

✓

11-12

No.

Date 58.10.10

薄.. 物体のまわりの ストークス・オゼーン流れについて

別紙

内容

概要

	頁
1.1 2次元流れの表現	1
1.2 ストークス流れ	5
1.3 レイノルズ数の大きい場合	9
2.1 薄.. 物体のまわりの 3次元流れ	11
2.2 ストークス流れ	15
2.3 レイノルズ数 の大きい場合	17-18

附録 A	2次元 核	A-1~2
" B	3次元 "	B-1~3
" C	オゼーン流れにおける 平板抵抗のオ2近似	C-1~3

概要

ストークス・オゼーニ流れはレイノルズ数の大きい場合は実用性に乏しく、またその特異性も高次元なのでポテンシャル流れに比べて解くのは困難で、単純な形状の物体以外について解かれた例は大変少ない。

（^{平面的}）
いかなる高レイノルズ数のオゼーニ流れの解は数値的には^約2次元になるが、層流境界層理論と相似な解を与えるし、また伴流モデルとしてはすぐれている等粘性流れの基本的性質を研究するには線型的であって解析的に便利であると考えられる。

（^{3次元}）
しかしそれにして一般的な形状では数値計算しか方法がなく尚傾向を見定めるには困難であるので、さらにもう一步進めて物体が非常に薄いと境界条件を線型化してその一般的性質を調べようと言うのが本書の趣旨である。

結果は予想通り、大変簡単でまた境界積分方程式は翼理論等がよく知られた形式となり

それらを解くのも容易であると考えられる。

要するに、ある結論の主なものを拾い上げれば、

i) ストークス流れでは線形的に

前後の非対称性は抵抗に比例する。

渦度 ^{形があると} は物体表面の曲率に比例した分だけ
平板の場合に比し 増える。

それ故 平板抵抗に対する増分は 流入出角
に比例する。(細かくは本文参照)

ii) オセーレ流れについても 平板のそれと形状のそれと
を加えたものになり、形状の影響はポテンシャル
流れによる速度増加に比例している。

又 3次元流れでは所謂縦渦と流れに垂直な
表面内の渦との関係は渦度不変の法則から
導き出す事が出来、大変簡単な表現を得る。

1.1 二次元流れの表現

オセーニ流れは附録 A の核函数を用いて次のように表わされる。

$$u(z) = \int_C \left[u(p) X^{(1)}(z, p) + v(p) Y^{(1)}(z, p) - X U^{(1)}(z, p) - Y V^{(1)}(z, p) + p U \{ u(p) U^{(1)}(z, p) + v V^{(1)}(z, p) \} \frac{\partial X}{\partial z} \right] ds(p),$$

$$v(z) = \int_C \left[u X^{(2)}(z, p) + v Y^{(2)}(z, p) - X U^{(2)}(z, p) - Y V^{(2)}(z, p) + p U \{ u U^{(2)} + v V^{(2)} \} \frac{\partial X}{\partial z} \right] ds(p), \quad (1.1.1)$$

2.12 X, Y は C 上の x, y 方向の流れ係数で

$$\left. \begin{aligned} X &= -p \frac{\partial X}{\partial z} - \mu \frac{\partial y}{\partial z} - 2\mu \frac{\partial v}{\partial z} \\ Y &= -p \frac{\partial y}{\partial z} + \mu \frac{\partial X}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1.1.2)$$

さて物筋本が左右対称形で薄いとしよう。

境界 C は z 平面上で (u, v) は x 軸の上迄解析接続されるものとする。 (1.1.1) の特異点は x 軸上にないものと考えて良い。

(1.1.1) の表現は C をどこにとつても良いのでそれを $|x| \leq 1$ の向きにとるものとする。

$\frac{\partial X}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial y}{\partial z} = \pm 1$, $\frac{\partial X}{\partial z} = \mp 1$ for $y = \pm 0$ であり, (1.1.2) の右辺から C 上 u, v をかけるとは u, v が一箇であるか消えるか。

$$u(\alpha) = \int_{C(y=0)} [\mu S U^{(1)}(\alpha, p) + \rho V^{(1)}(\alpha, p) + u Z^{(1)}(\alpha, p) + v P^{(1)}(\alpha, p)] ds, \quad (1.1.3)$$

$$v(\alpha) = \int_{C(y=0)} [\mu S V^{(1)}(\alpha, p) + \rho V^{(2)}(\alpha, p) + u Z^{(2)}(\alpha, p) + v P^{(2)}(\alpha, p)] ds.$$

となるが、上述の場合の対称性から $y = \pm 0$ の値は任意に選べる。
 を仮定して、

$$u_+ = u_-, \quad v_+ = -v_-, \quad s_+ = -s_-, \quad \rho_+ = \rho_-, \quad (1.1.4)$$

となるから、本論文の対称性を考えると結果、

$$\begin{aligned} u(\alpha) &= +2 \int_{-1}^1 [\mu S U^{(1)}(\alpha, p) + v P^{(1)}(\alpha, p)] dx, \\ v(\alpha) &= +2 \int_{-1}^1 [\mu S V^{(1)}(\alpha, p) + v P^{(2)}(\alpha, p)] dx \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

のように簡単になる。

u の右辺が 2 階微分および v はポテンシャル ϕ をもち

$$\phi(\alpha) = + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 v \log R \, dx, \quad (1.1.6)$$

$$\text{から} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = u_P, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v_P, \quad (1.1.7)$$

とおくと

$$\begin{aligned} u &= u_H + u_P \\ v &= v_H + v_P \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

$$\begin{aligned} u_H &= +2\mu \int_{-1}^1 S U^{(1)(2)}(\alpha, p) dx, \\ v_H & \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

境界条件は物体の中心曲線を

$$y = f(x) \quad \text{for } |x| \leq 1 \quad (1.1.10)$$

とあて薄板物体についての近似として、

$$\begin{aligned} u &= -U \\ v &= U \frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} u &= -U \\ v &= U \frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned}} \right\} \quad (1.1.11)$$

