

無限に広がる浮氷の一端に働く点荷重
による応力場について

別冊

砕氷動力と抵抗

夏
0-124

1. 静的 2次元問題

1

2. 静的 3次元問題

11

3. 動的 2次元問題

14

別冊 砕氷船の所要馬力

58.7.18

砕氷動力と抵抗

無限に広がった氷板の中を氷を割りながら進む船を考えよう。

氷を割るには氷板の面内力、つまり水平に力を加えるのでは^{面内}応力となって割りに難いと考えられ、鉛直方向の力^{面外}をかけて^{面外}曲げ応力によって割るのが効率的と考えられる。

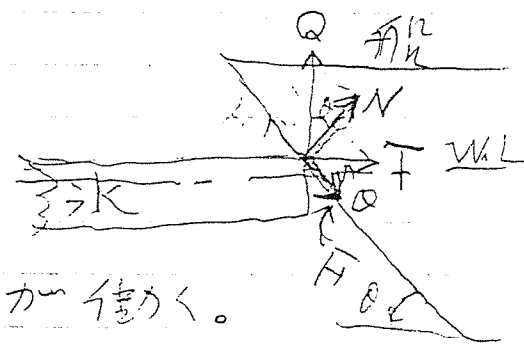
その他削る、鋸で引を割る等も考えられるが、^{曲げ}で割るのが最も良いように考えられる。

そこでまず船首で氷板を押している状態を考えよう。

船首レーキ角 θ 、推力 T とすると

船首材に垂直に N なる力がかかる。

働き、それに直角に摩擦力 F がかかる。



摩擦係数を μ とすると、

$$F = \mu N, \quad (0.1)$$

N, F の合力の鉛直成分を Q とすると

$$Q = N \cos \theta - F \sin \theta = N (\cos \theta - \mu \sin \theta) \quad (0.2)$$

$$T = N \sin \theta + F \cos \theta = N (\sin \theta + \mu \cos \theta), \quad (0.3)$$

$$\therefore Q = T \frac{\cos \theta - \mu \sin \theta}{\sin \theta + \mu \cos \theta} = T \cot \theta \frac{1 - \mu \tan \theta}{1 + \mu \cot \theta}, \quad (0.4)$$

したがって Q/T は $\theta = 0$ のとき最大で $(1/\mu)$ である。

Q_B なる力がかかったとき 氷は l_B だけ割れて
船は l_B だけ進むものとする。

氷厚を t とすると

$$l_B \propto \left(\frac{D}{\rho g} \right)^{1/4}, \quad \dots (0.5)$$

Q_B なる力がかかったときの 氷の変位を δ とすると

$$k \delta = Q, \quad \dots (0.6)$$

$$k \propto \sqrt{\rho g D} \quad (0.7)$$

したがって Q_B の力に なる (氷に 対する) 仕事は

$$W = \frac{1}{2} Q_B \delta = \frac{k}{2} Q_B^2, \quad \dots (0.8)$$

氷が曲げの引張り、^{引張り} 応力が割れる ^{氷厚縮で} すると

$$\sigma_B = \frac{\text{Max}[Y]}{\text{Max}[I/y]} \propto \frac{Q_B l_B}{t^2}$$

$$\therefore Q_B \propto \frac{t^2}{l_B} = t^2 / \left(\frac{D}{\rho g} \right)^{1/4}, \quad (0.9)$$

よって $T \propto Q$

$$W \propto \sqrt{\rho g D} \frac{t^4}{\sqrt{\rho g}} = \rho g t^4, \quad \dots (0.10)$$

氷が割れると船は l_B だけ進む。その速度は (12)
 船の質量 M を無視すると 加速度 a と l_B

$$\begin{aligned} v &= \frac{T}{M} t \\ l_B &= \frac{T}{M} \frac{t^2}{2} \end{aligned} \quad \dots (0.11)$$

