

1. ストークス流れの表現

速度を u_j ($j=1,2,3$), 圧力を p とすると運動方程式は

$$\mu \nabla^2 u_j = \frac{\partial p}{\partial x_j} \quad (1.1)$$

$$x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv y, \quad x_3 \equiv z$$

連続の方程式は

$$\sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.2)$$

$$(1.1) \text{ と } (1.2) \text{ より } \nabla^2 p = 0 \quad (1.3)$$

$$\text{よって 今 } p = \mu \nabla^2 \phi \quad (1.4)$$

なる関数 ϕ を導入し, u'_j を未知関数とすると

$$u_j = \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + u'_j \quad (1.5)$$

のように表わされる。

方向余弦 (l_j) の平面に働く各軸方向の応力 τ_{ji} は

$$\tau_j = \sum_i \tau_{ji} l_i \quad (1.6)$$

$$\tau_{ji} = \mu \tau_{jji} - p \delta_{ij}, \quad \left. \begin{array}{l} \delta_{ij} = 0 \text{ for } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 \text{ for } i = j \end{array} \right\} \quad (1.7)$$

$$\tau_{jji} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \tau_{jij}$$

$$\text{今} \quad E(u_j, u_j') = \frac{\mu}{2} \iint_D \left[\sum_{i,j} \gamma_{ij} \gamma_{ij}' \right] dx dy dz; \quad (1.8)$$

$$\left(\gamma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \gamma_{ij}' = \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}, \right)$$

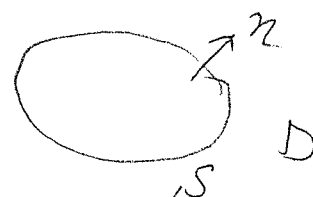
なる積分を定義しておこう。

特に $u_j = u_j'$ は 散逸エネルギーである。

先ず 明らか。

$$E(u_j, u_j') = E(u_j', u_j), \quad (1.9)$$

部分積分して (1.1), (1.2) を代入すると



$$E(u_j, u_j') = - \iint_S \sum_i u_i \tau_i' dS = - \iint_S \sum_j u_j' \tau_j dS, \quad (1.10)$$

特に 境界条件として

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = -U, \\ u_2 = u_3 = 0, \end{array} \right\} \text{ on } S, \quad (1.11)$$

とする。

$$\left. \begin{array}{l} E(u_j, u_j) \equiv E(u_j) = +U \int_S \tau_1 dS = RU, \\ R = \int_S \tau_1 dS, \end{array} \right\} (1.12)$$

となり R は 抵抗 となる。

つまり 抵抗 R のなる仕事は 粘性による減衰に等しい。

次に (1.10) において u_j に 附録 A の被度数 を代入すれば
点 Q のまわりの積分が得られて、

$$u_R(Q) = \sum_j \iint_S \left[u_j(p) \frac{T_j^{(B)}(p, Q)}{\mu} - \frac{T_j(p)}{\mu} U_j^{(B)}(p, Q) \right] dS(p), \quad (1.13)$$

なる表現を得る。

物体の内部で (1.11) となる速度場 (1.13) の右辺が 1 項 $\frac{T_j(p)}{\mu}$ (1.10) に等しい
物体の内部に速度場が 0 になるように変更すれば、

$$\sum_j \iint_S u_j(p) \frac{T_j^{(B)}(p, Q)}{\mu} dS_p = 0 \quad \text{for } Q \in D, \quad (1.14)$$

すなわち — 流れ場の中では

$$u_R(Q) = - \sum_j \iint_S \frac{T_j(p)}{\mu} U_j^{(B)}(p, Q) dS_p, \quad (1.15)$$

なる表現が可能である。

この圧力 p は

$$p(Q) = - \sum_j \iint_S T_j P_j(p, Q) dS_p, \quad (1.16)$$

すなわち

$$p_R(Q) = - \sum_j \iint_S \frac{T_j}{\mu} Z_j^{(B)} dS_p, \quad (1.17)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{例} \quad \zeta_1 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \quad \zeta_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \zeta_3 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{aligned} \right\}$$

回転体の軸対称流れでは、

$$x_2 = r \cos \theta, \quad x_3 = r \sin \theta, \quad (1.18)$$

の5.3.12 円筒座標系を導入し、

$$\left. \begin{aligned} u_2 \cos \theta + u_3 \sin \theta &= u_r \\ r T_1 = T_x, \quad r \left(\frac{T_2}{r} \cos \theta + \frac{T_3}{r} \sin \theta \right) &= T_r, \quad \frac{T_2}{r} = T_r \cos \theta, \quad \frac{T_3}{r} = T_r \sin \theta \\ -\zeta_2 \sin \theta + \zeta_3 \cos \theta &= \zeta, \quad \zeta_1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

とすれば、

$$u_1(r) = - \int_c \left[T_x V_1^{(1)} + T_r V_r^{(1)} \right] ds, \quad (1.20)$$

$$V_1^{(1)}(p, \theta) = \int_0^{2\pi} U_1^{(1)}(p, \theta) \# d\theta$$

$$V_r^{(1)}(p, \theta) = \int_0^{2\pi} \left(U_2^{(1)} \cos \theta + U_3^{(1)} \sin \theta \right) \# d\theta,$$

$$u_r(r) = - \int_c \left[T_x V_1^{(r)} + T_r V_r^{(r)} \right] ds,$$

$$V_1^{(r)} = \int_0^{2\pi} \left[\cos \theta' U_1^{(2)} + \sin \theta' U_1^{(3)} \right] \# d\theta. \quad (1.21)$$

$$V_r^{(r)} = \int_0^{2\pi} \left[\cos \theta \cos \theta' U_2^{(2)} + \cos \theta \sin \theta' U_3^{(2)} + \sin \theta \cos \theta' U_2^{(3)} + \sin \theta \sin \theta' U_3^{(3)} \right] \# d\theta$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 &= - \int_c \left[T_x Y_1^{(1)} + T_r Y_r^{(1)} \right] ds \\ Y_1^{(1)} &= \int_0^{2\pi} Z_1^{(1)} \# d\theta, \quad Y_r^{(1)} = \int_0^{2\pi} \left[Z_2^{(1)} \cos \theta + Z_3^{(1)} \sin \theta \right] \# d\theta \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

$$\zeta_r = - \int_C (\bar{T}_X Y_1^{(r)} + \bar{T}_r Y_r^{(r)}) ds,$$

$$Y_1^{(r)} = \int_0^{2\pi} [Z_1^{(2)} \cos \theta' + Z_1^{(3)} \sin \theta'] \# d\theta,$$

$$Y_r^{(r)} = \int_0^{2\pi} [\cos \theta \cos \theta' Z_2^{(2)} + \cos \theta' \sin \theta Z_3^{(2)} + \cos \theta \sin \theta' Z_2^{(3)} + \sin \theta \sin \theta' Z_3^{(3)}] \# d\theta,$$

