta}_2(x-\xi, y-\eta, 0) d\eta, \end{aligned} \quad (2.7)$$

境界条件を考える時は

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(x, y) &= \psi(x, y) \text{ on } F \\ \tilde{\phi}(x, y, 0) &= -\phi(x, y, 0), \text{ or } \tilde{\psi}_x(x, y) = -\psi_x(x, y), \end{aligned} \quad (2.8)$$

の形で対応するものとする。

クッタの条件は今は C.F. 上で

$$\tilde{p}(x, y) = 0 \quad \text{on C.F.} \quad (2.9)$$

と考える。

もし水線面 F が前後左右対称ならば、明らかに次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \psi_x(x, y) &= -\psi_x(-x, y) \quad \text{左対称} \\ \tilde{p}(x, y) &= \tilde{p}(-x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_x(x, y) &= \psi_x(-x, y) \quad \text{右対称} \\ \tilde{p}(x, y) &= -\tilde{p}(-x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

こゝでも表 1 に対応するような種類の流れが考えられる。

3. 可換定理

花岡の本定理を考える。

(1.6) に $\tilde{p}$ をかけて F 上で積分すると (2.4) より

$$\begin{aligned} \int_F \tilde{p}(x, y) \zeta_x(x, y) dx dy &= \iint_F \tilde{p}(x, y) dx dy \iint_F p(z, \eta) \zeta_z(x-z, y-\eta, 0) dz d\eta \\ &= K \int_{CA} A(\eta) d\eta \iint_F \tilde{p}(x, y) \zeta_z(z-x, y-\eta, 0) dx dy. \end{aligned}$$

たゞ (2.6) より この右辺は $\tilde{\zeta}$ により

$$K \int_{CA} A(\eta) d\eta \left[\tilde{\zeta}(\tilde{z}, \eta) - \int_{CA} \tilde{A}(\eta) \zeta(z-x, y-\eta, 0) d\eta \right]$$

一方 同様に (2.7) に p をかけて積分すると

$$-\iint_F p(x, y) \zeta_x(x, y) dx dy = -\iint_F p(x, y) dx dy \iint_F p(z, \eta) \zeta_z(x-z, y-\eta, 0) dz d\eta$$

$$= K \int_{CA} \tilde{A}(\eta) d\eta \left[\zeta(\tilde{z}, \eta) - \int_{CA} A(\eta) \zeta(z-x, y-\eta, 0) d\eta \right],$$

辺々 相引くと

$$\begin{aligned} \iint_F \tilde{p}(x, y) \zeta_x(x, y) dx dy &+ \iint_F p(x, y) \zeta_x(x, y) dx dy \\ &= -K \int_{CA} A(\eta) \tilde{\zeta}(\tilde{z}, \eta) d\eta + K \int_{CA} \tilde{A}(\eta) \zeta(\tilde{z}, \eta) d\eta, \end{aligned} \quad (3.1)$$

なる定理を得る。

まず $\tilde{P}_D$ を代入すると $\tilde{\zeta}_D = \delta(\eta)$, であるから

$$\iint_H \tilde{P}_D(x, y) \zeta_x(x, y) dx dy = -K A(\eta) + K \int_{CA} \tilde{A}_D(\eta, \eta) \zeta(x, y) dy, \quad (3.2)$$

この式から $\tilde{P}_D$ がわかっている $\zeta(x, y)$ が与えられると $P(x, y)$ を解くことと同じに $A(\eta)$ が求められる。

次に $\tilde{P}_T$ を代入すると, $\tilde{\zeta} = x$, $\tilde{\zeta}_x = -\zeta_x = -1$ である

$$\begin{aligned} \iint_H \tilde{P}_T(x, y) \zeta_x(x, y) dx dy &= \iint_H P(x, y) dx dy \\ &= -K \int_{CA} A(\eta) \tilde{\zeta}_D(\eta) d\eta + K \int_{CA} \tilde{A}_T(\eta) \zeta(\eta, \eta) d\eta, \quad (3.3) \end{aligned}$$

(これは CF の x 座標)

