

高レイノルズにおけるオゼーシンの極限解析

1. 速度場の表現	1
2. 高レイノルズ数の極限	5
3. 垂直平板	7
4. 平板の抵抗	11
5. 楕円の解	13/17

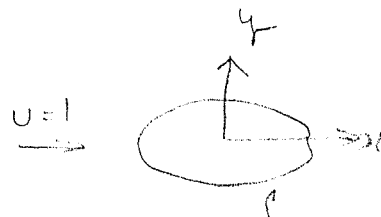
附録 A 要素上の歪の極分 (定常) A-1-5

〃 B 〃 (周知解) B-1-2
(これは又定)

「ア」(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15) (16) (17) (18) (19) (20) (21) (22) (23) (24) (25) (26) (27) (28) (29) (30) (31) (32) (33) (34) (35) (36) (37) (38) (39) (40) (41) (42) (43) (44) (45) (46) (47) (48) (49) (50) (51) (52) (53) (54) (55) (56) (57) (58) (59) (60) (61) (62) (63) (64) (65) (66) (67) (68) (69) (70) (71) (72) (73) (74) (75) (76) (77) (78) (79) (80) (81) (82) (83) (84) (85) (86) (87) (88) (89) (90) (91) (92) (93) (94) (95) (96) (97) (98) (99) (100)

1. 速度場の表現

$$\left. \begin{aligned} u(Q) &= + \int_C (X U^{(1)} + Y V^{(1)}) ds \\ v &= + \int_C [X U^{(2)} + Y V^{(2)}] ds \end{aligned} \right\} (1.1)$$



$$\left. \begin{aligned} p(Q) &= + \int_C [X P^{(1)} + Y P^{(2)}] ds \\ \gamma(Q) &= + \int_C [X Z^{(1)} + Y Z^{(2)}] ds \end{aligned} \right\} (1.2)$$

$$\left. \begin{aligned} 2\pi U^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial x} (l_y R + \Phi) + 2k\bar{\Phi} \\ 2\pi V^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial y} (l_y R + \Phi) = 2\pi U^{(2)} \\ 2\pi V^{(2)} &= - \frac{\partial}{\partial x} (l_y R + \Phi) \\ \bar{\Phi} &= K_0 (kR) e^{k(x-x_0)} \end{aligned} \right\} (1.3)$$

$$\left. \begin{aligned} P^{(1)} &= \frac{+1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} l_y R ; \quad P^{(2)} = \frac{+1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} l_y R \\ Z^{(1)} &= \frac{k}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \bar{\Phi} ; \quad Z^{(2)} = \frac{k}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\Phi} \end{aligned} \right\} (1.4)$$

$$\left. \begin{aligned} X &= -p \frac{\partial x}{\partial h} - \mu \int \frac{\partial y}{\partial h} \\ Y &= -p \frac{\partial y}{\partial h} + \mu \int \frac{\partial x}{\partial h} \end{aligned} \right\} (1.5)$$

全境界条件に $u = -1, \quad v = 0, \quad \text{on } C \quad (1.6)$

u, v をホッジニマル成分 (u_p, v_p), 共計性成分 ($u_{\bar{p}}, v_{\bar{p}}$)

にわけると.

$$\begin{aligned} p &= -u_p, & \mu s &= v_{\bar{p}}, & \left\{ \begin{array}{l} (1.7) \\ (1.6)より \end{array} \right. \\ \mu s &= v_{\bar{p}} = -v_p, \end{aligned}$$

(1.5)を(1.1)に代入して並べ直すと.

$$\begin{aligned} u(Q) &= \frac{+1}{2\pi} \int_C \left[p \left\{ \frac{\partial}{\partial n} (h_p R + \bar{\Phi}) + 2h_p \bar{\Phi} \frac{\partial X}{\partial n} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \mu s \left\{ \frac{\partial}{\partial s} (h_p R + \bar{\Phi}) + 2h_p \bar{\Phi} \frac{\partial X}{\partial s} \right\} \right] ds, \\ v(Q) &= \frac{+1}{2\pi} \int_C \left[p \frac{\partial}{\partial s} (h_p R + \bar{\Phi}) + \mu s \frac{\partial}{\partial n} (h_p R + \bar{\Phi}) \right] ds, \end{aligned} \quad \left\{ (1.8) \right.$$

$$\begin{aligned} p(Q) &= \frac{+1}{2\pi} \int_C \left[p \frac{\partial}{\partial n} h_p R - \mu s \frac{\partial}{\partial s} h_p R \right] ds, \\ s(Q) &= + \frac{h_p}{\pi} \int_C \left[+ p \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s} + \mu s \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right] ds, \end{aligned} \quad \left\{ (1.9) \right.$$

$$\begin{aligned} u_p &= \frac{+1}{2\pi} \int_C \left(p \frac{\partial}{\partial n} h_p R - \mu s \frac{\partial}{\partial s} h_p R \right) ds, \\ v_p &= + \frac{1}{2\pi} \int_C \left(p \frac{\partial}{\partial s} h_p R + \mu s \frac{\partial}{\partial n} h_p R \right) ds, \end{aligned} \quad \left\{ (1.10) \right.$$

$$u_{\bar{p}} =$$

$$u_H = + \frac{1}{2\pi} \int_C \left[p \left\{ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} + 2k \bar{\Phi} \frac{\partial X}{\partial n} \right\} - \mu s \left\{ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s} + 2k \bar{\Phi} \frac{\partial X}{\partial s} \right\} \right] ds, \quad (1.11)$$

$$v_H = + \frac{1}{2\pi} \int_C \left[p \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s} + \mu s \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right] ds,$$

