

滑走板の解についてのメモ

Gurevich の Text * 237頁以下の解を少し簡略化し、2種類の
場合について解く。

右図のような wedge のまわりの

流れについて w を複素速度ポテンシャル

V_0 を一様速度とすると

$$V_0 \frac{dz}{dw} = \left(\frac{1+i4}{1-i4} \right)^{2K} = \left(\frac{1-i4}{1+i4} \right)^{2K}, \quad (1)$$

つまり、

$$\frac{dw}{du} = \frac{N u (u^2+1)}{(u^2-g^2)(u^2-c^2)(u^2-h^2)}, \quad (2)$$

$$g = \tan \frac{\alpha}{2}, \quad c = \tan \frac{\sigma}{2}, \quad h = \tan \frac{\beta}{2}, \quad (3) \quad \text{図 1}$$

で与えられるが、今は下図のように B が無限に遠いとする。

$$g = \tan \frac{\alpha}{2} = 0, \quad c = h = \tan \frac{\sigma}{2}, \quad (4)$$

となり

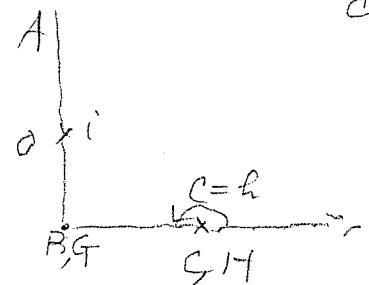
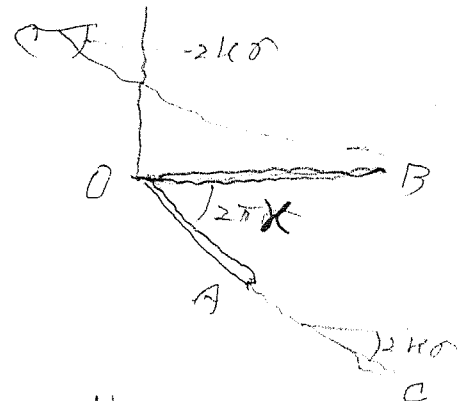
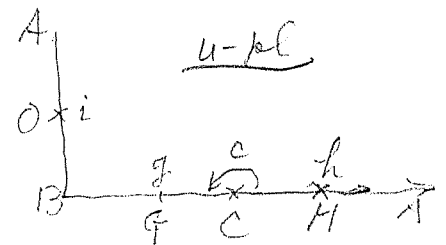
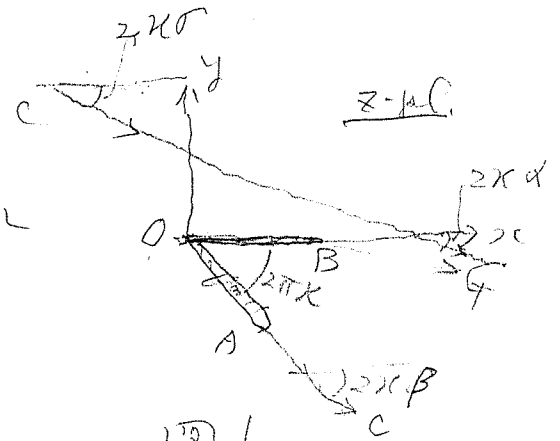
$$\frac{dw}{du} = \frac{N(u^2+1)}{u(u^2-c^2)^2}, \quad (5)$$

のように簡略化される。

ここで N は OB 辺上の流量とすると

$$N = - \frac{2\beta c^4}{\pi}, \quad (6)$$

と与えられる。



強磁 (1) と (5) より, 21%

$$Z = -\frac{2\delta C^4}{\pi V_0} \int \left(\frac{1-iu}{1+iu}\right)^{2\kappa} \frac{(u^2+1)du}{u(u^2-C^2)^2}, \quad (17)$$

12.577 424630

板厚の厚さを δ とする

$$\delta = \delta/V_0, \quad (18)$$

平板の基準として 1 番目の点から後縁迄の長さを OA とする

$$LOA = +\frac{2\delta C^4}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{1-iu}{1+iu}\right)^{2\kappa} \frac{(1+u^2)du}{u(u^2-C^2)^2}$$

