

吹流しと方箋のはためきについて

別所

内容

I. 吹流し

頁
1

II. 方箋

6

1. 方箋の種類と理論について

6

2. 速度ポテンシャル
と固有値方程式

7

III 実験について

12

附録A 核関数

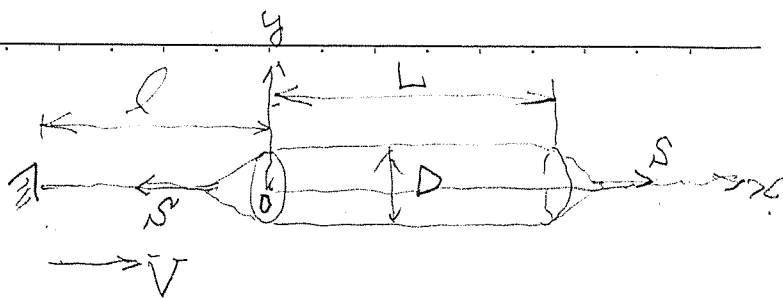
A1~3

I. 吹流し

一様風速 V の流れの

中に直径 D の円筒形の

の吹流しがあるでしょう。



風の中で振動するとその断面は円形から複雑に

折れ曲がると考えられるがそれを考えるととても解析

し難いので提灯のようなものと考え縦方向には

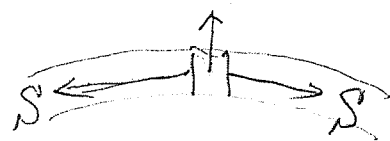
自由に折れ曲がるが1近似として断面形状は

円形に止まるものとしてしよう。

又張力 S は一定で後端では

常に流れの方向に引張られてい

るでしょう。



これは吹流しでは後端を打つとか開口を狭く

するとかして抵抗を持たせている事情に^{略は}対応

していると考えるよからう。

また平衡位置からの変位は $x-y$ 面内に止まると仮定しよう。

今変位を $\eta(x,t)$ とすると y 方向の力の平衡方程式は

$$S \frac{d^2 \eta}{dx^2} = (m+m') \frac{d^2 \eta}{dt^2} \quad , \quad \dots (1)$$

m は布地の単位長さあたりの質量で m' は附加質量である。

$$m' = \frac{\rho \pi}{4} D^2 \quad , \quad \rho: \text{空気密度} \quad , (2)$$

布地の単位面積当りの重量を w とすると、

$$m = \pi D \frac{w}{g} \quad , \quad \dots (3)$$

よって

$$\begin{aligned} m+m' &= \frac{\pi \rho}{4} D^2 + \pi D \frac{w}{g} \\ &= \frac{\pi \rho}{4} D^2 (1+k) \quad , \quad \left\{ \begin{array}{l} (4) \\ k = \frac{4w}{D \rho g} \end{array} \right. \end{aligned}$$

さて今 $\eta(x,t) = \eta(x) e^{i\omega t}$ のように表わすと、

(1.1) は

$$S \frac{d^2 \eta}{dx^2} + \omega^2 (m+m') \eta = 0 \quad ,$$

と書け

$$C^2 = S / (m+m') \quad , \quad \dots (5)$$

よおくと

$$\omega^2 \eta(x) + C^2 \frac{d^2 \eta}{dx^2} = 0 \quad , \quad (6)$$

となり 典型的な波動方程式となる。

ここで 抵抗力が流体抵抗で与えられるとすると

$$D = \frac{\rho}{2} C_D \left(\frac{\pi}{4} D^2 \right) V^2, \quad \dots (7)$$

のように与えられるから (4) を代入して (5) は

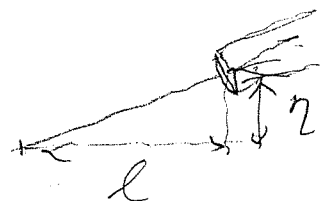
$$C^2 = \frac{C_D V^2}{2(1+k)}, \quad C/V = \sqrt{\frac{C_D}{2(1+k)}}, \quad (8)$$