境界積分方程式は (1.1.5) で $y' \rightarrow 0$ としたとき、

$$\begin{aligned} u &= 2\mu \int_{-1}^1 \zeta U''(Q, P) dx + u_p, \\ v &= u_p' = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 v \frac{y' dx}{(x-x')^2 + y'^2} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} u &= 2\mu \int_{-1}^1 \zeta U''(Q, P) dx + u_p \\ v &= u_p' \end{aligned}} \right\} \quad (1.1.12)$$

となつて u_p は境界条件から直ちに与えられる。

$$u_p \Big|_{y=0} = -\frac{U}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{x-x'} dx, \quad \dots (1.1.13)$$

と計算出来るから、結局 (1.1.12) は、

$$-(U + u_p) = u_p = 2\mu \int_{-1}^1 \zeta U''(Q, P) dx, \quad (1.1.14)$$

と書く事が出来る。

$$\text{これをさらに} \quad \zeta = \zeta_F + \zeta_P, \quad \dots (1.1.15)$$

と別けて

$$\begin{aligned} -U \\ -u_p \end{aligned} \Big\} = 2\mu \int_{-1}^1 \left\{ \begin{aligned} \zeta_F \\ \zeta_P \end{aligned} \right\} U''(Q, P) dx, \quad (1.1.16)$$

とすると、 ζ_F は平板に對する解であり、 ζ_P は

形状の影響を示す事になる。

よく知られているように

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta, \quad x = \cos \theta,$$

と展開することができる

$$\frac{df}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \frac{\cos n\theta}{\sin \theta}$$

(1.1.17)

$$U_P(x) = U \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_n \sin n\theta}{\sin \theta}$$

と与えられる。

抵抗を D とすると明らかに

$$D = -\frac{1}{2} \mu \int_{-1}^1 f^2 dx, \quad \text{--- (1.1.18)}$$

(1.1.18) の左辺は $\int_{-1}^1 f^2 dx$ の積分範囲は x の範囲である。

圧力項が 2 次の項として入って来るように見えるから、(1.1.15)

の表式に 運動量定理を適用するとやはり上式となる。

1.2 ストークス流れ

レイノルズ数が小さい時は ストークス流れで扱は(A.6)

のようになるから (1.1.14)は

$$-(U + u_p) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left[\log \frac{B}{L} |x-x'| + 1 \right] dx', \quad (1.2.1)$$

(1.1.18) の力を代入すると

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \log |x-x'| dx' = U + u_p + \frac{D}{4\pi\mu} \left(1 - \log \frac{B}{L} \right), \quad (1.2.3)$$

特に積同とすると

$$u_p = U \left(\frac{B}{L} \right); \text{ constant.}$$

であるから解は

$$\zeta = \frac{D}{2\pi\mu \sin \theta}, \quad \dots \dots \dots (1.2.4)$$

で (1.2.3)より

$$D = \frac{4\pi\mu U \left(1 + \frac{B}{L} \right)}{\log \frac{B}{L} - 1}$$

sgn $\frac{B}{L}$

$$\dots \dots \dots (1.2.5)$$

で解は

$$D = \frac{4\pi\mu U}{\frac{L}{L+B} - \log \frac{B}{L} (L+B)}, \quad \dots \dots \dots (1.2.6)$$

故 細がいほどは合っていないが 大体において合っていると

考えてよからう。

少なくとも $B/L \rightarrow 0$ であっている。

一般の場合は u_p の表現 (1.1.13) を代入した方がよく。

その前に (1.1.15), (1.1.16) のように分離し,

$$D_F = 2\mu \int_{-1}^1 \zeta_F dx, \quad D_P = 2\mu \int_{-1}^1 \zeta_P dx, \quad (1.2.7)$$

とすると D_F は

$$D_F = \frac{4\pi\mu U}{1 - \log \frac{2k}{4}}, \quad (1.2.8)$$

2' ζ_P については

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \zeta_P \log |x-x'| dx + \frac{U}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\frac{df}{dx} dx}{x-x'} = \frac{D_P}{4\pi\mu} (1 - \log \frac{2k}{2}), \quad (1.2.9)$$

まず最初に $\frac{df}{dx}$ が $|x| < 1$ で有限であるならば左辺の2項を部分積分して

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left[\zeta_P - 2U \frac{d^2 f}{dx^2} \right] \log |x-x'| dx &= \frac{-U}{\pi} \left[\frac{df}{dx} \log |x-x'| \right]_{x=-1}^{x=1} \\ &\quad + \frac{D_P}{4\pi\mu} (1 - \log \frac{2k}{2}), \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

この解は

$$\begin{aligned} \zeta_P(x) - 2U \frac{d^2 f}{dx^2} &= \frac{D_P}{2\pi\mu \log 2} (1 - \log \frac{2k}{2}) / \mu c \\ &\quad - 2U \left[\frac{df}{dx} \delta(x-x') \log |x-x'| \right]_{x=-1}^{x=1}, \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

2.12 δ は Dirac の δ 関数である。

したがって $|x| < 1$ では右辺最後の項は0で D_P を

$$D_P = 2\mu \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \zeta_P dx, \quad (1.2.12)$$

と定義すれば

$$D_P = \frac{2\mu U \left[\frac{df}{dx} \right]_{x=-1}^{x=1}}{1 - \log \frac{2k}{4}}, \quad (1.2.13)$$

したがって

$$D = D_p + D_{pr} = \frac{4\pi\mu U}{1 - \log \frac{\gamma k}{4}} \left[1 + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{df}{dx} \right]_{x=1}^{x'} \right], \quad (1.2.14)$$

したがって

$$S(x) = 2U \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2}{\log 2} \left[U + \frac{D}{4\pi\mu} \left(1 - \log \frac{\gamma k}{4} \right) \right] / (x' - 1), \quad (1.2.15)$$

したがって $S = \text{const} = \frac{D}{4\pi\mu}, \quad (1.2.16)$

したがって

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{D}{8\pi\mu} + \frac{1}{U \log 2} \left[U + \frac{D}{4\pi\mu} \left(1 - \log \frac{\gamma k}{4} \right) \right] / (x' - 1), \quad (1.2.17)$$

