V

No. 月次1

Date 59.2.8

別所

2次元オセーン流れとナビア・ストークス流れ

内容　頁

No. 目次2

Date

概要

オゼーン流れはナビアー・ストークス方程式の対流項の内2次の項を無視したものであるが，オゼーン自身はその著書の中で最近所謂境界方程式的表現を導きそれを通じてナビア・ストークス方程式を解く事を提唱している。

しかしその後の発展はあまりなく，我国では近年高木，姫野，木下等によって境界積分方程式が少し解かれている程度である。

またもう一つの流れとして例えば今井のように解析的に展開してナビア・ストークス方程式を逐次近似的に解く過程に利用されている。（レイノルズ数が小さい時でもストークス流れに比してあまり改良されず）

このようにあまり顧りみられない大きい原因は乱流問題等は全く手がついておらずまた層流境界層についても平板抵抗値が大変大きい（約2倍）からであろう。

しかしこの最後の平板抵抗についても数値的にはさる事ながらレイノルズ数の平方根に比例する点は同じであり，また摩擦伴流については適当な定数を選べば良い近似である。

また一方従来の境界層理論の欠点としては遠場の表現を得るのが困難で普通は排除厚さだけ修正した形状のポテンシャル流れと仮定しているが何等の理論的根拠はなく圧力抵抗成分の算定（従って摩擦抵抗についても）については幾分疑問が残るのをさけられない。

この点についてはオセーン流れで積分方程式表示を行えば大変明瞭に遠場の表現が出来てまた圧力もそれから計算出来る。

以上の諸点から考えてオゼーンの図式に従って線型オゼーン流れを通じてナビア・ストークス方程式を解く試みは充分検討の価値があると考えられる。

以下の考察は以上の趣旨に基づいて線型，非線型定常，非定常の夫々の場合について概観を試みたものである。

この方法では境界層理論の最初の仮定，つまり粘性層は薄い，境界層の中で厚み方向に圧力は変らない，物体表面の曲率は小さい等の仮定は一切必要としない。

換言すればナビア・ストークスの方程式を忠実に解く方法（方程非線型なので解法としては殆んど近似法しか致し方ない）であり，いわば微分方程式である元の方程式をオゼーン核によって非線型の積分方程式に変換して解く方法と言える。

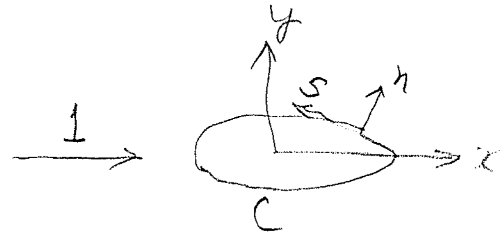
従って安定理論におけるOrr-Sommerfeldの微分方程式も当然積分方程式に変換出来る訳である。

このような変換によって解法がどの程度楽になるかは実行しなければわからないが少くとも層流の場合にはかなり有用のように考えられる。

また特に可逆定理によって幾つかの新しい知見や近似計算法等が得られる点も見逃し難い。

1. 定常翼型理論

1.1 運動方程式



オセーン方程式は

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u\\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\nabla^2 v\end{aligned}\right\} \quad (1.1.1)$$

連続の式は $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, (1.1.2)

一様流れの向きを逆にした逆流れ(〜印で示す)

では

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \nu\nabla^2 \tilde{u}\\ -\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \nu\nabla^2 \tilde{v}\end{aligned}\right\} \quad (1.1.3)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0, \quad (1.1.4)$$

境界条件は

$$u = -1,\ v = 0, \quad \text{on } C \quad (1.1.5)$$

$$\tilde{u} = 1,\ \tilde{v} = 0, \quad \text{on } C \quad (1.1.6)$$

圧力 p は (1.1.1), (1.1.3) と連続の条件から

$$\nabla^2 p = 0, \quad \nabla^2 \tilde{p} = 0, \quad (1.1.7)$$

となり調和関数である。

又 渦度 ζ は

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1.1.8)$$

と定義すると (1.1.1) (1.1.3) から

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \nu\nabla^2\zeta,\quad -\frac{\partial\tilde\zeta}{\partial x} = \nu\nabla^2\tilde\zeta, \qquad (1.1.9)$$

or

$$2k\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \nabla^2\zeta,\quad \nabla^2\tilde\zeta = -2k\frac{\partial\tilde\zeta}{\partial x},\quad k=\frac{1}{2\nu}, \qquad (1.1.9')$$

境界力の x, y 成分は

$$\left.\begin{aligned} X &= \left(-p+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial n} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial n} \\ Y &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial n} + \left(-p+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial n} \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.10)$$

境界上では (1.1.5) により

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial x}{\partial n},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n},\quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial n}\frac{\partial x}{\partial n},\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n}.$$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial n}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n}$$

連続の方程式より $\quad \frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial v}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial n} = 0$

それ故

$$\zeta\frac{\partial y}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial n},\quad \zeta\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n}, \qquad (1.1.11)$$

等より (1.1.10) は

$$\left.\begin{aligned} X &= -p\frac{\partial x}{\partial n} - \mu\zeta\frac{\partial y}{\partial n} \\ Y &= -p\frac{\partial y}{\partial n} + \mu\zeta\frac{\partial x}{\partial n} \end{aligned}\right\} \cdots \qquad (1.1.12)$$

