V　　M-11〜

No.
Date 59年初め

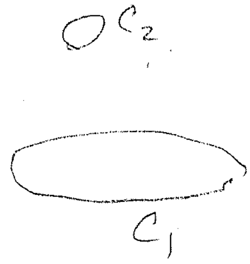
安定理論について

1. 2物体の干渉　可逆定理、ハマセントの定理　頁 1
2. 境界値問題の変分原理　4
3. 平板の左右振動の解　〃　6

附録A　オセーン流れの別の表現へ

1. 2物体の干渉、可逆定理、ハスキントの定理

非定常線型理論の可逆定理(3.2.3)は物体が C_1, C_2 の2つになっても成立つ。



今

$$\left.\begin{aligned}(u_1, v_1)_{C_1} &= \text{given}\\ (u_1, v_1)_{C_2} &= 0\end{aligned}\right\} \quad (1.1)$$

$$\left.\begin{aligned}(\tilde{u}_2, \tilde{v}_2)_{C_2} &= \text{given}\\ (\tilde{u}_2, \tilde{v}_2)_{C_1} &= 0\end{aligned}\right\} \quad (1.2)$$

なる速度場について(3.2.3)を書くと

$$\int_{C_1+C_2} (\tilde{u}_2 X_1 + \tilde{v}_2 Y_1)\, ds = \int_{C_1+C_2} (u_1 \tilde{X}_2 + v_1 \tilde{Y}_2)\, ds + \rho \int_{C_1+C_2} (u_1 \tilde{u}_2 + v_1 \tilde{v}_2) \frac{\partial x}{\partial n}\, ds, \quad (1.3)$$

となるので境界条件を代入すると

$$\int_{C_2} (\tilde{u}_2 X_1 + \tilde{v}_2 Y_1)\, ds = \int_{C_1} (u_1 \tilde{X}_2 + v_1 \tilde{Y}_2)\, ds, \quad (1.4)$$

夫々の逆流れを考えればこれは又次のようにも書ける。

$$\int_{C_2} (u_2 \tilde{X}_1 + v_2 \tilde{Y}_1)\, ds = \int_{C_1} (\tilde{u}_1 X_2 + \tilde{v}_1 Y_2)\, ds, \quad (1.4')$$

特に $\tilde{u}_1 = 1,\ \tilde{v}_1 = 0$ on C_1, $u_2 = -1,\ v_2 = 0$, on C_2

とすれば

$$-\int_{C_2} \tilde{X}_1\, ds = \int_{C_1} X_2\, ds, \quad \cdots \quad (1.5)$$

Date

これは相互作用に関する可逆定理である。

この定理で特に $C_2 \to 0$ になった極限を考えよう。

C_2 における特異性が $(\hat{U}''', \hat{V}''')$ となるとしよう。

また $(u_1, v_1) \to (u, v)$

$$(u, v)_{C_1} = \text{given} \qquad , \qquad (1.6)$$

$(\hat{u}_2, \hat{v}_2)$ としては C_2 における特異性 $(\hat{U}''', \hat{V}''')$ とそれが

C_1 に干渉して出来る $(\tilde{u}_d, \tilde{v}_d)$ の和としよう。

$$\left.\begin{aligned} \hat{u}_2 &= \hat{U}''' + \tilde{u}_d \ , \quad \hat{v}_2 = \tilde{V}''' + \hat{v}_d \ , \\ \hat{u}_2|_{C_1} &= \hat{v}_2|_{C_1} = 0 \ . \end{aligned}\right\} \quad (1.7)$$

$$\int_{C_2} \tilde{X}_2 \, ds = 1, \quad \int_{C_2} \hat{Y}_2 \, ds = 0, \quad \int_{C_2} \hat{u}_2 \, ds = \int_{C_2} \hat{v}_2 \, ds = 0, \quad (1.8)$$

を考慮して (1.3) より

$$\int_{C_1} (u \hat{X}_2 + v \hat{Y}_2) \, ds = -u \Big|_{C_2} \qquad , \qquad (1.9)$$

特に $u = -1, \ v = 0$ on C_1 とすれば

$$\int_{C_1} \hat{X}_2 \, ds = u \Big|_{C_2} \qquad , \qquad (1.10)$$

即ち C_2 における単位強さの特異点が C_2 に及ぼす力は

C_1 の周りの一様流れの速度場の C_2 点における

速度に等しい。

これは水波理論におけるハスキントの定理(の拡張)に相当する。

順流れで考えれば(1.10)は

$$\int_{C_1} \chi_2 \, ds = \tilde{u}\Big|_{C_2} , \quad \cdots \quad (1.10')$$

となるが、これは C_2 点が逆流れの伴流の外側にあれば(3.4.4)式より $\tilde{u} \doteqdot \tilde{u}_p$ で表わされ、内側にあれば粘性の影響をうける事になり当然の事ではあるが遠場では $\tilde{u}$ の漸近展開が $\left(\int \chi \, ds\right)$ に比例する事がわかっているので近似的な見積りが出来るのは便利である。
(よく知られたハスキントの関係は遠場の極限である)

2. 境界値問題の変分原理

ストークス流れでは定常，非定常に拘わらず同じ相反定理(1.2.7)，(3.2.3)が成立つのでこれを使って次のように境界値問題の変分原理を導く事が出来る。

領域の中でストークスの方程式を満たす比較関数の場(u, v)，随伴流れ$(\tilde{u}, \tilde{v})$を考えよう。

その境界力は夫々(X, Y)，$(\tilde{X}, \tilde{Y})$とする。

C上の与えられた境界条件は

$$u=u_0,\ v=v_0;\ \tilde{u}=\tilde{u}_0,\ \tilde{v}=\tilde{v}_0 \quad \text{on } C, \qquad (2.1)$$

さて汎関数を次のようにとり，

$$I = \int_C \left[\tilde{u}X+\tilde{v}Y + u\tilde{X}+v\tilde{Y} - \rho(u\tilde{u}+v\tilde{v})\frac{\partial X}{\partial n}\right] ds - 2\int_C (u_0\tilde{X}+v_0\tilde{Y}+\tilde{u}_0 X+\tilde{v}_0 Y)\, ds, \qquad (2.2)$$

変分をとると

$$\delta\int_C [\tilde{u}X+\tilde{v}Y]\, ds = \int_C (\delta\tilde{u}X+\delta\tilde{v}Y+\tilde{u}\delta X+\tilde{v}\delta Y)\, ds$$

であるがこの右辺の内前の二項は相反定理により

$$\int_C (\delta\tilde{u}X+\delta\tilde{v}Y)\, ds = \int_C \left[u\delta\tilde{X}+v\delta\tilde{Y} - \rho(u\delta\tilde{u}+v\delta\tilde{v})\frac{\partial X}{\partial n}\right] ds$$

となるから

$$\delta\int_C [\tilde{u}X+\tilde{v}Y]\, ds = \int_C \left[u\delta\tilde{X}+v\delta\tilde{Y}+\tilde{u}\delta X+\tilde{v}\delta Y - \rho(u\delta\tilde{u}+v\delta\tilde{v})\frac{\partial X}{\partial n}\right] ds, \qquad (2.3)$$

それ故 (2.2) の変分は 結局，

$$\delta I = 2\int_C \left[(u-u_0)\delta\tilde{X} + (v-v_0)\delta\tilde{Y} + (\tilde{u}-\tilde{u}_0)\delta X + (\tilde{v}-\tilde{v}_0)\delta Y\right] ds, \tag{2.4}$$

となるから，$(\delta X, \delta Y)$，$(\delta\tilde{X}, \delta\tilde{Y})$ に拘わらず

$\delta I = 0$ となるならば

$$u = u_0,\ v = v_0,\ \tilde{u} = \tilde{u}_0,\ \tilde{v} = \tilde{v}_0. \tag{2.5}$$