(1.23)

$$\zeta = - \int_C (\bar{T}_X Y_1^{(r)} + \bar{T}_r Y_r^{(r)}) ds,$$

$$Y_1^{(r)} = \# \int_0^{2\pi} [-Z_1^{(2)} \sin \theta' + Z_1^{(3)} \cos \theta'] d\theta$$

$$Y_r^{(r)} = \# \int_0^{2\pi} [\sin \theta' (\cos \theta Z_2^{(2)} + \sin \theta Z_3^{(2)}) + \cos \theta' (\cos \theta Z_2^{(3)} + \sin \theta Z_3^{(3)})] d\theta.$$

(1.24)

$$\zeta_1 = \zeta_r = 0,$$

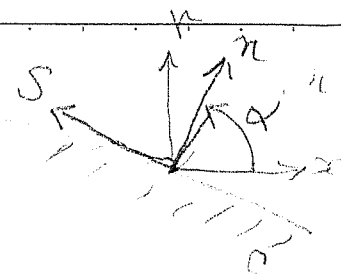
(1.25)

2.5.12

$$\left. \begin{aligned} U_n &= U_1 \cos \alpha + U_r \sin \alpha \\ U_s &= -U_1 \sin \alpha + U_r \cos \alpha \end{aligned} \right\} (1.26)$$

$$\left. \begin{aligned} T_x &= T_n \cos \alpha - T_s \sin \alpha \\ T_y &= T_n \sin \alpha + T_s \cos \alpha \end{aligned} \right\} (1.27)$$

$$\left. \begin{aligned} T_n &= T_x \cos \alpha + T_y \sin \alpha \\ T_s &= -T_x \sin \alpha + T_y \cos \alpha \end{aligned} \right\}$$



$$\cos \alpha = \frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial s}$$

$$\sin \alpha = -\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial n}$$

とあくと

$$\left. \begin{aligned} U_n(Q) &= - \int_C [T_n U_n^{(n)} + T_s U_s^{(n)}] ds, \\ U_s(Q) &= - \int_C [T_n U_n^{(s)} + T_s U_s^{(s)}] ds, \end{aligned} \right\} (1.28)$$

$$\left. \begin{aligned} U_n^{(n)} &= (V_1^{(1)} \cos \alpha + V_r^{(1)} \sin \alpha) \cos \alpha' + (V_1^{(1)} \sin \alpha + V_r^{(1)} \cos \alpha) \sin \alpha' \\ U_s^{(n)} &= (-V_1^{(1)} \sin \alpha + V_r^{(1)} \cos \alpha) \cos \alpha' + (-V_1^{(1)} \cos \alpha + V_r^{(1)} \sin \alpha) \sin \alpha' \\ U_n^{(s)} &= -(V_1^{(1)} \cos \alpha + V_r^{(1)} \sin \alpha) \sin \alpha' + (V_1^{(1)} \sin \alpha + V_r^{(1)} \cos \alpha) \cos \alpha' \\ U_s^{(s)} &= -(V_1^{(1)} \sin \alpha + V_r^{(1)} \cos \alpha) \sin \alpha' + (V_1^{(1)} \cos \alpha + V_r^{(1)} \sin \alpha) \cos \alpha' \end{aligned} \right\} (1.29)$$

$$Z = - \int_C (T_n Z_n + T_s Z_s) ds, \quad (1.30)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_n &= Y_r^{(a)} \cos \alpha' + Y_r^{(b)} \sin \alpha' \\ Z_s &= -Y_r^{(a)} \sin \alpha' + Y_r^{(b)} \cos \alpha' \end{aligned} \right\} (1.31)$$

(1.6)の境界力についてもう一度考えてみよう。

suffix で区別するのは見通しが悪いので

$$\left(\begin{array}{l} T_1 \equiv X, T_2 \equiv Y, T_3 \equiv Z, \quad u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w \\ l_1 = l, l_2 = m, l_3 = n, \quad x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z \end{array} \right)$$

に依りて考えよう。

(1.6)は

$$\left. \begin{aligned} X &= (\sum u_x - p)l + \mu(u_y + v_x)m + \mu(u_z + w_x)n \\ Y &= \mu(u_y + v_x)l + (\sum v_y - p)m + \mu(w_y + v_z)n \\ Z &= \mu(u_z + w_x)l + \mu(w_y + v_z)m + (\sum w_z - p)n \end{aligned} \right\} (1.32)$$

とかけるから

$$\xi = w_y - v_z, \quad \eta = u_z - w_x, \quad \zeta = v_x - u_y$$

とて表せるやうに

$$\left. \begin{aligned} X &= -pl + \mu \xi n - \mu \zeta m + 2\mu(u_x l + v_x m + w_x n) \\ Y &= -pm + \mu \xi l - \mu \zeta n + 2\mu(u_y l + v_y m + w_y n) \\ Z &= -pn + \mu \xi m - \mu \eta l + 2\mu(u_z l + v_z m + w_z n) \end{aligned} \right\} (1.33)$$

u, v, w の物体表面に沿った微係数は0であるから

例えば $v_x = \frac{\partial v}{\partial n} \frac{\partial x}{\partial n}, \quad w_y = \frac{\partial w}{\partial n} \frac{\partial y}{\partial n}$ 等となる。