逆流れについても同じである。

1.2 可逆定理

2次の積分

$$E(u,v;\hat u,\hat v) = 2\mu \iint_D \left\{u_x \hat u_x + v_y \hat v_y + \frac{1}{2}(u_y+v_x)(\hat u_y+\hat v_x)\right\}dx\,dy, \qquad (1.2.1)$$

は明らかに次の可逆性を持つ。

$$E(u,v;\hat u,\hat v) = E(\hat u,\hat v;u,v). \qquad (1.2.2)$$

(1.2.1)を部分積分してまず

$$E = -\mu\iint_D \left[\hat u\nabla^2 u + \hat v \nabla^2 v\right] dx\,dy$$

$$+\mu \int_C \left[\hat u\left\{2u_x \frac{\partial x}{\partial n} + (u_y+v_x)\frac{\partial y}{\partial n}\right\} + \hat v\left\{2v_y \frac{\partial y}{\partial n} + (u_y+v_x)\frac{\partial x}{\partial n}\right\}\right] ds. \qquad (1.2.3)$$

第1項に(1.1.1)を代入して p について部分積分すると、(1.1.4)の助けをかりて (1.1.10)の定義により

$$E = -p\iint_D(\hat u u_x + \hat v v_x)\,dx\,dy$$

$$+ \int_C(\hat u X + \hat v Y)\,ds, \qquad (1.2.4)$$

(1.2.3)は (1.2.2)より

$$E = -\mu\iint_D(u\nabla^2\hat u + v\nabla^2\hat v)\,dx\,dy$$

$$+\mu\int_C\left[u\left\{2\hat u_x \frac{\partial x}{\partial n} + (\hat u_y+\hat v_x)\frac{\partial y}{\partial n}\right\} + v\left\{2\hat v_y\frac{\partial y}{\partial n} + (\hat u_y+\hat v_x)\frac{\partial x}{\partial n}\right\}\right]ds. \qquad (1.2.5)$$

となるので 右辺第1項に(1.1.3)を代入して pについて部分積分すると

$$F = \rho \iint_D (u \hat{u}_x + v \hat{v}_x)\, dx dy + \int_C (u \hat{X} + v \hat{Y})\, ds. \quad (1.2.6)$$

(1.2.4)と等置すると

$$\int_C (\hat{u} X + \hat{v} Y)\, ds = \rho \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(u\hat{u} + v\hat{v})\, dx dy + \int_C (u\hat{X} + v\hat{Y})\, ds,$$

あるいは積分して

$$\int_C (\hat{u} X + \hat{v} Y)\, ds = \int_C (u\hat{X} + v\hat{Y})\, ds + \rho \int_C (u\hat{u} + v\hat{v}) \frac{\partial x}{\partial n}\, ds, \quad (1.2.7)$$

特に (u, v), $(\hat{u}, \hat{v})$ が (1.1.5), (1.1.6)を満たす時は

$$\int_C X\, ds = -\int_C \hat{X}\, ds, \quad \cdots\cdots \quad (1.2.8)$$

但し $\int_C \frac{\partial x}{\partial n}\, ds = 0$, とする。

つまり 流れの方向を逆にしても抵抗は等しい。

特別の場合として、($\tilde{u}, \tilde{v}$)がポテンシャルをもち

$$\tilde{u} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x}, \quad \tilde{v} = \frac{\partial}{\partial y}\tilde{\varphi}, \qquad (1.2.9)$$

としよう。

(1.2.4) と (1.2.5)を考慮し、$\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$ であるから

$$\iint_D (\tilde{u} u_x + \tilde{v} v_x)\, dx\, dy = \iint_D (\tilde{v} v_x - \tilde{u} v_y)\, dx\, dy$$

$$= \iint_D v(\tilde{u}_y - \tilde{v}_x)\, dx\, dy + \int_C (\tilde{v} v\, dy - \tilde{u} v\, dx)$$

$$= \int_C v \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial s} ds, \qquad (1.2.10)$$

を考慮すると

$$\int_C (\tilde{u} X + \tilde{v} Y) ds = \rho \int_C v \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial s} ds + 2\mu \int_C \left[u \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} + v \frac{\partial \tilde{v}}{\partial n} \right] ds, \qquad (1.2.11)$$

特に　$u = -1, \; v = 0$ on C　とすると

$$\int_C (\tilde{u} X + \tilde{v} Y) ds = -2\mu \int_C \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} ds.$$

となり、かつ　$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = \tilde{\varphi}_{xx} x_n + \tilde{\varphi}_{xy} y_n = -\tilde{\varphi}_{yy} y_s - \tilde{\varphi}_{xy} x_s = -\frac{\partial \tilde{v}}{\partial s}$

故 $\tilde{v}$ が D内で一価ならば

$$\int_C (\tilde{u} X + \tilde{v} Y) ds = 0, \qquad (1.2.12)$$

(1.1.12)を代入すると

$$\int_C p \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n} ds = \mu \int_C \zeta \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial s} ds, \qquad (1.2.13)$$

ここで $\tilde{\phi}$ として

$$\frac{\partial}{\partial n}\tilde{\phi} = \frac{\partial X}{\partial n}, \qquad (1.2.14)$$

（左辺は）
つまり逆流れのポテンシャル流を考えると 圧力抵抗となり

$$\int_C p\frac{\partial X}{\partial n}\,ds = \mu\int_C \zeta \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial s}\,ds, \qquad (1.2.15)$$