$A(\eta)$ は (3.2) より求まるから, $\tilde{P}_T$ がわかっている場合はやはり ζ_x, ζ が与えられると揚力 L が求められる。即ち

$$L = \iint_H P(x, y) dx dy, \quad (3.4)$$

同様に $\tilde{P}_C$ を代入すると $\tilde{\zeta}_C = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$, $\tilde{\zeta}_{Cx} = -\zeta_x = -x$

$$\iint_H \tilde{P}_C(x, y) \zeta_x(x, y) dx dy = M = \frac{K}{2} \int_{CA} A(\eta) (\tilde{\zeta}_C^2 - 1) d\eta + K \int_{CA} \tilde{A}_C(\eta) \zeta(\eta, \eta) d\eta, \quad (3.5)$$

$$M = \iint_H P(x, y) x dx dy, \quad (3.6)$$

のよりにモーメントも求められる。

つまり Munk の定理が拡張されたことになる。

さて 滑空板では トリムで昇降板は予め定めらる
けれども 上記諸式を用いると、^{船底の} オフセット が与えられると
 $\bar{p}_f, \bar{p}_t, \bar{p}_a$ がわかれば
解を求めなくても 姿勢は求められる事になる。

なお (3.2) は $\bar{p}_A$ を解くと。

$$\iint_F \bar{p}_A(x, y) S_x(x, y) dx dy = \int_{CF} \bar{A}(y) dy + K \int_{CA} \bar{A}_A(y) S_{\bar{p}_A}(y) dy, \quad (3.7)$$

實際上、姿勢を求めるには次の方法が簡単であろう。

即ち (1.15) を積分して

$$\begin{aligned} L &= L_f + T L_t + h L_A, \\ M &= M_f + T M_t + h M_A, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\left. \begin{matrix} L_f \\ L_t \\ L_A \end{matrix} \right\} = \iint_F \begin{pmatrix} p_f \\ p_t \\ p_a \end{pmatrix} dx, \quad (3.9)$$

$$\left. \begin{matrix} M_f \\ M_t \\ M_A \end{matrix} \right\} = \iint_F \begin{pmatrix} p_f \\ p_t \\ p_a \end{pmatrix} x dx, \quad (3.10)$$

(3.8) をといて h を求める方法である。

この方法では p_f, p_t, p_a ^{p_c} を求めておけばよい。

前の方法では p_c, p_t, p_a だよ。 (C.F. が $x=1$ の直線ならば p_A でいい)

この内 $\bar{p}(x, y)$ を 各 y について決めておくのは大変だが、この場合 (3.8) を使う方が簡単だから、 $\overline{CA}$ が $x=1$ の直線、つまり 右の 水線面 では $\bar{p}_A$ を決めておいてよい。

即ち

$$\begin{aligned} & \iint_F \bar{p}_T(x, y) \zeta_{fx}(x, y) dx dy - K \int_{\overline{CA}} \bar{A}_T(y) \zeta_f(x, y) dy, \\ & = L - K \int_{\overline{CA}} A(y) dy, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$M = \iint_F \bar{p}_C(x, y) \zeta_{fx}(x, y) dx dy - K \int_{\overline{CA}} \bar{A}_C(y) \zeta_f(x, y) dy,$$

(3.11)

(3.7) と (3.10) から $A(y)$ を消去すると

$$\begin{aligned} L = & \iint_F \left\{ \bar{p}_T(x, y) - \bar{p}_A(x, y) \right\} \zeta_{fx}(x, y) dx dy \\ & + K \int_{\overline{CA}} \left\{ \bar{A}_C(y) - \bar{A}_T(y) \right\} \zeta_f(x, y) dx dy, \end{aligned} \quad (3.12)$$

22 12

$$\tilde{\zeta}_d = e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)}, \quad \tilde{\zeta}_x = -ik \cos \theta e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)}, \quad \text{on } F, \quad (3.13)$$

の解を $\tilde{p}_d(x, y; k, \theta)$ としよう。

これを (3.1) に $\tilde{\zeta}$ を代入すると (1.9) の定義より

$$\begin{aligned} ik \cos \theta H(k, \theta) + K \int_{CF} A(y) e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} dy \\ = \iint_{\bar{H}} \tilde{p}_d \tilde{\zeta}_x dx dy + K \int_{CA} \tilde{A}_d(y) \tilde{\zeta}(x, y) dy, \end{aligned}$$