よって 例えば (1.33) の式 の最後の項では

連続の式も考えて

$$u_x l + v_x m + w_x n = (v_x m - u_y l) + (w_x n - w_z l) = 0, \quad (1.34)$$

他の同様な項についても同じであるから

$$\left. \begin{aligned} X &= -p_l + \mu(\zeta_n - \xi_m) \\ Y &= -p_m + \mu(\xi_l - \zeta_n) \\ Z &= -p_n + \mu(\zeta_m - \eta_l) \end{aligned} \right\} \dots (1.35)$$

となる。

$$\text{よって } X_n = X_l + Y_m + Z_n = -p, \dots (1.36)$$

つまり面に垂直な力は圧力である。

さらに回転体では円筒座標を導入して、

$$\left. \begin{aligned} X_r &= Y \cos \theta + Z \sin \theta \\ \text{よって } \zeta &= 0, \quad \zeta \cos \theta - \eta \sin \theta = \zeta_0 \\ &\quad \zeta \sin \theta + \eta \cos \theta = 0 \\ \text{つまり } m \cos \theta + n \sin \theta &= \sin \alpha \\ l &= \cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots (1.37)$$

$$\left. \begin{aligned} X &= -p \cos \alpha - \mu \zeta_0 \sin \alpha \\ X_r &= -p \sin \alpha + \mu \zeta_0 \cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots (1.38)$$

よって

$$\left. \begin{aligned} X_n &= X \cos \alpha + X_r \sin \alpha = -p \\ X_s &= -X \sin \alpha + X_r \cos \alpha = \mu \zeta_0 \end{aligned} \right\} \dots (1.39)$$

$$p, \text{ の記号では } rX_n = \mu T_n, \quad rX_s = \mu T_s, \quad \zeta_0 \equiv \zeta,$$

(よってこの表記は使う必要がない)

(1.33) は又 (2.13) のより早く求む出来る。

$$\left. \begin{aligned} X &= -pl - \mu(\eta n - \zeta m) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial n} \\ Y &= -pm - \mu(\zeta l - \xi n) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial n} \\ Z &= -pn - \mu(\xi m - \eta l) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial n} \end{aligned} \right\} (1.40)$$

是れ故 (1.35) と equate して

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} &= 2(\eta n - \zeta m) \\ \frac{\partial v}{\partial n} &= 2(\zeta l - \xi n) \\ \frac{\partial w}{\partial n} &= 2(\xi m - \eta l) \end{aligned} \right\} (1.41)$$

12) 液体の面上では

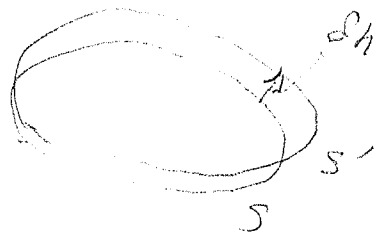
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} \cos \alpha$$

$$\eta n - \zeta m = -\zeta_0 \sin \alpha$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = -\zeta_0 \tan \alpha, \quad \dots (1.42)$$

2. 物体の微小変形による抵抗変化

物体表面 S が滑らかに法線方向に δn だけ変形して S' になったとする。



その時の速度場を u'_j , 抵抗を R'

とすると (1.12) より

$$E_D(u'_j) = R' U \quad (2.1)$$

より (1.12) から

$$R' - R = \delta R = \frac{1}{U} [E_D(u'_j) - E_D(u_j)] \quad (2.2)$$

u'_j と u_j の差は僅かである

$$u'_j - u_j = \delta u_j, \quad \tau'_j - \tau_j = \delta \tau_j \quad (2.3)$$

と仮定すると (5.5)。

$$u'_1 = -U, \quad u'_2 = u'_3 = 0 \quad \text{on } S', \quad (2.4)$$

さて

$$E_D(u'_j) - E_D(u_j) = E_D(u'_j) - E_D(u_j) + E_{\Delta D}(u'_j) \quad (2.5)$$

$$(\Delta D = D' - D)$$

より

$$E_D(u'_j) - E_D(u_j) = - \iint_S \left[\sum_i (u'_j \tau'_j - u_j \tau_j) \right] dS$$

であるから (2.3) を代入して高次の項を無視すると

$$E_D(u'_j) - E_D(u_j) = - \iint_S \sum_j (\tau_j \delta u_j + u_j \delta \tau_j) dS$$

となり 相反定理より

$$\sum_j \iint_S T_j \delta u_j dS = \sum_j \iint_S u_j \delta T_j dS$$

これから

$$E_D(u'_j) - E_D(u_j) = -2 \iint_S \left(\sum_j T_j \delta u_j \right) dS, \quad (2.6)$$

よって

$$\delta u_j \Big|_C = u'_j - u_j \Big|_C \doteq - \frac{\partial u'_j}{\partial n} \delta n \doteq - \frac{\partial u_j}{\partial n} \delta n, \quad (2.7)$$

であり, u_j の Ω 内での微分は 0 であるから.

$$J_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = l_2 \frac{\partial u_3}{\partial n} - l_3 \frac{\partial u_2}{\partial n}.$$

$$J_2 = l_3 \frac{\partial u_1}{\partial n} - l_1 \frac{\partial u_3}{\partial n}$$

$$J_3 = l_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} - l_2 \frac{\partial u_1}{\partial n}$$

(2.8)

となり, 又 連続性の定理より

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = l_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} + l_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} + l_3 \frac{\partial u_3}{\partial n} \stackrel{=0}{=} \quad (2.9)$$

よって

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = J_2 l_3 - J_3 l_2.$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n} = J_3 l_1 - J_1 l_3$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial n} = J_1 l_2 - J_2 l_1$$

(2.10)

よって

$$l_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} + l_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} + l_3 \frac{\partial u_3}{\partial n} = 0, \quad (2.11)$$

あるいは (2.7) により (δu) の法線成分は

$$(\delta u)_n = l_1 \delta u_1 + l_2 \delta u_2 + l_3 \delta u_3 = 0, \quad (2.12)$$

(2.7), (2.10) から

$$\sum_j \tau_j \delta u_j = -\delta n \left[\sum_j \tau_j \frac{\partial u_j}{\partial n} \right]$$