(1.10)に (1.7)の境界値を代入すると.

$$u_P = \frac{-1}{2\pi} \int_C \left[u_P \frac{\partial}{\partial n} k R - v_P \frac{\partial}{\partial s} k R \right] ds, \quad (1.12)$$

$$v_P = \frac{-1}{2\pi} \int_C \left[u_P \frac{\partial}{\partial s} k R + v_P \frac{\partial}{\partial n} k R \right] ds.$$

これから 積分を移す.

$$u_P = \frac{-1}{2\pi} \int_C \left[u_P \frac{\partial}{\partial n} k R + \frac{\partial u_P}{\partial s} k R \right] ds, \quad (1.12')$$

$$v_P = \frac{-1}{2\pi} \int_C \left[v_P \frac{\partial}{\partial n} k R - \frac{\partial u_P}{\partial s} k R \right] ds.$$

$$\therefore \frac{\partial u_P}{\partial n} = - \frac{\partial v_P}{\partial s}, \quad \frac{\partial v_P}{\partial n} = \frac{\partial u_P}{\partial s}, \quad (1.13)$$

なる関係が成る.

また (1.11)は 積分を移すと

$$u_H = + \frac{1}{2\pi} \int_C \left[p \left\{ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} + 2k \bar{\Phi} \frac{\partial X}{\partial n} \right\} + 2\mu k s \bar{\Phi} \frac{\partial X}{\partial s} + \mu \bar{\Phi} \frac{\partial s}{\partial s} \right] ds,$$

$$v_H = \frac{1}{2\pi} \int_C \left[\bar{\Phi} \frac{\partial p}{\partial s} - \mu s \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right] ds. \quad (1.14)$$

(1.7) 证明 (1.14)

$$u_H = \frac{-1}{2\pi} \int_C \left[u_p \left\{ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} + 2k\bar{\Phi} \frac{\partial x}{\partial n} \right\} - 2k\bar{u}_p \frac{\partial x}{\partial s} + \bar{\Phi} \frac{\partial u_p}{\partial s} \right] ds,$$

$$v_H = \frac{-1}{2\pi} \int_C \left[v_p \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} - \frac{\partial u_p}{\partial s} \bar{\Phi} \right] ds,$$

(1.14')

2. 高レイクル数の極限

あまり厚くない物体で $h \rightarrow \infty$ としよう。

(1.14) に 附録 A の種別を適用すると。

1) 物体の上流側, 物体上では

$$\left. \begin{aligned} u_H &= \cancel{u_P} + v_P \frac{\frac{\partial y}{\partial h}}{\frac{\partial x}{\partial h}} + O\left(\frac{1}{h}\right) \\ v_H &= -v_P + O\left(\frac{1}{h}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore u &\doteq u_P + v_P \frac{\frac{\partial y}{\partial h}}{\frac{\partial x}{\partial h}} = -1 \\ v &\doteq 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$$\text{つまり} \quad u_P \frac{\partial x}{\partial h} + v_P \frac{\partial y}{\partial h} = -\frac{\partial x}{\partial h} \quad (2.3)$$

2) 下流側 物体 面上では

$$\left. \begin{aligned} u_H &= -u_P - v_P \frac{\frac{\partial y}{\partial h}}{\frac{\partial x}{\partial h}} + v_P \frac{\frac{\partial y}{\partial h}}{\frac{\partial x}{\partial h}} \Big|_{\text{前部対応点}} \\ v_H &\doteq O\left(\frac{1}{h}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= -1 \doteq -v_P \frac{\frac{\partial y}{\partial h}}{\frac{\partial x}{\partial h}} + v_P \frac{\frac{\partial y}{\partial h}}{\frac{\partial x}{\partial h}} \Big|_{\text{前部対応点}} \\ v &\doteq v_P = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

総合すると、前半部で (2.3), 後半部で (2.5) の2式となり、 u_P, v_P は「 u, v の結果に一致する」。

以下これを「オセ」の極限流と呼ぼう。

上流側が流れ、後流の外では

$$u \doteq u_p, v = v_p, \quad (2.6)$$

後流中では (A.14) が 2 式が成立するとすると

$$u_H \doteq \left[u_p + v_p \frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial x}{\partial n}} \right]_H \quad H \text{ (A wake)}$$

$$- \left[u_p + v_p \frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial x}{\partial n}} \right]_A, \quad (2.7)$$

$$v_H \doteq 0$$

この 1 式は (2.2) が 1 式, (2.5) が 2 式より

$$u_H \doteq -1 - [u_p]_A, \quad (2.7')$$

従って

$$J = \frac{\partial v_H}{\partial x} - \frac{\partial u_H}{\partial y} \doteq \frac{\partial u_p}{\partial y} \Big|_A, \quad (2.8)$$