次に境界条件を考えよう。

原点 0 で曳索につながっている

とすると その傾斜角は等しい

と考えられるから

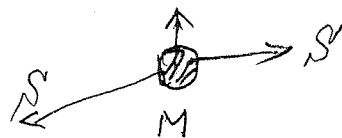


$$\left. \frac{dh}{dx} \right|_{x=0} = \frac{h}{l} \Big|_{x=0}, \quad \dots (9)$$

なおこの部分には他の部分より重い輪があるから
必要ならば その影響を考えねばならない。

それを集中質量 M で代表させると

力の平衡から



$$\omega^2 M h \Big|_{x=0} + S \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{h}{l} \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \dots (10)$$

以下は渦率を無視してこれは考えないことにする。

次に $x=L$ では、 y が流れの方向に 固定端を引張つて
いるとすると

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=L} = 0, \quad \dots (11)$$

さて (6) の一般解は

$$\begin{aligned} y(x) &= A \sin kx + B \cos kx \\ k &= \omega/c, \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} (12)$$

これから (9) と (11) から

$$\begin{aligned} kA &= B/l, \\ A \cos kL &= B \sin kL \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

故に固有値方程式は

$$\frac{A}{B} = \tan kL = \frac{1}{kL}, \quad \dots (14)$$

これから可附番無限個の固有値が容易に求められる。

特に $L=0$ の時は上式から $\left(\begin{smallmatrix} 2945(15) \\ B=0 \end{smallmatrix} \right)$

$$kL = (n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n: \text{integer}, \quad (15)$$

これから

$$k_0 L = \frac{\pi}{2} = \frac{\omega_0 L}{c} = \frac{2\pi L}{T_0 c}$$

$$T_0 = \frac{4L}{c} = \frac{4L}{v} \sqrt{\frac{2(1+\epsilon)}{c_0}}, \quad \dots (16)$$

T_0 は最低次の固有振動周期である。

l が有限ならば $\omega < \frac{\pi}{2L}$ となるので Γ は上式よりも大きくなる。

いづれにしてもこのような固有振動は外的擾乱によって誘起されその振幅は擾乱しがいからなければ定まらない。

またこれを正確に定めるには適当な減衰の相定値が必要であるがここでは同調時のように大振幅となると断面形状が変わらないという仮定は適当でなくなるだろうからそのように細かく考えても無意味である。

また外乱がないとしても平衡位置は重力のため水平 ($\eta=0$) ではないから常に水流とは異なる方向の力をうけている事になりそれらは歪めきの原因となっている事も考え

ねはならない。

なお水流の速度が附加速度其原因から l' の点に集中して振子振動をすれば l' を相当振子長と見做す事にすると $\omega_0 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{g}{L}}$ に對し $\omega^2 = \frac{g}{(m+m')Ll'}$ 故、 $l' = \frac{4}{\pi^2} L$ となり $l' \approx 0.4L$ となつて

もつと小さい値となる。

II. 旗

1. 旗の種類と理論について

通常の旗は縦横に $1:1.5$ 程度のものである。
(あるいは規格によれば)
アスペクト比のうんと大きいものは 祭、芝居小屋などに
見られる「のぼり」である。

アスペクト比のうんと小さいものは 源平の赤旗白旗
のようにむしろ吹流しであり ストリップ法的に
考えれば「前章の玉野篇でよい」と考えられその時
断面形状は変化すると考えられようから 附加質量
の推定は困難であり又張力は小さいだろう
し又それを決める明らかな根拠もないので 現段
階では まず 実験的観察が必要である。

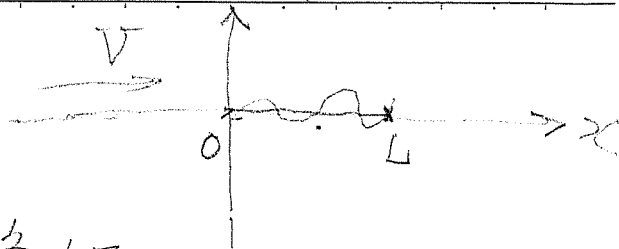
理論としては まず 簡潔の 爲に 2 次元理論を
構成したいのであるが アスペクト比の充分大きい「のぼり」
を採り上げてもその変位が幅方向に等しいとは
考えられないので 直接の数学的模型化とは
ならない。