すなわち $H = K \cos \theta$ とおくと (1.10) より

$$\begin{aligned} iK H^*(K \cos \theta, \theta) = \iint_{\bar{H}} \tilde{p}_d(x, y; K \cos \theta, \theta) \tilde{\zeta}_x(x, y) dx dy \\ - K \int_{CA} \tilde{A}_d(y) \tilde{\zeta}(x, y) dx dy, \quad (3.14) \end{aligned}$$

となつて $\tilde{p}_d$ がわかると (1.12) の右辺の積分も p の解を求めて計算出来る。

また (3.2) より

$$K A_d(y; K \cos \theta, \theta) = iK H_\theta^*(K \cos \theta, \theta; y) \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} iK H_\theta^*(K \cos \theta, \theta; y) = -iK \cos \theta \iint_{\bar{H}} \tilde{p}_d(z, y; K \cos \theta, \theta) e^{-ik(\theta \cos \theta + y \sin \theta) z} dz \\ - K \int_{CA} \tilde{A}_d(z; y) e^{-ik(\theta \cos \theta + y \sin \theta) z} dz, \quad (3.16) \end{aligned}$$

最後に もう一つ 次の解を導入しよう。

$$\begin{aligned} \tilde{P}_S(x, y; \eta) &= \frac{\delta(y-\eta)}{\sqrt{1-(\eta/\ell)^2}} + \tilde{P}_S(x, y; \eta) \\ \zeta_S(x, y; \eta) &= 0 \quad \text{on } F \end{aligned} \quad (3.17)$$

これらの解 はすべて クツタの条件を満足していて、(3.1)が
成'立つたが、今度はそれを満足して^後いないので S_z の特異性^後に
よって新しい項が出て来る。

附録 C により 最終的に

$$\iint_F \tilde{P}_S(x, y; \eta) \zeta_x(x, y) dx dy = \frac{\pi}{2} \sigma(\eta) + K \int_{CA} \tilde{A}_S(y) \zeta(y) dy, \quad (3.18)$$

4. 抵抗

圧力抵抗は 2次式 で与えられる。

$$D = \iint_F p(x, y) \zeta_x(x, y) dx dy, \quad (4.1)$$

(1.6) を代入すると. (A.51) の右辺を $\frac{1}{2\pi}$ にする

$$D = D_s + D_w + D_A, \quad (4.2)$$

$$D_s = \frac{1}{2\pi} \iint_F p(x, y) dx dy \iint_F \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{(y-\eta)^2 \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}, \quad (4.3)$$

$$D_w = \iint_F p(x, y) dx dy \iint_F p(\xi, \eta) \zeta_3'(x-\xi, y-\eta, 0) d\xi d\eta, \quad (4.4)$$

$$D_A = -K \iint_F p(x, y) dx dy \int_{CF} A(\eta) \zeta_2(x-\xi, y-\eta, 0) d\eta, \quad (4.5)$$

となる。

まず D_s について 附録 C にある

$$D_s = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \sigma(y) dy, \quad p(x, y) = \frac{\sigma(y)}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad (4.6)$$

が成り立つ。

$$D_s^M = \pi \int p_0^2(y) dy, \quad p_0(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 p(x, y) dx, \quad (4.7)$$

より

$$p(x, y) = \alpha \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{のときは} \quad \alpha(y) = \frac{\sigma(y)}{2} \quad (4.8)$$

$$p_0(y) = \alpha(y) = \frac{\sigma(y)}{2}$$

となるから, (4.6) は (4.7) に一致する。

しかし 左側と 右側を分けて 1/2 ずつ 用いるので 以下 (4.6) を使う。

次に D_W について (A.5) より $Q_5^{(1)} = Q_5 + P_5$ であるから
 Q_5 は $\frac{1}{2}$ 階散を有するから
 $D_W = \frac{K^2}{\pi} \iint P_5(x, y) \iint p(\xi, \eta) P_5(Kx-\xi, Ky-\eta, 0) d\xi d\eta$

$$= \frac{K^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(K e^{i\theta}, u) \overline{H}(K e^{i\theta}, u) e^{i5\theta} du$$

$$= \frac{K^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} H \overline{H} e^{i5\theta} d\theta, \quad (4.9)$$