(1.14') が 2 式から

$$J = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_p}{\partial y} \Big|_A, \quad (2.8')$$

$$= \frac{\partial u_p}{\partial y} = \frac{\partial u_p}{\partial n} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial u_p}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial u_p}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial s}, \quad (\because \frac{\partial u_p}{\partial n} = -\frac{\partial v_p}{\partial s} = 0)$$

となるからこの両式は等しくない。

しか(今後は (2.8) を使う事としよう。

3. 垂直平板

$$\left. \begin{aligned} u_P &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[X \frac{\partial}{\partial x} hR + Y \frac{\partial}{\partial y} hR \right] dy, \\ v_P &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[X \frac{\partial}{\partial y} hR - Y \frac{\partial}{\partial x} hR \right] dy, \end{aligned} \right\} (3.1)$$

と置く $X' = 0$ として (2.3), (2.5) の2式から

$$\left. \begin{aligned} +1 &= X + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{Y dy}{y-y'}, \\ 0 &= Y + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{X dy}{y-y'}, \end{aligned} \right\} (3.2)$$

$y = \cos \theta$, $y' = \cos \theta'$ と置く $dy = -\sin \theta d\theta$.

$$\left. \begin{aligned} 1 &= X + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{Y \sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta'}, \\ 0 &= Y + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{X \sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta'}, \end{aligned} \right\} (3.2')$$

これを解くは「よく知られて」あるが、2つ以上は数値的に実行する他はない。

しかし = 0 場合 Oseen の解いたように解析的に解く方が簡単である。

以下 heuristic に解いて見よう。

複素速度を w としよう。

$$w = u_P - i v_P, \quad (3.3)$$

また $z = x + iy$ とおいて

$$z = \frac{i}{z} \left(s + \frac{1}{s} \right), \quad (3.4)$$

従って s -平. の ^{単位円内} 外側に z -平. を写像する。

これをさらに次の一次変換により t -平. に移す。
「の上半面」

$$t = i \frac{s-i}{s+i}, \quad (3.5)$$

境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} u_P = -1 \quad \text{on } \overline{BCD} \\ v_P = 0 \quad \text{on } \overline{DAB} \end{array} \right\} \quad (3.6)$$

であるから w は次のようになる。

$$w = \frac{At}{\sqrt{t^2-1}} - 1, \quad (3.7)$$

但し A は実定数であつて w が無限遠で正則のよう
に決めるものとする。

そこで (3.4) より

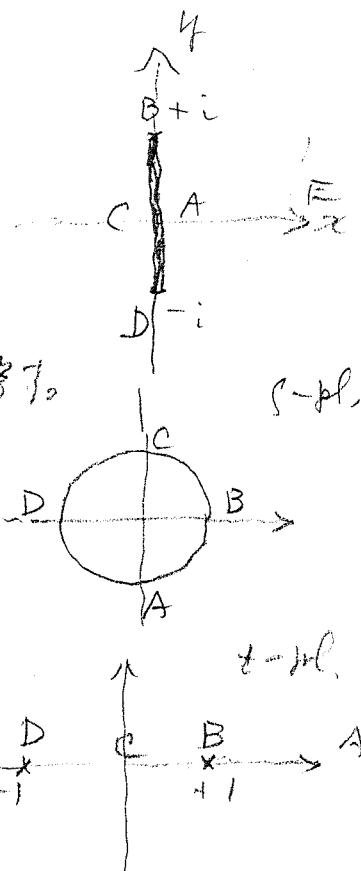
$$s = -i(z + \sqrt{1+z^2}), \quad (3.4')$$

又

$$\begin{aligned} t &= i \frac{1+z+\sqrt{1+z^2}}{z-1+\sqrt{1+z^2}} = i \frac{(1+z+\sqrt{1+z^2})^2}{z^2-1+\sqrt{1+z^2}} = \frac{i(z^2+z^2+2z\sqrt{1+z^2})}{2z(z+\sqrt{1+z^2})} \\ &= \frac{1}{z} (1+\sqrt{1+z^2}), \quad (3.5'') \end{aligned}$$

よつて

$$\sqrt{t^2-1} = \frac{i}{z} \sqrt{(1+\sqrt{1+z^2})^2+z^2} = \frac{\sqrt{2}}{z} \sqrt{1+\sqrt{1+z^2}}, \quad (3.5''')$$



$$\therefore \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{1+z^2}}}{\sqrt{2} \frac{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1+\frac{1}{1+z^2}} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2z^2}\right)$$

すなわち $z \rightarrow \infty$ で $w = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ と z と A は $\sqrt{2}$ と $\pi/2$ になる

$$w = \frac{\sqrt{2} t}{\sqrt{t^2-1}} - 1, \quad (3.7')$$

$$w \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{1}{2z^2}, \quad (3.8)$$

