

軸対称流れにおける粘性抵抗最小形状について

"On ^{an} Axisymmetric Bodies of the minimum viscous Drag"

1. 緒言.
2. 抵抗積分とその変分
3. 極値問題の定式化とその解法.
4. 細長体近似解
5. 数値計算結果と考察.
6. 結 論

附録 A 可逆定理.

- " B 細長体近似
- " C 先端附近の形状.

メモ

1. 長さの制限のない場合で L/B の大きい初期形状で
 cusp になるのは、長さが短くなる事を意味しているの?
 あらう。それが今のプログラムではうまく表れせないのか?
 そうなるの? あらう。

それ故、 L/B の大きい初期形状は不適と言う事にしよう。

2. 物理線数 の整理

$$J = \int_C g^{\frac{10}{3}} y^{\frac{7}{6}} ds, \quad J' = \int_{-1}^1 g^{\frac{10}{3}} y'^{\frac{7}{6}} ds'$$

$$V = \pi \int_C y^2 dx$$

$$J = \left(\frac{L}{2}\right)^{\frac{13}{8}} J', \quad J': \text{無次元}$$

$$S = 2\pi \int y ds$$

$$S_W = 2\pi \int y d\mathcal{C}$$

$$C_{DV} = \frac{2\pi L^{\frac{1}{7}}}{V^{\frac{2}{3}}} C_f J^{\frac{6}{7}} = \frac{2\pi L^2}{2^{\frac{13}{7}} V^{\frac{2}{3}}} C_f (J')^{\frac{6}{7}} = 2^{\frac{8}{7}} \pi \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{V^{\frac{2}{3}}} C_f (J')^{\frac{6}{7}}$$

$$C_{DS} = \frac{2\pi L^{\frac{1}{7}}}{S} C_f J^{\frac{6}{7}} = 2^{\frac{8}{7}} \pi \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{S} C_f (J')^{\frac{6}{7}}$$

$$C_{DW} = \frac{2\pi L^{\frac{1}{7}}}{S_W} C_f J^{\frac{6}{7}} = 2^{\frac{8}{7}} \pi \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{S_W} C_f (J')^{\frac{6}{7}}$$

[$L=2$ として計算すればよい]

$C_D/C_c = C'_D$ を計算しておく事にしよう。

⑥ 積円の抵抗係数を計算しておく。(比較の基準 Hess)

$$C_f = 1.455 / (Re)^{0.58} \quad ; \text{フライングの平板抵抗係数}$$

$$Re = VL/\nu$$

3. 抵抗係数はレイノルズ数の1/2乗であるから
抵抗値を比較するには長さを等しくして比較し
なければならぬ。

その上で 積円の制約条件を附して 極値を求めることにする。

4. 変分問題の種類

$$Q_1 = \frac{10}{3} \frac{\partial \phi_2}{\partial s} q + \frac{7}{6} q^{\frac{10}{3}} y^{-\frac{5}{6}} \frac{\partial y}{\partial x}$$

問題 I-1 $Q_1 = C$; const. [容積制限なし]

問題 I-2 $Q_1 = C + Ax^2$ [容積制限あり]

問題 I-3 $Q_1 = C + Bx + Ax^2$ [容積, モメント制限あり]
[容積の制限をはずせば $Q_1 = C + Bx$]

5. 問題 I は 長さ制限なしで面積を制限した時の
解に一致するはずである。

6. 抵抗係数 C_{bs} , C_{bw} は 表面積 又は 濡水面積
の等しい 平板抵抗 との比率 であるから これを最小
とする問題も考えられる。

7. 問題 II S は一定にて $\cos \theta$ が最小となる。

$$\delta S = 2\pi \int \delta y ds = 2\pi \int \delta h \frac{\partial y}{\partial h} ds = 0$$

$$\delta J = \int_C \left[\frac{10}{3} \frac{\partial \phi_2}{\partial s} \frac{y}{\delta} + \frac{7}{6} \frac{y^{\frac{10}{3}}}{\delta^{\frac{1}{3}}} \frac{\partial y}{\partial h} \right] \delta h ds = 0$$