したがって 平均速度 V は

$$V = \frac{T}{M} \frac{t}{2} = \frac{T}{2M} \sqrt{\frac{2M}{T} l_B} = \sqrt{\frac{T l_B}{2M}} \quad \dots (0.12)$$

$$T \propto Q_B \text{ だから } \rightarrow \propto \frac{t}{\sqrt{M}},$$

であるから 結局 抵抗 R は

$$R = \frac{W}{V} \propto \frac{\rho g t^4}{\sqrt{M}} \quad \dots (0.13)$$

所要推力は上記の如くは (0.9) と同じで

氷厚の 1.25 乗に比例する。

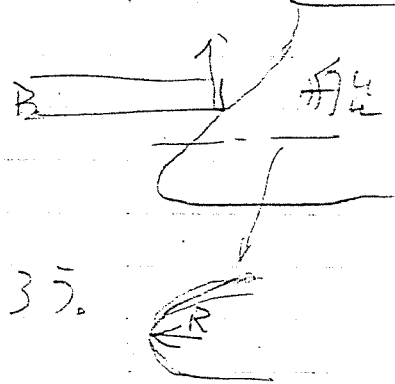
このような割り方は 700 馬力推力 T のみを考える
 のでは 割が悪いように思われ、船から氷を引張
 る等の方法で T を増す方法が望ましい。

あるいは又 船の排水量を利用して Q を確保する
のも良い方法であって、トリセセする方法はこれに
相当するだろう。

しかしもっと効果的にやるには 船首に 舵を出して
それで 氷を上から押えるのが良いだろう。

その他 船首のレーキ角は明らかに 逆でもよい。

この方が 摩擦係数は小さいだろう。



また 以上のメカニズムで割れるのならば

船首の R は あまり 小くない方が良くう。

また 氷を 爆破する場合、水中に 火薬を
置く 事が 望ましいだろう。

(2.8) で後述するように 氷板に垂直力を加えた場合の変位は大変小さく, 1ton に対し mm のオーダーである。

一方船について H なる力が船首に垂直に働く時の船首吃氷の変化量 a_H は

$$a_H = \frac{H}{T} + \frac{H(\frac{L}{2} + f)^2}{M \cdot L}$$

$$T = \rho g A_w = \rho g L B C_w$$

$$M = \frac{W \overline{GM}_L}{L} \doteq \rho g L B d C_b$$

f : 浮面心の前方への距離

$$a_H \doteq \frac{H \cdot L}{4W} \left[\left(1 + \frac{2f}{L}\right)^2 + \frac{4d}{L C_{w.p.}} \right],$$

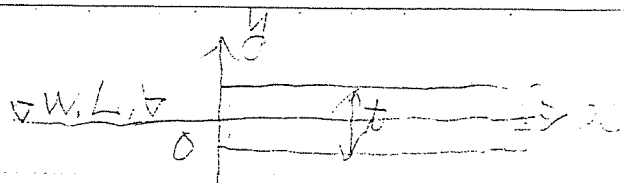
$$L = 120m, \quad W = 5000 \text{ tons}, \quad H = 1 \text{ tons}$$

として $a_H \doteq 0.6 \text{ cm}$ のオーダーとなる。

従って船のトリムと氷の変位は同じオーダーである。

1. 静的2次元問題

氷は x の正軸に沿って



無限遠方まであるとする。

平衡方程式は 氷の中心線の上方の変位を w とすると

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + \rho g w = 0, \quad \dots (1.1)$$

E はヤング率, $I = \frac{t^3}{12}$: 断面2次モーメント

t : 氷厚, ρ : 氷密度, g : 重力の定数

今無次元化して

$$\left. \begin{aligned} w &= t u \\ x &= t \xi \end{aligned} \right\} \quad \dots (1.2)$$

とすると (1.1) は

$$\frac{d^4 u}{d\xi^4} + a^4 u = 0, \quad \dots (1.3)$$

$$a^4 = \frac{\rho g t^4}{EI} = \frac{12 \rho g t}{E}, \quad \dots (1.4)$$

$x \gg 1$ で正則な解は

$$u = A e^{\alpha \xi} + A e^{\bar{\alpha} \xi}, \quad \dots (1.5)$$

$$\alpha = a e^{\frac{3\pi i}{4}} = \frac{(-1+i)a}{\sqrt{2}}, \quad \dots (1.6)$$

と与えられる。

原点に集中力 F が作用すると

$$M = EI \frac{d^2 w}{dx^2} = EI \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{EI}{L^2} [\alpha^3 A e^{\alpha z} + \alpha^3 \bar{A} e^{\bar{\alpha} z}] \quad (1.7)$$

$$\bar{H} = EI \frac{d^3 w}{dx^3} = \frac{EI}{L^2} \frac{d^3 u}{dz^3} = \frac{EI}{L^2} [\alpha^3 A e^{\alpha z} + \alpha^3 \bar{A} e^{\bar{\alpha} z}]$$