つまり (2.2) の汎関数 I の極値を与えるものが (2.1) の境界条件の解である。

附録A オセーン流れの別の表現

表現(1.3.10)は物理的に明白なオセーンレットによるものであって数値計算上も能率的で便利である。

これをさらに(1.3.13)〜(1.3.15)のようにポテンシャル成分と粘性成分にわけると見通しがよくなるが さらに(1.1.12)の X, Y に(1.3.18),(1.3.19)の関係を代入すると.($p=1$とする)

$$X = u_p \frac{\partial x}{\partial n} - v_H \frac{\partial y}{\partial n}, \quad Y = -u_p \frac{\partial x}{\partial s} + v_H \frac{\partial y}{\partial s} \quad \cdots \quad (A.1)$$

となるが境界条件を

$$u_p + u_H = -1, \quad v_p + v_H = 0 \quad \cdots \quad (A.2)$$

とし,速度ポテンシャル,流れ関数を

$$u_p = \frac{\partial \phi_p}{\partial x} = \frac{\partial \psi_p}{\partial y}, \quad v_p = \frac{\partial \phi_p}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_p}{\partial x}, \quad (A.3)$$

と導入すると(A.1)は

$$X = \frac{\partial \phi_p}{\partial n} = \frac{\partial \psi_p}{\partial s}, \quad Y = -\frac{\partial \phi_p}{\partial s} = \frac{\partial \psi_p}{\partial n} \quad \cdots \quad (A.4)$$

それゆえ

$$D = \int_c X\, ds = \Delta \psi_p, \quad \Gamma = \int_c Y\, ds = \Delta \phi_p \quad \cdots (A.5)$$

つまり,ϕ_p, ψ_p は一般には多価関数で一回まわると

D, Γ だけジャンプする。

これはソースとサーキュレーションであるから

$$\phi_p(Q) + \frac{D}{2\pi}\log r' - \frac{\Gamma}{2\pi}\theta' = \phi_p'(Q), \quad \cdots (A.6)$$

とおくと ϕ_p' は一価であり，グリーンの定理より

$$\phi_p'(Q) = \frac{1}{2\pi}\int_C \left[\phi_p' \frac{\partial}{\partial n}\log R - \frac{\partial \phi_p'}{\partial n}\log R\right] ds, \quad (A.7)$$

なる表現が得られる。

流れ関数では

$$\psi_p(Q) + \frac{D}{2\pi}\theta' + \frac{\Gamma}{2\pi}\log r' = \psi_p'(Q), \quad \cdots (A.8)$$

$$\psi_p'(Q) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \left[\psi_p' \frac{\partial}{\partial n}\log R - \frac{\partial \psi_p'}{\partial n}\log R\right] ds, \quad (A.9)$$

ここでさらに粘性分についても流れ関数を導入し

$$u_F = \frac{\partial}{\partial y}\psi_F, \quad v_F = -\frac{\partial \psi_F}{\partial x}, \quad \cdots (A.10)$$

$$\psi = \psi_p + \psi_F, \quad \cdots (A.11)$$

とすると境界条件 (A.2) は

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = -\frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial x}{\partial s}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial s} = -\frac{\partial x}{\partial n} = -\frac{\partial y}{\partial s}, \quad (A.12)$$

あるいは

$$\frac{\partial \psi_p}{\partial n} = \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial \psi_F}{\partial n}, \quad \frac{\partial \psi_p}{\partial s} = -\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial \psi_F}{\partial s}, \quad (A.13)$$

これに ψ_F は (1.3.2) の $\tilde{\Phi}$ と同じく (1.1.9) の微分方程式を満足するので今次の積分を考えると

$$\int_C \left[\psi_F \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n} - \tilde{\Phi} \frac{\partial \psi_F}{\partial n}\right] ds = 2h\int_C (\tilde{\Phi}\psi_F) \frac{\partial x}{\partial n} ds + 2\pi \psi_F$$

つまり

$$\psi_F(Q) = \frac{1}{2\pi}\int_C \left[\psi_F\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n} - 2h\tilde{\Phi}\frac{\partial x}{\partial n}\right) - \tilde{\Phi}\frac{\partial \psi_F}{\partial n}\right] ds, \quad (A.14)^*$$

$$\left[\because \int_\varepsilon \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n} ds = -2\pi\right]$$

結局 (A.8), (A.9), (A.14) を (A.12) 又は (A.13) の条件の下に解けばよいわけであるが D, F の果す役割等よくわからない。

なお明らかに次の関係がある。

$$\frac{1}{2\pi}\int_C \left(y\frac{\partial}{\partial n}\log R - \frac{\partial y}{\partial n}\log R\right) ds_P = 0, \quad Q \in D, \qquad (A.15)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_C \left[y\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n} - \tilde{\Phi}\frac{\partial x}{\partial n}\right) - \frac{\partial y}{\partial n}\tilde{\Phi}\right] ds_P = 0$$

* ψ_P は一価でないが ψ は一価のように見える

よって ψ_F も一価でなく、ψ_F or $\frac{\partial \psi_F}{\partial n}$ のジャンプは ψ_P ($\frac{\partial \psi_P}{\partial n}$) のジャンプに等しく符号が異なる事になる。

それなら積分範囲は (C + cut) とすべきである。

cut の上で ... は D, $\frac{\partial \psi_P}{\partial n}$ の ... は F

さて (A・11) において ψ_H が ψ_P に比して充分小さいとすれば

$$\psi \doteqdot \psi_P \doteqdot -y \ , \ \psi_H \doteqdot 0 , \qquad (A \cdot 16)$$

同じ事であるが D を無視すると (A・8), (A・9) は

$$\psi_P = -\frac{\Gamma}{2\pi}\log r' + \frac{1}{2\pi}\int_C \left[y\frac{\partial}{\partial n}\log R + \frac{\partial \psi_P}{\partial n}\log R \right] ds , \qquad (A \cdot 17)$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\psi_P' = \frac{\partial \psi_P}{\partial n} + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n}\log r , \qquad (A \cdot 18)$$

Γ はクッタの流出条件によって決めるものとすれば これはポテンシャル流れの問題としてとけて $\frac{\partial \psi_P}{\partial n}$ は一意的に定まる。

境界層理論では境界層の外側はこのポテンシャルで近似している訳でこの省略 (A・16) はそんなに無理な仮定ではないだろう。

そうすると (1・3・19) と境界条件より

$$\zeta = 2k v_P \qquad (A \cdot 19)$$

(1・2・16) より抗力の近似値は

$$\frac{D}{\rho} = \int_C v_P \tilde{g}_P \, ds , \qquad (A \cdot 20)$$

($\tilde{g}_P = -g_P$ である)

これはレイノルズ数に関係しないが次のようにして 0 となる事がわかる。

$$\frac{D}{\rho} = -\int_c \nu_p q_p \, ds = \int_c \nu_p \left(\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial \psi_p}{\partial n} \right) ds \quad , \qquad \cancel{(A.21)}$$

$$\int_c \nu_p \frac{\partial \psi_p}{\partial n} ds = \int_c \psi_p \frac{\partial \nu_p}{\partial n} ds = -\int_c y \frac{\partial \nu_p}{\partial n} ds$$

$$\because \ \psi_p \big|_c = -y$$

$$\therefore \frac{D}{\rho} = \int_c \left(\nu_p \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial \nu_p}{\partial n} \right) ds \qquad (A.21)$$

この右辺は積分路に関係ないから無限遠方の検査面にもってゆき、そこで $\nu_p \doteqdot M \frac{\partial^2 f_s}{\partial x \partial y} r \propto M \frac{\sin 2\theta}{r^2}$

を考慮して積分すると

$$D = 0 \quad , \qquad (A.22)$$

となる。

そう言う訳で何等かの手段で (1.3.14) (1.3.15) の積分方程式をとかないと近似値は得られない。

3. 非定常線型理論（オセーン近似）

3.1 運動方程式

円周波数 ω で周期的運動をしている場合を考えよう。

この時任意の関数 $f(t)$ をフーリエ変換して

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt = F(\omega) \quad , \quad \cdots (3.1.1)$$