これは (4.9) の対称性から得られる。

次に D_A について (A.7) より

$$D_A = \frac{1}{K} \iint_F p(\xi, \eta) d\xi d\eta \int_{CF} A(y) S_2(\xi-x, \eta-y, 0) dy$$

$$= -K \iint p(\xi, \eta) \left[S_2(x-\xi, y-\eta, 0) - \frac{2K}{\pi} P_{-4}(Kx-\xi, Ky-\eta, 0) \right] \int A(y) dy$$

となるので (1.5) より 右辺第1項は

$$D_A = K \int_{CF} A(y) dy \left[-S(x, y) + \int_{CF} A(\eta) S(x-\xi, y-\eta, 0) d\eta \right]$$

$$+ \frac{2K^2}{\pi} \iint p(\xi, \eta) P_{-4}(Kx-\xi, Ky-\eta, 0) d\xi d\eta \int A(y) dy$$

$$= D_{A1} + D_{A2} + D_{A3} \quad (4.10)$$

$$D_{A1} = -K \int_{CF} A(y) S(x, y) dy, \quad (4.12)$$

$$D_{A2} = K \iint_{CF} A(y) A(y) S(x-\frac{z}{2}, y-\frac{z}{2}, 0) dy d\eta, \quad (4.13)$$

$$D_{A3} = \frac{iK^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(K \sec^2 u, u) \frac{\sec^3 u}{\cos u} du \int_{CF} A(y) e^{iK(x \cos u + y \sin u) \sec^2 u} dy, \quad (4.14)$$

ここで後継位は (4.10) で与えられるから透波抵抗は

$$D_W^* = \frac{K^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H^*(K \sec^2 u, u)|^2 \sec^3 u du \quad (4.15)$$

で与えられる。ここで \$H^*\$ を (4.14) と

$$D_W^* = D_W + \frac{iK^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(K \sec^2 u, u) \left[\int_{CF} A(y) e^{iK(x \cos u + y \sin u) \sec^2 u} dy \int \frac{\sec^3 u}{\cos u} du \right. \\ \left. + \frac{K^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sec^3 u du \cdot \left| \int_{CF} A(y) e^{iK(x \cos u + y \sin u) \sec^2 u} dy \right|^2 \right], \quad (4.16)$$

$$= D_W + D_{A3} + D_{WA}, \quad (4.16)$$

$$D_{WA} = \frac{K^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{CF} A(y) e^{iK(x \cos u + y \sin u) \sec^2 u} dy \right|^2 \sec^3 u du$$

$$= -\frac{K^2}{\pi} \iint_{CF} A(y) A(y) P_3(Kx-\frac{z}{2}, Ky-\frac{z}{2}, 0) dy d\eta, \quad (4.17)$$

したがって

$$D_W + D_A = D_W + D_{A1} + D_{A2} + D_{A3} = D_W^* + D_{A1} + (D_{A2} - D_{WA}), \quad (4.18)$$

特に CF が $x=1$ の直線ならば $S = \frac{-K}{\pi} (Q_3 + P_3)_{x=0} = \frac{-K}{\pi} P_3$,

よって

$$\Delta_{A2} = D_{WA}, \quad (4.19)$$

$$D_W + D_A = D_W^* + D_{A1}, \quad (4.20)$$

となるが この点 2 次元の場合と異なる。

恐らく 2 次元では無限後方迄水面降下が続くのにに対し
3 次元では無限後流では平均水面に戻っている
と言う差に関係するものであろう。

最後に 3 節の諸定理により水線面に F が与えられた

時、 $\tilde{P}_0, \tilde{P}_T, \tilde{P}_c, \tilde{P}_d$ を計算しておけば、任意の $S(x, y)$ に

対して σ, F^*, A 等が求められるので、上式により
場力、モーメントの値は算出
求められる事になる。

附録 A 核関数

水面の単位吹出しによるポテンシャルを $T(x, y, z)$ とし、

としよう。

$$T(x, y, z) = - \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{kz + i k(x \cos u + y \sin u)}}{-k \cos u - K + i \mu \cos u} dk du, \quad (A.1)$$

$$= \frac{1}{\pi} O_{-2}^{(1)}(Kx, Ky, -Kz), \quad (A.1')$$

より

$$\begin{cases} S(x, y, z) = - \frac{\partial}{\partial x} T(x, y, z) \\ S_z(x, y, z) = - \frac{\partial}{\partial z} T(x, y, z) \end{cases} \quad (A.2)$$