無限遠方では (1.4.4) から抗力も D と (2. ($D \equiv C_D$))

$$w \longrightarrow \frac{D}{2\pi \rho U^2 B}$$

$$C_D = \frac{D}{\frac{\rho}{2} U^2 B} = D = \pi, \quad (3.9)$$

平面上では $\zeta = e^{i\theta}$ とおくと

$$z = i \cos \theta, \quad t = i \frac{e^{i\theta} - i}{e^{i\theta} + i} = i \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{2 \tan \frac{\theta}{2}}$$

$$\sqrt{t^2-1} = \frac{\sqrt{(1-\tan^2 \frac{\theta}{2})^2 - 4 \tan^2 \frac{\theta}{2}}}{2 \tan \frac{\theta}{2}} = \frac{i \sqrt{1-\tan^2 \frac{\theta}{2}}}{\tan \frac{\theta}{2}} = i$$

$$\frac{\sqrt{2} t}{\sqrt{t^2-1}} = \frac{\sqrt{2} \frac{1-\tan^2 \frac{\theta}{2}}{2 \tan \frac{\theta}{2}}}{i \frac{1-\tan^2 \frac{\theta}{2}}{\tan \frac{\theta}{2}}} = -i \frac{(1+\tan^2 \frac{\theta}{2})}{\sqrt{1+\tan^2 \frac{\theta}{2}}} = -i \left[\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \frac{\theta}{2}}} - \sqrt{1+\tan^2 \frac{\theta}{2}} \right],$$

$$\therefore w = -\left[1 + i \left(\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \frac{\theta}{2}}} - \sqrt{1+\tan^2 \frac{\theta}{2}} \right) \right], \quad \text{for } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \quad (3.10)$$

$$= -\left[1 + \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \frac{\theta}{2}}} + \sqrt{1+\tan^2 \frac{\theta}{2}} \right] \quad \text{for } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$

$$w(\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \frac{\theta}{2}}} - 1, \quad (3.11)$$

理想流体の場合の解は

$$w = \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} - 1 \xrightarrow{z \rightarrow \infty} -\frac{1}{2z^2} \quad (3.12)$$

解分

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x^2 \theta}{\sqrt{\tan \frac{\theta}{2}}} d\theta = 2 \int_0^{\pi} x^{\frac{1}{2}} \cos^{\frac{3}{2}} \frac{\theta}{2} d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{\frac{1}{2}} u \cos^{\frac{3}{2}} u du$$

$$I' = \int_0^{\pi} \sqrt{\tan \frac{\theta}{2}} d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{\frac{3}{2}} u \cos^{\frac{1}{2}} u du = \int_0^{\pi} \frac{x^2 \theta d\theta}{\sqrt{\tan \frac{\theta}{2}}}$$

$$I = 2 \frac{\Gamma(\frac{3}{4}) \Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(2)} = 2 \Gamma(\frac{3}{4}) \Gamma(\frac{5}{4}) = \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{4}) \Gamma(\frac{3}{4})$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} //$$

$$I + I' = \sqrt{2} \pi$$

4 平板の抵抗

(2.1.5)によれば、実際の抵抗を D 、逆流の抵抗を D_0 とすると

$$D = -\tilde{D} = - \iint_D f (v \tilde{u} - u \tilde{v}) dx dy, \quad \dots (4.1)$$

$$\text{今} \quad D = \alpha D_0, \quad f = \alpha f_0, \quad v = \alpha v_0, \quad u = \alpha u_0, \quad (4.2)$$

のように (u_0, v_0) を オセーン流れとして その α 倍と近似すれば

$$\alpha = 1 + \frac{\alpha^2}{\tilde{D}_0} \iint_D f_0 (v_0 \tilde{u} - u_0 \tilde{v}) dx dy, \quad \dots (4.3)$$

となり、これを α について α を求める事が出来る。

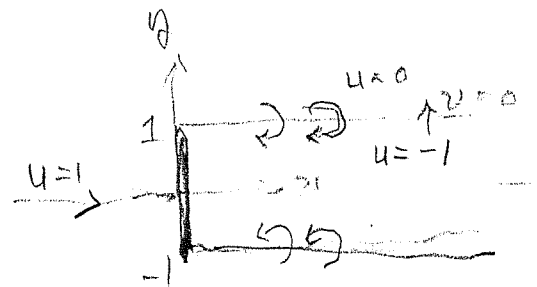
前節の解を見ると f_0 は 複雑で積分が下す能ないので、このままでは 厄介な事。

考えて見ると (u_0, v_0) は 別に オセーン解に限る訳ではない。(レーリー-リッツ法の時も言及した) ので、もっと簡単に よく使われる 次の 死水領域モデルを考えよう。

この時も L は無限大がよい。

$$\int f dy = -[u], \quad \dots (4.4)$$

となり、右側は wake の上側で -1 、下側で $+1$ である。



また $|D_0| = \pi$ である。

(4.3) 右辺の積分は結局 wake の両端で "実行" される。

$$\frac{1}{|D_0|} \iint_D (\tilde{v} \tilde{u} - u \tilde{v}) dx dy = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tilde{v} \Big|_{y=1} dx, \quad \dots (4.5)$$

wake の両端で $\tilde{v} = 0$, $u = -\frac{1}{2}$ とした。

さて連続の定理より

$$\int_0^\infty \tilde{v} dx = \int_0^\infty \tilde{v}_p dx = \int_0^\infty \tilde{u}_p \Big|_{\text{Back}} dy = 1, \quad \dots (4.6)$$

逆流流であるから $\tilde{u}_p|_{\text{Back}} \approx 1$ である。

(4.3) に代入すると $\alpha = 1 - \frac{1}{\pi} \times \pi \alpha = \pi - 1 = \underline{2.14}$

$$\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{\pi}, \quad \dots (4.7) \quad \left(\begin{array}{l} \alpha = 1 - \frac{1}{\pi} \alpha^2 \\ \alpha = .694 \\ D = 2.18 \end{array} \right)$$

$$\alpha = \underline{.7975}, \quad \underline{D = 2.506}$$

この機型では $|D_0| = 2$ であるから上式を

$$\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \quad \dots (4.8)$$

とすると $\alpha = .732$, $D = D_0 \times .732 = 1.464$.