と仮定する

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= -p l_1 + \left(2 \frac{\partial u_1}{\partial n} + \zeta_3 l_2 - \zeta_2 l_3 \right) \mu \\ \tau_2 &= -p l_2 + \left(2 \frac{\partial u_2}{\partial n} + \zeta_1 l_3 - \zeta_3 l_1 \right) \mu \\ \tau_3 &= -p l_3 + \left(2 \frac{\partial u_3}{\partial n} + \zeta_2 l_1 - \zeta_1 l_2 \right) \mu \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

であるから

(2.10) を代入すると

$$\sum_j \tau_j \delta u_j = -\mu \delta n \left[\sum_j \zeta_j^2 - \left(\sum_j \zeta_j l_j \right)^2 \right]$$

と仮定する $(\sum \zeta_j l_j)$ は法線方向の速度成分であるから
面内速度は 0 (x 成分を除く) であるから 0, つまり

$$\sum_j \zeta_j l_j = 0, \quad \dots \quad (2.14)$$

結局

$$\sum_j \tau_j \delta u_j = -\mu \delta n \sum_j \zeta_j^2, \quad (2.15)$$

より (2.6) より

$$E_D(u'_j) - E_D(u_j) = 2\mu \iint_S \left(\sum_j \zeta_j^2 \right) \delta n dS, \quad (2.16)$$

次に (2.5) の右辺の3項については、連続の定理により

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \gamma_{ij}^2 &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \gamma_{ij}^2 - 2 \left(\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^3 \zeta_j^2 + 4 \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right], \end{aligned}$$

と仮定 (Lamé), 速度の面内微分は 0 となるので (2.5) を

導いたのと同様にして右辺の2項は消える。

したがって

$$\begin{aligned} E_{ad}(u'_j) &= \frac{\mu}{2} \sum_i \sum_j \iiint_{\Omega_D} \gamma_{ij}^2 dx dy dz \\ &= -\mu \iint_S \left(\sum_i \zeta_i^2 \right) \delta n dS, \quad (2.17) \end{aligned}$$

(2.16) と合わせて

$$\delta R = \mu \iint_S \left(\sum_i \zeta_i^2 \right) \delta n dS, \quad (2.18)$$

これは Pirouan の結果である。

軸対称流れでは明らかに

$$\delta R = 2\pi\mu \int_C r \zeta^2 \delta n ds, \quad (2.19)$$

3. 最小抵抗問題

ストークス流れにおいて抵抗が最小となる物体形状を
求める問題を考えよう。

抵抗が最小の物体があつたとすると、それを僅かに
変形しても抵抗の変化分は 0 となるだろう。

それ故 (2.18) によつて、そのような物体では

$$\int_S \left(\sum_j \zeta_j^2 \right) \delta n \, dS = 0, \quad (3.1)$$

$\sum_j \zeta_j^2$ は 常に正であるから、 ζ_1, ζ_2 は 0 の方がより小さい。
それは回転体であればよく、従つて (2.19), つまり

$$\int_C r \zeta^2 \delta n \, ds = 0 \quad (3.2)$$

のような回転体のまわりの軸対称流れがよい。

前後対称の
副条件として 体積が与えられるとすれば

$$V = \pi \int_C r^2 dx' = \text{const.}$$

$$\delta V = 2\pi \int_C r \delta n \, ds = 0,$$

それ故 (3.2) より

$$\zeta^2 = \text{const.}, \quad (3.4)$$

とすれば満足される。

これは Poisson の方程式である。

実用上は 体積と長さ(あるいは幅)が与えられる場合を
考えておくべきであろうが 直接この条件を入れるのは
数学的には左に示すの^{2次の}2次モーメントを導入し
それが与えられるとしよう。

$$I = \pi \int_c r^2 x^2 dx = \text{const.} \quad \left\{ \begin{array}{l} (3.5) \end{array} \right.$$

$$\delta I = 2\pi \int_c r^2 \delta x dx = 0,$$

(3.3)と共に
この時(3.2)を満足するには、 a, b を定数として、

$$x^2 = a + bx^2, \quad \dots (3.6)$$

であればよい。

この時の抵抗は(1.12)で与えられるが、 τ_0 の代りには

$$\tau = \left[\frac{\mu U}{L} \right] \quad \dots (3.7)$$

であるから(1.12)より抵抗の次式は

$$R = [\mu L U] \quad \dots (3.8)$$

抵抗係数として

$$C_R = \frac{R}{\mu L U} \quad \dots (3.9)$$

と定義すると、これは Reynolds 数に関係しない
事がわかる。

Pikomeau 等は (3.3), (3.5) の条件だけで 荷重分割法により 最小抵抗形状を求めている。

しかし この二つの条件だけでは 変形 (δu) の変位の自由度が多すぎてあまり 得策ではない。

そこで δu が変形した時の応力の变化 δT を (3.2) の条件から求めて δu をより 近似的に求め、その量だけ変形して行く方法を 逐次進めて 形状を求める方法を提案する。

さて、 δu の境界条件は (2.7) (2.10), (2.12) 等から 回転角では

$$\left. \begin{aligned} (\delta u)_n &= 0 \\ (\delta u)_s &= - \int_0 (\delta u) \end{aligned} \right\} \quad \dots (3.10)$$

ζ_0 は最初に与えられた 物体表面の渦度とする。

次に (3.4) を一般的に (3.6) を満足させるためには

どれだけ $\delta \zeta$ ($\zeta = \zeta_0 + \delta \zeta$) だけ変化すればよいかと言うと、

$\delta \zeta^2$ を省略して (3.6) より

$$\delta \zeta \doteq \left(\frac{a + b x^2}{2 \zeta_0} - \frac{\zeta_0}{2} \right), \quad \dots (3.11)$$

(3.10) の1式と(3.11)を聯立させて δE_j を求め
それを(3.10)の2式左辺に入れた $(\delta u)_j$ を計算し
(3.3), (3.5) の2式を援用して $a, b, \delta u$ を
求める。