とすると逆に

$$f(t) = \frac{T}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega \quad , \quad \cdots (3.1.2)$$

以下はこの意味で $F(\omega)$ を扱うものとする。

そうすると運動方程式は高次の項を省略して

$$\left.\begin{aligned} i\omega u + u_x &= -\frac{1}{\rho}p_x + \nu\nabla^2 u \\ i\omega v + v_x &= -\frac{1}{\rho}p_y + \nu\nabla^2 v \end{aligned}\right\} \cdots (3.1.3)$$

また

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 p = 0 \\ &\left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x}\right)\zeta = \nu\nabla^2\zeta, \quad \zeta = v_x - u_y \end{aligned}\right\} (3.1.4)$$

逆流れでは

$$\left.\begin{aligned} i\omega \tilde{u} - \tilde{u}_x &= -\frac{1}{\rho}\tilde{p}_x + \nu\nabla^2\tilde{u} \\ i\omega \tilde{v} - \tilde{v}_x &= -\frac{1}{\rho}\tilde{p}_y + \nu\nabla^2\tilde{v} \end{aligned}\right\} \cdots (3.1.5)$$

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 \tilde{p} = 0 \\ &\left(i\omega - \frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{\zeta} = \nu\nabla^2\tilde{\zeta}, \quad \tilde{\zeta} = \tilde{v}_x - \tilde{u}_y \end{aligned}\right\} \cdots (3.1.6)$$

ここで流れ関数を導入しよう。

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \zeta = v_x - u_y = -\Delta\psi, \qquad (3.1.7)$$

これを2つに分けて

$$\psi = \psi_p + \psi_F, \quad \cdots \qquad (3.1.8)$$

ψ_pは調和分とし、そのポテンシャルをϕ_pとすれば

$$u_p = \frac{\partial\psi_p}{\partial y} = \frac{\partial\phi_p}{\partial x}, \quad v_p = -\frac{\partial\psi_p}{\partial x} = \frac{\partial\phi_p}{\partial y}, \quad \cdots (3.1.9)$$

圧力Pは調和関数故、その共役関数をq、つまり

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \quad \cdots (3.1.10)$$

とおく。

そうすると$\underbrace{(3.1.3)}_{(3.1.5)=}$は次のように書く事が出来る。

$$\left.\begin{aligned}(i\omega + \frac{\partial}{\partial x})\psi_p &= -q, \\ (i\omega + \frac{\partial}{\partial x})\psi_F &= \nu\nabla^2\psi_F,\end{aligned}\right\} \cdots (3.1.11)$$

$$\left.\begin{aligned}(i\omega - \frac{\partial}{\partial x})\tilde{\psi}_p &= -\tilde{q} \\ (i\omega - \frac{\partial}{\partial x})\tilde{\psi}_F &= \nu\nabla^2\tilde{\psi}_F\end{aligned}\right\} \cdots (3.1.11')$$

また

$$\left.\begin{aligned}\frac{P}{\rho} &= -(i\omega + \frac{\partial}{\partial x})\phi_p, \\ \nu\zeta &= -(i\omega + \frac{\partial}{\partial x})\psi_F,\end{aligned}\right\} \cdots (3.1.12)$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde{P}/\rho &= -(i\omega - \frac{\partial}{\partial x})\tilde{\phi}_p \\ \nu\tilde{\zeta} &= -(i\omega - \frac{\partial}{\partial x})\tilde{\psi}_F\end{aligned}\right\} \cdots (3.1.12')$$

境界条件は、C上で u, v、従って $\frac{\partial\psi}{\partial n}, \frac{\partial\psi}{\partial s}$ が与えられる故、

今 $$\psi = f(x,y),\quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial n} \qquad (3.1.13)$$

とおけば、複素振幅を1として

$$\left.\begin{array}{lll} \text{前後ゆれに対し} & f = i\omega y, & \\ \text{左右ゆれ 〃} & f = -i\omega x, & \\ \text{回転振動 〃} & f = \frac{i\omega}{2}(x^2+y^2). & \end{array}\right\} \qquad (3.1.14)$$

また境界上では、これらの関係を使って

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial g}{\partial s} = -\nu\frac{\partial \zeta}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s}\left[\left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x}\right)f\right], \qquad (3.1.15)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - \nu\frac{\partial \zeta}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n}(g+\nu\zeta) = +\frac{\partial}{\partial n}\left[\left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi\right]$$

$$= +i\omega\frac{\partial\psi}{\partial n} - \frac{\partial v}{\partial n},$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n} = \zeta\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial s}$$

$$\therefore \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = \nu\frac{\partial \zeta}{\partial n} - \zeta\frac{\partial x}{\partial n} + i\omega\frac{\partial\psi}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial s}, \qquad (3.1.16)$$

境界力については、(1.1.10)の定義より

$$\left.\begin{array}{l} X = -p\frac{\partial x}{\partial n} - \mu\zeta\frac{\partial y}{\partial n} - 2\mu\frac{\partial v}{\partial s}, \\ Y = -p\frac{\partial y}{\partial n} + \mu\zeta\frac{\partial x}{\partial n} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial s}, \end{array}\right\} \qquad (3.1.17)$$

となる。

3.2 可逆定理

(1.2.1) の積分を導入すると明らかに (1.2.2) なる可逆性が成立つ。

(1.2.1) は (1.2.3) のように変形出来るから (3.1.3) を代入すると

$$E = -\rho \iint_D \left[i\omega(u\tilde{u} + v\tilde{v}) + \tilde{u}u_x + \tilde{v}v_x \right] dx\,dy + \int_C (\tilde{u}X + \tilde{v}Y)\,ds, \quad \cdots (3.2.1)$$

と (1.2.5) に (3.1.5) を代入すると

$$E = -\rho \iint_D \left[i\omega(u\tilde{u} + v\tilde{v}) - u\tilde{u}_x - v\tilde{v}_x \right] dx\,dy + \int_C (u\tilde{X} + v\tilde{Y})\,ds, \quad (3.2.2)$$

可逆性により，2式を整理すると

$$\int_C (\tilde{u}X + \tilde{v}Y)\,ds - \rho \iint_D (\tilde{u}u_x + \tilde{v}v_x)\,dx\,dy = \int_C (u\tilde{X} + v\tilde{Y})\,ds + \rho \iint_D (u\tilde{u}_x + v\tilde{v}_x)\,dx\,dy,$$

となり，部分積分して

$$\int_C (\tilde{u}X + \tilde{v}Y)\,ds = \int_C (u\tilde{X} + v\tilde{Y})\,ds + \rho \int_C (u\tilde{u} + v\tilde{v}) \frac{\partial x}{\partial n}\,ds, \quad (3.2.3)$$

となり，(1.2.7) と同型となる。

今 $\tilde{u},\tilde{v}$ として ポテンシャル流れを導入してみよう。

$$\tilde{u} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x}, \quad \tilde{v} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y}, \quad \cdots \Bigg\} (3.2.4)$$

また 圧力については

$$\left(i\omega - \frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{\varphi} + \frac{\tilde{p}}{\rho} = \nu\Delta\tilde{\varphi} = 0 \quad , \quad \cdots$$

これらを代入すると (3.2.2) が得られ，かつ

$$\left.\begin{aligned} \tilde{X} &= -\tilde{p}\frac{\partial x}{\partial n} - 2\mu\frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} \\ \tilde{Y} &= -\tilde{p}\frac{\partial y}{\partial n} + 2\mu\frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} \end{aligned}\right\} \cdots (3.2.5)$$

その値を使って (3.2.3) が成立つ。

(3.2.5) と (3.1.17) を (3.2.3) に代入すると

$$-\int_C \left[p\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n} - \mu\zeta\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial s}\right] ds$$

$$= -\int_C \tilde{p}\left(u\frac{\partial x}{\partial n} + v\frac{\partial y}{\partial n}\right) ds + \rho\int_C (u\tilde{u} + v\tilde{v})\frac{\partial x}{\partial n} ds, \quad (3.2.6)$$