ここで

$$M|_{z=0} = 0, \quad \alpha^3 A + \alpha^3 \bar{A} = 0 \quad (1.8)$$

$$H|_{z=0} = F = (\alpha^3 A + \alpha^3 \bar{A}) \frac{EI}{L^2}$$

$$\text{よって } A = -\left(\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right)^2 \bar{A} = -\bar{A} \quad (1.9)$$

これを (1.8) に代入して

$$F = \frac{EI}{L^2} A (\alpha^3 + \bar{\alpha}^3) = \frac{EI}{L^2} \sqrt{2} A a^3$$

$$\therefore A = \frac{L^2 F}{\sqrt{2} EI a^3} = \frac{a F}{\sqrt{2} \rho g L^2} \quad (1.10)$$

(1.7) に代入すると

$$M = \frac{\pm F}{\sqrt{2} a} \left(-i e^{\frac{-1+i}{\sqrt{2}} \frac{a^3}{L^2}} + i e^{\frac{-1-i}{\sqrt{2}} \frac{a^3}{L^2}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2} \pm F}{a} e^{-\frac{a^3}{\sqrt{2} L^2}} \sin\left(\frac{a^3}{\sqrt{2} L^2}\right)$$

$$\bar{H} = \frac{F}{\sqrt{2} a} e^{-\frac{a^3}{\sqrt{2} L^2}} \left(e^{i \frac{a^3}{\sqrt{2} L^2}} + e^{-i \frac{a^3}{\sqrt{2} L^2}} \right)$$

$$\text{よって } u = \frac{\sqrt{2} L^2 F}{F \pm a^3} e^{-\frac{a^3}{\sqrt{2} L^2}} \cos\left(\frac{a^3}{\sqrt{2} L^2}\right) \quad (1.12)$$

3.4.10

$$M_{\max}(M) = \frac{\sqrt{2} t H}{a} e^{-\frac{\pi}{4}}$$

(1.13)

at $a \bar{z} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1.1107,$

その点における最大引張応力と圧縮応力 σ は

$$\sigma = M / \left(\frac{I}{\bar{z}} \right)_{\bar{z} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}} = \frac{t^2 H}{\sqrt{2} a I} e^{-\frac{\pi}{4}} = \frac{12 H}{\sqrt{2} a t} e^{-\frac{\pi}{4}}, \quad (1.14)$$

$$\text{又 } w(0) = \frac{\sqrt{2} t^3 H}{E I a^3} = \frac{12 \sqrt{2} H}{E a^3} \quad (1.15)$$

石炭の引張と圧*

$$E = 9.5 \times 10^8 \text{ Kg/m}^2.$$

曲げモーメント

$$\sigma_f = 5 \text{ Kg/cm}^2 = 5 \times 10^4 \text{ Kg/m}^2$$

厚さ値を求めれば

t	H (Kg/m)	x (m)	$w(0)$ (m)	$F/w(0)$	$F/w(0)$
1 m	770	18.5	.060	12,833.	308.3
2 m	1,820	31.3	.086	21,163	364.

$$F = k_T \cdot w(0)$$

$$\left(\frac{\text{Kg}}{\text{m}} \right) \quad \left(\text{cm} \right)$$

* 大島, JSSC, vol.18, No.19, '82.5

2. 相当板の2次元問題

平衡方程式は

$$D \Delta^2 w(x, y) + \rho g w(x, y) = 0, \quad \dots (2.1)^*$$

$$D = \frac{EI}{1-\nu^2} = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= t\xi \\ y &= t\eta \end{aligned} \right\} \quad \dots (2.3)$$

と無次元化すれば

$$\Delta^2 u(\xi, \eta) + a^4 u(\xi, \eta) = 0, \quad (2.4)$$

$$a^4 = \frac{\rho g t^4}{D} = \frac{12(1-\nu^2) \rho g}{E}, \quad (2.5)$$

これは弾性床上の板の方程式そのものであり, Text*

によつて"無限板上の原点にFなる力か

加わった時の変位は、2次元で与えられる。
(ケルビン関数にあり)

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= - \frac{F t}{2\pi D a^2} \operatorname{kei}(x) \\ &= - \frac{F a^2}{2\pi \rho g t^3} \operatorname{kei}(x), \quad \dots (2.6) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \xi &= r \cos \theta \\ \eta &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad x = ar,$$