それ故 以下の理論はらうは「定性的理論」であって
実験観察と比較して 補ない、現象の本質を
把握しよう 努めねばならない。

2. 速度ポテンシャルと固有値方程式

現象は 19 周波数の

2 周期的なものと

 $e^{i\omega t}$ なる時間因子を省略して.速度ポテンシャル $\Phi(x, y)$ [西山 15]

$$\Phi(x, y) = \frac{-1}{\pi\rho} \int_0^L \frac{\rho(\xi) y d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2}, \quad (1)$$

$$\Phi(x, y) \Big|_{y=\pm 0} = \mp \frac{\rho(x)}{\rho} \quad \text{for } 0 < x < L, \quad (2)$$

速度ポテンシャルを $\phi(x, y)$ とすると

$$\Phi(x, y) = (i\omega + V \frac{\partial}{\partial x}) \phi(x, y), \quad (3)$$

3. 112

$$\phi(x, y) = \frac{-1}{\rho V} \int_0^L \rho(\xi) S(x-\xi, y) d\xi, \quad (4)$$

2. 112 S は附録 A の定義に於る。

境界条件は 変位を $\eta(x)$ とすると

$$(i\omega + V \frac{\partial}{\partial x}) \eta(x) = \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, 0) \quad \text{for } 0 < x < L, \quad (5)$$

(A. 12) の式を用いると.

$$\eta(x) = \frac{-1}{\rho V^2} \int_0^L \rho(\xi) K(x-\xi, 0) d\xi, \quad (6)$$

逆に (A-6) を用いると

$$\left(\frac{d}{dx} + ik\right)^2 \eta(x) = + \frac{-1}{\pi P V^2} \int_0^L \frac{p(\xi)}{(x-\xi)^2} d\xi, \quad \dots (7)$$

、または全く振動管の理論で (5) (7)

の積分方程式では、 p が後端で 0 となるつまり
あたえられた境界条件に対し

Kutta の条件を指定すれば一意的に解は定まる。

しかし p が境界条件として与えられると積分方程式

は (6) となり核は対数特異性をもつ準正則

核なので p は一意的に決まり流出条件は

指定出来ない。これは滑走板の時と同じ事情

である時は Kutta の条件は除かないで代わりに浸水

長さが変化するとした。

旋の場合には長さ L もかえる訳に行かないので
Kutta の条件を放棄する他ないだろう。

実際 Kutta の条件が満たされると言う事は翼後縁
において最初速度が無限大となつて渦を生じ

それが翼から離れて行って後縁速度が有限

に止まる事になる訳であるが旋の場合には

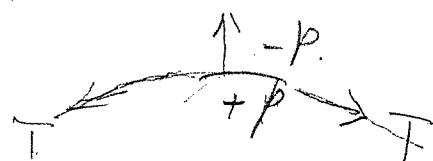
後縁に

撓み易いとするので上下面の圧力が変わればそれに
応じて曲がってしまい、^(固体) 壁の場合とは事情が十分
違うと考えられ、クツタの条件は放棄しよう。

さて力の平衡条件は 弦の張力を

T , 単位面積当りの重量を w ,

とすると 圧力差 $2p$ との間に



$$2p = \frac{w}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad \dots (8)$$

$$2p = - \left(\omega^2 \frac{w}{g} + T \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \eta(x), \quad \dots (8')$$

弦の場合 後縁は自由であるから後縁で

$T=0$ であり, それより前部の T は摩擦抵抗力

と 圧力 ($2p$) の x 成分からなる故

$$T(x) = \int_x^L R_f dx - 2 \int_x^L p \frac{\partial \eta}{\partial x} dx, \quad \dots (9)^*$$

摩擦抵抗 R_f は充分小さいから無視すると

$$T(x) = -2 \int_x^L p \frac{\partial \eta}{\partial x} dx, \quad (9')$$

(8') を代入すると

$$T(x) = + \int_x^L \left[\frac{\omega^2 w}{g} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + T(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x^2} \right] dx,$$

* p あるいは $e^{i\omega t}$ なる成分を含むので正しくはそれを含めて考えねば

$$T(x) + \frac{1}{2} \int_x^L T(x) d\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 = + \frac{\omega^2 \rho}{2g} \left[\eta(L)^2 - \eta(x)^2 \right],$$