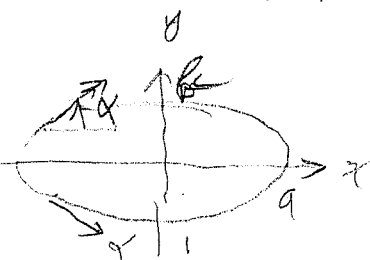
(なお $\pi \alpha \approx 2.30$)

5. 楕円の解

長径 a , 短径 b の楕円を考えよう。

$$1+w = 1+u-iv = \rho e^{-i\alpha} = e^{f(z)} \quad (5.1)$$

とかくと α は 楕円の 流向で



境界条件は

$$\Im \{f(z)\} = \begin{cases} -\alpha & ; \text{前半半楕円} \\ 0 & ; \text{後半半楕円} \end{cases} \quad (5.2)$$

$$z = a \cos \theta + i b \sin \theta = \frac{a+b}{2} \left(1 + \frac{z^2}{\zeta^2} \right), \quad (5.3)$$

$$\zeta = e^{i\theta}, \quad \zeta^2 = \frac{a-b}{a+b},$$

$a < b$ の時は ζ を $i\zeta$ と置き換わればよい。

したがって

$$\alpha = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{a \sin \theta - i b \cos \theta}{a \cos \theta + i b \sin \theta} \right) = \frac{1}{2i} \left[\pi i + 2 \log \zeta + \log \left(\frac{1 - \frac{\zeta^2}{\zeta^2}}{1 - \frac{\zeta^2}{\zeta^2}} \right) \right]$$

$$= -\frac{\pi}{2} + i \log \zeta - \frac{1}{2i} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^{2n}}{n} \left(\frac{1}{\zeta^{2n}} - \zeta^{2n} \right) \right]$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^{2n}}{n} \sin 2n\theta, \quad (5.4)$$

$$\text{今} \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\zeta^n}, \quad A_n \text{ real}, \quad (5.5)$$

と展開出来るとする

$$f(z) \xrightarrow{|z| \gg 1} \frac{(a+b)}{2z} A_1, \quad (5.6)$$

$$w(z) \xrightarrow{|z| \gg 1} \frac{(a+b)}{2z} A_1, \quad (5.7)$$

となる

(5.5)より

$$\mathcal{L}\{f\} = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \quad , \quad (5.8)$$

(5.2)の右辺を(5.8)に代入すると

$$A_n = - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{L}\{f\} \sin n\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin n\theta d\theta, \quad (5.9)$$

(5.4)を代入して

$$\frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\theta - \frac{\pi}{2}) \sin n\theta d\theta = - \frac{\cos n\pi}{n} - \frac{2 \sin(\frac{n\pi}{2})}{\pi n^2}, \quad (5.10)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2\nu\theta \sin n\theta d\theta = \frac{4\nu}{\pi} \frac{\cos \nu\pi}{4\nu^2 - n^2} \sin(\frac{n\pi}{2}),$$

と(5.9)より

$$A_n = - \frac{\cos n\pi}{n} - \frac{2}{\pi} \sin(\frac{n\pi}{2}) \left[\frac{1}{n^2} - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \varepsilon^{2\nu}}{4\nu^2 - n^2} \right], \quad (5.11)$$

より

$$A_1 = 1 - \frac{2}{\pi} \left[1 - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \varepsilon^{2\nu}}{4\nu^2 - 1} \right], \quad (5.12)$$

$$= 1 + \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{1+\varepsilon^2}{2i\varepsilon} \right) \log \left(\frac{1-i\varepsilon}{1+i\varepsilon} \right) \right],$$

 $\varepsilon = \tan \delta$ とおくと

$$A_1 = 1 - \frac{2}{\pi} \frac{\delta}{\varepsilon} (1 + \varepsilon^2),$$

 $\varepsilon = i\varepsilon'$ とおくと

$$A_1 = 1 - \frac{2}{\pi} \frac{\delta}{\varepsilon'} \log \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right),$$

折境係数は

$$C_{ba} = \frac{D}{\frac{P}{2} U^2 (2a)} = \pi A_1 \left(1 + \frac{a}{b}\right)$$

$$C_{ba} = \frac{D}{P U^2 b} = \pi \left(\frac{a}{b} + 1\right) A_1$$

(5.13)

と与えられる。

次に b/a の値に對して示す。

さて (5.5) に (5.11) を代入すると

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n\zeta^n} - \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\cos \mu\pi}{\zeta^{2\mu+1}} \left[\frac{1}{(2\mu+1)^2} - 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} \zeta^{2\nu}}{4\nu^2 - (2\mu+1)^2} \right]$$