と定義されるので $O_{-2}^{(1)}$ 関数を用いて、

$$S(x, y, z) = - \frac{K}{\pi} [O_{-3}^{(1)}(Kx, Ky, -Kz) + \beta_{-3}(Kx, Ky, Kz)], \quad (A.3)$$

$$S_z = + \frac{K}{\pi} [O_{-4}^{(1)}(\quad) + \beta_{-4}(\quad)], \quad (A.4)$$

$$S_z = + \frac{K^2}{\pi} [O_{-5}^{(1)} + \beta_{-5}] = \frac{K}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} \beta_{-3}, \quad (A.5)$$

したがって、

$$\begin{aligned} & \left[\frac{K}{\pi} \beta_{-3}(Kx, Ky, -Kz) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial x}{r \rho^2}, \quad \rho^2 = y^2 + z^2, \quad r^2 = x^2 + \rho^2, \right. \\ & + \frac{K}{\pi} \beta_{-4}(\quad) = \frac{y^2 z}{2\pi r \rho^4}, \quad (A.6) \\ & - \frac{K}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} \beta_{-3} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x}{r \rho^2} - \frac{z^2 x}{r^3 \rho^2} - \frac{2xy}{r \rho^4} \right], \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{x}{2\pi r y^2}, \\ & \left. + \frac{K^2}{\pi} \beta_{-5} = 0 \right] \end{aligned}$$

4.3.8. 3. A 224 13.6 13.7

$$S_z(x, y, z) = + \frac{K^2}{\pi} Q_{-5}^{(1)}(Kx, Ky, 0) + \frac{K}{2\pi r y^2} \quad (A.5')$$

$$= S_z' + \frac{x}{2\pi r y^2}$$

$$S_z = \frac{r}{2\pi y^2} + S_z'$$

0. 関数の性質より,

$$S(-x, y, z) = -S(x, y, z) + \frac{2KP_3}{\pi}(Kx, Ky, Kz)$$

$$S_z(-x, y, z) = S_z(x, y, z) - \frac{2KP_4}{\pi}$$

$$S_z(-x, y, z) = -S_z(x, y, z) + \frac{2KP_5}{\pi}$$

$$P_3(Kx, Ky, 0) = -\frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iK(x \cos u + y \sin u)} \sec^3 u \, du$$

$$P_4 = \frac{1}{4i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iK(x \cos u + y \sin u)} \frac{\sec^3 u}{\sin u} \, du$$

$$P_5 = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iK(x \cos u + y \sin u)} \sec^5 u \, du$$

$$P_3(0, y, 0) = -\frac{1}{4} K_0\left(\frac{Ky}{2}\right) \quad (A-9)$$

P_{-n}

replaced
modified

附錄 B

$$\text{例 5} \quad \int \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{zx}{\rho^2 r} \right) dx \xrightarrow{z=0} \int \frac{x dx}{y^2 r}, \quad \int \frac{r}{y^2} dy dx,$$

$$-\frac{zx}{\rho^2 r} = -\frac{z}{\rho^2} \int \frac{dx}{r} = -\frac{z}{\rho^2} \left[\log(r+x) \right]_0^x = -\frac{z}{\rho^2} \left(\frac{\log r}{r+x} - \frac{z}{\rho^2} \right) = -\frac{z(r-x)}{r\rho^2} - \frac{z}{\rho^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{zx}{\rho^2 r} \right) = \frac{y^2 z^2}{\rho^4} \frac{x}{r} - \frac{xz^2}{\rho^2 r^3} = \frac{x}{\rho^2 r} \left(\frac{y^2 z^2}{\rho^2} - \frac{z^2}{r^2} \right) \rightarrow \frac{x}{\rho^2 r}$$