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{\xi} \quad u = \frac{1}{\xi}$$

$$\frac{1}{u} = \xi \quad d\frac{1}{u} = -\frac{1}{\xi^2} d\xi$$

$$\frac{d\frac{1}{u}}{u} = -\frac{d\xi}{\xi^3}$$

$$= \frac{2\delta C^4}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}\right)^{2\kappa} \frac{(1+\xi^2)\xi d\xi}{(\xi^2+C^2)^2}, \quad (19) \quad \left[OA \text{ の傾斜は } \frac{1}{1+C^2} e^{-2\pi\kappa C} \right]$$

1) 平板の場合 ($\kappa = \frac{1}{2}$)

厚さを 1 単位とすると

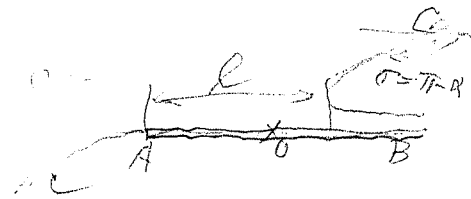
$$r = \pi - \alpha \quad \text{1 番目の点から後縁迄}$$

$$X + iY = PV_0^2 \delta [e^{-i\sigma} - 1 + i e^{-i\sigma}]$$

$$X = PV_0^2 \delta [\cos\sigma - 1 + \tan\frac{\sigma}{2} \sin\sigma] = 0$$

$$Y = PV_0^2 \delta [-\sin\sigma + \tan\frac{\sigma}{2} \cos\sigma] = -PV_0^2 \delta \tan\frac{\sigma}{2} = -PV_0^2 \delta \cot\frac{\alpha}{2}$$

$$C = \tan\frac{\sigma}{2} = \tan\frac{\pi-\alpha}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}$$



(10)

$$\frac{l_{0A}}{\delta} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1+z^2}{1-z^2} \right) \frac{(1-z^2)^2}{(z^2+a^2)^2} z dz, \quad a = \frac{1}{c} = \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{(1+z^2)^2}{(z^2+a^2)^2} \right]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{(1+z^2)}{z^2+a^2} dz = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{4}{1+a^2} + \frac{1}{a^2} + \log(z^2+a^2) \right]_0^1 + \frac{2}{a} \left[\tan^{-1} \frac{1}{a} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[1 - \frac{4a^2}{1+a^2} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{\pi-a}{2} \right) + a^2 \log \left(\frac{1+a^2}{a^2} \right) \right], \quad (11)$$

$$\therefore Y = -\rho V_0^2 l_{0A} \pi \tan \frac{\alpha}{2} \left/ \left[1 - \frac{4 \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} + (\pi - \alpha) \tan \frac{\alpha}{2} + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \log \left(1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) \right] \right., \quad (12)$$

Text では 図 の l を採ることにする (p. 321)

$$\frac{1}{\frac{\rho}{2} V_0^2 l} = \frac{2\pi \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \pi \tan \frac{\alpha}{2} + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \log (\cot^2 \frac{\alpha}{2} - 1)}, \quad (13)$$

となつてゐるから $\alpha \rightarrow 0$ とすると

$$Y \doteq -\frac{\pi}{2} \rho V_0^2 l_{0A} \alpha \doteq -\frac{\pi}{2} \rho V_0^2 l \alpha, \quad (14)$$

となる。

また $\alpha = \frac{\pi}{2}$. つまり 垂直平板の場合は $c = \cot \frac{\alpha}{2} = \tan \frac{\alpha}{2} = 1 = a$. 故

$$l_{0A} = \frac{\delta}{\pi} \left[-1 + \frac{\pi}{2} + \log 2 \right] = .4023 \delta = \frac{\delta}{2.486}, \quad (15)$$

$$Y = -\rho V_0^2 \delta = -\rho V_0^2 l_{0A} \times (2.486), \quad (16)$$

となる。なお (13) では l が無限大と仮定して計算が簡便なので l_{0A} とした。

2) $K = \frac{1}{4}$ の場合 (平板前端に船首羽を直角に付与)

$$\begin{aligned} 2K\alpha &= \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha \\ &\approx \frac{\pi}{2} - \alpha \end{aligned}$$

