

速度ポテンシャルの数値積分について

$$\phi(x, y, z) = \iint \mu(\xi, \zeta) \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R} d\xi d\zeta, \quad (1)$$

$$R^2 = (x-\xi)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2.$$

も使って流線追跡により物体形状を求めるような場合、この数値積分は特異積分に近くて積分精度が大変悪く考えられる。

この原因は $\frac{1}{R}$ の特異性によるものである。この積分を正しく行う必要があるが被積分関数 $(\mu \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R})$ として シンプソン則、ガウス法を使うとすると、 $\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R}$ を含むこの被積分関数を積分区間で多項式近似をしている事になるが、 $\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R}$ なる関数は多項式近似に直してをらず精度が悪くなると考えられる。

境界要素法の経験では、 $\mu(\xi, \zeta)$ については階段関数近似で充分であり、被積分関数は解析的に積分する方がよい結果を得た。

この時 (1) は 2 のように $\pi/2$ となる。

$$\phi(x, y, z) = \sum_n \sum_m \mu(\bar{z}_{n,m}) \iint_{\Delta_{n,m}} \frac{2}{2\bar{z}} \frac{1}{R} d\bar{z} d\bar{y}, \quad (2)$$

$\Delta_{n,m}$ は 微小区画 として, $\bar{z}_{n,m}$ は この区画内での座標とする。

同様に

$$\phi(x, y, 0) = \int_{-1}^1 \mu(\bar{z}) \frac{2}{2\bar{z}} \frac{1}{R} d\bar{z}, \quad (3)$$

$$R^2 = (x - \bar{z})^2 + y^2$$

$$\phi(x, y, 0) = \sum_{n=0} \mu(\bar{z}_n) \left[\frac{1}{\sqrt{(x - \bar{z}_{n+1})^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - \bar{z}_n)^2 + y^2}} \right], \quad (4)$$

この場合区画は $\bar{z} = \sqrt{r} \cos \theta$ として θ を等角间隔に分解した方がよいのである。

$$\bar{z}_n = -\cos\left(\frac{n}{N}\pi\right), \quad \bar{z}_{n+1} = -\cos\left(\frac{n+1}{N}\pi\right),$$

上式に代入して整理すると

$$\begin{aligned} \phi(x, y, 0) = & -\mu\left\{-\cos\left(\frac{n}{N}\pi\right)\right\} / \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \\ & + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\left[-\mu\left\{-\cos\left(\frac{n+1}{N}\pi\right)\right\} + \mu\left\{-\cos\left(\frac{n}{N}\pi\right)\right\}\right]}{\sqrt{\left(x + \cos\left(\frac{n}{N}\pi\right)\right)^2 + y^2}} \\ & + \mu\left\{-\cos\left(\frac{N-1}{N}\pi\right)\right\} / \sqrt{(x-1)^2 + y^2}, \quad (5) \end{aligned}$$

結局これは離散的な出力分布で近似している。
なっている。

従って恐らく同様に近似で離散的な2重出力
による近似も成立するだろう。

$$\phi(x, y, 0) = \sum_n \left\{ \mu(\bar{z}_n) \frac{dz}{dz} \right\} \left[\frac{2}{\bar{z}} \frac{1}{R} \right]_{\bar{z}=\bar{z}_n}, \quad (16)$$

これは (3) を θ の等間隔に分けて、階段関数近似
（離散化関数）
して数値積分した事に対応している。

それに対して (5) では μ は区内一定だが $\frac{dz}{dz}$ を一周
解得的に積分しているから (5) の方が少し精度は
良かったらう。