* Timoshenko, Krieger "Theory of Plates and Shells"
Chap. 8,

$$\text{kei } x \underset{x \rightarrow 0}{\doteq} -\frac{x^2}{4} \log \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} + \dots, \quad (2.7)$$

これより

$$w(0,0) = \frac{H a^2}{8 \rho g t^2} = \frac{H}{8 \sqrt{\rho g D}}, \quad (2.8)$$

$\frac{H}{8 \sqrt{\rho g D}} \doteq 2.4 \times 10^{-6}$

前の数値を入れると氷厚 1 m の場合

$F \doteq 1 \text{ ton}$ に対し $\frac{1}{2} \text{ mm}$ の程度で大変小さい。

これより

$$\text{kei}(x) \underset{x \gg 1}{\rightarrow} -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right), \quad (2.9)$$

であり,

$$M_r = -D \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right] u, \quad (2.10)$$

であるから M_r の $\frac{5\pi}{8}$ 付近は近似的に $-\frac{1}{2} \pi e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^3 \text{kei}(x) &\doteq -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} \ln \left[e^{-\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{ix}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}i - \frac{3\pi}{4}i} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{5}{8}\pi\right) = 0, \end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{5}{8} \pi \sqrt{2}, \quad \frac{x}{a} = \frac{5\sqrt{2}\pi}{8a} \doteq \frac{2.7768}{a} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \text{Max}(M_r) &\doteq \frac{D a^2}{2\pi D a^2} \frac{H t}{\sqrt{2x}} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{3}{8}\pi\right) \\ &= \frac{H t}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{5\sqrt{2}}} e^{-\frac{5}{8}\pi} \end{aligned}$$

これは大変小さい。

次に $y \geq 0$ の半平面をおおっていて、
 x 軸から自由辺で与える場合を考えよう。

さらにめて

$$S(R) = -\frac{1}{4\pi} \text{Re} i(R) = \frac{1}{4} \text{Re} \left\{ H_0^{(2)}(R e^{-\frac{\pi}{4}}) \right\}, \quad (2.12)$$

とあて、自由辺の影の積分を T としよう。

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

$$x = a\xi, \quad y = a\eta$$

新しく x, y をこう定義する

さて

$$S = \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty \cos kx \, dk \left[\frac{e^{-\sqrt{k^2+i}|y-y'|}}{\sqrt{k^2+i}} - \frac{e^{-\sqrt{k^2-i}|y-y'|}}{\sqrt{k^2-i}} \right], \quad (2.13)$$

とそれから T も

$$T = \frac{i}{4\pi} \int_0^\infty \cos kx \, dk \left[\frac{e^{-\sqrt{k^2+i}|y+y'|}}{\sqrt{k^2+i}} - \frac{e^{-\sqrt{k^2-i}|y+y'|}}{\sqrt{k^2-i}} \right], \quad (2.14)$$

と書こう。

x 軸上では

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (S+T) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} (S+T) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{for} \\ y=0, \end{array} \right\} (2.15)$$

(2.13), (2.14) を (2.15) に代入すると。

$$\left. \begin{aligned} A(1+\bar{F}) - \bar{A}(1+\bar{F}) &= 0 \\ C(1-\bar{F}) - \bar{C}(1-\bar{F}) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (2.16)$$

$$A = \frac{\{(1-\nu)k^2 + i\}}{\sqrt{k^2 + i}} e^{-\sqrt{k^2 + i} y'}$$

$$C = \frac{\{(1+\nu)k^2 - i\}}{\sqrt{k^2 - i}} e^{-\sqrt{k^2 - i} y'}$$

これを代入

$$\bar{F} = 1 - \frac{2\bar{C}(A-\bar{A})}{\Delta} = -1 - \frac{2\bar{A}(C-\bar{C})}{\Delta}, \quad (2.17)$$

$$\Delta = A\bar{C} - \bar{A}C,$$

$$\Delta = \left[\frac{\{(1-\nu)k^2 + i\}}{\sqrt{k^2 + i}} \frac{\{(1+\nu)k^2 + i\}}{\sqrt{k^2 + i}} - \frac{\{(1+\nu)k^2 - i\}}{\sqrt{k^2 - i}} \frac{\{(1-\nu)k^2 - i\}}{\sqrt{k^2 - i}} \right] \times e^{-\{\sqrt{k^2 + i} + \sqrt{k^2 - i}\} y'}$$