つまり $\frac{df}{dx}$ は $x \rightarrow 1$ において有限に発散する。

$\frac{df}{dx}$ が $x \rightarrow 1$ において有限に確定して存在しない。この矛盾は成立しない。

したがって $S_p = \frac{1}{x' - 1} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos n\theta, \quad (1.2.18)$

つまり f は (1.1.17) と (1.2.9) と一致する。

$$-\left[\frac{C_0}{2} \log 2 + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n \cos n\theta}{n} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{a_n A'_{1n} \theta}{x' - 1} = \frac{D_p}{4\pi\mu} \left(1 - \log \frac{\gamma k}{4} \right)$$

$$C_0 = \frac{D_p}{12\pi\mu}$$

$$\therefore \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n \cos n\theta}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{a_n A'_{1n} \theta}{x' - 1} = \frac{C_0}{2} \left(1 - \log \frac{\gamma k}{4} \right) \quad (1.2.19)$$

$$\frac{C_0}{2} \left(1 - \log \frac{\gamma k}{4} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) C_{2n+1}$$

$$\therefore C_{2n} = 16\pi \sum_{k=n}^{\infty} (2k+1) a_{2k+1}, \quad C_{2n+1} = \frac{D_p}{4\pi\mu} (2n+1) \sum_{k=n}^{\infty} 2\nu a_{2k+1} \quad (1.2.20)$$

$$\int_{-1}^x \zeta_p dx = C_0(\pi - \theta) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{n} \sin n\theta, \quad \dots (1.2.21)$$

$$\therefore \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^x \zeta_p dx - C_0(\pi - \theta) \right] \frac{dx}{x-x'} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{n} \cos n\theta$$

$$\therefore \int_{-1}^x \zeta_p dx = 2U \frac{df}{dx} = C_0(\pi - \theta) + \frac{C_0}{2} \left(1 - \frac{\partial b}{\partial x}\right) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\text{Const}}{\sin \theta}, \quad (1.2.22)$$

右辺の θ と任意定数は 1 と -1 の値から定められる。

特に C_0 は (1.2.20) から

$$\frac{C_0}{2} \left(1 - l_f \frac{\partial b}{\partial x}\right) = \left[\frac{1}{2} \frac{df}{dx} \sqrt{1-x^2} \right]_{x=-1}^{x=1}, \quad \dots (1.2.23)$$

$$D_p = \frac{2\pi\mu}{1 - l_f \frac{\partial b}{\partial x}} \left[-\frac{df}{dx} \sqrt{1-x^2} \right]_{x=-1}^{x=1}, \quad \left\{ \right.$$

と成って (1.2.13) と形は少し異なってくる。

最後にこの場合 f の奇関数部分、つまり前後非対称性に対しては (1.2.1) から l の奇関数が対応しており、従って (1.1.18) によってそれは抗力に寄与しない。

1.3. レイノルズ数が多い場合.

(A-16) より, レイノルズ数が多い場合充分大きければ

$$U''(x', 0; x, 0) \pm \begin{cases} \frac{1}{2\pi\mu} \sqrt{\frac{\pi}{2L}} |x-x'| & \text{for } x' > x \\ 0 & \text{for } x > x' \end{cases} \quad (1.3.1)$$

したがって (1.1.16) はすゝめ?

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \int_{-1}^{x'} \frac{\zeta(x) dx}{\sqrt{x'-x}} = -(U+u_p) \quad (1.3.2)$$

これはアベール型の積分方程式で解は

$$\zeta(x) = \sqrt{\frac{2\pi\mu}{L}} \frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{(U+u_p) dx'}{\sqrt{x-x'}} \quad (1.3.3)$$

特に 槽内では

$$\zeta(x) = \sqrt{\frac{2\pi\mu}{L(1+x)}} U \left(1 + \frac{B}{L}\right) \quad (1.3.4)$$

$$C_F = \frac{D}{\rho U^2 L} = \frac{4}{\sqrt{\pi R}} \left(1 + \frac{B}{L}\right) \quad (1.3.5)$$

平板の Blasius 式は

$$C_F = \frac{1.328}{\sqrt{R}}$$

この式では

$$C_F = \frac{2.257}{\sqrt{12}}$$

で約 2 倍になる。

(1.3.5) は Piercy 等によって求められた解である。

従等式のべているように, この解は数値的には

約 2 倍となり具合が悪いけれど, Blasius 解に

相似であり、また速度分布もよく似ている。

しかも境界層理論は非線型なのに比べてこれは線型であるから解法は上に見たように大変簡単でかつ薄い物体では形状影響も重ね合せて表わせる。

形状と速度の関係はストークス流れのように直接的には表わせないが(1.3.3)によりポテンシャル流れの速度との関係が簡単に見通せる。

なおこの場合も $\frac{dx}{x}$ が有限の場合とそうでない場合は区別すべきでまた $\frac{dx}{x}$ が有限の場合は U_p が先端付近で対数的に無限大となり、具合が悪い。

つまり(1.3.3)により ξ がおまる際には先端が丸味を持つ形状でなければならぬ。

2.1 薄い物体の周りの3次元流れ

2次元同様、物体は薄くて $z=0$ の $x-y$ 面上の特異点で速度場が表わせるものとしよう。

$x-y$ 面上では

$$\left. \begin{aligned} X &= \mu \zeta + 2\mu \eta \zeta \\ Y &= -\mu \zeta + 2\mu \eta \zeta \\ Z &= -p - 2\mu (\eta_x + \eta_y) \end{aligned} \right\} \quad (2.1.1)$$

となり、

$$u(\mathbf{Q}) = \iint_{z=0} [uX^{(1)} + vY^{(1)} + wZ^{(1)} - xU^{(1)} - yV^{(1)} - zW^{(1)}] dx dy, \quad (2.1.2)$$

$$v(\mathbf{Q}) = \iint_{z=0} [uX^{(2)} + vY^{(2)} + wZ^{(2)} - xU^{(2)} - yV^{(2)} - zW^{(2)}] dx dy,$$

$$w(\mathbf{Q}) = \iint_{z=0} [uX^{(3)} + vY^{(3)} + wZ^{(3)} - xU^{(3)} - yV^{(3)} - zW^{(3)}] dx dy,$$