あるいは (3.2.4) により

$$\int_C \left(p\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n} - \mu\zeta\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial s}\right) ds = \rho\int_C \left(i\omega - \frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{\varphi}\left(u\frac{\partial x}{\partial n} + v\frac{\partial y}{\partial n}\right) ds$$

$$+ \rho\int_C (u\tilde{u} + v\tilde{v})\frac{\partial x}{\partial n} ds, \quad (3.2.6)$$

さて (3.2.3) に (3.1.17) を代入し，流れ関数を使うと

$$\tilde u X + \tilde v Y = -p\left(\tilde u \frac{\partial x}{\partial n} + \tilde v \frac{\partial y}{\partial n}\right) + \mu\zeta\left(\tilde u \frac{\partial x}{\partial s} + \tilde v \frac{\partial y}{\partial s}\right) - 2\mu\left(\tilde u \frac{\partial v}{\partial s} - \tilde v \frac{\partial u}{\partial s}\right)$$

$$= -p\frac{\partial\tilde\psi}{\partial s} - \mu\zeta\frac{\partial\tilde\psi}{\partial n} - 2\mu\left(\tilde u\frac{\partial v}{\partial s} - \tilde v\frac{\partial u}{\partial s}\right)$$

$$u\tilde X + v\tilde Y = -\tilde p\frac{\partial\psi}{\partial s} - \mu\tilde\zeta\frac{\partial\psi}{\partial n} - 2\mu\left(u\frac{\partial\tilde v}{\partial s} - v\frac{\partial\tilde u}{\partial s}\right)$$

であるから，共役的関数が一価であるとに

$$\int_C\left(p\frac{\partial\tilde\psi}{\partial s}+\mu\zeta\frac{\partial\tilde\psi}{\partial n}\right)ds = \int_C\left(\tilde p\frac{\partial\psi}{\partial s}+\mu\tilde\zeta\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)ds - \rho\int_C\nabla\psi\nabla\tilde\psi\frac{\partial x}{\partial n}ds, \quad (3.2.7)$$

あるいは

$$\int_C\left(\mu\zeta\frac{\partial\tilde\psi}{\partial n} - \tilde\psi\frac{\partial p}{\partial s}\right)ds = \int_C\left(\mu\tilde\zeta\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\tilde p}{\partial s}\right)ds - \rho\int_C\nabla\psi\nabla\tilde\psi\frac{\partial x}{\partial n}ds. \quad (3.2.8)$$

3.3 基本特異性

まず

$$\Phi = K_0(k'R)\,e^{k(x'-x)}, \quad k' = \sqrt{k^2+2i\omega k}, \quad k = \frac{1}{2\nu}, \qquad (3.3.1)$$

を導入すると

$$\left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x'} - \nu\Delta\right)\Phi = 0, \qquad (3.3.1')$$

この関数からさらに次の関数を定義しよう。

$$\Psi = e^{-i\omega x'}\int_{-\infty}^{x'} \Phi\, e^{i\omega x'}\,dx', \qquad (3.3.2)$$

つまり $\left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x'}\right)\Psi = \Phi$, (3.3.2')

同様にして

$$\left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x'}\right) S = \log R, \qquad (3.3.3)$$

となる関数

$$S = e^{-i\omega x'}\int_{-\infty}^{x'} \log R\, e^{i\omega x'}\,dx', \qquad (3.3.3')$$

を定義しよう。尚この関数は improper だが微係数は proper である。

これらの関数によって (3.1.11), (3.1.11') と対応させると

$\tilde{\psi}_p = -\frac{S}{2\pi}$, $\tilde{\psi}_F = -\frac{\Psi}{2\pi}$, $\tilde{\zeta} = -\frac{\Phi}{2\pi}$, $\zeta = -\frac{\log R}{2\pi}$ とおけば

核関数が出来、

$$\oint_\varepsilon \frac{\partial\tilde{\zeta}}{\partial n}\,ds = -1 = -\oint_\varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial n}\,ds, \qquad (3.3.4)$$

となっている。

1) Ψの特性

i) 原点近傍

$$\Phi = K_0(k'R)e^{k(x'-x)} \xrightarrow[R\to 0]{} -\log\left(\frac{\alpha k R}{2}\right) \quad , \cdots (3.3.5)$$

$$\therefore \Psi \xrightarrow[R\to 0]{} \text{Const} - e^{-i\omega x}\int_{-\infty}^{x'} \log R\, e^{i\omega x'} dx'$$

$$= \text{Const} - S \quad , \quad \cdots\cdots (3.3.6)$$

となるが S の性質は後出。

ii) $R \gg 1$ 又は レイノルズ数が大変大きい時

$$K_0(k'R) \doteqdot \sqrt{\frac{\pi}{2\pi k R}}\, e^{-kR - i\omega R} \quad , \quad k' \doteqdot k + i\omega , \quad \cdots (3.3.7)$$

となるから

$$\Psi \doteqdot \begin{cases} e^{-i\omega(x'-x)}\sqrt{\dfrac{\pi}{2k}}\displaystyle\int^{x'-x} \frac{e^{-k'(R-\xi)}\, d\xi}{\sqrt{R}} , \quad R = \sqrt{\xi^2 + (y-y')^2} , \quad \text{for } x' < x \\ 0 \quad \text{for } x' > x , \end{cases} \quad (3.3.8)$$

また $y \doteqdot y'$ の近くでだけ有限な値をとるので

$$\Psi \doteqdot e^{-i\omega(x'-x)}\sqrt{\frac{\pi}{2k}}\int_0^{x'-x} \frac{e^{-\frac{k'}{2\xi}(y-y')^2}\, d\xi}{\sqrt{\xi}} , \quad \cdots (3.3.8')$$

としてもよい。

従って

$$\Psi \underset{\substack{y=y' \\ x=0}}{\doteqdot} e^{-i\omega \cancel{x}}\sqrt{\frac{\pi}{2k}}\int_0^{x'} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = \sqrt{\frac{2\pi x'}{k}}\, e^{-i\omega x'} , \quad (3.3.9)$$

ここに

$$\left.\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} \doteqdot + e^{-i\omega x'} \sqrt{\frac{\pi k}{2}}\, y' \int_0^{x'} e^{-\frac{k'}{2\xi}y'^2} \frac{d\xi}{\xi^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{k'}{2\xi}y'^2 = \eta^2$$

$$\sqrt{\frac{k'}{2\xi}}\, y' = \eta$$

$$-\frac{\sqrt{k'}}{2\sqrt{2}} \frac{y' d\xi}{\xi^{\frac{3}{2}}} = d\eta,$$

$$\therefore \left.\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right| \doteqdot \cancel{2}\sqrt{\pi}\, e^{-i\omega x'} \int_{\eta_0}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta, \quad \eta_0 = \sqrt{\frac{k'}{2x'}}\, y', \quad (3.3.10)$$

$$\xrightarrow[\eta_0 \to 0]{} \pi e^{-i\omega x'} \operatorname{sgn}(y'), \quad \cdots$$

2) S の性質

$$\frac{\partial S}{\partial x} = e^{-i\omega x'} \int_{-\infty}^{x'} \frac{x-x'}{R^2} e^{i\omega x'} dx' = e^{i\omega(x-x')} \int_{x-x'}^{\infty} \frac{\xi e^{-i\omega\xi} d\xi}{\xi^2 + (y-y')^2}, \quad (3.3.11)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = e^{-i\omega x'} \int_{-\infty}^{x'} \frac{y-y'}{R^2} e^{i\omega x'} dx' = e^{i\omega(x-x')} \int_{x-x'}^{\infty} \frac{(y-y') e^{-i\omega\xi}}{\xi^2 + (y-y')^2} d\xi,$$