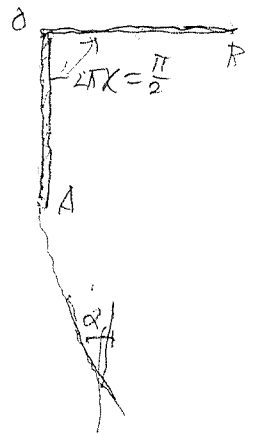
$$2K\alpha = \frac{\pi}{2} \approx \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad C = \tan \frac{\alpha}{2} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cot \alpha$$

まず

$$X + iY = \rho V_0^2 \delta \left[-1 - i e^{i\alpha} + \frac{\cot \alpha}{2} e^{i\alpha} \right]$$

$$X = \rho V_0^2 \delta \left[-1 + \sin \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha} \right] = \frac{\rho V_0^2 \delta \cos \alpha}{2 \sin \alpha} \left[1 + \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \right] \quad (17)$$

$$Y = \rho V_0^2 \delta \left[-\cos \alpha + \frac{\cos \alpha}{2} \right] = -\frac{\rho V_0^2 \delta \cos \alpha}{2}$$



$$l_{0A} = \frac{2\delta}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\zeta^2}{1-\beta^2 \zeta^2}} \frac{3(1-\zeta^2)}{(\zeta^2 + a^2)^2} d\zeta, \quad a = \tan \alpha$$

$$= \frac{\delta}{\pi} \left[-\frac{\sqrt{1-\beta^2} (1+\beta)}{(\beta^2 + a^2)} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{d\zeta}{\zeta^2 + a^2} \left(\sqrt{1-\beta^2} - \frac{3(1+\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

$$= \frac{\delta}{\pi} \left[\frac{1}{a^2} + \int_0^1 \frac{d\zeta}{\zeta^2 + a^2} \left(\frac{1+2a^2-3-2(\beta^2+a^2)}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \right]$$

$$= \frac{\delta}{\pi} \left[\frac{1}{a^2} - 2 \int_0^1 \frac{d\zeta}{\zeta^2 + a^2} - \int_0^1 \frac{3 d\zeta}{\zeta^2 + a^2} \sqrt{1-\beta^2} + (1+2a^2) \int_0^1 \frac{d\zeta}{(\zeta^2 + a^2) \sqrt{1-\beta^2}} \right], \quad (18)$$

$$\int_0^1 \frac{d\zeta}{\zeta^2 + a^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{3 d\zeta}{(\zeta^2 + a^2) \sqrt{1-\beta^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin \theta d\theta}{a^2 + a^2 \sin^2 \theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin \theta d\theta}{\beta^2 - \cos^2 \theta} = \frac{1}{2\beta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin \theta d\theta}{\beta - \cos \theta} \left(\frac{1}{\beta - \cos \theta} + \frac{1}{\beta + \cos \theta} \right)$$

$$= \frac{1}{2\beta} \left[\log \left(\frac{\beta - \cos \theta}{\beta + \cos \theta} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\beta} \log \left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right) = \frac{\cot \alpha}{2} \log \left(\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \right) = \frac{\cot \alpha}{2} \log \left(\cot^2 \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\int_0^1 \frac{dz}{(\beta^2 + a^2)\sqrt{1-z^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\beta^2 - \cos^2\theta} = \frac{1}{\beta^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\beta^2 - \cos^2\theta} = \frac{1}{8\beta} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\beta - \cos\theta} + \frac{1}{\beta + \cos\theta} \right) d\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \quad \zeta = e^{i\theta}, \quad d\theta = \frac{d\zeta}{i\zeta}$$

$$= \frac{1}{8\beta} \oint_{|\zeta|=1} \left(\frac{2}{\zeta^2 + 2\beta\zeta + 1} - \frac{2}{\zeta^2 - 2\beta\zeta + 1} \right) d\zeta$$