元の形を再びだけ変形させて計算を繰返し
所定の精度で計算を止める。

以下 (3.5), (3.4) を解く問題を

問題 I ; 排水量一定

(3.5) (3.6) を

問題 II ; 排水量とその長さ方向の2モーメント
が与えられる。

と名づけよう。

4. 計算上の問題点

排水量を変えて問題 I を解くと、その形状は定まる。
 この時 C_R は、レイノルズ数に実係^{長さによる}なりから

$$\text{Min}[C_R] = f_{\text{unc.}}(\sqrt[3]{L}) \quad , \quad \dots (4.1)$$

と考えられ、排水量を変えてもこれは無次元値故変りなし
 と考えられる。

つまり、最小抵抗形状はレイノルズ数によりなり
 と考えられるので $(\sqrt[3]{L})$ もまた不変と考えられる。

そこで逆に長さをかえられとすると最適の
 排水量がある事になる。^{*}

それ故長さと排水量が同時に与えられると
 問題 I ではとけず、その一つの解法が問題 II で
 あると言う事になる。

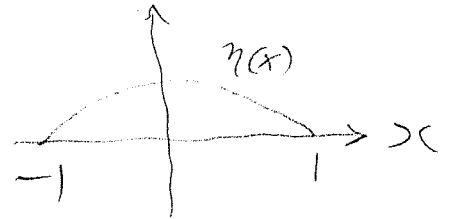
- *) 抵抗は $R = \mu L U C_R$ で与えられ、こゝでは $\text{Min}(R)$ を
 計算するので、長さを一定とした時の $\text{Min}(R)$ は少し
 異なってくる事に注意。

計算上も長さを一定として始める方が具合がいい。

そこで最初に与える形状として仮定は

$$\eta(x) = \frac{m}{4} (1-x^4), \quad \left\{ \begin{array}{l} (4.2) \end{array} \right.$$

$$\left| \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{x=1} = m$$



のようにとると両端における半頂角は $\tan^{-1} m$ となる。

問題Ⅰで半頂角は 60° である事が証明されている。
また前後対称となる事は自明である。

そこで前端での頂角を定め、それが不変つまり

前端の要素上の $\delta h = 0$ とすると、これで条件を2つ

追加した事となり、問題Ⅰではもう解けず

問題Ⅱとなり、排水量、2次モーメントも指定出来た。

即ち前端の頂角を与え、前端の要素上の δh を
0 として問題Ⅱを解くと形状が求まり、
その内 $\delta h = 0$ は排水量最小となるはずである。

附錄 A 核函數

$$P_i(p, q) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{R} \right), \quad R^2 = \sum_{j=1}^3 (x_j - x'_j)^2, \quad (A.1)$$

$$P \equiv (x_1, x_2, x_3), \quad Q \equiv (x'_1, x'_2, x'_3)$$

$$U_j^{(k)} = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial^2 R}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\delta_{kj}}{4\pi R}, \quad (A.2)$$

$$\left. \begin{aligned} 4\pi U_1^{(1)} &= \left(\frac{R}{2}\right)_{xx} - \frac{1}{R}, \\ 4\pi U_2^{(1)} &= \left(\frac{R}{2}\right)_{xy}, \quad 4\pi U_3^{(1)} = \left(\frac{R}{2}\right)_{xz} \\ 4\pi U_1^{(2)} &= \left(\frac{R}{2}\right)_{yx}, \quad 4\pi U_2^{(2)} = \left(\frac{R}{2}\right)_{yy} - \frac{1}{R}, \\ 4\pi U_3^{(2)} &= \left(\frac{R}{2}\right)_{yz}, \\ 4\pi U_1^{(3)} &= \left(\frac{R}{2}\right)_{zx}, \quad 4\pi U_2^{(3)} = \left(\frac{R}{2}\right)_{zy} \\ 4\pi U_3^{(3)} &= \left(\frac{R}{2}\right)_{zz} - \frac{1}{R} \end{aligned} \right\} \quad (A.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{4\pi}{\mu} T_1^{(1)} &= 2 \frac{\partial}{\partial n} U_1^{(1)} - \left(\frac{2}{R}\right)_x l_1 - \left(\frac{1}{R}\right)_n \\ \frac{4\pi}{\mu} T_2^{(1)} &= 2 \frac{\partial}{\partial n} U_2^{(1)} - \left(\frac{1}{R}\right)_x l_2 - \left(\frac{1}{R}\right)_y l_1 \\ \frac{4\pi}{\mu} T_3^{(1)} &= 2 \frac{\partial}{\partial n} U_3^{(1)} - \left(\frac{1}{R}\right)_x l_3 - \left(\frac{1}{R}\right)_z l_1 \\ T_1^{(2)} &= 2 \frac{\partial}{\partial n} U_1^{(2)} - \left(\frac{1}{R}\right)_y l_1 - \left(\frac{1}{R}\right)_x l_2 \\ T_2^{(2)} &= 2 \frac{\partial}{\partial n} U_2^{(2)} - \left(\frac{2}{R}\right)_y l_2 - \left(\frac{1}{R}\right)_x \\ T_3^{(2)} &= 2 \frac{\partial}{\partial n} U_3^{(2)} - \left(\frac{1}{R}\right)_y l_3 - \left(\frac{1}{R}\right)_z l_2 \\ T_1^{(3)} &= 2 \frac{\partial}{\partial n} U_1^{(3)} - \left(\frac{1}{R}\right)_z l_1 - \left(\frac{1}{R}\right)_x l_3 \\ T_2^{(3)} &= 2 \frac{\partial}{\partial n} U_2^{(3)} - \left(\frac{1}{R}\right)_z l_2 - \left(\frac{1}{R}\right)_y l_3 \\ T_3^{(3)} &= 2 \frac{\partial}{\partial n} U_3^{(3)} - \left(\frac{2}{R}\right)_z l_3 - \left(\frac{1}{R}\right)_n \end{aligned} \right\} \quad (A.4)$$