(1.1.12) 第1式より

$$p\frac{\partial X}{\partial n} = X + \mu\zeta\frac{\partial X}{\partial s}$$

だから5式は

$$\int_C X\,ds = \mu\int_C \zeta\,\tilde{q}_p\,ds, \qquad (1.2.16)$$

と書けるがここに

$$\frac{\partial}{\partial s}(\tilde{\phi} - X) = \tilde{q}_p, \qquad (1.2.17)$$

は逆流れポテンシャル流の速度である。

結局 抗力は 粘性抗力 $\mu\int_C \zeta\frac{\partial X}{\partial s}\,ds$ に対し 速度増加分 $\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial s}$ だけ増えたものとなっている。

1.3 速度場の表現

そて

$$2\pi U^{(1)}(P,Q) = -\frac{\partial}{\partial x}\log R + 2k\,\Phi(P,Q) - \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$2\pi V^{(1)}(P,Q) = -\frac{\partial}{\partial y}\log R - \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad (1.3.1)$$

$$R = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}, \quad P \equiv (x, y), \ Q \equiv (x', y')$$

$$\Phi(P,Q) = K_0(kR)\, e^{k(x-x')}, \quad k = \frac{1}{2\nu}, \quad \cdots (1.3.2)$$

$$P^{(1)}(P,Q) = \frac{\nu}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\log R,$$

$$2\pi Z^{(1)}(P,Q) = -2k\frac{\partial}{\partial y}\Phi, \qquad \cdots (1.3.3)$$

$$2\pi U^{(2)}(P,Q) = 2\pi V^{(1)}(P,Q)$$

$$2\pi V^{(2)}(P,Q) = \frac{\partial}{\partial x}\log R + \frac{\partial}{\partial x}\Phi, \qquad (1.3.4)$$

$$P^{(2)}(P,Q) = \frac{\nu}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\log R, \qquad \cdots (1.3.5)$$

$$2\pi Z^{(2)}(P,Q) = \nabla^2\Phi = 2k\frac{\partial}{\partial x}\Phi, \qquad \cdots (1.3.6)$$

$$\tilde{U}^{(j)}(P,Q) = U^{(j)}(Q,P), \quad \tilde{V}^{(j)}(P,Q) = V^{(j)}(Q,P), \quad j=1,2, \qquad (1.3.7)$$

のような基本解を導入すると前節の定理より

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{\varepsilon} X^{(1)}ds = \lim_{\varepsilon\to 0}\oint Y^{(2)}ds = 1.$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{\varepsilon} X^{(2)}ds = \lim_{\varepsilon\to 0}\oint Y^{(1)}ds = 0 \qquad (1.3.8)$$

から

$$u(Q) = -\int_C \Big[X U^{(1)}(Q,P) + Y V^{(1)}(Q,P) - u X^{(1)}(Q,P) - v Y^{(1)}(Q,P) - p\{u U^{(1)} + v V^{(1)}\} \frac{\partial X}{\partial n} \Big] ds(P),$$

$$v(Q) = -\int_C \Big[X U^{(2)}(Q,P) + Y V^{(2)}(Q,P) - u X^{(2)} - v Y^{(2)} - p\{u U^{(2)} + v V^{(2)}\} \frac{\partial X}{\partial n} \Big] ds(P), \qquad (1.3.9)$$

QはCの内点であるとして(u,v)が(1.1.5)を満たすとすると、これは次のように簡単化される。

$$u(Q) = -\int_C \big[X U^{(1)}(Q,P) + Y V^{(1)}(Q,P) \big] ds(P),$$

$$v(Q) = -\int_C \big[X U^{(2)}(Q,P) + Y V^{(2)}(Q,P) \big] ds(P), \qquad (1.3.10)$$

このほ

$$p(Q) = -\int_C \big[X P^{(1)}(Q,P) + Y P^{(2)}(Q,P) \big] ds(P), \qquad (1.3.11)$$

(sigma?)

$$\sigma(Q) = -\int_C \big[X Z^{(1)}(Q,P) + Y Z^{(2)}(Q,P) \big] ds. \qquad (1.3.12)$$

(1.3.10) は (1.3.12) を考えると次のように分割出来る。

$$u(Q) = u_p(Q) + u_H, \quad v = v_p + v_H \qquad (1.3.13)$$

$$u_p(Q) = +\frac{1}{2\pi}\int_C \left[X\frac{\partial}{\partial x}\log R + Y\frac{\partial}{\partial y}\log R\right]ds,$$
$$v_p = \frac{1}{2\pi}\int_C \left[X\frac{\partial}{\partial y}\log R - Y\frac{\partial}{\partial x}\log R\right]ds, \qquad (1.3.14)$$

$$u_H = \frac{1}{2\pi}\int_C \left[X\left(2k\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + Y\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right]ds,$$
$$v_H = \frac{1}{2\pi}\int_C \left[X\frac{\partial\Phi}{\partial y} - Y\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]ds, \qquad (1.3.15)$$

(1.3.14) は調和関数で速度ポテンシャルを持ち

$$u(Q) = \frac{\partial}{\partial x}\phi, \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \qquad (1.3.16)$$

とすると

$$\phi(Q) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \left[X\log R - Y\,\Theta\right]ds, \qquad (1.3.17)$$