これを代入して

$$T(p, q) = -S(p, \bar{q}) + U(p, q), \quad (2.18)$$

$$\bar{p}q = R, \quad \bar{q} \equiv (x, -y')$$

$$U(p, q) = \text{Re} \{ V \}, \quad (2.19)$$

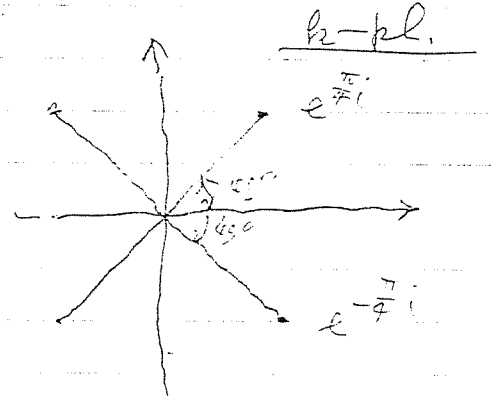
としたい、さらに $x' = y' = 0$ とすると

$$S(p, q) + T(p, q) = U(p, q) = \text{Re} \left\{ V(R) \right\}_{\text{for } x' = y' = 0}, \quad (2.20)$$

$$V = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega k \times e^{-\sqrt{k^2+1}} \{ (1-\nu)k^2 - i \}}{\sqrt{k^2+1} \Delta(k)} dk, \quad (2.21)$$

とこの関数を評価すればよい。

k -plane の特異性は図の
ような cut 2組と後は
 $\Delta(k)$ の根があるとする
その pole である。



そこでそれを正めよう。

それは (2.17) から

$$\frac{(1-\nu^2)k^4 + 2ik^2 - 1}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{(1-\nu^2)k^4 - 2ik^2 - 1}{\sqrt{k^2-1}}, \quad (2.21)$$

両辺を自乗して整理すると

$$A k^8 + 2k^4 - 1 = 0, \quad (2.22)$$

$$A = (1-\nu^2)(3+\nu^2)$$

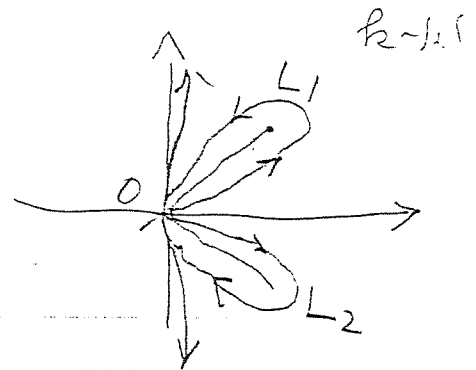
それ故 $k^4 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+A}}{A}, \quad (2.23)$

ν	A	k_+^4	k_-^4	k_+^2	k_-^2
1/3	2.6667	-1.09307	.34307	$\pm i/0.4550$	$\pm .58572$
1/4	2.87169	-1.03358	.33698	$\pm i/0.1665$	$\pm .58050$

これを (2.21) に代入して見ると どの根も (2.21) を満たさない, 従って Δ は零点を持たない事がわかる。

さて次に $x, y \gg 1$ の時を考えよう。

積分路をたて右図のようにとり。



$$V = -\frac{1}{\pi} \int_{L_1} e^{\frac{ikx - \sqrt{k^2 - i}y}{\sqrt{k^2 + i} \Delta(k)}} dk$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_{L_2} e^{\frac{-ikx - \sqrt{k^2 - i}y}{\sqrt{k^2 + i} \Delta(k)}} dk, \quad \dots (2.24)$$

とおく。

y 軸上の積分は

$$\Delta(0) = \sqrt{2}i$$

なので 左に $O(1/k)$ となり今は無視出来る。

Cut 上の積分は、定常点法で求める。

定常点は経路 L_2 上にのみあって

$$z \in \mathbb{C}^+ \quad k = e^{-\frac{\pi i}{4}} \cos \theta, \quad \left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & (\varphi > 0 \text{ のみ}) \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\}$$

$$L_2 \text{ 上 } \theta = \varphi \text{ である。}$$

$$V \cong -\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sqrt{1-\nu} r \cos(\theta-\varphi)} \bar{H}(\theta) d\theta, \quad (2.25)$$

$$\bar{H}(\theta) = \sin \theta \{ 1 + (1-\nu) \cos^2 \theta \} \div \left[\{ 1 + 2 \cos^2 \theta + (1-\nu^2) \cos^4 \theta \} \sin \theta - i (\sin^4 \theta - \nu^2 \cos^4 \theta) \sqrt{1+\cos^2 \theta} \right]$$