$$= -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \int \frac{dx}{r} = + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \int \frac{dx}{r} = + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int \frac{dx}{r}$$

$$= -\frac{x}{r^3} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{z^2 y^2}{\rho^2} - \frac{y^2}{r^2} \right) \rightarrow -\frac{x}{r^3} \quad (B.1)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial y^2} \int \frac{dx}{r} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{xy}{\rho^2 r} = \frac{(z^2 y^2)x}{\rho^4 r} - \frac{xy^2}{\rho^2 r^3} = \frac{x}{r\rho^2} \left(\frac{z^2 y^2}{\rho^2} - \frac{y^2}{r^2} \right) \quad (B.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \frac{dx}{r} = -\frac{xy}{\rho^2 r} \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r}$$

$$f = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{xz}{\rho^2 r} \right) = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \int \frac{dx}{r} = -\frac{x}{r^3} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int \frac{dx}{r} \quad (B.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f dy = + \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{dy}{r} + \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{x dy}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{y}{r} - \frac{xy}{\rho^2 r} \right]_y$$

$$= \frac{-2x}{x^2 z^2} \frac{y}{r} \Big|_{y=\infty} - \frac{2xy}{\rho^2 r} \Big|_{y=\infty} = -\frac{2x}{x^2 z^2} = -\frac{2}{x} \quad (B.4)$$

$$\int \frac{r}{y^2} dy = \log(r+y) - \frac{r}{y}, \quad (B.5)$$

$$\int dx \int \frac{r}{y^2} dy = x \log(r+y) - x - \frac{xy}{z^2} - \frac{3y}{2} \log(r+x), \quad (B.6)$$

No. 13-2

Date

$$I = \int \frac{zx}{r^3} dy = x \int \frac{d\theta}{\sqrt{x^2 + z^2} \sec^3 \theta} = x \int \frac{\cos^3 \theta d\theta}{\sqrt{x^2 + z^2 - x^2 \tan^2 \theta}}, \quad z > 0$$

$$y = z \tan \theta, \quad r = z \sec \theta,$$

$$d = \frac{\sqrt{x^2 + z^2}}{z}, \quad \sec \theta = d, \quad \cos \theta d\theta = \frac{1}{d} dt$$

$$t = \sin \theta$$

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \varphi = \sin^{-1} \left[\frac{t}{d} \right] = \sin^{-1} \left[\frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right] \quad (B.7)$$

$$I = \lim_{y \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow -\infty} \sin^{-1} \left[\frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right] \xrightarrow{z \rightarrow 0} \begin{cases} \pi & \text{for } x > 0 \\ -\pi & \text{for } x < 0 \end{cases} \quad (B.8)$$

$$\text{for } z > 0$$

2.2.2 逆符号

附録 C 特殊積分

$$I = \frac{1}{2\pi} \iint_{\bar{F}} P(x, y) dx dy \int_{\bar{F}} \frac{P(\xi, \eta) (x-\xi) d\xi d\eta}{(\eta-y)^2 \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \quad (C-1)$$

附録 B より

$$I = \frac{-2}{2\pi} \iint_{\bar{F}} P(x, y) dx dy \int \frac{p(\xi, \eta) d\xi}{x-\xi} \quad (C-2)$$

今 (C-2) の右に $\bar{F}$ は 単位円 $|z| \leq 1$ とし

$$\left. \begin{aligned} P(\xi, \eta) &= \frac{1}{\pi i \theta'} \sum_n a_n \eta^n \cos n\theta' \quad , \quad \xi = -\cos\theta' \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n &= 0, \quad (\eta=1 \text{ の条件}) \end{aligned} \right\} \quad (C-3)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{P}(x, y) &= \frac{1}{\pi i \theta} \sum_n \tilde{a}_n \cos n\theta \quad , \quad x = -\cos\theta \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tilde{a}_n \eta^n &= 0 \quad , \end{aligned} \right\} \quad (C-4)$$

$$\tilde{P}_s(x, y, \eta) = \frac{\delta(\eta-1)}{\pi i \theta} + \tilde{P}_s \quad (C-5)$$