但し $\frac{\partial\Theta}{\partial x'} = -\frac{\partial}{\partial y'}\log R$, $\frac{\partial\Theta}{\partial y'} = \frac{\partial\log R}{\partial x'}$

(1.3.3), (1.3.5), (1.3.11) と (1.3.14) 第1式から

$$\phi(Q) = u_p(Q), \qquad (1.3.18)$$

(ρ=1 になってる)

が得られ

$$\zeta(Q) = k\,v_H(Q), \qquad (1.3.19)$$

(1.3.18) において (1.3.14) 第1式に (1.1.12) を代入すると

$$p(Q) = \frac{-1}{2\pi}\int_C \left[p\frac{\partial}{\partial n}\log R + \mu\zeta\frac{\partial}{\partial s}\log R\right] ds. \quad \cdots$$

を得るから右辺第2項を部分積分して

$$p(Q) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \left[p\frac{\partial}{\partial n}\log R + \mu\frac{\partial\zeta}{\partial s}\log R\right] ds, \quad (1.3.20)$$

(sign ?)

を得る。

pは調和関数なら

$$p(Q) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \left[p\frac{\partial}{\partial n}\log R - \frac{\partial p}{\partial n}\log R\right] ds, \quad (1.3.21)$$

と表わされるから

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\mu\frac{\partial\zeta}{\partial s}, \quad \cdots\cdots \quad (1.3.22)$$

それ故 p の共役関数, 今は (1.3.18) なる関係があるから

それは ν_p で与えられ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\nu_p}{\partial s} &= -\mu\frac{\partial\zeta}{\partial s}, \\ \nu_p &= -\mu\zeta, \quad \text{on } C \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (1.3.23)$$

1.4 遠場の表現

充分遠方では

$$\Phi \doteqdot \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2kr'}}\, e^{-k(r'-x')} & \text{for } x' \gg 1 \\ 0 & \text{for } x' \ll -1 \end{cases} \qquad (1.4.1)$$

となるから (1.3.13) において (u_F, v_F) は 伴流の外側では殆ど0となり

$$u \doteqdot u_P, \quad v \doteqdot v_P \quad \text{outside of wake}, \qquad (1.4.2)$$

今後 左右対称流れを考える事とし

$$\int_C \Upsilon\, ds = 0, \qquad (1.4.3)$$

とすると (sign?)

$$\phi_P(Q) \doteqdot -\frac{D}{2\pi}\log r', \quad \text{for } r' \gg 1, \qquad (1.4.4)$$

$$D = \int_C X\, ds. \qquad (1.4.5)$$

Dは抗力であり、Filon 等の結果に一致する。

伴流の中では このポテンシャル流れの他に

$$\left.\begin{aligned} u_F &\doteqdot -\frac{D}{2}\sqrt{\frac{k}{2\pi r'}}\left(1+\frac{x'}{r'}\right)e^{-k(r'-x')}, \\ v_F &= -\frac{D}{2}\sqrt{\frac{k}{2\pi r'}}\,\frac{y'}{r'}\,e^{-k(r'-x')}, \end{aligned}\right\} \qquad (1.4.6)$$

なる粘性伴流があり

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_F \Big|_{x'=+\infty} dy \doteqdot -D\sqrt{\frac{k}{2\pi x'}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k y^2}{2x'}}\, dy = -D, \qquad (1.4.7)$$

となって (u_P, v_P) の吹出しとバランスしている。

1.5 近場の表現，特に高レイノルズ数の場合

レイノルズ数が小さい場合は近場ではストークス流れとなるが，今はレイノルズ数が大変高い場合を考えよう。その時は物体の近くでも(1.3.13)のようにポテンシャル分と粘性伴流分と分けてよいと考えられ，さらに(u_H, v_H)は

$$\Phi \doteqdot \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{2kR}}\, e^{-k(R-\overline{x'-x})} & \text{for} \quad x < x' \\ 0 & \text{for} \quad x > x' \end{cases} \qquad (1.5.1)$$

と近似されるとすると

$$\left.\begin{aligned} u_H(Q) &\doteqdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{2\pi}}\int_{C(x')}\left[\left(1-\frac{x-x'}{R}\right)X + \frac{y-y'}{R}Y\right]\frac{e^{-k(R+x-x')}}{\sqrt{R}}\,ds, \\ v_H(Q) &\doteqdot -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{2\pi}}\int_{C(x')}\left[\frac{y-y'}{R}X + \frac{x-x'}{R}Y\right]\frac{e^{-k(R+x-x')}}{\sqrt{R}}\,ds, \end{aligned}\right\} \quad (1.5.2)$$

但し $C(x')$は C上で $x \leq x'$ の部分を表わすものとする。

1.6 グリーン関数

(1.3.9) 以下の核関数で

$$\left.\begin{aligned} U_G^{(j)}(P,Q) &= U^{(j)}(P,Q) + U_A^{(j)}(P,Q) \\ V_G^{(j)} &= V^{(j)} + V_A^{(j)} \end{aligned}\right\} \quad (1.6.1) \quad j=1,2$$

とおいて $(U_A^{(j)}, V_A^{(j)})$ は $P=Q$ で正則な関数とし、

$$\left.\begin{aligned} &U_G^{(j)}(P,Q) = V_G^{(j)}(P,Q) = 0, \quad P \in C, \\ &\text{あるいは} \quad \left.\begin{aligned} U_A^{(j)}(P,Q) &= -U^{(j)}(P,Q) \\ V_A^{(j)}(P,Q) &= -V^{(j)}(P,Q) \end{aligned}\right\} P \in C, \end{aligned}\right\} \quad (1.6.2)$$