となるが以下, $x=y=0$ として考えても一般性を損わないな

そうする事にして, 次の積分を導入すると

$$I_1 = e^{-i\omega x'} \int_{-x'}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\xi} d\xi}{\xi + iy'} = e^{-\omega y' - i\omega x'} \int_{-i\omega(x'-iy')}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

$$= e^{-\omega(y'+ix')} E_1\{-i\omega(x'-iy')\},$$

$$I_2 = e^{-i\omega x'} \int_{-x'}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\xi}}{\xi - iy'} d\xi = e^{\omega y' - i\omega x'} \int_{-i\omega(x'+iy')}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (3.3.12)$$

$$= e^{\omega(y'-ix')} E_1\{-i\omega(x'+iy')\},$$

とすると
$$S_x = \frac{1}{2}(I_1+I_2)$$
$$S_y = \frac{1}{2i}(I_1 - I_2)$$
… (3.3.13)

で　$E_1(z) \underset{z\to 0}{\doteqdot} -\gamma - \lg z$,

であるから
$$S_x \xrightarrow[R\to 0]{} -\gamma - \lg(\omega R) \overset{?}{-} \frac{\pi}{2} i$$
$$S_y \xrightarrow[R\to 0]{} \Theta, \quad \tan\Theta = \frac{y'}{x'},$$
(3.3.14)

次に $R \to \infty$ では.

i) $x-x' \gg 1$,　$x' \ll -1+x$ では. (3.3.11)を直接部分積分して
$$S_x \doteqdot \frac{x-x'}{i\omega R^2}, \quad S_y = \frac{y-y'}{i\omega R^2}, \qquad (3.3.15)$$

ii) $x-x' \ll -1$,　$x' \gg 1+x$. では. 上式の項の他に項が出て. 結局.
$$S_x \doteqdot \cancel{\frac{-x'}{i\omega R^2}} - \pi i e^{-\omega|y'| - i\omega x'},$$
$$S_y \doteqdot \cancel{\frac{-y'}{i\omega R^2}} - \pi e^{-\omega|y'| - i\omega x'} \mathrm{sgn}(y'),$$
(3.3.16)

となる。

$-y' =$

$$-\omega y' - i\omega x' = -i\omega r(\sin\theta' + i\cos\theta')$$
$$= i\omega r\, i e^{-i\theta}$$
$$= \omega r e^{-(\frac{\pi}{2}+\theta)i}$$

$$\frac{2y'}{x'^2+y'^2} = \left(\frac{1}{x'+iy'} - \frac{1}{x'-iy'}\right)\frac{1}{i}$$

$$-\omega y' - ix' = \omega r(-i) e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$$

3.4 速度場の表現

(3.2.8)において $\tilde{\psi}$ に前節の核を導入すると

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\psi} = \frac{-1}{2\pi}(S+\Sigma), \quad \tilde{\xi} = -\frac{\Sigma}{2\pi}, \quad \tilde{\zeta} = -\frac{1}{2\pi}\log R,\\ &\frac{\partial\tilde{p}}{\partial s} = -\frac{\partial\tilde{\zeta}}{\partial n} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n}\log R,\end{aligned}\right\} \quad (3.4.1)$$

とおくと

$$\psi(Q) = \int_C \Big[\mu\zeta \frac{\partial\tilde{\psi}(P,Q)}{\partial n} - \tilde{\psi}\frac{\partial p}{\partial s} + \psi\frac{\partial\tilde{p}}{\partial s} - \mu\tilde{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial n} + \rho\nabla\psi\nabla\tilde{\psi}\frac{\partial x}{\partial n}\Big] ds, \quad (3.4.2)$$

をうる。

ついで C の内部領域 D で正則な ψ_i を考え

$$\psi=\psi_i, \quad \frac{\partial\psi_i}{\partial n}=\frac{\partial\psi}{\partial n} \quad \text{on } C, \quad (3.4.3)$$

とすれば(3.2.8)より Q を D 内の点とすれば上と同様

$$0 = \int_C \Big[\mu\zeta_i \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial n} - \tilde{\psi}\frac{\partial p_i}{\partial s} + \psi_i\frac{\partial\tilde{p}}{\partial s} - \mu\frac{\partial\psi_i}{\partial n}\tilde{\zeta} + \rho\nabla\psi_i\nabla\tilde{\psi}\frac{\partial x}{\partial n}\Big] ds, \quad (3.4.3)$$

をうるから，辺々相引くと

$$\psi(Q) = \int_C \Big[\mu(\zeta-\zeta_i)\frac{\partial\tilde{\psi}(P,Q)}{\partial n} - \tilde{\psi}\frac{\partial}{\partial s}(p-p_i)\Big] ds, \quad (3.4.4)$$

をうる。

ψ_i については(3.1.14)より，前後，左右ゆれについては

$$\left.\begin{aligned}&\psi_i = i\omega y \text{ ならば } \zeta_i = 0, \quad \frac{1}{\rho}p_i = -i\omega x,\\ &\psi_i = -i\omega x \text{ ならば } \zeta_i = 0, \quad \frac{1}{\rho}p_i = -i\omega y,\end{aligned}\right\} \quad (3.4.5)$$

のようになるが回転振動については内部問題を解いて p_i, ζ_i を決めねばならない。

3.5 遠場の表現

§3.3 により遠場では

$$\Psi(P,Q) \xrightarrow[Q\to\infty]{} \frac{-1}{2\pi}S \doteqdot \frac{1}{2\pi i\omega}\log R,\ \Big\}\ 伴流の外で \quad (3.5.1)$$

$$\zeta^2 \longrightarrow 0$$

(3.4.2) に代入すると

$$\psi(Q) \doteqdot \psi_P = \frac{-1}{2\pi}\int_C\left[\mu\zeta\frac{\partial S}{\partial n} + p\frac{\partial S}{\partial s} - \psi\frac{\partial \log R}{\partial n} + p\nabla\psi\nabla S\frac{\partial x}{\partial n}\right]ds$$

$$\doteqdot A\frac{\partial}{\partial x}\log R + B\frac{\partial}{\partial y}\log R, \qquad (3.5.2)$$

$$A = \frac{1}{2\pi\omega}\int_C\left[\mu\zeta\frac{\partial x}{\partial n} + p\frac{\partial x}{\partial s} - i\omega\psi\frac{\partial x}{\partial n} + p\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}\right]ds,$$

$$B = \frac{1}{2\pi\omega}\int_C\left[\mu\zeta\frac{\partial y}{\partial n} + p\frac{\partial y}{\partial s} - i\omega\psi\frac{\partial y}{\partial n} + p\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}\right]ds, \qquad (3.5.3)$$

となって無限遠方では2重吹出しと在る。

wake

$(u\cdot n) = \psi_n, \quad (u\cdot s) = \psi_s$ 　　左右 (2)