$$\frac{1}{\pi} \int \frac{P(\xi, \eta) d\xi}{x-\xi} = \frac{1}{\pi} \sum_n a_n \int_0^\pi \frac{\cos n\theta' d\theta'}{\cos\theta - \cos\theta'} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\sin n\theta}{\pi i \theta}$$

$$+ I = \int_{\bar{F}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_m a_n \int_0^\pi \frac{\cos m\theta \sin n\theta d\theta}{\pi i \theta}$$

$$= \pi i \left[\tilde{A}_0 B - \tilde{a}_2 a_1 - \tilde{a}_4 (a_1 + a_3) - \tilde{a}_6 (a_1 + a_3 + a_5) - \dots \right. \\ \left. + \tilde{B} A - a_1 a_0 - a_3 a_0 - a_5 a_2 - \dots \right] \quad (C-6)$$

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n \quad , \quad B = \sum_0^{\infty} a_{2n+1} \quad , \quad \tilde{A} = \sum_0^{\infty} \tilde{a}_{2n} \quad , \quad \tilde{B} = \sum_0^{\infty} \tilde{a}_{2n+1}$$

$$\frac{\sin(2n+1)\theta}{\pi i \theta} = 2 (\cos\theta \sin\theta + \cos 3\theta + \dots + \cos 2n\theta) + 1 \quad , \quad \frac{\sin 2n\theta}{\pi i \theta} = 2 (\cos\theta \sin\theta + \cos 3\theta + \dots + \cos (2n-1)\theta)$$

- 5 (C-2) の積分順序をかえよ

$$J = \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \int \frac{\tilde{\rho}(x, y) dx}{z - x} \quad (C.7)$$

$$= -\pi \int dy \left[A \tilde{B} - a_0 \tilde{a}_1 - a_1 (\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2) - \dots \right. \\ \left. + \tilde{A} B - a_1 \tilde{a}_0 - a_2 \tilde{a}_0 - a_3 \tilde{a}_2 - \dots \right]$$

大正法の場合

$$\begin{aligned} & A \tilde{B} - \tilde{a}_1 (A - a_0) - \tilde{a}_2 (A - a_0 - a_2) - \dots \\ & + \tilde{A} B - \tilde{a}_0 B - \tilde{a}_2 (B - a_1) - \tilde{a}_4 (B - a_1 - a_3) - \dots \\ & = \tilde{a}_1 a_0 + \tilde{a}_2 (a_0 + a_2) + \tilde{a}_4 (a_0 + a_2 + a_4) - \dots \\ & + \tilde{a}_3 a_1 + \tilde{a}_5 (a_1 + a_3) - \dots \end{aligned}$$

よって (C.6) とおきかえて

$$I - J = -\pi \int dy [A \tilde{B} + \tilde{B} A] \quad (C.8)$$

$A - B = 0$ とおくと $A \tilde{B} + \tilde{B} A = 0$ となるから

$$I - J = + \frac{\pi}{2} \int (A - B) \sigma(y) dy \quad (C.9)$$

さらに $\tilde{\rho}_E$ を代入すると

$$I - J = \frac{\pi}{2} \sigma(z) \quad (C.10)$$

$$I^* = -\frac{1}{\pi} \iint p(x, y) p_x dy \int \frac{p(x, y)}{x-z} dz, \quad (C.11)$$

これについては (9) 式を利用して

$$I^* = -\pi \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \sum_{k=1}^n a_{2k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \sum_{k=0}^n a_{2k} \right], \quad (C.12)$$

これに右側の列の中を書き上げると

$$\begin{array}{ll} a_1(a_0) & + a_3(a_1) \\ + a_5(a_0 + a_2) & + a_7(a_1 + a_3) \\ + a_9(a_0 + a_2 + a_4) & + a_{11}(a_1 + a_3 + a_5) \\ + a_{13}(a_0 + a_2 + a_4 + a_6) & + a_{15}(a_1 + a_3 + a_5 + a_7) \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

となるが右側の列を左側の列の列の列の列に繰り越すと

明らかに

$$I^* = -\pi \int A B dy, \quad (C.13)$$

からこれ, $A+B=0$, $A-B=0$ とはいふと 2式をうる。

$$I^* = \frac{\pi}{4} \int \sigma^2(y) dy, \quad (C.14)$$