なる関数があるとすると、(U_A, V_A) の正則性から (U_G, V_G) の特異性は (U, V) と同じなので (1.3.9) の (U, V) を (U_G, V_G) 等に変えた表現が成り立ち (1.6.2) から

$$\left.\begin{aligned} u(Q) &= \int_C \left[u X_G^{(1)}(Q,P) + v Y_G^{(1)}(Q,P)\right] ds \\ v(Q) &= \int_C \left[u X_G^{(2)} + v Y_G^{(2)}\right] ds, \end{aligned}\right\} \quad (1.6.3)$$

と書け、ここに $(X_G^{(j)}, Y_G^{(j)})$ は (1.6.1) の速度から計算される境界力である。

1.7 エネルギー定理, 運動量定理

(1.2.1)は逆流れを導入しないで

$$E = 2\mu \iint_D \left[u_x^2 + v_y^2 + \frac{1}{2}(u_y + v_x)^2 \right] dx\,dy, \qquad (1.7.1)$$

とすれば粘性による散逸エネルギーである。

それ故領域が無限ならば無限大となる。

そこでDを物体境界Cと充分遠方の検査面L

に囲まれた領域として部分積分すると(1.2.4)と同様に

$$E = \int_{C-L} (uX + vY)\,ds - \frac{\rho}{2}\int_{C-L} (u^2+v^2)\frac{\partial x}{\partial n}\,ds, \qquad (1.7.2)$$

を得る。

C上で $u=-1,\ v=0,\ \int_C \frac{\partial x}{\partial n}\,ds = 0,$

L上で $X=Y=0$

とおくと

$$E = \int_C uX\,ds + \frac{\rho}{2}\int_L (u^2+v^2)\frac{\partial x}{\partial n}\,ds, \qquad (1.7.3)$$

つまり、領域内で粘性によって消費されるエネルギー

(単位時間内)が

は物体のなす仕事から出て行く運動エネルギーを

領域外に

差引いたものである。

(1.7.1)を一般化して 2つの流れ (u_1, v_1), (u_2, v_2) に対する双一次形式を導入すると.

$$E = 2\mu \iint_D \left[u_{1x} u_{2x} + v_{1y} v_{2y} + \frac{1}{2}(u_{1y} + v_{1x})(u_{2y} + v_{2x}) \right] dxdy, \quad (1.7.4)$$

部分積分して (1.1.1)を使い

$$E = \int_{C-L} (u_1 X_2 + v_1 Y_2) ds - \rho \iint_D (u_1 u_{2x} + v_1 v_{2x}) dxdy, \quad (1.7.5)$$

特に D内で $u_1 = 1$, $v_1 = 0$ とおくと

$$E = 0, \quad \text{for } u_1 = 1, v_1 = 0 \text{ in } D, \quad (1.7.6)$$

L は検査面故 $X_2 = Y_2 = 0$ となり, 上式は

$$\int_C X_2 ds = \rho \int_L u_2 dy, \quad \cdots\cdots (1.7.7)$$

これは運動量定理の結果に一致する。

1.8 平板抵抗（高レイノルズ数の，Piercy & Winny

平板では $u_p = v_p = 0$ であるから，レイノルズ数の高い時は

(1.5.2) 第1式から境界条件は

$$1 = \sqrt{\frac{2k}{\pi}} \int_0^{x'} X \frac{dx}{\sqrt{x' - x}} , \quad \cdots\cdots (1.8.1)$$

これはアーベル型の積分方程式故その解は

$$X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k x}} , \quad |X| < 1 , \quad (1.8.2)$$

抵抗は

$$D = 2\int_0^1 X\,dx = 2\sqrt{\frac{2}{\pi k}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\nu} , \quad \cdots (1.8.3)$$

（$\rho = 1$ として置く）

抵抗係数は

$$C_F = \frac{D}{2 \times \frac{\rho}{2} U^2 l} = \frac{4}{\sqrt{\pi R_e}} , \quad R_e = \frac{Ul}{\nu} , \quad (1.8.4)$$

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} = 2.257 \text{ 故}$$

ブラジウスの式

$$C_F = \frac{1.328}{\sqrt{R}} , \quad \cdots (1.8.5)$$

の約2倍である。

Piercy & Winny によれば近似的に

$$u \doteqdot -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\frac{k}{2x}}y}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta , \quad \cdots (1.8.6)$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{x\pi\nu}} e^{-\frac{k}{2x}y^2} , \quad \cdots (1.8.7)$$

$$v = \sqrt{\frac{\nu}{\pi x}} \left(1 - e^{-\frac{k}{2x}y^2}\right) , \quad \cdots (1.8.8)$$

（v は $u_x + v_y = 0$ を使って $v|_{y=0} = 0$ として求めた）

2. 定常非線型理論

2-1 可逆定理

ナビア・ストークスの運動方程式は

$$
\left.\begin{aligned}
u_x + uu_x + vu_y &= -\frac{p_x}{\rho} + \nu\nabla^2 u \\
v_x + uv_x + vv_y &= -\frac{p_y}{\rho} + \nu\nabla^2 v
\end{aligned}\right\} \quad \cdots (2.1.1)
$$