あるいは x で微分して

$$\frac{dT(x)}{dx} + \frac{T(x)}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 = - \frac{\omega^2 \rho}{g} \eta(x) \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (10')$$

○ $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ は一般の微小量と考えているので左辺において第2項を無視すると (10) から

$$T(x) = \frac{\omega^2 \rho}{2g} \left[\eta(L)^2 - \eta(x)^2 \right], \quad \dots (11)$$

となつて $T(x)$ は η^2 のオーダーとなるから線型理論的に考えると (8') の第2項は無視の方が妥当で結局

$$2p = - \frac{\rho}{g} \omega^2 \eta(x), \quad \dots (12)$$

とすべきだろう。^{*}

もしこの式でグッタの条件を満足させるならば

$$\eta(L) = 0 \quad (13)$$

となるがこれは帆のはためぎを考えると

不合理で前の理論からしてもグッタ

の条件は指定しないつまり $\eta(L) \neq 0$ とする方が合理的である。

* Tuck等は帆のはためぎに因りて逆に $\omega=0$ としている。

(12) を (6) に代入すると $(\alpha^2 = \frac{2U}{Pq})$

$$\psi(x) = \frac{\alpha^2 R^2}{2} \int_0^L \psi(\xi) K(x-\xi, 0) d\xi \quad (14)$$

(17) に代入すると

$$\left(\frac{d}{dx} + i\alpha\right)^2 \psi(x) = \frac{\alpha^2 R^2}{2\pi} \int_0^L \frac{\psi(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2} \quad (15)$$

のような固有値方程式を得る。

まず長が充分小さいので考えて見よう。

(14) で (A.20) を代入するとその虚数部の為には固有値長は複素数となると考えられる。

これは $e^{i\omega t}$ の ω が複素数となる事であるから

時間的に安定な振動解は無い事を意味する。

この事は張力を0とする、つまり復原力を無視した為には振動しなくなったもので当然と言えよう。

それ故 線型理論的には矛盾であるが μ は (8') の形に

とらねばならない。そして T は x の関数であるから

方程式は準線型となり、1段と複雑になる。

又最終的には T は実験的に定めねばならない
 だろうから、今の段階ではこの固有値方程式を解く
 のは得策ではなく、前節の方程式程々から
 実験を経て検討するのが望ましい。

II. 実験について

以上の考察から結局のところこの現象では張力
(=抵抗 R) と全重量 W が最も重要な因子で
あり、振動周期 T は相似模型では

$$\frac{VT}{L} = f_{sim}(R/W) \quad , \quad \dots \quad (1)$$

と考えられる。(ストローハル数を採り方がよい?)

ここで振動モードは同じと考えられるが、本来
固有振動なので高次振動も含まれており又
振幅は外力の強さで決まるから、外力の
強さをも相似にしておかなければならない。

つまり気流、旗竿、旗竿への固着方法
ひも、棒等も相似となるよう充分注意
すべきである。

なお抵抗は振幅の乗数程度に比例しているから
(1) は必ずしも便利ではなく次のように考えた方がよい。

$$\frac{VT}{L} = f_{sim}\left(\frac{\rho L^2 V^2}{2W}\right) \quad , \quad \dots \quad (2)$$

附録 A 不斉円盤

$$S(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left[\frac{e^{iux}}{u+k-\mu i} - \frac{e^{-iux}}{u-k+\mu i} \right] e^{-uy} du, \quad (A.1)$$

$y > 0$

$$(\frac{\partial}{\partial x} + ik) S(x, y) = \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)}, \quad (A.2)$$

$$S(x, y) = \frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-m|x|} \sin my}{k+im} dm + e^{-ikx-ky}, \quad \text{for } x, y > 0,$$

$$= -\frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{m|x|} \sin my}{k-im} dm \quad \text{for } x < 0, y > 0 \quad (A.3)$$

$$S(x, y) \xrightarrow{x \gg 1} e^{-ikx-ky} - \frac{iy}{\pi k(x^2 + y^2)} + \dots, \quad y > 0,$$

$$\xrightarrow{x \ll -1} -\frac{iy}{\pi k(x^2 + y^2)} + \dots, \quad y > 0 \quad (A.4)$$

$$\frac{\partial S(x, y)}{\partial y} = -\frac{x}{\pi(x^2 + y^2)} + \frac{k}{2\pi i} \int_0^\infty \left[\frac{e^{iux}}{k+u-\mu i} + \frac{e^{-iux}}{u-k+\mu i} \right] e^{-uy} du \quad (A.5)$$

$$(\frac{\partial}{\partial x} + ik) \frac{\partial S}{\partial y} = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right), \quad (A.6)$$