であるから

$$Q_2 = \frac{10}{3} \frac{\partial \phi_2}{\partial s} \frac{y}{\frac{\partial y}{\partial h}} + \frac{7}{6} \frac{y^{\frac{10}{3}}}{\delta^{\frac{1}{3}}} \frac{\partial y}{\partial h}$$

と置いて L は一定とする

問題 II-1

$$Q_2 = C$$

[制限 L]

問題 II-2

$$Q_2 = C + Ax^2 \quad [\delta S = 0]$$

II-3

$$Q_2 = C + Bx + Ax^2 \quad [\delta S = 0, \int \delta h \frac{\partial y}{\partial h} x ds = 0]$$

8. 問題 III

S_w は一定となる場合

[$\int y dx$ は 半径 曲線の面積である!]

$$\delta S_w = 2\pi \int \delta y dx = 2\pi \int \delta h ds$$

$$Q_3 = \frac{10}{3} \frac{\partial \phi_2}{\partial s} \frac{y}{\delta} + \frac{7}{6} \frac{y^{\frac{10}{3}}}{\delta^{\frac{1}{3}}} \frac{\partial y}{\partial h}$$

問題 III-1

$$Q_3 = C$$

[制限 L]

III-2

$$Q_3 = C + Ax^2 \quad [\delta S_w = 0]$$

III-3

$$Q_3 = C + Bx + Ax^2$$

$$[\delta S_w = 0, \int \delta h x ds = 0]$$

9. 問題 II, III では先端はきつていないと考えられる。

先端附近では 附 E-2 に従い Q_2, Q_3 は

$$\frac{Q_2}{Q_3} \propto \frac{\partial \phi}{\partial r} \propto r^{\frac{10}{3}\nu - \frac{19}{6}}$$

となるので、これが ν に関係しない値には

$$\nu = \frac{19}{20} = .95$$

となるが、この時 $\frac{\partial \phi}{\partial r} \propto \nu r^{\nu-1} = .95 r^{-.05}$

となり無限大となるから 液面点とならない。

10. 問題 II, III の細長体近似解は同じで

§4 より 制御数 (の場合)

$$Q_2 \div Q_3 \propto y \frac{d^2}{dx^2} y^{\frac{7}{6}} = \text{const.}$$

この解は 筒壁ではつかないが、 $x=1$ の近くで考えると

$$A \equiv \lambda \cdot \theta = \sqrt{1-x^2}.$$

とおき $y = 0^\nu$ と仮定すると、 $x \neq 1$ の近くで $Q_2 \div Q_3 = \text{const.}$

の値には $Q_2 \propto y^{\frac{13}{6}\nu - 4}$ となるので $\nu = \frac{24}{13}$

と仮定 $y \propto (1-x^2)^{\frac{12}{13}}$

となり 問題 I の場合の解 $y \propto (1-x^2)^{\frac{6}{7}}$

に大変近い。恐らく正解の $4/3$ は 問題 I より

大きい (?) がらう。

1/. Q_j の変分

$$Q_3 = Q_1 y, \quad Q_2 = Q_3 / \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{y}{\frac{\partial y}{\partial n}} Q_1$$

$$\therefore \delta Q_3 = y \delta Q_1 + \underbrace{Q_1 \delta y}$$

$$\delta Q_2 = \left(\frac{y}{\frac{\partial y}{\partial n}} \right) \delta Q_1 + \left(\frac{\delta y}{\frac{\partial y}{\partial n}} \right) \underbrace{Q_1}$$

$$\delta y = \delta n \frac{\partial y}{\partial n}$$

12. 細長棒近似で直接了積分の最小値を求めよ

$$J = \int_{-1}^1 y^{\frac{7}{6}} \left(1 + \frac{10}{3} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} \right) dx$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = \frac{y^{\frac{2}{3}}}{2} \frac{d^2(y^2)}{dx^2}$$

$$J_1 = \int_{-1}^1 y^{\frac{7}{6}} dx$$

$$J_2 = - \int_{-1}^1 y^{\frac{7}{6}} \frac{d^2 y^2}{dx^2} dx$$

$$J = J_1 + \frac{5}{3} y^{\frac{2}{3}} J_2$$

$$\frac{7}{12} + 1$$

$$J_2 = - \int_{-1}^1 y^{\frac{7}{6}} \frac{d^2 y^2}{dx^2} dx = \frac{7}{6} \frac{d y^2}{dx} y^{\frac{1}{6}} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d y^2}{dx} y^{\frac{1}{6}} dx$$