オセーンはこれを(1.1.1)の非斉次方程式とみなして、解く事を提案している。

この解と(1.1.3)の解とで(1.2.1)の積分式をつくると(1.2.3)の $\nabla^2 u, v$ には上式を代入して、

$$
\int_C (\hat{u}X + \hat{v}Y)\,ds - \int_C \left[u\hat{X} + v\hat{Y} + \rho(u\hat{u} + v\hat{v})\frac{\partial x}{\partial n}\right] ds
$$

$$
= \rho \iint_D \left[\hat{u}(uu_x + vu_y) + \hat{v}(uv_x + vv_y)\right] dx\,dy
$$

$$
= \frac{\rho}{2}\int_C (u^2+v^2)\left(\hat{u}\frac{\partial x}{\partial n} + \hat{v}\frac{\partial y}{\partial n}\right) ds
$$

$$
- \rho \iint_D \zeta(v\hat{u} - u\hat{v})\,dx\,dy,
$$

$$
\int_C (\hat{u}X + \hat{v}Y - u\hat{X} - v\hat{Y})\,ds
$$

$$
= \frac{\rho}{2}\int_C \left[2(u\hat{u} + v\hat{v})\frac{\partial x}{\partial n} + (u^2+v^2)\left(\hat{u}\frac{\partial x}{\partial n} + \hat{v}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right] ds
$$

$$
- \rho \iint_D \zeta(v\hat{u} - u\hat{v})\,dx\,dy, \quad \cdots (2.1.2)
$$

$u=-1,\ v=0$ on C とすると

$$\int_C (\tilde{u}X+\tilde{v}Y+\tilde{X})\,ds = -\frac{\rho}{2}\int_C \tilde{u}\frac{\partial x}{\partial n}\,ds - \rho\iint_D \zeta(v\tilde{u}-u\tilde{v})\,dx\,dy, \qquad (2.1.3)$$

さらに $u=-1,\ v=0$ in D ならば $X=Y=0,\ \zeta=0$ となり

$$\int_C \tilde{X}\,ds = -\frac{\rho}{2}\int_C \tilde{u}\frac{\partial x}{\partial n}\,ds. \qquad (2.1.4)$$

これを上で[illegible]と
(2.1.3) において $\tilde{u}=1,\ \tilde{v}=0$ とおくと.

$$\int_C (X+\tilde{X})\,ds = -\rho\iint_D \zeta(v\tilde{u}-u\tilde{v})\,dx\,dy, \qquad (2.1.5)$$

となって抗力は オゼーン逆流れの抗力 $\int \tilde{X}ds$ と領域内の (u,v,ζ) によって表わされる。

さてもう一つの表現を導いておこう。

まず (1.2.3) は (1.1.10) を考慮すると

$$E = -\mu\iint_D (\tilde{u}\nabla^2 u+\tilde{v}\nabla^2 v)\,dx\,dy + \int_C \left[\tilde{u}\left(X+p\frac{\partial x}{\partial n}\right)+\tilde{v}\left(Y+p\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right]ds. \qquad (1.0)$$

となり (1.2.6) はまた

$$E = -\rho\iint_D(\tilde{u}u_x+\tilde{v}v_x)\,dx\,dy + \int_C(u\tilde{X}+v\tilde{Y})\,ds + \rho\int_C(u\tilde{u}+v\tilde{v})\frac{\partial x}{\partial n}\,ds, \cdots$$

これらを等置すると

$$\int_C (u\tilde{X} + v\tilde{Y})\,ds + \rho\int_C (u\hat{u} + v\hat{v})\frac{\partial \hat{Y}}{\partial n}\,ds$$
$$= \int_C \left[\hat{u}\left(X + p\frac{\partial x}{\partial n}\right) + \hat{v}\left(Y + p\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right] ds$$
$$+ \rho\iint_D \left[\hat{u}(u_x - \nu\nabla^2 u) + \hat{v}(v_x - \nu\nabla^2 v)\right] dx\,dy, \qquad (2.1.6)$$

を得，(2.1.1)を代入すると (2.1.2) に一致する。

この形では右辺最後の項が(2.1.2)と違って一次形式であるのでもし

u の近似値があれば計算が容易である。

例えば $u = -1,\ v = 0,\ \hat{u} = 1,\ \hat{v} = 0$ on C ならば

$$-\int_C \tilde{X}\,ds = \int_C \left(X + p\frac{\partial x}{\partial n}\right) ds + \rho\iint_D \left[\hat{u}(u_x - \nu\nabla^2 u) + \hat{v}(v_x - \nu\nabla^2 u)\right] dx\,dy, \qquad (2.1.7)$$

$\nabla^2 \tilde{u} = \nabla^2 \tilde{v} = 0$ とすると (1.2.5) より

$$E = \mu \int_C \left[u\left\{ 2\tilde{u}_x \frac{\partial x}{\partial n} + (\tilde{u}_y + \tilde{v}_x)\frac{\partial y}{\partial n} \right\} + v\left\{ 2\tilde{v}_y y_n + (\tilde{v}_x + \tilde{u}_y) x_n \right\} \right] ds$$

$$-2\tilde{v}_y y_s \quad -2\tilde{v}_x x_s \qquad +2\tilde{u}_x x_s + 2\tilde{u}_y y_s$$

$$-2\frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} \qquad\qquad = \tilde{u}_s$$

$$= 2\mu \int_C \left[-u \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} + v \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} \right] ds = 0$$

for $u = -1,\ v = 0$.