ここで更に2次の円盤を定義しておく。

$$T(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left[\frac{e^{iux}}{k+u-\mu i} + \frac{e^{-iux}}{u-k+\mu i} \right] e^{-uy} du, \quad (A.7)$$

$$(A.1) \text{ と合わせて } T + iS = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{iux-uy}}{k+u} du, \quad (A.8)$$

$$T(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-mx} \cos my}{m - ik} dm - i e^{-ikx - ky} \quad \text{for } x > 0, \quad (A.9)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{mx} \cos my}{m + ik} dm \quad \text{for } x < 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial y}(x, y) = -\frac{x}{\pi(x^2 + y^2)} - ik T(x, y), \quad \dots (A.10)$$

§ 2.2 $y=0$ 上

$$T(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{iux}}{k+u} du + \begin{cases} -i e^{-ikx} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases} \quad (A.11)$$

となり 対数積分 (正余弦積分) となる。

2.2.2 更に

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i k\right) K(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} S(x, y), \quad \dots (A.12)$$

対数関数 K を導入しよう。

$$K(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{u e^{iux}}{(u+k-i\epsilon)^2} + \frac{u e^{-iux}}{(u-k+i\epsilon)^2} \right] e^{-uy} du, \quad (A.13)$$

$$K(x, y) = T(x, y) + \frac{k}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{iux}}{(u+k)^2} - \frac{e^{-iux}}{(u-k)^2} \right] e^{-uy} du$$

右辺第2項を部分積分する。

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{iux - uy}}{(u+k)^2} du = -\frac{e^{i u(x+iy)}}{u+k} \Big|_0^{\infty} + i(x+iy) \int_0^{\infty} \frac{e^{iuz}}{u+k} du$$

$$= +\frac{1}{k} + i z \int_0^{\infty} \frac{e^{iuz}}{u+k} du,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-iux-uy}}{(u-k)^2} du = - \frac{e^{-iu(x-y)}}{u-k} \Big|_0^{\infty} + (-ix-y) \int_0^{\infty} \frac{e^{-iux-uy}}{u-k} du.$$

故得

$$K(x, y) = T(x, y) + \frac{1}{\pi} + \frac{k(ix-y)}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-iux-uy}}{u+k-i\epsilon} du \\ + \frac{k(ix+y)}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-iux-uy}}{u-k+i\epsilon} du, \quad (A.14)$$

从而得

$$K(x, 0) = T(x, 0) + \frac{1}{\pi} + i k x T(x, 0), \quad \dots (A.15)$$

$$T(x, 0) \xrightarrow{x \ll -1} \frac{1}{\pi k} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i u |x|}}{1 - \frac{u}{k} + \dots} du \\ = \frac{1}{\pi k} \left[\frac{1}{i |x|} + \frac{1}{k x^2} + \dots \right], \quad \dots (A.16)$$

故得

$$K(x, 0) \xrightarrow{x \ll -1} \frac{1}{i \pi k |x|} + \frac{i}{\pi k x} + \dots = \frac{2}{\pi i k |x|}, \quad (A.17)$$

从而得

$$I(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{iux}}{k+u} du = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi i}{2} - C - \log[kx] \right], \quad (A.18) \\ \text{for } x > 0$$

C: Euler's Const.

$$\therefore T(x, 0) = -\frac{i}{2} - \frac{1}{\pi} (C + \log k |x|), \quad \dots (A.19)$$

$$K(x, 0) = -\frac{i}{2} - \frac{1}{\pi} [C + \log k - 1 + \log |x|], \quad (A.20)$$