$\int p^{(0)}(u\cdot s) + p^{(0)}\psi_s$ 　　(1)

$$\frac{p}{\rho} = -\left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x}\right)\phi_P$$

$$\mu\zeta = -\left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_F$$

$\omega = 0$ ならば

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \phi_P}{\partial x} = -\frac{\partial \psi_P}{\partial y}$$

$$\mu\zeta = +v_F = \frac{\partial \psi_F}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \psi_P}{\partial s} = \frac{\partial \psi_P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \psi_P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{p}{\rho}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} - \mu\zeta\frac{\partial x}{\partial s}$$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} - \frac{p}{\rho}\frac{\partial x}{\partial n} + \mu\zeta\frac{\partial y}{\partial n}$$

$$\frac{\partial \psi_P}{\partial n} = \frac{\partial \psi_P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \psi_P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n} = -\frac{p}{\rho}\frac{\partial y}{\partial n} - \mu\zeta\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}$$

$$\frac{\partial \psi_F}{\partial s} = -\frac{\partial \psi_F}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial \psi_F}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{p}{\rho}\frac{\partial y}{\partial n} - \mu\zeta\frac{\partial y}{\partial n}$$

$$\frac{\partial \psi_F}{\partial n} = \frac{\partial \psi_F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \psi_F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{p}{\rho}\frac{\partial y}{\partial n} + \mu\zeta\frac{\partial y}{\partial n}$$

$$\psi_{Fs}\frac{\partial y}{\partial n} + \psi_{Fn}\frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{p}{\rho} \quad //$$

$$\psi_{Fs}\frac{\partial y}{\partial n} - \psi_{Fn}\frac{\partial x}{\partial n} = -\mu\zeta \quad //$$

circle C-1

$$I\{\log(w-1)\} = \begin{cases} 0 \text{ or } \pi, & \frac{\pi}{2} > \theta > -\frac{\pi}{2} \\ \theta - \frac{\pi}{2}, & \text{for } \pi > \theta > \frac{\pi}{2} \\ \theta + \frac{\pi}{2}, & \text{for } -\frac{\pi}{2} > \theta > -\pi \end{cases}$$

$$F(z) = \log f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z^n} \qquad A_0 = -$$

$$\varphi(\theta) = I\{F\}\Big|_{|z|=1} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta$$

$$\sum_{n=1} \frac{\sin n\theta}{z^n} = \frac{\frac{1}{z}\sin\theta}{1 - \frac{2}{z}\cos\theta + \frac{1}{z^2}} = \frac{\sin\theta}{(z+\frac{1}{z}) - 2\cos\theta}$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) \sin n\theta \, d\theta$$

$$\therefore \quad F(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta)\,d\theta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{z^n}$$

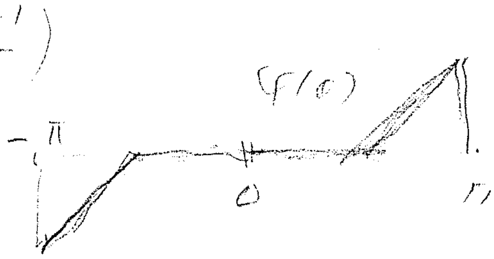
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(\theta)\sin\theta\,d\theta}{\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}) - \cos\theta}$$

$\cos u$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\,d\theta}{\cos u - \cos\theta} = \log(\cos u - \cos\theta)\Big|_{\theta=0} = \log\left(\frac{\cos u}{\cos u - 1}\right)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \text{---} = \log\left(\frac{\cos u - 1}{\cos u}\right)$$

$\varphi(\theta)$



$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) \sin n\theta \, d\theta \qquad \theta = \frac{\pi}{2} + \vartheta$$

$$\varphi(\theta) = \sum A_n \sin n\theta$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\theta - \tfrac{\pi}{2}) \sin n\theta \, d\theta = \frac{2}{n\pi} \sin\tfrac{n}{2}\pi$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \vartheta \sin(\tfrac{n}{2}\pi + n\vartheta)\,d\vartheta = \frac{2}{\pi}\Big[\sin\tfrac{n}{2}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vartheta \cos n\vartheta\,d\vartheta$$

$\cos$

$$+ \cos\tfrac{n}{2}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vartheta \sin\tfrac{n}{2}\vartheta$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(\theta - \frac{\pi}{2})}{n}\cos n\theta\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos n\theta\,d\theta\right]$$

C-2

$$\sum \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} = 1.234 = \frac{1}{.811}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \lg(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-)^n}{n z^n} = -\lg\left(1+\frac{1}{z}\right)$$

$$S = 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \frac{1}{81}$$

$$1 + \frac{1}{25} + \frac{1}{81} + \frac{1}{169}$$

$$- \frac{1}{9} - \frac{1}{49} - \frac{1}{121}$$

$$I = \frac{2}{\pi}\left[\quad \right]$$

.1111
.0204
.0083
.1398

1.04
.0123
.0059
1.0582
.1398
.9184
1.1980

$$\lg\left(\frac{1+\frac{i}{z}}{1-\frac{i}{z}}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{-i}{z}\right)^n + \sum \frac{(-i)^n}{n z^n}$$

$$= -\sum \frac{e^{\frac{\pi}{2}in} - e^{-\frac{\pi}{2}ni}}{n z^n} = -2i\sum_{1} \frac{\sin\frac{n}{2}\pi}{n z^n}$$

$n = 2\nu+1$

$$= -2i\sum_{\nu=0} \frac{(-)^\nu}{(2\nu+1) z^{2\nu+1}}$$

$$I' = -\frac{2}{\pi z}\left(\frac{1}{-2i}\right)\lg\left(\frac{1+\frac{i}{z}}{1-\frac{i}{z}}\right) = \frac{1}{\pi i z}\lg\left(\frac{1+\frac{i}{z}}{1-\frac{i}{z}}\right)$$

$$I = \frac{1}{\pi i}\int \lg\left(\frac{1+\frac{i}{z}}{1-\frac{i}{z}}\right)\frac{dz}{z}$$

$$\frac{e^{i\theta}+i}{e^{i\theta}-i} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$H = \lg\left(1+\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{\pi i}\int_{\infty}^{z} \lg\left(\frac{1+\frac{i}{z}}{1-\frac{i}{z}}\right)\frac{dz}{z}$$

$$\frac{i\theta}{2} - \frac{1}{\pi}\begin{cases} +\frac{\pi}{2}i\theta & \theta > \frac{\pi}{2} \\ -\frac{3}{2}\pi i\theta & < \end{cases}$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_{\infty}^{1} \lg\left(\frac{1+\frac{i}{x}}{1-\frac{i}{x}}\right)\frac{dx}{x} = \frac{i}{\pi}\left[\lg x \lg\left(\frac{x+i}{x-i}\right)\right]_{\infty}^{1} + 2i\int_{1}^{\infty} \frac{\lg x}{1+x^2}dx$$

$x = e^t$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{1}^{\infty} \frac{\lg x}{1+x^2}dx = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{t\,dt}{\cosh t}$$

$$\int \frac{\lg x}{x^{2+1}}dx$$

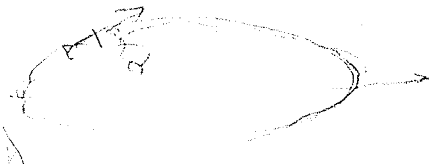
.586

$$= \frac{2}{\pi}\left[\sum \frac{(-)^\nu}{2\nu+1}\cdot\int \frac{dx}{x^{2\nu+2}}\right] = \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-)^\nu}{(2\nu+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{(2\nu+1)\,x^{2\nu+1}}$$

Ellipse E-1

$$(u+1) - iv = q e^{-i\alpha} = e^{f(z)} \qquad \Im[f(z)] = -\alpha$$



$$dz = -d\theta\,[a\sin\theta - ib\cos\theta]$$

$$= -\frac{d\theta}{2}\left[a\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{i} - ib(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\right]$$

$$z = a\cos\theta + ib\sin\theta.$$

$$= \frac{i\,d\theta}{2}\left[(a+b)e^{i\theta} - (a-b)e^{-i\theta}\right] \qquad z = \frac{a+b}{2}e^{i\theta} + \frac{a-b}{2}e^{-i\theta}$$

$$z = \frac{a+b}{2}\left(\zeta + \frac{\varepsilon^2}{\zeta}\right)$$

$$ds = \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\;d\theta.$$

$$\varepsilon^2 = \frac{a-b}{a+b}$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{-a\sin\theta + ib\cos\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}} = e^{i(\pi+\alpha)}$$

$$\alpha = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{a\sin\theta - ib\cos\theta}{a\sin\theta + ib\cos\theta}\right) = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{(a+b)e^{i\theta} - (a-b)e^{-i\theta}}{(a-b)e^{i\theta} - (a+b)e^{-i\theta}}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\log\left(\frac{\zeta - \frac{\varepsilon^2}{\zeta}}{\varepsilon^2\zeta - \frac{1}{\zeta}}\right) = \frac{1}{2i}\left[\underline{2\log\zeta} + \log\left(\frac{1-\frac{\varepsilon^2}{\zeta^2}}{1-\varepsilon^2\zeta^2}\right)\right] \quad i\pi$$