(1.2.3) に (2.1.1) を代入すると

$$E = \rho \iint_D \left[\tilde{u}(u_t + u u_x + v u_y) + \tilde{v}(v_t + u v_x + v v_y) \right] dx\,dy + \int_C (\tilde{u} X + \tilde{v} Y)\, ds$$

$$= \frac{\rho}{2} \int_C (u^2 + v^2)\left(\tilde{u}\frac{\partial x}{\partial n} + \tilde{v}\frac{\partial y}{\partial n} \right) ds + \int_C (\tilde{u} X + \tilde{v} Y)\, ds$$

$$- \rho \iint_D S(v\tilde{u} - u\tilde{v})\, dx\,dy.$$

$u = -1,\ v = 0$, $\tilde{u}\frac{\partial x}{\partial n} + \tilde{v}\frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial x}{\partial n}$ とすると $\int_C (u^2+v^2)\left(\tilde{u}\frac{\partial x}{\partial n} + \tilde{v}\frac{\partial y}{\partial n}\right) ds = \int_C \frac{\partial x}{\partial n} ds = 0$.

又 $E = 0$ であるから

$$\int_C (\tilde{u} X + \tilde{v} Y)\, ds = \rho \iint_D S(v\tilde{u} - u\tilde{v})\, dx\,dy,$$

これは (1.2.12) の拡張である。

(1.1.12)を左辺に代入すると

$$\int_c (\tilde{u}X+\tilde{v}Y)ds = -\int\left[p\left(\tilde{u}\frac{\partial x}{\partial n}+\tilde{v}\frac{\partial y}{\partial n}\right)-\mu\zeta\left(\tilde{u}\frac{\partial x}{\partial s}+\tilde{v}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\right]ds$$

で $\tilde{u}\frac{\partial x}{\partial n}+\tilde{v}\frac{\partial y}{\partial n}=\frac{\partial x}{\partial n}$，$\tilde{u}=\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial x}$，$\tilde{v}=\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial y}$ とすると

$$\int_c (\tilde{u}X+\tilde{v}Y)ds = -\int\left[p\frac{\partial x}{\partial n}-\mu\zeta\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial s}\right]ds$$

$\frac{\partial}{\partial s}(-x+\tilde{\Phi}) = \tilde{g}_p$，$-x$は一様流れな周速である

$$= +\int\left[-p\frac{\partial x}{\partial n}+\mu\zeta\frac{\partial x}{\partial s}+\mu\zeta\left(-\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial s}\right)\right]ds$$

$$= \int_c X\,ds + \mu\int_c \zeta\tilde{g}_p\,ds$$

又(2.3.2)の後の式のように $\iint_D \zeta v\,dxdy=0$ なので

$$\int_c X\,ds = -\mu\int_c \zeta\tilde{g}_p\,ds + \rho\iint_D \zeta\left[v(-1+\tilde{u})-u\tilde{v}\right]dxdy,$$

あるいは圧力抵抗のみは

$$-\int_c p\frac{\partial x}{\partial n}ds = -\mu\int_c \zeta\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial s}ds + \rho\iint_D \zeta\left(v\tilde{u}-u\tilde{v}\right)dxdy$$

2-2 速度場の表現

(2.1.2) の $\tilde{u}, \tilde{v}$ に (1.3.1)～(1.3.4) の核関数を使い、(1.3.10), (1.3.11) を導いたのと同様にして

$$u(Q) = -\int_C [X\tilde{U}^{(1)} + Y\tilde{V}^{(1)}] ds - \rho \iint_D \zeta (v\tilde{U}^{(1)} - u\tilde{V}^{(1)}) dx dy,$$

$$v(Q) = -\int_C [X\tilde{U}^{(2)} + Y\tilde{V}^{(2)}] ds - \rho \iint_D \zeta (v\tilde{U}^{(2)} - u\tilde{V}^{(2)}) dx dy, \quad (2.2.1)$$

$$\zeta(Q) = -\int_C [X\tilde{Z}^{(1)} + Y\tilde{Z}^{(2)}] ds - \rho \iint_D \zeta (v\tilde{Z}^{(1)} - u\tilde{Z}^{(2)}) dx dy, \quad (2.2.2)$$

境界条件は $u=-1,\ v=0$ on C である。

圧力については少々複雑で (2.1.1) より

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho}p_x + uu_x + vu_y &= -u_x + \nu\nabla^2 u = \frac{\partial}{\partial x}g, \\ \frac{1}{\rho}p_y + uv_x + vv_y &= -v_x + \nu\nabla^2 v = \frac{\partial}{\partial y}g, \end{aligned}\right\}$$

とおくと

$$g(Q) = -\int_C [X\tilde{p}^{(1)} + Y\tilde{p}^{(2)}] ds - \rho \iint_D \zeta (v\tilde{p}^{(1)} - u\tilde{p}^{(2)}) dx dy, \quad (2.2.3)$$

つまり

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho}p_x &= g_x - uu_x - vu_y \\ \frac{1}{\rho}p_y &= g_y - uv_x - vv_y \end{aligned}\right\} \cdots \quad (2.2.4)$$

あるいは

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2+v^2}{2}\right)_x &= g_x + v\zeta \\ \left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2+v^2}{2}\right)_y &= g_y - u\zeta \end{aligned}\right\} \cdots \quad (2.2.5)$$