$$= \frac{7}{3} \int_{-1}^1 y^{\frac{17}{6}} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{7}{3} \left(\frac{12}{19} \right)^2 \int_{-1}^1 \left(\frac{d y^{\frac{19}{12}}}{dx} \right)^2 dx$$

$$\delta J_2 = \frac{14}{3} \left(\frac{12}{19} \right)^2 \int_{-1}^1 \frac{d y^{\frac{19}{12}}}{dx} \left(\frac{d \delta y^{\frac{19}{12}}}{dx} \right) dx = \frac{17}{12} y^{\frac{7}{12}} \delta y$$

$$= - \frac{14 \times 12}{3 \times 19} \int_{-1}^1 dy y^{\frac{7}{12}} \frac{d^2 y^{\frac{19}{12}}}{dx^2} dx$$

$$\delta J_1 = \frac{7}{6} \int_{-1}^1 y^{\frac{1}{6}} \delta y dx$$

容積一定条件 $\int y \delta y dx = 0$

浸水面積一定条件 $\int \delta y dx = 0$

かつ $\delta J = 0$ は

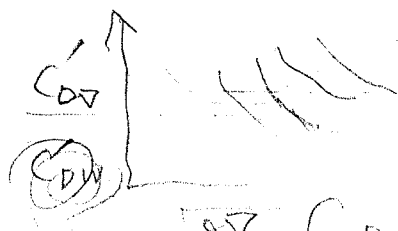
$$\frac{7}{6} y^{\frac{1}{6}} - \frac{5}{3} \frac{2}{\beta} y^{\frac{7}{12}} + \frac{56}{19} y^{\frac{7}{12}} \frac{d^2 y^{\frac{19}{12}}}{dx^2} = \text{const. (} S_w \text{一定)}$$

$$\frac{7}{6} y^{-\frac{5}{6}} - \frac{280}{57} \frac{2}{\beta} y^{-\frac{5}{12}} \frac{d^2 y^{\frac{19}{12}}}{dx^2} = \text{const. (} \nabla i = \frac{1}{2} \text{)}$$

とあって §4 の結果に よく似ている。

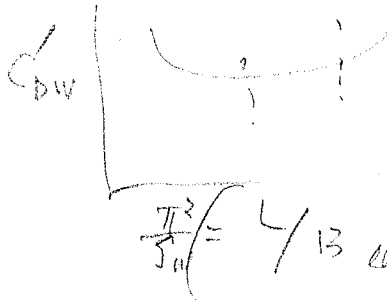
(これは 当然だ！)

② 計算



矩形, 放物線, Cal.

$$\frac{\delta V}{\pi L^3} \left(\frac{B}{L} \leftarrow \frac{V}{\pi L^2} \right) \quad V = \pi a b^2 =$$



矩形, 放物線, Cal.

Sw: 単位

$$\frac{\pi^2}{3} = \frac{4}{13} \text{ (単位)}$$

∇ : 単位

$$y dx = \beta \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{矩形の } V = \frac{4}{3} \pi a b^2 = \frac{4\pi}{3 \times 8} L B^2$$

$$\frac{B}{L} = \sqrt{\frac{\delta V}{\pi L^3}}, \quad \frac{L}{B} = \sqrt{\frac{\pi L^3}{\delta V}} \xrightarrow{L=2 \frac{1}{2} \text{ m}} \sqrt{\frac{4\pi}{3V}}$$

$$\text{矩形の } S_w = 2\pi \int y dx = \frac{\pi}{2} B L \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi^2}{4} B L$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{B}{L} = \frac{4 S_w}{\pi^2 L^2}, \quad \frac{L}{B} = \frac{\pi^2 L^2}{4 S_w} \xrightarrow{L=2} \frac{\pi^2}{S_w}$$

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{1+x^2} dx \\ &= \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ \frac{d^2 s}{dx^2} &= \frac{-x}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{8} B L$$