とかけるが、^{物体は} $z \neq \pm 0$ で左右対称とすると

$$\left. \begin{aligned} X_{+0} &= X_{-0}, \quad Y_{+0} = Y_{-0}, \quad Z_{+0} = -Z_{-0} \\ u_{+0} &= u_{-0}, \quad v_{+0} = v_{-0}, \quad w_{+0} = -w_{-0} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.3)$$

であり、かつ (2.1.1) の辺を2重に Stokes の定理により

u, v, w を一階とすれば消えて2階の形をうる。

$$\left. \begin{aligned} u(\mathbf{Q}) &= 2 \iint [-\mu \eta U^{(1)} + \mu \zeta V^{(1)} - w P^{(1)}] dx dy, \\ v &= 2 \iint [-\mu \eta U^{(2)} + \mu \zeta V^{(2)} - w P^{(2)}] dx dy, \\ w &= 2 \iint [-\mu \eta U^{(3)} + \mu \zeta V^{(3)} - w P^{(3)}] dx dy, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.4)$$

境界条件は 物体の形状を

$$z = f(x, y), \quad (2.1.5)$$

とすれば

$$\left. \begin{aligned} u &= -U \\ v &= 0 \\ w &= U \frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.6)$$

(2.1.4) の方程式は (B.3) より

$$w = \frac{1}{2\pi} \iint w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) dx dy, \quad (2.1.7)$$

より 前) 同様に

$$\phi(a) = \frac{-U}{2\pi} \iint \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx dy}{R}, \quad (2.1.7)$$

なるポテンシャルを $\frac{U}{2\pi} \lambda$ とし

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi(a)}{\partial x} &= u_p, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v_p, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = w_p \end{aligned} \right\} \quad (2.1.8)$$

$$u = u_F + u_p, \quad v = v_F + v_p, \quad w = w_F + w_p$$

とすると

$$u_{Fj} = -2\mu \iint [\eta U^{(j)} - \xi V^{(j)}] dx dy, \quad (2.1.9)$$

($u_{F1} = u_F, u_{F2} = v_F$)
($u_{F3} = w_F$)

そこで (2.1.4) から ζ を計算すると

$$\zeta = u_y - v_x = -2 \iint (\eta \Delta \Phi_y + \xi \Delta \Phi_x) dx dy, \quad (2.1.10)$$

渦度の連続性から

$$\zeta_x + \eta_y + \zeta_z = 0, \quad (2.1.11)$$

であるから (2.1.10) を部分積分すると

$$\zeta = -2 \iint \zeta_2 \Delta \Phi \, dx \, dy, \quad \text{--- (2.1.12)}$$

をうる。

$$\zeta \text{ の境界条件は明らかに } \zeta|_{z=0} = 0, \quad \text{--- (2.1.13)}$$

である。上式を ζ_2 に関する境界積分方程式とみなすと $\Delta \Phi$ の特異性は ζ_2 で準特異核であるからその解は一意的に定まり, (2.1.13) に対しては

$$\zeta_2|_{z=0} = 0, \quad \text{--- (2.1.14)}$$

すなわち

$$\zeta_x + \eta_y = 0 \quad \text{for } z=0, \quad \text{(2.1.15)}$$

これは 結晶渦 ζ と 横渦 η の向の関係として便利である。

(2.1.14) は 結晶渦度は z 軸まわりの渦度としては逃げ出さない事を意味している。

この関係を (2.1.9) に代入して部分積分すると

$$\left. \begin{aligned} u_F(\theta) &= -\frac{1}{4\pi} \iint \eta \, \Phi_{z2} \, dx \, dy \\ v_F(\theta) &= \frac{1}{4\pi} \iint \zeta \, \Phi_{z2} \, dx \, dy \\ w_F(\theta)|_{z=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (2.1.16)}$$

のような簡単な表現が得られる。

(B.10) により $z'=z=0$ では

$$\bar{\Phi}_{zz} \Big|_{\substack{z'=0 \\ z=0}} = \frac{(1 - \frac{x-x'}{R})}{-k(y-y')^2} \left(1 - e^{-k(R+x-x')} \right), \quad (2.1.17)$$

R が充分大きくて wake の外では (B.14) より

$$\bar{\Phi}_{zz} \doteq -\frac{1}{k} \int_{-\infty}^x \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{R} \right) dx, \quad (2.1.18)$$

最終に 抵抗力は 渦周流

$$D = -2\mu \iint \eta \, dx \, dy, \quad (2.1.19)$$

(2.1.15) を 代入すると 3 で表わす事が出来る。

$$D = 2\mu \iint y \xi_x \, dx \, dy = -2\mu \int y \xi \Big|_{x=1} dy, \quad (2.1.20)$$

つまり 物体後端の 縦渦 から 抵抗力が定まる事になる。

が 本当だろうか？

↑ (2.1.19) で $\eta = \eta_0 + \eta(y)$

↑ η_0 は 平均値 と仮定

↑ $\eta(y)$ は 渦の 分布

2.2 ストリーク流れ

ストリーク流れでは (B.6) より

$$\bar{\phi}_{z=0} \Big|_{z=0} = \frac{1}{R} \quad (2.2.1)$$

(2.1.16) は

$$\left. \begin{aligned} u_F &= -\frac{1}{4\pi} \iint \frac{\eta dx dy}{R} \\ v_F &= \frac{1}{4\pi} \iint \frac{\xi dx dy}{R} \end{aligned} \right\} R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad (2.2.2)$$

- 乃 (2.1.7) (2.1.8) より

$$u_p = \frac{U}{2\pi} \iint \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R} dx dy = -\frac{U}{2\pi} \iint \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{1}{R} dx dy,$$

$$v_p = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{R} dx dy = -\frac{U}{2\pi} \iint \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{1}{R} dx dy, \quad (2.2.3)$$

(2.2.2) は $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$ 周辺で 0 とした)