となるが

$$\log \left(1 + \frac{1}{\zeta}\right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\zeta^n}$$

であるから

$$f(z) = \log \left(1 + \frac{1}{\zeta}\right) - \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=0}^{\infty} \dots$$

(5.14)

この級数は少々面倒である。

Table Oseen Resistance of Elliptic Section (有効数字 4桁)

$\frac{h}{a}$	C_{Da}	C_{Dh}	EXP.	Spl.
∞	∞	3.1416	1.98	61.6
10	27.552	2.7552		
5	13.234	2.6468		
3	7.5806	2.5269		
2	4.863	2.4313		
1	2.283	2.283	1.2	.60 $\times \frac{1.03 \rightarrow .59}{1.03 \rightarrow .62}$
.5	1.085	2.189	.6	
$\frac{1}{2}$	.5236	2.0945	.35	$\leftarrow \times \times$
.2	.4155	2.0775		
.1	.2041	2.041	.28	
$\frac{1}{10}$	.1011	2.021		$\leftarrow \times \times$
0	0	2		

~~横 12.53~~
(SKE)

Newton's Law

$$\alpha' = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$\uparrow = .618$$

$$\pi \times .618 = 1.94$$

$$\alpha' = 1 - 0.5 \alpha'^2$$

$$\alpha'^2 + \alpha' - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2} \alpha'^2 + \alpha' - 1 = 0$$

$$\alpha' = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2}}{1} = .7321$$

$$C_D = 2\alpha' = 1.464$$

$$C_{D0} = 2.$$

f_{eff}
 C_{D0}
 C_{D0}

$$J_n = 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \varepsilon^{2\nu}}{4\nu^2 - n^2} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \varepsilon^{2\nu} \left(\frac{1}{2\nu-n} - \frac{1}{2\nu+n} \right)$$

$$I_n = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^\nu \varepsilon^{2\nu}}{2\nu-n}, \quad (\varepsilon^{-n} I)' = \sum_1^{\infty} (-1)^\nu \varepsilon^{2\nu-n-1} = \frac{\varepsilon^{-n-1}}{1+\varepsilon^2}$$

$$\therefore I_n = \varepsilon^n \int \frac{\varepsilon^{-n-1} d\varepsilon}{1+\varepsilon^2} = \varepsilon^{2n+1} \int \frac{\varepsilon^{-2n-2} d\varepsilon}{1+\varepsilon^2}$$

$$I_{-n} = \varepsilon^{-n} \int \frac{\varepsilon^{n+1} d\varepsilon}{1+\varepsilon^2} = \varepsilon^{-2n-1} \int \frac{\varepsilon^{2n} d\varepsilon}{1+\varepsilon^2}$$

$$J_n = \frac{1}{n} (I_n - I_{-n}) = \frac{1}{2n+1}$$

$$J_1 = I_1 - I_{-1} = \int \frac{dx}{1+x^2} \left(\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$$

附録 A 要素上の電位の積分 (定常の場合)

$\rho=1, U=1, L(2 \times B)=2$ とすると $Re = \frac{VL}{\mu_0 \rho} \rightarrow \frac{2}{\mu_0} = 4\mu_0$

Re は $10^3 \sim 10^4$ の間を流かうものとするとき $\frac{10^3}{4} \sim \frac{10^4}{4}$

要素長を Δ とすると Δ は小さい $\frac{1}{100}$ 程度となる。

したがって $\frac{Re\Delta}{2} = \frac{10}{8} \sim \frac{10^3}{8}$ となり、要素上で電位をば

漸近展開の適用が出来る。

逆に言うと要素上での電位の積分を正確に出来ないだけ
と全体の計算精度がおちる事になるので以下それを
検討する。

(は曲線としての)
要素上では変数は一定値をとるものとする。

1) Q点 が 要素上にある時。

$$I = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{R} ds = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} K_0(RR) e^{-Rx} ds \quad (A.1)$$

$$R=|s|, \quad x = -s \cos \alpha$$

$$I = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} K_0(RR) e^{-Rx} ds$$

$$I_2 = \left(\int_{-\infty}^{-\frac{\Delta}{2}} + \int_{\frac{\Delta}{2}}^{\infty} \right) K_0(RR) e^{-Rx} ds,$$

(A.2)