$$\log\left(\frac{1-\frac{\varepsilon^2}{\zeta^2}}{1-\varepsilon^2\zeta^2}\right)\Bigg|_{\zeta=e^{i\theta}} = -\sum_{n=1}\frac{\varepsilon^{2n}}{n\zeta^{2n}} + \sum_{n=1}\frac{(\varepsilon^2\zeta^2)^n}{n}$$

$$(\varepsilon^{2n}(-)^n)$$

$$= -\sum\frac{\varepsilon^{2n}}{n}\left[e^{-2ni\theta} - e^{+2ni\theta}\right]$$

$$= 2i\sum_1\frac{\varepsilon^{2n}}{n}\sin 2n\theta$$

$\cos 2n\theta\,(1-\cos n\pi)$

$(-)^n$

$-i\sin 2n\theta\,(1+\cos n\pi)$

$$\alpha = \theta + \sum_1^\infty\frac{\varepsilon^{2n}}{n}\sin 2n\theta$$

$2i\,(\ldots 2\theta \ldots +\tfrac{1}{2})\pi)$

$$=$$

$$n = 2\nu$$

$$+2\sum\frac{\varepsilon^{4\nu+2}}{2\nu+1}\cos\overline{4\nu+2}\,\theta$$

$$f(z) = \sum_{n=1} \frac{A_n}{z^n}, \quad \mathcal{I} f = \frac{-\sum A_n \sin n\theta}{4}$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\mathcal{I} f] \sin n\theta \, d\theta = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} [\mathcal{I} f] \sin n\theta \, d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [-\alpha] \sin n\theta \, d\theta.$$

$$-\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta - \sum_{1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{2\nu}}{\nu} \sin 2\nu\theta$$

$$\cancel{\tfrac{\pi}{2} - \theta = \theta'}, \quad \sin n(\tfrac{\pi}{2} - \theta) =$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\tfrac{\pi}{2} - \theta) \sin n\theta \, d\theta = -\frac{(\frac{\pi}{2} - \theta)}{n} \cos n\theta \Big| - \frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos n\theta \, d\theta$$

$$= + \frac{\pi \cos n\pi}{2n} + \frac{\sin \frac{n}{2}\pi}{n^2} \quad //$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2\nu\theta \sin n\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[\cos \overline{2\nu - n}\,\theta - \cos \overline{2\nu + n}\,\theta\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\sin(2\nu - n)\frac{\pi}{2}}{2\nu - n} - \frac{-\sin(2\nu + n)\frac{\pi}{2}}{2\nu + n} \right]$$

$$\cos\nu\pi \sin \tfrac{n}{2}\pi$$

$$= \frac{\cos\nu\pi}{2} \sin \frac{n}{2}\pi \left[\frac{1}{2\nu - n} + \frac{1}{2\nu + n} \right] = \frac{2\nu \cos\nu\pi}{4\nu^2 - n^2} \sin \frac{n}{2}\pi$$

$$A_n = \frac{\cos n\pi}{n} + \frac{2 \sin \frac{n}{2}\pi}{\pi n^2} - \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1} \frac{\varepsilon^{2\nu}}{\nu} \cdot \left[\frac{2\nu \cos\nu\pi}{4\nu^2 - n^2} \sin \frac{n}{2}\pi \right]$$

$$= \frac{\cos n\pi}{n} + \frac{2}{\pi} \sin \frac{n}{2}\pi \left[\frac{1}{n^2} - 2\sum_{\nu=1} \frac{(-)^\nu \varepsilon^{2\nu}}{4\nu^2 - n^2} \right]$$

$$A_1 = -1 + \frac{2}{\pi}\left[1 - 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-)^\nu \varepsilon^{2\nu}}{4\nu^2 - 1} \right]$$

$$= -1 + \frac{2}{\pi}\left[+ \tfrac{1}{2}(\varepsilon + \tfrac{1}{\varepsilon}) \delta \right], \quad \tan\delta = \varepsilon = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\tfrac{1}{2}(1 + \varepsilon^2)\frac{\delta}{\varepsilon} - \frac{\pi}{2} \right] \xrightarrow[a=b]{} \frac{2}{\pi}(\tfrac{1}{2} - \frac{\pi}{2})$$

$$\delta = \varepsilon \to 0$$

$$D = -4(2 - \pi) \quad //$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-)^{\nu} x^{2\nu}}{2\nu+1} = I = \frac{\lg\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right)}{2ix} . \qquad \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} + \frac{1}{x+i}\right)$$

$$(xI)' = \sum_{0} (-)^{\nu} x^{2\nu} = \frac{1}{1+x^2} , \quad I = \frac{1}{x}\int \frac{dx}{1+x^2} = \cancel{\frac{\lg(1+x)}{x}}$$

$$= \frac{1}{2ix} \lg\left(\frac{x-i}{x+i}\right)$$

$$\lg(1-ix) = \sum_{1} \frac{(ix)^n}{n}$$

$$\lg(1+ix) = \sum \frac{(-)^n (ix)^n}{n}$$

$$\sum_{1} \frac{(ix)^n (1-(-)^n)}{n} = 2\sum_{0} \frac{(ix)^{2\nu+1}}{2\nu+1} = 2ix \sum_{0} \frac{(-)^{\nu} x^{2\nu}}{2\nu+1}$$

$$\frac{2}{4\nu^2-1} = \left(\frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{2\nu+1}\right)$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{4\nu^2-1}(-)^{\nu}\varepsilon^{2\nu} = \sum_{\nu=1}\left(\frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{2\nu+1}\right)(-)^{\nu}\varepsilon^{2\nu}$$

$$\nu = n -$$

$$= -\varepsilon^2 I - [I - 1] = 1 - (1+\varepsilon^2) I$$

$$= 1 - \frac{(1+\varepsilon^2)}{2i\varepsilon} \lg\left(\frac{1-i\varepsilon}{1+i\varepsilon}\right) \qquad \varepsilon = \tan\delta$$

$$(-2i\delta)$$

$$= 1 + \frac{(1+\varepsilon^2)}{\varepsilon}\delta$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 1 + 1 \qquad \varepsilon = \sqrt{\frac{a-c}{a+c}}$$

$$\xrightarrow[\frac{k}{a} \to 0]{}$$

$$C_D = 4\left[\pi - (1+\varepsilon^2)\frac{\delta}{\varepsilon}\right] \qquad \tan\delta = \varepsilon$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1 - \frac{c}{a}}{1 + \frac{c}{a}}}$$

$\frac{k}{a}$					
ε					
δ					
C_D					

$$D = 2\pi A_1 = 4\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 2{,}28$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

$$A_n = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2n}\cos n\pi + \frac{\sin n\pi - \sin\frac{n}{2}\pi}{n^2}\right]$$

$$A_{2n+1} = \frac{2}{\pi}\left[+\frac{\pi}{2(2n+1)} - \frac{\cos n\pi}{(2n+1)^2}\right]$$

$$A_{2n} = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{4n}\right] = -\frac{1}{2n}$$

$$A_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{2\cos n\pi}{(2n+1)^2\pi} \qquad -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{n z^n}$$

$$\therefore F(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)z^{2n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n z^{2n}} \quad + \lg\left(1+\frac{1}{z}\right)$$

$$- \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n+1)^2 z^{2n+1}}$$

$$\lg\left(1+\frac{1}{z^2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{2n}}$$

$$=$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=1}\frac{1}{z^{2n}}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}\frac{(-)^n}{z^n}$$

$$\int\frac{dz}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{n z^n} = \lg(z+1)$$

$$\frac{1}{z} = t, \quad z = \frac{1}{t}$$

$$I = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n+1)^2 z^{2n+1}} \qquad I'' = \frac{2}{\pi}\sum \qquad \frac{dz}{1+\frac{1}{z^2}} = -\frac{dt}{t^2(1+t^2)}$$