(2.2.2) と合わせ (2.1.6) を代入すると

$$\left. \begin{aligned} -U &= \frac{-1}{4\pi} \iint \left(\eta + 2U \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \frac{dx dy}{R} \\ 0 &= \frac{1}{4\pi} \iint \left(\xi - 2U \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \frac{dx dy}{R} \end{aligned} \right\} (2.2.4)$$

 $\frac{1}{R}$ は準特異核であるから 2式より

$$\xi = 2U \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad (2.2.5)$$

2式は数値的に解くしかないが、ストリーク流れでは

$$U = \frac{1}{2\pi} \int_{-B/2}^{B/2} \left[\eta + 2U \frac{\partial f}{\partial x^2} \right] \lg |y-y'| dy, \quad \dots (2.2.6)$$

$$\therefore \frac{1}{2}\eta + U \frac{\partial f}{\partial x^2} = \frac{2U}{B} \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{B}\right)^2}, \quad \dots (2.2.7)$$

$$\therefore D = 4\pi\mu U \int_{x=-L}^{x=L} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] dy - 4\pi\mu UL \quad \text{sign?} \quad (2.2.8)$$

逆にアスペクト比が充分大きいと (2.2.7) の右辺の (y, B) を (x, L) に置きかえた解がえられ, (2.2.8) 右辺が2項の L を B に置きかえたものが抵抗力となる。

以上 $\frac{df}{dx}$ が周回で0 (たぶん (2.2.8) 右辺第1項はその意味では0であ) としたのびりねが無限大の場合は細かく調べ直さねばならない。

また2の場合 (2.1.20) は (2.2.8) の右辺が1項しかたえない。

これは (2.2.5) の解が具合が悪いので (2.2.4) のホ2式に向きがあり、それを

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx dy = \frac{U}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial f}{\partial x} dx dy, \quad \dots (2.2.9)$$

としてストリツコフ法を適用すれば一致する。

たぶん 齊次解が出て来て

2.3 ヲイノルズ"数"の大きい場合

レノルズ"数"の大きい時は (2.1.17) は

$$\Phi_{zz} \Big|_0 = \frac{(1 - \frac{x-x'}{R})}{k(y-y')^2} \left(1 - e^{-\frac{k(y-y')^2}{2|x-x'|}}\right),$$

であるから さらに 巾隔が 狭い とすると

$$\Phi_{zz} \Big|_0 = \begin{cases} \frac{2}{k(y-y')^2} \left(1 - e^{-\frac{k(y-y')^2}{2|x-x'|}}\right) & \text{for } x > x' \\ 0 & \text{for } x < x' \end{cases} \quad (2.3.1)$$

よって (2.1.16) は

$$\begin{aligned} u_H &= \frac{-1}{2\pi k} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \int_{-1}^{x'} \frac{2}{(y-y')^2} \left(1 - e^{-\frac{k(y-y')^2}{2|x-x'|}}\right) dx dy \\ v_H &= \frac{1}{2\pi k} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \int_{-1}^x \left[\dots \right] dx dy \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

$$2.2 \quad I = \int \frac{1 - e^{-\frac{k(y-y')^2}{2|x-x'|}}}{(y-y')^2} dy, \quad \dots (2.3.3)$$

この積分を考えると.

$$\frac{\partial I}{\partial x} = + \frac{k}{2(x-x')^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k(y-y')^2}{2|x-x'|}} dy = \frac{\sqrt{k\pi}}{\sqrt{2}} (x-x')^{-\frac{3}{2}}$$

$$\therefore I = \int \frac{dy}{(y-y')^2} - \frac{\sqrt{2k\pi}}{\sqrt{x'-x}} f(y-y'), \quad \dots (2.3.4)$$

あるいは $k \gg 1$ とすると

$$I \doteq -\sqrt{\frac{2k\pi}{x'-x}} f(y-y'), \quad (2.3.5)$$

$$\therefore u_H \doteq \frac{1}{\sqrt{2\lambda + 2}} \int_{-1}^{x'} \frac{z(x'')}{\sqrt{x' - x''}} dx''$$

$$u_{py} = u_{px}$$

$$v_H \doteq \frac{-1}{\sqrt{2\lambda + 2}} \int_{-1}^{x'} \frac{z(x'')}{\sqrt{x' - x''}} dx''$$

(2.3.6)

これは 2 次元と同形で 解も同形である。

それ故 例えば 平版では 2 次元解を 幅を付けただけの 12 になるだけで edge effect のようなものは出て来ない。
それを求めるには 少くとも (2.3.2) を 直接 解かねばならない。(2.4.1) (2.4.4) とおけるだろう)

このような 解 を求める時 (B.14) の関係は (i) 物理的
との 類推を 助ける であろう。

附録 A 2次元 オセージ 流の 基底 特異性

$$P \equiv (x, y), \quad Q \equiv (x', y'), \quad R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad \text{と} \quad (1)$$

$$4\pi\mu \tilde{U}_1^{(1)}(P, Q) = 4\pi\mu U_1(Q, P) = -\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} R + 2\bar{\Phi}(Q, P) \right) + \frac{\partial \bar{\Phi}(Q, P)}{k \partial x},$$

$$\begin{aligned} 4\pi\mu \tilde{V}^{(1)}(P, Q) &= 4\pi\mu \tilde{U}^{(1)}(Q, P) = 4\pi\mu V^{(1)}(Q, P) = 4\pi\mu U^{(1)}(Q, P) \\ &= +\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} R + 2\bar{\Phi}(Q, P) \right) + \frac{\partial \bar{\Phi}(Q, P)}{k \partial y}, \end{aligned} \quad (A.1)$$

$$\odot \quad 4\pi\mu \tilde{V}^{(2)}(P, Q) = 4\pi\mu V^{(2)}(Q, P) = +\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} R + 2\bar{\Phi}(Q, P) \right) + \frac{\partial \bar{\Phi}(Q, P)}{k \partial x},$$

$$k = \frac{\mu U}{2\pi}, \quad \bar{\Phi}(Q, P) = K_0(kR) e^{-k(x-x')} \quad (A.2)$$