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} K_0(k|s|) e^{+ks \cos \alpha} ds = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} K_0\left(\frac{z}{k}\right) e^{z \cos \alpha} dz \\
 &= \frac{1}{k} \int_0^{\infty} K_0\left(\frac{z}{k}\right) (e^{z \cos \alpha} + e^{-z \cos \alpha}) dz \\
 &= \frac{1}{k} \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} e^{-z \cos \alpha} (e^{z \cos \alpha} + e^{-z \cos \alpha}) dz = \frac{1}{k} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} \right) dt \\
 &= \frac{2}{k} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\cos \alpha} = \frac{2}{k} \int_0^{\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{\pi}{k}, \quad (A.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \left(\int_{-\infty}^{-\frac{R\Delta}{2}} + \int_{\frac{R\Delta}{2}}^{\infty} \right) \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2k|s|}} e^{-k|s| - s \cos \alpha} ds = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{-\infty}^{-\frac{R\Delta}{2}} e^{-z} e^{-z \cos \alpha} dz + \int_{\frac{R\Delta}{2}}^{\infty} e^{-z} e^{-z \cos \alpha} dz \right] \\
 &= \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-\cos \alpha}} \int_{\frac{R\Delta}{2}}^{\infty} e^{-u^2} du + \frac{1}{\sqrt{1+\cos \alpha}} \int_{\frac{R\Delta}{2}}^{\infty} e^{-u^2} du \right] \\
 &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}k} \left[\frac{\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{R\Delta}{2}} \sqrt{1-\cos \alpha}\right)}{\sqrt{1-\cos \alpha}} + \frac{\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{R\Delta}{2}} \sqrt{1+\cos \alpha}\right)}{\sqrt{1+\cos \alpha}} \right], \quad (A.4)
 \end{aligned}$$

また $\frac{\sqrt{R\Delta}}{2} \gg 1$ ならば I_2 は I_1 に近似される

$$I_2 \approx \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) \frac{1}{k \sqrt{\frac{R\Delta}{2}}} \left[\frac{1}{1-\cos \alpha} + \frac{1}{1+\cos \alpha} \right] = \frac{4\sqrt{\pi}}{(k\sqrt{R\Delta}) A_1^2 \alpha}, \quad (A.5)$$

また $\alpha = 0$ とすると $I_1 + I_2 \rightarrow \infty$ となるので、これは

$$I = \frac{1}{k} \int_0^{\frac{R\Delta}{2}} K_0(z) (e^z + e^{-z}) dz = I_1' + I_2'$$

$$\int_0^t e^{\pm z} K_0(z) dz = e^{\pm t} [K_0(t) \pm K_1(t)] \mp 1, \quad \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dz} \right)$$

$$\begin{aligned} \therefore I &= \frac{R\Delta}{2R} \left[e^{+\frac{R\Delta}{2}} \left\{ K_0\left(\frac{R\Delta}{2}\right) + K_1\left(\frac{R\Delta}{2}\right) \right\} + e^{-\frac{R\Delta}{2}} \left\{ K_0\left(\frac{R\Delta}{2}\right) - K_1\left(\frac{R\Delta}{2}\right) \right\} \right] \\ &= \Delta \left[\cosh \frac{R\Delta}{2} K_0\left(\frac{R\Delta}{2}\right) + \sinh \frac{R\Delta}{2} K_1\left(\frac{R\Delta}{2}\right) \right], \quad \dots (A.6) \end{aligned}$$

$$\frac{R\Delta}{2} > 1 \text{ のとき } K_0(z) \doteq \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \doteq K_1(z)$$

$$\therefore I \doteq \frac{\Delta \sqrt{\pi}}{1 \sqrt{\pi \Delta}} = \sqrt{\frac{\pi \Delta}{R}}, \quad \text{for } \frac{R\Delta}{2} \geq 1, \quad \dots (A.7)$$

$$[\text{なお、} K_0(z) e^z \doteq \sqrt{\frac{\pi}{2z}}, K_0(z) e^{-z} \doteq 0 \text{ と近似して同様に成立}]$$

次に

$$J = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = -R \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} K_1(RR) e^{-kx} \frac{\partial R}{\partial n} ds$$

となる

$$+ R \frac{\partial x}{\partial n} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} K_0(RR) e^{-kx} ds, \quad \dots (A.8)$$

$$J = -R \frac{\partial x}{\partial n} I + J', \quad \dots (A.9)$$

$$J' = -R \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} K_1(RR) \frac{\partial R}{\partial n} e^{-kx} ds.$$

I はすでに求められたから J' についてのみに着目すればよいから
 $\frac{\partial R}{\partial n} = 0$ であるから $J' = 0$ とした。なぜであるか

$$K_1(RR) \xrightarrow{RR \rightarrow 0} \frac{1}{RR}$$

であるから 留数分が変り、R を外側から近づくものとすると

$$J' = - \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial n} ds = +\pi, \quad \dots (A.10)$$

$$\text{なお } \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{\partial}{\partial n} \log R ds = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial n} ds = -\pi$$

2) Q点が必要上にある場合 (上流側の場合)

Q点が必要上になければ勿論 $\bar{\Phi}$ は



漸近展開をいよいよから上流側では

$$\bar{\Phi} \doteq \sqrt{\frac{\pi}{2Rh}} e^{-R(R+X-X')} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2Rh}} e^{-2R|X-X'|}$$

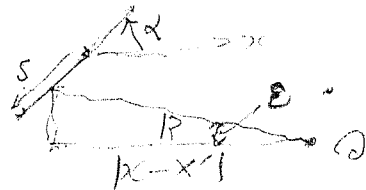
となるから $|X-X'| = \Delta/\alpha$ とおいて $2R|X-X'| = R\Delta > \frac{10^3}{4}$ であり

充分小さい α の場合 $\bar{\Phi}$ は常に

$$\bar{\Phi} \doteq 0, \quad \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \doteq 0, \quad \dots \quad (A.11)$$