$$V \cong -\sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{-\sqrt{1-\nu} r + \frac{3}{8} \pi i} \bar{H}(\varphi), \quad (2.26)$$

$$\therefore U = \operatorname{Re}\{V\} = -\sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}} |\bar{H}(\varphi)| \cos\left(\frac{r}{\sqrt{2}} - \frac{3}{8}\pi - \beta\right),$$

$$\bar{H}(\varphi) = |\bar{H}(\varphi)| e^{i\beta(\varphi)}, \quad (2.27)$$

$$\nu = 1/3 \text{ 及 } 2/3$$

θ	$ \bar{H} $	β
0	0	0
30°	.4971	-6.3°
45°	.5934	8.53
60°	.6840	24.2
90°	.7071	45°

$$\text{したがって} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} |\bar{H}| e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{r}{\sqrt{2}} - \beta - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial r^3} = 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{r}{\sqrt{2}} = \beta + \frac{3}{8}\pi$$

$$\operatorname{Max} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right] = \frac{|\bar{H}|}{\sqrt{\pi r}} e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}} \Big|_{r=}$$

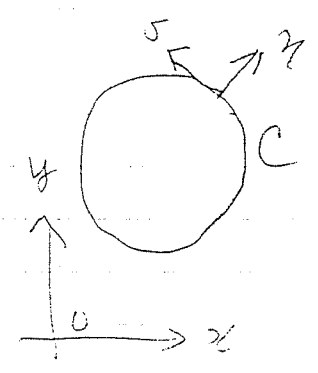
(2.28)

実際には半無限の割れ目がありその終点に力を加える解の望ましいかかなり面倒な問題で結果の許す数値解を求めるより他ないの以下少し一般に任意形状の穴がある場合について考察する。

(2.12) で定義した核函数は

$$S(P, Q) \doteq \frac{R^2}{8\pi} \log R, \quad (2.29)$$

$P \rightarrow Q$



のような特異性を持つので薄板の

曲げ問題の時に全く等しく、その表現からそのま
便えて一般に ^(領域内で正則な) deflection は *

$$w(Q) = \int_C \left[q S(P, Q) - m \frac{\partial w}{\partial n_P} S(P, Q) + M(P, Q) \frac{\partial w}{\partial n} - Q(P, Q) w \right] ds_P, \quad (2.30)$$

2.12

$$m = \nu \Delta w + (1-\nu) \left[\cos^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sin 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right],$$

$$q = \frac{\partial}{\partial n} (\Delta w) + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right], \quad (2.31)$$

で M, Q は m, q の w を S に置きかえた $\pm$ の $\frac{1}{2}$ である。
* 別所河田, 炭素繊維強化プラスチック 198号 昭和55年

さて今 Q' 点に 単位力を加えると、全体の変位は

$$W = S(Q', Q) + w(Q) \quad , \quad \dots \quad (2.32)$$

境界条件は $C = 0$

$$\begin{aligned} m(W) &= m(S) + m = 0. \\ g(W) &= g(W) + g = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{on } C, \quad (2.33)$$

$S(Q', Q)$ は Q, Q' が C 外にあるとすると C の中で Q, Q' の間に C を 0 まで縮める事が出来るので。 (この場合は)

$$\int_C \left[g(W) S(p, Q) - m(W) \frac{\partial S}{\partial n} + M(p, Q) \frac{\partial S(Q, p)}{\partial n_p} - Q(p, Q) S(Q', p) \right] dS_p = 0, \quad (2.34)$$

(2.30) の右辺に 加えると、(2.33) に より

$$w(Q) = \int_C \left[M(p, Q) \frac{\partial W}{\partial n} - Q(p, Q) W \right] dS_p \quad (2.35)$$

例えようが 示して

$$w(Q) = \int_C \left[g' S(p, Q) - m' \frac{\partial S}{\partial n} \right] dS_p, \quad (2.36)$$

のような表現も可能であり、この時 g', m' は 未知関数で 境界条件 (2.33) に よって 求められる。

(2.35) の場合は 右辺の $W, \frac{\partial W}{\partial n}$ は 変位とその法線方向の導関数であるが (2.36) の場合の m', g' は w の値と直接関係なくはならない点に注意。