$$I' = -\frac{2}{\pi}\sum\frac{(-)^n}{(2n+1)z^{2n+2}}, \quad \left(\frac{zI'}{}\right)' = \frac{2}{\pi}\sum\frac{(-)^n}{z^{2n+2}} = \frac{2}{\pi}\frac{\frac{1}{z^2}}{\left(1+\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$zI' = -\frac{2}{\pi}\int\frac{dz}{z^2\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} = \frac{2}{\pi}\int\frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{\pi}\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[t - \frac{1}{2i}\int\left(\frac{1}{t-i} - \frac{1}{t+i}\right)dt\right] = \frac{2}{\pi}\left[t - \frac{1}{2i}\lg\frac{t-i}{t+i}\right]$$

$$I' = \frac{2}{\pi}z\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{2iz}\lg\frac{1-iz}{1+iz}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2iz}\lg\left(\frac{z+i}{i-z}\right)\right]$$

err、

$C_D = 4\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(1+\varepsilon^2)\frac{\delta}{\varepsilon}\right]$ $\delta = \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

$\frac{b}{a} \to 0$ $\varepsilon \doteqdot 1 - \frac{b}{2a}$, $\tan\delta \doteqdot 1 - \frac{b}{2a} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)} = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} \doteqdot 1 - 2\tan\alpha$

$\delta \doteqdot \frac{\pi}{4} - \frac{b}{4a}$

$\alpha \doteqdot \frac{b}{2a}$

$\varepsilon = \sqrt{\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}}$

$\tan^{-1}(1+\varepsilon^2)\frac{\delta}{\varepsilon} = \tan^{-1} 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2a}\right)$

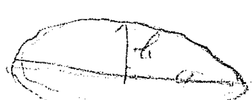
$\doteqdot 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{b}{2a}\right) \doteqdot \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2b}{\pi a}\right)$

C_D の dep. err

$C_D \doteqdot 4\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2b}{\pi a}\right)\right] \doteqdot 2\pi\frac{2b}{\pi a} = \frac{4b}{a}$ $\frac{1}{a}$

$\frac{b}{a}$	ε	δ	C_D	$C_D\frac{a}{b}$	$C_D' = C_D\frac{a}{\sqrt{ab}}$
1	0	0	2.283	2.283	2.283
.5	.5774	.52359	1.4466	2.8932	4.0916
.25	ε^2=.6 .7746	.6591	.8378	3.3512	6.7024
.2	ε^2=.6667 .8165	.6847	.6925	3.4625	
.1	.8181 .9045	.7353	.3711	3.711	
.05	.90476 .95119	.76039	.1925	3.8495	
0		↓	0	4	
∞		.7854	∞	3.1416	×2π
	$\frac{1}{3}$	$\ln\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$			
2	.5774	1.3171	3.2417	1.6209	.021
3	.5 .7071	1.7627	3.7903	1.2634	
5	$\frac{2}{3}$ .8165	2.2925	4.4114	.8823	
10	.8181 .9045	2.9932	5.0131	.5013	
∞	.999		6.2832	0	
			0	3.1416	

err、 $C_{DA} = \frac{C_D}{a+b}$ $\times\frac{1+\frac{b}{a}}{2}$



$\frac{4}{2b}\left(1+\frac{b}{a}\right)$

$a < b.$ $\quad z = \frac{a+b}{2}\left(\zeta - \frac{\varepsilon^2}{\zeta}\right)$ $\quad \varepsilon^2 = \frac{b-a}{a+b}$

$$\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} + \sum_1^\infty \frac{(-)^n \varepsilon^{2n}}{2n} \sin 2n\theta$$

$$A_n = \frac{\cos n\theta}{n} - \frac{2}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2}\left[\frac{1}{n^2} - 2\sum_{\nu=1}^\infty \frac{\varepsilon^{2\nu}}{4\nu^2-n^2}\right]$$

$$A_1 = -1 + \frac{2}{\pi}\left[1 - 2\sum_1^\infty \frac{\varepsilon^{2\nu}}{4\nu^2-1}\right].$$

$$\sum_{\nu=1}^\infty \frac{2}{4\nu^2-1}\varepsilon^{2\nu} = \sum_1 \left(\frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{2\nu+1}\right)\varepsilon^{2\nu} = \sum_0 \frac{\varepsilon^{2n+2}}{2n+1} - \sum_{n=1}\frac{\varepsilon^{2n}}{2n+1}$$

$$= \cancel{\varepsilon^2 + (1+\varepsilon)\sum_{n=1}\frac{\varepsilon^{2n}}{2n+1}}$$

$\cancel{\sum \frac{\varepsilon^2}{2\nu-1}}$

$$\log(1+x) = -\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n} \quad \left[1-(-)^n\right] \quad (-)^n$$

$$= (\varepsilon^2-1)\sum \frac{\varepsilon^{2n}}{2n+1}$$

$+1$

$$\log\frac{1-x}{1+x} = -2\sum_0 \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= \cancel{-1} - \frac{2(\ )}{2x}\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$$= +1 + \frac{(\varepsilon^2-1)}{2\varepsilon}\log\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$$

(-2ε)

$$A_1 = -1 + \frac{2}{\pi}\left[+\frac{\varepsilon^2-1}{2\varepsilon}\log\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\right] \xrightarrow[\varepsilon\to0]{} -1+\frac{2}{\pi}$$

$\left(1-\frac{2}{\pi}\right)$

$$C_0 = -2\pi A_1 = \frac{2(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon}\log\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) + 2\pi = 2\pi\left[1 - \frac{1-\varepsilon^2}{\pi\varepsilon}\log\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\right]$$

$$\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to1]{} 2\pi\left[1 - \frac{a}{\pi b}\log\frac{2b}{a}\right] \to 2\pi$$

$\cancel{\varepsilon = 1-a}$ $\quad \varepsilon = \sqrt{\frac{b-a}{b+a}} = \sqrt{\frac{\frac{b}{a}-1}{\frac{b}{a}+1}}$

$$\varepsilon = 1-\frac{a}{b}, \quad \log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = \log\left(\frac{2-\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}}\right)$$

$$\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon} = \frac{\frac{2a}{b}}{1-\frac{a}{b}}\log\left(\frac{2-\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}}\right)$$

E-

$$f(\zeta) \doteqdot \frac{A_1}{\zeta} \qquad z = \frac{a+b}{2}\left(\zeta \pm \frac{\varepsilon^2}{\zeta}\right)$$

$$\zeta^2 - \frac{2z}{a+b}\zeta \pm \varepsilon^2 = 0$$

$$f(z) \doteqdot \frac{(a+b)A_1}{2z} \qquad \zeta = \frac{\frac{z}{a+b} \pm \sqrt{\left(\frac{z}{a+b}\right)^2 \mp \varepsilon^2}}{1}$$

$$\longrightarrow \frac{z}{(a+b)}\left[1 \mp \frac{\varepsilon^2}{2\left(\frac{z}{a+b}\right)^2}\right]$$

$$D = \pi(a+b)A_1 \qquad \doteqdot \frac{2z}{a+b}$$

$$C_{Da} = \pi\left(1+\frac{b}{a}\right)A_1$$

$$C_{Db} = \pi\left(1+\frac{a}{b}\right)A_1$$

(i) $a > b$.

$$\begin{cases} C_{Da} = \pi\left(1+\frac{b}{a}\right)A_1 = 2\left[\frac{\pi}{2} - \frac{(1+\varepsilon^2)}{\varepsilon}\delta\right]\left(1+\frac{b}{a}\right) \\ C_{Db} = C_{Da} \times \frac{a}{b} \end{cases}$$

$a < b$

$$C_{Da} = \pi\left(1+\frac{b}{a}\right)\left[1 - \frac{1-\varepsilon^2}{\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\right]$$