$$\iint_S T_j^{(R)} dS = \mu, \quad \dots \quad (A.5)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_j^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial x_2} U_j^{(3)} - \frac{\partial}{\partial x_3} U_j^{(2)}, & Z_j^{(2)} &= \frac{\partial}{\partial x_3} U_j^{(1)} - \frac{\partial}{\partial x_1} U_j^{(3)} \\ Z_j^{(3)} &= \frac{\partial}{\partial x_1} U_j^{(2)} - \frac{\partial}{\partial x_2} U_j^{(1)} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} Z_1^{(1)} &= 0, & Z_2^{(1)} &= \left(\frac{1}{4\pi R}\right)_z, & Z_3^{(1)} &= -\left(\frac{1}{4\pi R}\right)_y \\ Z_1^{(2)} &= -\left(\frac{1}{4\pi R}\right)_z, & Z_2^{(2)} &= 0, & Z_3^{(2)} &= \left(\frac{1}{4\pi R}\right)_x \\ Z_1^{(3)} &= \left(\frac{1}{4\pi R}\right)_y, & Z_2^{(3)} &= -\left(\frac{1}{4\pi R}\right)_x, & Z_3^{(3)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (A.6)$$

$$\left. \begin{aligned} U_2^{(1)} &= U_1^{(2)}, & U_3^{(1)} &= U_1^{(3)}, & U_3^{(2)} &= U_2^{(3)} \\ T_2^{(1)} &= T_1^{(2)}, & T_3^{(1)} &= T_1^{(3)}, & T_3^{(2)} &= T_2^{(3)} \end{aligned} \right\} \quad (A.7)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_1^{(1)} &= Z_2^{(2)} = Z_3^{(3)} = 0 \\ Z_2^{(1)} &= -Z_1^{(2)}, & Z_3^{(1)} &= -Z_1^{(3)}, & Z_3^{(2)} &= -Z_2^{(3)} \end{aligned} \right\} \quad (A.8)$$

$$\cos\theta \frac{\partial}{\partial y} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \sin\theta \frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\cos\theta \frac{\partial}{\partial y} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad ?$$

$$\sin\theta \frac{\partial}{\partial z} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$V_1^{(1)} = \frac{\Phi}{8\pi} \int_0^{2\pi} U_1^{(1)} d\theta = \frac{\Phi}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{R}{2} \right)_{xx} - \frac{1}{R} \right] d\theta$$

$$V_r^{(1)} = \frac{\Phi}{8\pi} \int_0^{2\pi} (U_2^{(1)} \cos \theta + U_3^{(1)} \sin \theta) d\theta = \frac{\Phi}{8\pi} \frac{\partial}{\partial Y'} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial R}{\partial X} \right) d\theta$$

$$R^2 = (X-X')^2 + Y^2 + Y'^2 - 2YY' \cos(\theta - \theta'),$$

$$V_1^{(r)} = -\frac{\Phi}{8\pi} \frac{\partial}{\partial Y'} \int_0^{2\pi} \frac{\partial R}{\partial X} d\theta$$

$$V_r^{(r)} = \frac{\Phi \cos \theta'}{8\pi} \frac{\partial}{\partial Y'} \int_0^{2\pi} (R)_y d\theta + \frac{\Phi \sin \theta'}{8\pi} \frac{\partial}{\partial Y'} \int_0^{2\pi} (R)_z d\theta$$

$$- \frac{\Phi}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta - \theta')}{R} d\theta$$

$$= -\frac{\Phi}{8\pi} \frac{\partial^2}{\partial r \partial Y'} \int_0^{2\pi} R d\theta - \frac{\Phi}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta - \theta')}{R} d\theta,$$

$$Y_1^{(1)} = 0, \quad Y_r^{(1)} = 0$$

$$Y_1^{(r)} = 0, \quad Y_r^{(r)} = 0$$

$$Y_1^{(0)} = -\frac{\Phi}{4\pi} \frac{\partial}{\partial Y'} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R}$$

$$Y_r^{(0)} = -\frac{\Phi}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{R} \right)_x \cos(\theta - \theta') d\theta,$$

$$S' = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R}$$

$$S^* = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} R d\theta$$

$$P = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{R} d\theta$$

$$V_1^{(1)} = \frac{1}{2} S_{xx}^* - S$$

$$V_r^{(1)} = \frac{1}{2} S_{xr}^*, \quad V_1^{(r)} = \frac{1}{2} S_{x'r'}^* = -\frac{1}{2} S_{r'x}^*$$

$$V_r^{(r)} = -\frac{1}{2} S_{rr'}^* - P$$

$$Y_1^{(0)} = -S_{r'}, \quad Y_r^{(0)} = -P_x = P_{x'}$$

$$\cos\alpha' \quad V_1^{(1)} \cos\alpha + V_r^{(1)} \sin\alpha = \frac{1}{2} S_{xx}^* - S \cos\alpha \quad \left. \begin{array}{l} \text{quad} \\ \text{dipole} \end{array} \right\} \quad \cos\alpha'$$

$$+ V_1^{(r)} \sin\alpha + V_r^{(r)} \cos\alpha = -\frac{1}{2} S_{rr'}^* - P \sin\alpha \quad \left. \begin{array}{l} \text{quad} \\ \text{dipole} \end{array} \right\} \quad \cos\alpha'$$

$$\cos\alpha' \quad -V_1^{(1)} \sin\alpha + V_r^{(1)} \cos\alpha = \frac{1}{2} S_{xs}^* + S \sin\alpha \quad \left. \begin{array}{l} \text{quad} \\ \text{dipole} \end{array} \right\} \quad \cos\alpha'$$

$$-V_1^{(r)} \cos\alpha + V_r^{(r)} \sin\alpha = -\frac{1}{2} S_{r's}^* - P \cos\alpha \quad \left. \begin{array}{l} \text{quad} \\ \text{dipole} \end{array} \right\} \quad \cos\alpha'$$

$$U_n^{(n)} = -\frac{1}{2} S_{nn'}^* - S \cos\alpha \cos\alpha' - P \sin\alpha \sin\alpha' \quad \left. \begin{array}{l} \text{quad} \\ \text{dipole} \end{array} \right\}$$

$$U_s^{(n)} = -\frac{1}{2} S_{sn'}^* + S \sin\alpha \cos\alpha' - P \cos\alpha \sin\alpha' \quad \left. \begin{array}{l} \text{quad} \\ \text{dipole} \end{array} \right\}$$

$$U_n^{(s)} = -\frac{1}{2} S_{ns'}^* + S \cos\alpha \sin\alpha' - P \sin\alpha \cos\alpha' \quad \left. \begin{array}{l} \text{quad} \\ \text{dipole} \end{array} \right\}$$

$$U_s^{(s)} = -\frac{1}{2} S_{ss'}^* - S \sin\alpha \sin\alpha' - P \cos\alpha \cos\alpha' \quad \left. \begin{array}{l} \text{quad} \\ \text{dipole} \end{array} \right\}$$