(2.35) の場合の境界積分方程式は (2.35) から

$$W - S(Q, Q) = \int_0^1 \left[M \frac{\partial W}{\partial y_p} - Q W \right] dy_p, \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y_Q} - \frac{\partial S(Q, Q)}{\partial y_Q} = \int_0^1 \left[\frac{\partial M}{\partial y_Q} \frac{\partial W}{\partial y_p} - \frac{\partial Q}{\partial y_Q} W \right] dy_p$$

となる。

特に χ の正軸である場合を考え、かつ Q' が χ の負軸上にあるとすると、^{解は} y に同じに対称であるから

右辺が2項はなくなり、積分方程式も次の一つだけになる。

$$W(Q) - S(Q', Q) = 2 \int_0^\infty M(p, Q) \frac{\partial W}{\partial y_p} dx_p, \quad (2.38)$$

これを用いて W を求めそれからモーメント等を計算する。

この方向を考えるとむしろ (2.36) の方が便利で

上と同じ y に同じに対称とすると境界積分方程式は

$$m(Q) = \int_0^\infty M_0(p, Q) dx_p, \quad \dots (2.39)$$

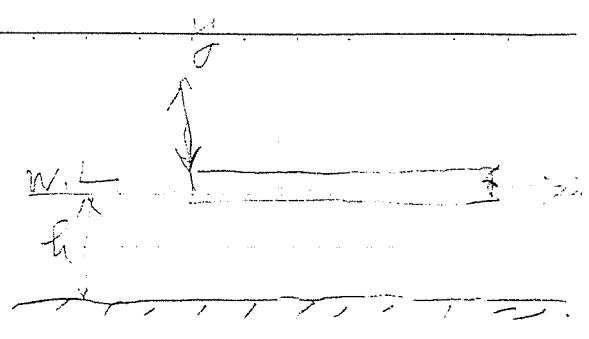
より。

2.12 $M_0(p, Q)$ は (2.31) の演算を Q 点に同じに行う本を意味する。

この場合はこれを解いて、また2の式ですぐモーメントを計算出来る。

3. 動的二次元問題

力が同周波数 ω で
正弦的に変動する
場合を考えよう。



氷は薄いとして近似的に $y=0$ で水面変位 η
とすると 氷の下面の圧力 $P(x,t)$ は速度ポテンシャル Φ を用いて

$$P(x,t) = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \bigg|_{y=0} - \rho g \eta(x,t), \quad (3.1)$$

自由表面では

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho g \eta(x,t) = 0, \quad (3.2)$$

氷板の運動方程式は

$$EI \frac{\partial^4 \eta(x,t)}{\partial x^4} + \rho_i \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial t^2} = P(x,t), \quad (3.3)$$

2.12 ρ_i は氷の密度とする。

左辺第1項の EI は ρ_2 に合わせて D とする
(1.1)でも同じで ρ_2 である

方がよいと考えられるが、今は ρ_1 に合わせて

こうしておく。

$$\begin{aligned} \eta(x,t) &= \text{Re}[-i\omega \phi(x) e^{i\omega t}] \\ \dot{\eta}(x,t) &= \text{Re}[\omega \phi(x) e^{i\omega t}] \end{aligned} \quad (3.4)$$

J. F. Tolstoy "Water Waves"

とおくと (3.5) は

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + (\rho g - \omega^2 + F_c) w(x) + \rho \omega^2 \phi(x) \Big|_{y=0} = 0, \quad (3.5)$$

となる。

水深が深い時は ^{かなり複雑な} これは微積分方程式となるので以下簡単の爲に浅水としよう。

浅水理論では $\phi(x, y)$ は y 方向に定数で

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + K^2 \right) \phi(x) = 0, \quad K = \omega \sqrt{\rho g} \quad (3.6)$$

氷板の $y=0$ の境界条件は

$$\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = \frac{w(x)}{h}, \quad (3.7)$$

氷板 (3.7) を (3.5) に代入すると (3.6)

$$\left[EI \frac{d^4 \phi}{dx^4} + (\rho g - \omega^2 + F_c) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \rho \frac{\omega^2}{h} \right] \phi(x) = 0, \quad (3.8)$$

$$\text{今 } \phi(x) = e^{p \frac{x}{L}}$$

とおくと上式は

$$p^4 + a p^2 + b = 0, \quad (3.9)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= (\rho g - F_c - \omega^2) \frac{L^4}{EI} \\ b &= \rho g K L^6 / (EI) \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