$$\Delta \bar{\Phi}(Q, P) = 2k \frac{\partial}{\partial x} \bar{\Phi}(Q, P) = 0 \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}^{(1)}(P, Q) &= P^{(1)}(Q, P) = +\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} R \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} R \right) \\ \tilde{P}^{(2)}(P, Q) &= P^{(2)}(Q, P) = +\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} R \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} R \right) \end{aligned} \quad (A.3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Z}^{(1)}(P, Q) &= -\tilde{U}_y^{(1)}(P, Q) + \tilde{V}_x^{(1)}(P, Q) = U_y^{(1)}(Q, P) - V_x^{(1)}(Q, P) = Z^{(1)}(Q, P) \\ &= \frac{1}{2\pi\mu} \bar{\Phi}_y(Q, P) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{Z}^{(2)}(P, Q) &= -\tilde{U}_y^{(2)}(P, Q) + \tilde{V}_x^{(2)}(P, Q) = U_y^{(2)}(Q, P) - V_x^{(2)}(Q, P) = Z^{(2)}(Q, P) \\ &= -\frac{1}{2\pi\mu} \bar{\Phi}_x(Q, P), \end{aligned} \quad (A.4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}^{(1)}(P, Q) &= -\tilde{P}^{(1)}(P, Q) x_n - \tilde{Z}^{(1)}(P, Q) y_n - 2\mu \frac{\partial}{\partial y} \tilde{V}^{(1)}(P, Q), \\ \tilde{Y}^{(1)}(P, Q) &= -\tilde{P}^{(2)}(P, Q) y_n + \tilde{Z}^{(1)}(P, Q) x_n + 2\mu \frac{\partial}{\partial x} \tilde{U}^{(1)}(P, Q), \end{aligned} \quad (A.5)$$

また $X^{(1)}(Q, P), Y^{(1)}(Q, P)$ と 2次元 オセージ 流の 基底 特異性 2 の 記号 を 使う

$$X^{(1)}(Q, P) = \tilde{X}^{(1)}(P, Q), \quad Y^{(1)}(Q, P) = \tilde{Y}^{(1)}(P, Q)$$

$kR \rightarrow 0$ では

$$\bar{\Phi}(Q, P) \doteq -\log\left(\frac{\gamma k R}{2}\right), \quad \gamma: \text{アキラ-定数}$$

$$\begin{aligned} 4\pi\mu U''(Q, P) &\doteq -\log\left(\frac{\gamma k R}{2}\right) + \frac{(x-x')^2}{R^2}, \\ 4\pi\mu V''(Q, P) &= 4\pi\mu U^{(2)}(Q, P) \doteq \frac{(x-x')(y-y')}{R^2}, \\ 4\pi\mu V^{(2)}(Q, P) &\doteq -\log\left(\frac{\gamma k R}{2}\right) - \frac{(x-x')^2}{R^2}, \end{aligned} \quad (A.6)$$

$$Z'''(Q, P) \doteq -\frac{1}{2\pi\mu} \frac{\partial}{\partial y} \log R, \quad Z^{(2)}(Q, P) \doteq +\frac{1}{2\pi\mu} \frac{\partial}{\partial x} \log R, \quad (A.7)$$

$$\begin{aligned} X''(Q, P) &\doteq -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \log R - 2\mu \frac{\partial}{\partial s} V''(Q, P), \\ X^{(2)}(Q, P) &\doteq \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} \log R - 2\mu \frac{\partial}{\partial s} V^{(2)}(Q, P), \\ Y''(Q, P) &\doteq -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} \log R + 2\mu \frac{\partial}{\partial s} U^{(2)}, \\ Y^{(2)}(Q, P) &\doteq \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \log R + 2\mu \frac{\partial}{\partial s} U^{(2)} \end{aligned} \quad (A.8)$$

 $kR \gg 1$ では

$$\bar{\Phi}(Q, P) \doteq \sqrt{\frac{\pi}{2kR}} e^{-k(R+x-x')} \quad (A.9)$$

$$4\pi\mu U''(Q, P) \doteq -\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \log R + \left(1 - \frac{x-x'}{R}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2kR}} e^{-k(R+x-x')}$$

$$4\pi\mu V''(Q, P) = 4\pi\mu U^{(2)}(Q, P) \doteq -\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial y} \log R - \left(1 + \frac{y-y'}{R}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2kR}} e^{-k(R+x-x')}$$

$$4\pi\mu V^{(2)}(Q, P) \doteq \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial x} \log R + \left(1 + \frac{x-x'}{R}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2kR}} e^{-k(R+x-x')} \quad (A.10)$$

$$2\pi\mu Z'''(Q, P) \doteq -\frac{y-y'}{R} \sqrt{\frac{\pi k}{2R}} e^{-k(R+x-x')}, \quad 2\pi\mu Z^{(2)}(Q, P) \doteq \left(1 + \frac{x-x'}{R}\right) \sqrt{\frac{\pi k}{2R}} e^{-k(R+x-x')} \quad (A.11)$$

附録 13 3次元流れの基礎的特異性

$$8\pi\mu U_R^{(i)}(Q, P) = \delta_{jk} \Delta \Phi - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \Phi, \quad \dots (B.1)$$

$$\Delta \Phi + 2R \frac{\partial}{\partial x} \Phi(Q, P) = \frac{2}{R}, \quad R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$

$$\Delta \Phi(Q, P) = \frac{2}{R} e^{-k(R+x-x')}$$

$$\Phi(Q, P) = \frac{1}{k} \int_0^{k(R+x-x')} \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha} d\alpha$$

$$\left. \begin{aligned} (B.2) \\ x_1 &\equiv x \\ x_2 &\equiv y \\ x_3 &\equiv z \end{aligned} \right\}$$

$$P^{(i)}(Q, P) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{R} \right), \quad \dots (B.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta^{(1)} &= 0, \quad \eta^{(1)} = \frac{\Delta \Phi_z}{8\pi\mu}, \quad \zeta^{(1)} = -\frac{\Delta \Phi_y}{8\pi\mu}, \\ \zeta^{(2)} &= -\frac{\Delta \Phi_x}{8\pi\mu}, \quad \eta^{(2)} = 0, \quad \zeta^{(2)} = \frac{\Delta \Phi_z}{8\pi\mu}, \\ \zeta^{(3)} &= \frac{\Delta \Phi_y}{8\pi\mu}, \quad \eta^{(3)} = -\frac{\Delta \Phi_x}{8\pi\mu}, \quad \zeta^{(3)} = 0. \end{aligned} \right\} (B.4)$$