$$1 - \beta^2 = a^2$$

$$\zeta^2 + 2\beta\zeta + 1 = (\zeta + \beta)^2 + 1 - \beta^2 = (\zeta + \beta - a)(\zeta + \beta + a)$$

$$\zeta^2 - 2\beta\zeta + 1 = (\zeta - \beta - a)(\zeta - \beta + a)$$

$$|-\beta + a| = \left| \frac{-1 + \lambda a}{\cos\alpha} \right| = \left| \frac{-1}{1 + \lambda a} \right| < 1, \quad |-\beta - a| = \frac{1 + a^2}{\cos\alpha} = \frac{1}{1 - \lambda a} > 1$$

$\lambda = \beta + a$

よって 留数を計算して

$$\int_0^1 \frac{dz}{(\beta^2 + a^2)\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2\beta a}$$

よって

$$L_{0A} = \frac{\delta}{\pi} \cot^2\alpha \left[-\pi a^2 - \frac{a^2}{2} \cot\alpha \log\left(\frac{1+\cot\alpha}{1-\cot\alpha}\right) + (1+2a^2) \frac{\pi a}{2\beta} \right], \quad (19)$$

$$X = \frac{\pi p V_0^2 l_{0A}}{2} \tan\alpha \frac{\left[1 + 2\tan^2\alpha - \frac{2\lambda^2\alpha}{\cos^2\alpha} \right]}{\left[1 + \frac{\pi}{2} \lambda \tan\alpha (1 + 2\tan^2\alpha) - \pi \tan^2\alpha - \frac{\lambda^2\alpha}{2\cos\alpha} \log(\cot\alpha) \right]}, \quad (20)$$

$$Y = -\frac{\pi p V_0^2 l_{0A}}{2} \tan^2\alpha \cot\alpha \left[\frac{1}{2} \cot\alpha + \frac{1}{2} \cot\alpha \right], \quad (21)$$

$$X \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{\pi p V_0^2 l_{0A}}{2} \alpha$$

$$Y \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} -\frac{\pi p V_0^2 l_{0A}}{2} \alpha^2$$

} (22)

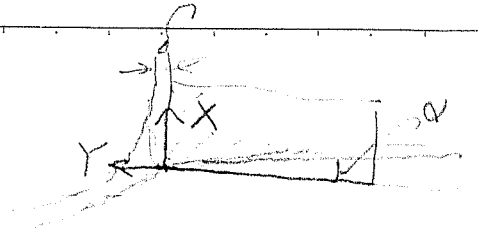
X, Y の合力は、この時

$$\sqrt{X^2 + Y^2} \doteq \frac{\pi}{2} \rho V_0^2 \ell_{0A} \sin \alpha \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} =$$

$$\doteq \frac{\pi}{2} \rho V_0^2 \ell_{0A} \tan \alpha$$

$$\tan^{-1} \frac{Y}{X} \doteq \alpha \sim$$

(23)



となって 合力は 沿直になる。

流体平板では 飛沫は ^{\alpha の小さい場合} 田舎、前方に 飛ぶので

その運動量損失分が 抵抗となり (23) の抵抗成分

$$R = AY/\alpha = \frac{\pi}{2} \rho V_0^2 \ell_{0A}^2 \alpha^2, \quad (24)$$

となるが、今の場合 飛沫は ~~後~~ 沿直上方で \alpha だけ後方に
に流れて 飛ぶので 一樣流れ方向の運動量損失は
なく 理想としては 抵抗はない車になる。

実際問題としては この飛沫の運動量が 主流に
回収される事は考えられないから、抵抗としては
やはり (24) をとるべきであろう。

新高上の点を除けば ^{\alpha > 0.2} 揚力は 平板に 等しく、異なる点は
 δ が 今は $\alpha \ell_{0A}$ に なるが 平板では (11) より $\delta = \frac{\pi}{4} \alpha^2 \ell_{0A}$ と
薄くなっている所だけである。