係数 a は

$$\omega^2 = \frac{p^2}{p_i t} \quad (3.11)$$

の時 0 となるが、これは かなり 高周波 となり、実用上は

$a > 0$ と考えればよく、^{近似}Stokes の 方程式を 踏襲して

(3.9) は p^2 について 3 次式であり、その根は

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= u - v < 0 \\ \beta_2 &= u\varepsilon - \varepsilon^2 v \\ \beta_3 &= u\varepsilon^2 - \varepsilon v \end{aligned} \right\} \varepsilon = e^{\frac{2}{3}\pi i} \quad (3.12)$$

$$u = \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{q^3}{27}} - \frac{q}{2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad v = \left(\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{q^3}{27}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

したがって p の根は

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= i\sqrt{|\beta_1|}, \quad p_2 = -i\sqrt{|\beta_1|} : \text{pure imaginary} \\ p_3 &= \sqrt{\beta_2}, \quad p_4 = -\sqrt{\beta_2} \\ p_5 &= \sqrt{\beta_3}, \quad p_6 = -\sqrt{\beta_3} \end{aligned} \right\} \beta_3 = \overline{\beta_2} \quad (3.13)$$

$x \rightarrow \infty$ で 有限な他 12 個の根は

p_2, p_4, p_6 のみであるから

$$\phi(x) = A_2 e^{p_2 \frac{x}{t}} + A_4 e^{p_4 \frac{x}{t}} + A_6 e^{p_6 \frac{x}{t}}, \quad (3.14)$$

x の正側では (3.6) により, やはり x の負方向に進行のみを考えると

$$\phi(x) = B e^{i\alpha x}, \quad \text{for } x < 0, \quad (3.15)$$

$x=0$ での条件は

$$\left. \begin{aligned} \phi(-0) &= \phi(+0) \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=-0} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=+0} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

$$\left. \begin{aligned} M = EI \frac{d^2 \phi}{dx^2} \Big|_{x=0} &= EI h \frac{d^4 \phi}{dx^4} \Big|_{x=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

$$F = EI \frac{d^3 \phi}{dx^3} \Big|_{x=0} = EI h \frac{d^5 \phi}{dx^5} \Big|_{x=0},$$

これから

$$A_2 + A_4 + A_6 = B$$

$$p_2 A_2 + p_4 A_4 + p_6 A_6 = iKtB$$

$$p_2^4 A_2 + p_4^4 A_4 + p_6^4 A_6 = 0$$

$$p_2^5 A_2 + p_4^5 A_4 + p_6^5 A_6 = \frac{F t^5}{EI}, \quad (3.18)$$

これを解いて

$$\alpha = \frac{F t^5}{EI}$$

とある

$$A_2 = \frac{\alpha}{\Delta} [p_6 p_4^* - p_4 p_6^* - i k \pm (p_4^4 - p_6^4)] ,$$

$$A_4 = \frac{\alpha}{\Delta} [p_2 p_6 (p_6^3 - p_2^3) - i k \pm (p_6^4 - p_2^4)] , \quad (3.18)$$

$$A_6 = \frac{\alpha}{\Delta} [p_4 p_2 (p_2^3 - p_4^3) - i k \pm (p_2^4 - p_4^4)] ,$$

$$\Delta = (p_2 - i k \pm)(p_4 - p_6) p_2^4 p_6^4 + (p_4 - i k \pm)(p_6 - p_2) p_4^4 p_6^4 \\ + (p_6 - i k \pm)(p_2 - p_4) p_2^4 p_4^4 ,$$

これから モーメント の $\frac{2}{3}$ 次 の 項 を 計算 して (3.1) の
ように 表 現 され ば よい。

さて (3.14) 右 辺 の 2, 3 項 は x が 大 き く 成 り 得 る 指 数 関 数 的 に

小 さ く 成 る と 考 え ら れ る の で

$$\phi(x) \xrightarrow{x \gg 1} A_2 e^{p_2 \frac{x}{\varepsilon}} , \quad (3.20)$$

この モーメント は

$$M(x) \underset{x \gg 1}{\doteq} E I \frac{h}{\varepsilon^4} A_2 p_2^4 e^{p_2 \frac{x}{\varepsilon}} , \quad (3.21)$$

p_2 は 純 虚 数 で あ る か ら $x \gg 1$ で は モーメント の
絶 対 値 は 無-限 遠 ま で 一 定 と な る !