No. A-5

Date

$$R_x = \frac{x}{R}, \quad R_y = \frac{y}{R}, \quad R_z = \frac{z}{R}$$

$$R_{xx} = \frac{1}{R} - \frac{x^2}{R^3} = \frac{y^2 + z^2}{R^3}, \quad R_{xy} = -\frac{xy}{R^3}, \quad R_{xz} = -\frac{xz}{R^3}$$

$$R_{yy} = \frac{z^2 + x^2}{R^3}, \quad R_{yz} = -\frac{yz}{R^3}, \quad R_{zz} = \frac{x^2 + y^2}{R^3}$$

$$\Delta R = \frac{2}{R^3}$$

$$4\pi U_1^{(1)} = \frac{y^2 + z^2}{2R^3} - \frac{1}{R} = \frac{-1}{2R} - \frac{x^2}{2R^3}$$

附録 B 球の解 (友近著 "流体力学" p.313)

半径 a , 流速 U の流れの中での球の周りの流れ場 — 一次流れ分を除いて

$$u_1 = \frac{3}{4} \frac{aU}{r^3} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) x^2 + \frac{U}{4} \left(3 \frac{a}{r} + \frac{a^3}{r^3}\right), \quad U \rightarrow \left(\frac{r}{a}\right)$$

$$u_2 = \frac{3}{4} \frac{aU}{r^3} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) xy, \quad (B.1)$$

$$u_3 = \frac{3}{4} \frac{aU}{r^3} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) xz,$$

$$p = \frac{3}{2} \mu a U \frac{x}{r^3} + p_0,$$

$$\zeta_1 = \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} = 0$$

$$\begin{aligned} \zeta_2 &= \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x} = \frac{3aU}{4} \left[\frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \right] r \frac{x^2 z}{r} + \frac{U}{4} \left[-3 \frac{a}{r^2} + \frac{3a^3}{r^4} \right] \frac{z}{r} \\ &\quad - \frac{3aU}{4} \left[\frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \right] r \frac{x^2 z}{r} + \frac{3aU}{4 r^3} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) z \\ &= -\frac{3aU}{2} \frac{z}{r^3} // \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_3 &= \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{3aU}{4 r^3} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) y + \frac{U}{4} \left(3 \frac{a}{r^2} + \frac{3a^3}{r^4}\right) \frac{y}{r} \\ &= \frac{3}{2} a U \frac{y}{r^3} // \end{aligned} \quad (B.2)$$

$$\tau_1 = -\frac{p_0 x}{r} - \frac{9}{2} \mu a U \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \frac{y^2}{r^4} - \frac{3}{2} \mu \frac{a^3 U}{r^4}$$

$$\tau_2 = -\frac{p_0 y}{r} - \frac{9}{2} \mu a U \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \frac{xy}{r^4} \quad (B.3)$$

$$\tau_3 = -\frac{p_0 z}{r} - \frac{9}{2} \mu a U \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \frac{xz}{r^4}$$

$$r = a \leq r < \infty$$

$$\tau_1 = -p_0 \frac{x}{a} - \frac{3}{2} \mu k/a, \quad (B.4)$$

$$\tau_2 = -p_0 \frac{y}{a}, \quad \tau_3 = -p_0 \frac{z}{a},$$

$$R = 6\pi \mu a U, \quad (B.5)$$

附録C 弾性論との関係

静的弾性論における変位を u_j とおき、これを Stokes 流れの速度に対応させ ポアソン比 ν

$\nu = \frac{1}{2}$, 剛性率 $G = \mu$ (粘性係数) と対応させると 境界力まで一致する。

つまり
$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

体積増
$$\gamma = \sum_i e_{ii}$$

境界力
$$\left(\tau_{ij} / G \right) = 2 \sum_j e_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial n} + \frac{\nu}{1-2\nu} \gamma \frac{\partial x_i}{\partial n}$$

この方向の力は $\gamma = 0$ (連続方程式) であり、

$$\sigma = \sum_i f_{ii} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \gamma$$

$$\left(f_{ij} = 2e_{ij} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \gamma \delta_{ij} \right)$$

となり 整理すると

$$\tau_{ij} / G = 2 \sum_j e_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial n} + \frac{\nu}{2(1+\nu)} \sigma \frac{\partial x_i}{\partial n}$$

となり

$$G\sigma = -3p$$

と圧力を定義すると 完全に一致する。

附録 D 楕円積分

$$S^* = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} R d\theta$$

$$S = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R}$$

$$P = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R} \cos\theta$$

$$R^2 = (x-x')^2 + r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta, \quad (D.1)$$

今

$$r_1^2 = (x-x')^2 + (r-r')^2$$

$$r_2^2 = (x-x')^2 + (r+r')^2$$

$$k^2 = \frac{4rr'}{r_2^2}, \quad k'^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2, \quad k'^2 = 1 - k^2,$$

(D.2)

とすると

$$R^2 = r_2^2 (1 - k^2 \cos^2 \frac{\theta}{2})$$

$$S^* = \frac{r_2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{r_2}{\pi} E(k),$$

$$S = \frac{1}{\pi r_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{K(k)}{\pi r_2},$$

(D.3)

$$P = \frac{1}{\pi r_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - k^2 \sin^2 \varphi) d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{\pi k'^2 r_2} \left[(k'^2 - 2) K(k) + 2 E(k) \right],$$

$$P = \frac{r}{r'} S - \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r} S^*, \quad (D.4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{r}{r'} \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{1}{r'} \frac{\partial^2}{\partial x \partial r} S^*,$$

$$\hbar \frac{dK}{dr} = \frac{E}{r^2} - K$$

$$\hbar \frac{dE}{dr} = E - K$$

(D.5)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial K}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial K}{\partial x'} = -\frac{x}{r^2}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial K}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial K}{\partial y'} = \frac{1}{2r} - \frac{y+y'}{r^2}$$