$$X^{(i)} = -P^{(i)} x_n - \mu \zeta^{(i)} y_n + \mu \eta^{(i)} z_n + 2\mu [V_x^{(i)} y_n - V_y^{(i)} x_n + W_x^{(i)} z_n - W_z^{(i)} x_n],$$

$$Y^{(i)} = -P^{(i)} y_n - \mu \zeta^{(i)} x_n - \mu \zeta^{(i)} z_n + 2\mu [U_y^{(i)} x_n - U_x^{(i)} y_n + W_y^{(i)} z_n - W_z^{(i)} y_n],$$

$$Z^{(i)} = -P^{(i)} z_n + \mu \zeta^{(i)} y_n - \mu \eta^{(i)} x_n + 2\mu [U_z^{(i)} x_n - U_x^{(i)} z_n + V_z^{(i)} y_n - V_y^{(i)} z_n]$$

(B.5)

$$\text{但し } U^{(i)} = U_1, \quad V^{(i)} = U_2, \quad W^{(i)} = U_3$$

$$kR \rightarrow 0 \text{ 時}$$

$$\Delta \bar{\Phi} \doteq \frac{2}{R}, \quad \bar{\Phi} \doteq R + x - x' \quad (B.6)$$

$$8\pi\mu U_R^{(1)} \doteq \frac{2}{R} \delta_{jk} - \frac{\partial^2 R}{\partial x_j \partial x_k} \quad (B.7)$$

$$\zeta^{(1)} \doteq 0, \quad \eta^{(1)} \doteq \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R}, \quad \gamma^{(1)} \doteq \frac{-1}{4\pi\mu} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{R},$$

$$\zeta^{(2)} = -\frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{R}, \quad \eta^{(2)} = 0, \quad \gamma^{(2)} \doteq \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R}, \quad (B.8)$$

$$\zeta^{(3)} = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{R}, \quad \eta^{(3)} = -\frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R}, \quad \gamma^{(3)} = 0,$$

$$kR \gg 1 \text{ 時}$$

$$\Delta \bar{\Phi} = \begin{cases} \frac{2}{R} e^{-\frac{k\omega^2}{2|x-x'|}} & \text{for } x' > x \\ 0 & \text{for } x > x' \end{cases} \quad (B.9)$$

$$\omega^2 \doteq (y-y')^2 + (z-z')^2,$$

$$\bar{\Phi}_x = \frac{1 - e^{-\frac{k\omega^2}{2(R+x-x')}}}{kR} \doteq \begin{cases} \frac{1}{kR} (1 - e^{-\frac{k\omega^2}{2|x-x'|}}) & \text{for } x > x' \\ \frac{1}{kR} & \text{for } x < x' \end{cases}$$

$$\bar{\Phi}_y = \frac{(y-y')(1 - e^{-\frac{k\omega^2}{2(R+x-x')}})}{kR(R+x-x')} \doteq \frac{(y-y')(1 + \frac{x-x'}{R})}{k\omega^2} (1 - e^{-\frac{k\omega^2}{2|x-x'|}})$$

$$\bar{\Phi}_z = \frac{(z-z')(1 - \frac{x-x'}{R})}{k\omega^2 R} (1 - e^{-\frac{k\omega^2}{2(R+x-x')}}) \quad (B.10)$$

$$\Delta \bar{\Phi}_x \doteq \frac{-k\omega^2}{(x-x')^2 R} e^{-\frac{k\omega^2}{2|x-x'|}}, \quad \Delta \bar{\Phi}_y \doteq -\frac{2k(y-y')}{R|x-x'|} e^{-\frac{k\omega^2}{2|x-x'|}}, \quad (B.11)$$

$$\Delta \bar{\Phi}_z \doteq -\frac{2k(z-z')}{R|x-x'|} e^{-\frac{k\omega^2}{2|x-x'|}}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_{xx} &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R} + \frac{R+x-x'}{R^2} e^{-\frac{R(x-x')}{2\sqrt{R^2-x^2}}} = \frac{(1+\frac{x-x'}{R})}{R} e^{-\frac{R(x-x')}{2\sqrt{R^2-x^2}}} \\ \bar{\Phi}_{xy} &= \frac{y-y'}{R^2} e^{-\frac{R(x-x')}{2\sqrt{R^2-x^2}}}, \quad \bar{\Phi}_{xz} = \frac{z-z'}{R^2} e^{-\frac{R(x-x')}{2\sqrt{R^2-x^2}}} \\ \bar{\Phi}_{yy} &= \frac{(y-y')^2}{2\omega^2 R^2} (1 - \frac{x-x'}{R}) e^{-\frac{R(x-x')}{2\sqrt{R^2-x^2}}}, \quad \bar{\Phi}_{zz} = \bar{\Phi}_{yy} \text{ で } y \text{ と } z \text{ に } \frac{R}{2\omega^2} \text{ を } \frac{R}{2\omega^2} \text{ だけ } \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U_1^{(1)} &= \frac{(1 - \frac{y-y'}{R})}{R} e^{-\frac{R(x-x')}{2\sqrt{R^2-x^2}}} \\ U_2^{(2)} = V_1^{(1)} &= -\frac{(y-y')^2}{R^2} e^{-\frac{R(x-x')}{2\sqrt{R^2-x^2}}} \\ U_3^{(3)} = W_1^{(1)} &= \text{式 (B.12) で } y \text{ と } z \text{ に } \frac{R}{2\omega^2} \text{ を } \frac{R}{2\omega^2} \text{ だけ } \\ V_2^{(2)} &= \frac{1}{R} \left\{ 2 - \frac{(y-y')^2}{\omega^2} (1 - \frac{x-x'}{R}) \right\} e^{-\frac{R(x-x')}{2\sqrt{R^2-x^2}}} \\ W_3^{(3)} &= \text{式 (B.13) で } y \text{ と } z \text{ に } \frac{R}{2\omega^2} \text{ を } \frac{R}{2\omega^2} \text{ だけ } \\ V_3^{(3)} = W_2^{(2)} &= -\frac{(y-y')(z-z')}{R^2} e^{-\frac{R(x-x')}{2\sqrt{R^2-x^2}}} \end{aligned} \quad (B.13)$$