3) Q点が必要上にならな場合 (下流側の場合)

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{2Rh}} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{e^{-R(R+X-X')}}{\sqrt{R}} ds, \quad \dots \quad (A.12)$$



先ず (A.12) の $\alpha = 0$ の場合を考えよう。
要素の中心 ($X=0, Y=0$) 上で

$$R = \sqrt{(X' + s \cos \alpha)^2 + (s \sin \alpha)^2} \doteq (X' + s \cos \alpha) \left[1 + \frac{(s \sin \alpha)^2}{2(X' + s \cos \alpha)^2} \right]$$

$$R + X - X' = R + s \cos \alpha - X' \doteq \frac{(s \sin \alpha)^2}{2(X' + s \cos \alpha)}$$

$$I \doteq \sqrt{\frac{\pi}{2X'h}} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^{-\frac{R \sin^2 \alpha}{2X'}} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{R \sin \alpha} \int_{-\frac{\sin \alpha \sqrt{R \Delta}}{2X'}}^{\frac{\sin \alpha \sqrt{R \Delta}}{2X'}} e^{-t^2} dt, \quad (A.13)$$

よって

$$I \doteq \sqrt{\frac{\pi}{R X'}} \Delta \quad \text{for} \quad \frac{\sin \alpha \sqrt{R \Delta}}{2X'} \ll 1$$

$$\doteq \frac{\pi}{R \sin \alpha} \quad \text{for} \quad \frac{\sin \alpha \sqrt{R \Delta}}{2X'} \gg 1$$

(A.14)

したが x' が小さい時は式(2)で、 x' が大きい時は式(1)は物体の充分前方では式(1)をとらねばならない。

次に θ の ϵ が 0 でない時は簡単ではなく、実際には数値積分するのによいと認められる。この時 exponential term は要素上で大きく変動する場合があるので注意しなければならない。

大雑把な見積りとしては

$$I \approx \sqrt{\frac{\pi}{2kR}} e^{-k(R+x-x')} \Delta \quad (A.15)$$

$$R+x-x' \Big|_{\Delta \text{ の中点}} \approx \frac{(y-y')^2}{2(1-x')} = \frac{(x-x')}{2} \tan^2 \epsilon$$

したが J については (A.8) より $K_0 \approx K_1$ なる

$$J \approx -k \left(\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial y} \right) I \quad (A.16)$$

これは要素の中点の値とする。

附録 B 要素上の $\bar{\Phi}$ の積分 (周期運動)

$$\bar{\Phi}^\omega = k_0(k'R) e^{k'(x-x')} \quad (B.1)$$

R が充分小さい時は, $\left(\begin{array}{l} k' = \sqrt{k^2 + 2i\omega k} \\ \omega \doteq k + i\omega \doteq k \end{array} \right)$

$$\bar{\Phi}^\omega \doteq -\log R + \text{const}, \quad (B.2)$$

kR が大きい時は

$$\bar{\Phi}^\omega \doteq \sqrt{\frac{\pi}{2\pi R}} e^{-k'R + k'(x-x')} \doteq \sqrt{\frac{\pi}{2\pi R}} e^{-k(R+x-x') - i\omega R} \quad (B.3)$$

より $\bar{\Phi}^\omega \doteq \bar{\Phi} e^{-i\omega R} \quad (B.4)$

この式は ωR の小さい時も近似的に正しいから一般的に成立つてよからう。

1) R が要素上である時.

2) 1) は (B.4) は $\omega R \ll 1$ であるから

$$\bar{\Phi}^\omega \doteq \bar{\Phi} \quad (B.5)$$

故

$$I^\omega = \int \bar{\Phi}^\omega ds \doteq \int \bar{\Phi} ds = I, \quad (B.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Phi}^\omega}{\partial n} &\doteq e^{-i\omega R} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} - i\omega \frac{\partial R}{\partial n} \bar{\Phi} e^{-i\omega R} \\ &\doteq \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} - i\omega \frac{\partial R}{\partial n} \bar{\Phi} \end{aligned} \quad (B.7)$$

$$J^\omega = \int \frac{\partial \bar{\Phi}^\omega}{\partial n} ds \doteq J - i\omega \frac{\partial R}{\partial n} I \quad (B.8)$$

(A.9), (A.10) より

$$\begin{aligned} \bar{J}^\omega &= -\pi - \left(R \frac{\partial X}{\partial n} + i\omega \frac{\partial R}{\partial n} \right) I, \\ &\doteq -\pi - R \frac{\partial X}{\partial n} I, \end{aligned} \quad (B.9)$$

2) Q点から上流側で要素上にある場合.

(A.11)と同じ

$$\bar{P}^\omega = \frac{\partial \bar{P}}{\partial n}^\omega = 0, \quad (B.10)$$

3) Q点から下流側で要素上にある場合.

(B.4)により, ωR の変化は $R(R \pm X)$ に比べて小さい

から

$$\begin{aligned} I^\omega &\doteq I e^{-i\omega R} \\ \bar{J}^\omega &\doteq \bar{J} e^{-i\omega R} \end{aligned} \quad \left\{ R \text{ は要素の中点位置}, (B.11) \right.$$

とよかろう。