(D.6)

なお以下で $x'=0$ として計算するが、必要ならば x を $(x-x')/2$ に置き換える。

$$\frac{\partial}{\partial x} S^* = \frac{x}{\pi r^2} K$$

$$\frac{\partial}{\partial y} S^* = \frac{K_2}{2\pi r} E - \left(\frac{x^2 + r^{1/2} r^2}{\pi 2 r K_2} \right) K$$

(D.7)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} S^* = \frac{K}{\pi r^2} - \frac{x^2}{\pi K_2 r_1^2} E$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} S^* = -\frac{x}{2\pi r K_2} K + \frac{x(x^2 + r^{1/2} r^2)}{2\pi r K_2 r_1^2} E$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} S^* = \frac{(x^2 + r^2 + r^{1/2})}{2\pi r_2 r^2} K + \left(\frac{2x^2 r^2 - r_1^2 K_2^2}{2\pi r^2 K_2 r_1^2} \right) E$$

(D.8)

$$\frac{\partial}{\partial y} S = -\frac{K}{2\pi r K_2} + \frac{(x^2 + r^{1/2} r^2)}{2\pi r K_2 r_1^2} E$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{x}{\pi r_2 r_1^2} E$$

(D.9)

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{r}{r'} \left(-\frac{x}{\pi r_2 r_1^2} E \right) - \frac{1}{r'} \left[-\frac{x K}{2\pi r r_2} + \frac{x(x^2 + r'^2 - r^2)}{2\pi r r_2 r_1^2} E \right]$$

$$= \frac{x}{2\pi r r' r_2} K - \frac{x(x^2 + r'^2 - r^2)}{2\pi r r' r_2 r_1^2} E, \quad \dots (D.10)$$

$x \rightarrow x', \quad r \rightarrow r' \quad \text{では}$

$$k \rightarrow 1, \quad k' = \frac{r_1}{r_2} \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{では} \quad K(k) &\xrightarrow{k \rightarrow 1} 2 \log 2 - \log \left(\frac{r_1}{r_2} \right), \\ E(k) &\rightarrow 1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} K(k) &\xrightarrow{k \rightarrow 1} 2 \log 2 - \log \left(\frac{r_1}{r_2} \right), \\ E(k) &\rightarrow 1 \end{aligned}} \right\} (D.11)$$

そのとき

$$S_{xx}^* \rightarrow -\frac{x}{2\pi r_2 r} [2 \log 2 r_2 - \log r_1] - \frac{x^2}{\pi r_2 r_1^2},$$

ただし $\frac{x^2}{r_1^2} = \frac{x^2}{x^2 + (r-r')^2}$ であり segment の上では一定値と見做す

結局

$$S_{xx}^* \Rightarrow -\frac{x^2}{\pi r_2 r_1^2},$$

$$\begin{aligned} S_{rx}^* &\Rightarrow -\frac{x}{2\pi r r_2} (2 \log 2 r_2 - \log r_1) + \frac{x(x^2 + r'^2 - r^2)}{2\pi r r_2 r_1^2} \\ &\rightarrow \frac{x}{2\pi r r (r' - r)} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} S_{rx}^* &\Rightarrow -\frac{x}{2\pi r r_2} (2 \log 2 r_2 - \log r_1) + \frac{x(x^2 + r'^2 - r^2)}{2\pi r r_2 r_1^2} \\ &\rightarrow \frac{x}{2\pi r r (r' - r)} \end{aligned}} \right\} (D.12)$$

$$S_{rr}^* \Rightarrow \frac{x^2 + r'^2 - r^2}{2\pi r_2 r^2} (2 \log 2 r_2 - \log r_1) + \frac{x^2}{\pi r_2 r_1^2} - \frac{r_2}{2\pi r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{r^2 + r'^2}{2\pi r_2 r^2} (2 \log 2 r_2 - \log r_1) - \frac{r+r'}{2\pi r},$$

$$S_r \rightarrow -\frac{1}{2\pi r r_2} (2 \log 2 r_2 - \log r_1) + \frac{1}{2\pi r r (r' - r)},$$

$$P_x \rightarrow -\frac{(r^2 + r'^2) x}{2\pi r r' r_2 r_1^2} \xrightarrow{r=r'} -\frac{1}{2\pi r} \frac{x}{r_1^2} \quad \left. \vphantom{P_x \rightarrow -\frac{(r^2 + r'^2) x}{2\pi r r' r_2 r_1^2} \xrightarrow{r=r'} -\frac{1}{2\pi r} \frac{x}{r_1^2}} \right\} (D.13)$$

結局 原点において

$$\left. \begin{aligned} S_{xx}^* &, S_{rx}^* \\ \left[S_{rr}^* + \frac{1}{2\pi r} \log r_1 \right] \end{aligned} \right\} \text{は有限確定値をとる.}$$

$$\times \left. \begin{aligned} \left[S_r - \frac{1}{4\pi r^2} \log r_1 - \frac{1}{2\pi r(r-r_1)} \right] \\ \left[P_x + \frac{\chi}{2\pi r r_1^2} \right] \end{aligned} \right\} \text{も有限確定.}$$

より

$$\left. \begin{aligned} S_{rr}^* + \frac{1}{2\pi r} \log r_1 &= T_{rr}^* \\ S_r - \frac{1}{4\pi r^2} \log r_1 - \frac{1}{2\pi r(r-r_1)} &= T_r \\ P_x + \frac{\chi}{2\pi r r_1^2} &= T_x \end{aligned} \right\}$$

とかくと 原点で

$$\left. \begin{aligned} S_{xx}^* &= -\frac{\chi^2}{2\pi r^2 r_1^2} \\ S_{xr}^* &= \frac{\chi}{2\pi r(r-r_1)} \\ T_{rr}^* &= \frac{1}{\pi r} \log(4r) - \frac{1}{\pi} \\ T_r &= -\frac{1}{\pi r^2} \log(4r) \\ T_x &= 0 \end{aligned} \right\}$$