なお、wake の外では、

$$\Delta \Phi = 0, \quad \Delta \bar{\Phi}_x = 0.$$

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_x &= \frac{1}{R}, \quad \bar{\Phi}_y = \frac{y-y'}{R\omega^2 R} (1 - \frac{x-x'}{R}), \quad \bar{\Phi}_z = \frac{z-z'}{R\omega^2 R} (1 - \frac{x-x'}{R}) \\ \bar{\Phi}_y &= \frac{1}{R} \int_x^\infty \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{R} \right) dx, \quad \bar{\Phi}_z = \frac{1}{R} \int_x^\infty \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R} \right) dx \end{aligned} \quad (B.14)$$

$$\text{よって } U_1^{(1)} = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R}, \quad U_1^{(1)} = -\frac{1}{4\pi R} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R}$$

$$U_2^{(0)} = +\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{R}, \quad U_3^{(0)} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R}$$

$$V_2^{(2)} = +\frac{1}{4\pi} \int_x^\infty \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{R} \right) dx, \quad W_3^{(3)} = \frac{1}{4\pi} \int_x^\infty \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{R} \right) dx,$$

附録C オセーニ流れにおける平板抵抗のオセーニ近似

オセーニを考えると、所謂オセーニ近似から出発して、逐次近似的にナビエ-ストークスの厳密解を求めようと言ふ事になりあつた。

即ち、ナビエ-ストークスの解はオセーニ後により、次の表換では*

$$\begin{aligned} u(Q) &= \int_C (X \hat{U}^{(n)} + Y \hat{V}^{(n)}) ds + P \iint_D \left(v \hat{U}^{(n)} - \frac{u \hat{V}^{(n)}}{(u+V)} \right) dx dy, \\ v(Q) &= \int_C (X \hat{U}^{(n)} + Y \hat{V}^{(n)}) ds + P \iint_D \left(v \hat{V}^{(n)} - \frac{u \hat{V}^{(n)}}{(u+V)} \right) dx dy, \end{aligned} \quad (21)$$

のように表わされる。(右辺第2項の少し変な形は、オセーニからの近似に注意せよ)

各右辺第2項がオセーニ流れに対する補正項であり、これらの項は又 Pv 、 $-Pu$ がラッダ-コッシーの定理により、適度よく働く x, y 方向の力である事を考えれば容易に理解出来る。

さてレイノルズ数が充分大きいとすれば、オセーニ流れは層流境界層理論によるものと相似となり、特に良い併流模型として知られている。

その時上式右辺第2項の P は殆ど境界層の

内部だけに限られる。

* 別添「粘性流体...」にオセーニ流、p. 2.2.1 (外添資料)

よって右辺第2項を右辺は"次のように近似的に積分してもよいだろう。

$$\rho \iint_D (u \tilde{U}^{(n)} - v \tilde{V}^{(n)}) dx dy = \rho \int_C \left[\left(\int_0^s u dx \right) \tilde{U}^{(n)} - \left(\int_0^s v dy \right) \tilde{V}^{(n)} \right] ds \quad (B.2)$$

さてこの $\int_0^s u dx$ 等は境界層理論の仮定により決定する事によれば"次の近似を得る事が出来る。

境界層理論では遠場の表現が直接得られない
 (後流の表現と共に)
 のに比べてこの方法では直ちに得られるのが利点である。

さてここで(B.2)のかわりに もう一度ナビヤ-ストークスの方程式を導入して

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} + \rho v \gamma &= \mu \Delta u \\ \frac{\partial G}{\partial y} + \rho(u + U) \gamma &= \mu \Delta v \end{aligned} \right\} \quad (C.3)$$

$$G = \frac{\rho}{2} [(u+U)^2 + v^2] + p,$$

これを代入すると $\tilde{U}^{(n)}, \tilde{V}^{(n)}$ は連続の定理と一致するが、

$$\begin{aligned} \rho \iint_D \left[\int_0^s v \tilde{U}^{(n)} - \int_0^s (u+U) \tilde{V}^{(n)} \right] dx dy &= 1 \\ &= \iint_D \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \mu \Delta u \right) \tilde{U}^{(n)} + \left(\frac{\partial G}{\partial y} - \mu \Delta v \right) \tilde{V}^{(n)} \right] dx dy \\ &= \int_C G \left[\tilde{U}^{(n)} \frac{\partial x}{\partial s} + \tilde{V}^{(n)} \frac{\partial y}{\partial s} \right] ds - \mu \iint_D (\Delta u \tilde{U}^{(n)} + \Delta v \tilde{V}^{(n)}) dx dy, \end{aligned} \quad (C.4)$$

特に平板では

$$X = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad Y=0, \quad (C.5)$$

となり、(B.1)は

$$u \Big|_0 = \int_0 X \tilde{U}^{(1)} ds - \mu \iint_D \delta u \tilde{U}^{(1)} dx dy, \quad (C.6)$$

となるから $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \doteq \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (C.7)$

とすると 結局

$$u \Big|_0 = 2 \int_0 X \tilde{U}^{(1)} ds \doteq 4 \int_0 X \tilde{U}^{(1)} dx, \quad (C.8)$$

となる。

つまり 右辺が2項は右辺が1項と同じになる。

それ故 前出文献のように 右辺が2項を無視した
オセーニ流れでの抵抗係数は

$$C_{F0} = \frac{4}{\sqrt{\pi R}} = \frac{2.254}{\sqrt{R}}, \quad \text{Rivlin 数}, \quad (C.9)$$

であつたから、この近似では μ の半分になつて

$$C_F = 1.128/\sqrt{R} \quad , \quad (C.10)$$

となり、ブラジウス 公式 の 1.328 に 大要近くなる。

しかも (B.8) の漸近展開によつて 遠場の展開も
容易に得られる。