C上では $\dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{p}{\rho} + \dfrac{1}{2} - g\right) = \zeta \dfrac{\partial X}{\partial n}$, $(u=-1,\ v=0)$, (2.2.6)

と計算出来, u, v, ζ は (2.2.1), (2.2.2) で計算したものを代入すればよい事になる。

さて境界値問題は (2.2.1) と (2.2.2) を併立させて全領域で解く事になる。

レイノルズ数が充分高ければ右辺の2重積分は境界層の中だけ考えればよいわけである。

また2重積分の項には前段の近似値を入れて逐次近似的に解く方法も有望である。

問題がとけると圧力は (2.2.5)(2.2.6) で計算出来る。

いづれにしてもこのようにして得られる解は元のナビアストークスの方程式の解であり，境界層方程式におけるように何等の仮定も入ってない。

なお (1.6) のグリーン関数による表現は

$$\left.\begin{array}{l} u(Q) \\ v(Q) \end{array}\right\} = \int_C \left[u \tilde{X}_G^{(i)} + v \tilde{Y}_G^{(i)} \right] ds - P \iint_D \zeta \left(v \tilde{U}_G^{(i)} - u \tilde{V}_G^{(i)} \right) dx\,dy, \quad (2.2.7)$$

2.3 遠場の表現

伴流の外側の遠方では (2.2.1) から (1.4.4) 同様

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_p(Q) = -\frac{D^*}{2\pi}\log r', \quad r' \gg 1 \\ &u \fallingdotseq \frac{\partial \Phi_p}{\partial x}, \quad v \fallingdotseq \frac{\partial \Phi_p}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.1)$$

$$D^* = \int_C X\,ds + \rho \iint_D \zeta v\,dx\,dy, \qquad (2.3.2)$$

であるが

$$\iint_D \zeta v\,dx\,dy = \iint_D (v_x - u_y)\,v\,dx\,dy$$

$$= \int_C \left[\frac{v^2 - u^2}{2}dy - uv\,dx\right] = 0, \quad u = v = 0 \text{ on } C$$

となるから

$$D^* = \int_C X\,ds, \qquad (2.3.3)$$

となってポテンシャル分の吹出し強さはやはり抗力に比例している。

伴流の中では §1.4 と同様にして求められるが 2重積分項の評価は面倒である。

2.4 平板抵抗

レイノルズ数は充分大きいとし (1.5.2)の近似を (2.2.1)と同様第1式に代入して境界積分方程式を解けばよいわけで逐次近似法をとるならば §1.8のオセーン流れを第1近似としてとればよい。

今は抵抗のみ求めるものとして、もっと簡略化し (2.1.5)を利用しよう。

オセーン解の近似値 (1.8.6)、(1.8.8)および X はブラジウスの解に相似であるので正解は α を定数として

$$X = \alpha X_0 ,\quad \text{抗力も}\quad D = \alpha D_0 , \qquad (2.4.1)$$

suffix 0 はオセーン解を示す。

と仮定すれば $\quad u = \alpha u_0 ,\ v = \alpha v_0 ,\ \zeta = \alpha \zeta_0 , \qquad (2.4.2)$

(2.1.5)に代入すると

$$\alpha D_0 = D_0 - 2\alpha^2 \iint_{\frac{D}{2}} \zeta_0 (v_0 \tilde{u}_0 - u_0 \tilde{v}_0)\, dx dy , \qquad (2.4.2)$$

$D_0 = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sqrt{D}$ で割って

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 1 - \alpha^2 I , \\ I &= \frac{2}{D_0} \iint_{\frac{D}{2}} \zeta_0 (v_0 \tilde{u}_0 - u_0 \tilde{v}_0)\, dx dy , \end{aligned}\right\} \qquad (2.4.3)$$

I に近似値 (1.8.6)～(1.8.8)を代入すると

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^1 dx \int_0^\infty \Big[\frac{e^{-\eta^2}}{x}(1-e^{-\eta^2})\,\mathrm{erfc}\Big(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\eta\Big)$$
$$+ \frac{e^{-\eta^2}}{\sqrt{x(1-x)}}\Big(1-e^{-\frac{x}{1-x}\eta^2}\Big)\,\mathrm{erfc}(\eta)\Big]\,dy, \quad \cdots (2.4.4)$$

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \frac{y}{2\sqrt{\nu x}}, \\ \mathrm{erfc}(\eta) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\eta^\infty e^{-\eta^2}\,d\eta, \end{aligned}\right\} \quad (2.4.5)$$

である。ここで近似的に

$$\mathrm{erfc}(\eta) \fallingdotseq 1 + \eta\frac{\partial}{\partial\eta}\mathrm{erfc}(\eta) = 1 - \frac{2\eta}{\sqrt{\pi}}e^{-\eta^2}, \quad (2.2.6)$$

としてIを計算すると、

$$I = .6490, \quad (2.2.7)$$

(2.4.3) ~~式~~ 式に代入して、αを出すと

$$\alpha = .6905. \quad \left(\begin{array}{c}\alpha=.5883,\ I=1.189 \\ \text{で正解}\end{array}\right) \quad (2.2.8)$$

それ故

$$C_f = \alpha C_{f0} = \frac{1.559}{\sqrt{R}}, \quad (2.2.9)$$

を得るが、これはブラジウス公式に比して17.4%大きい。

以上の計算で $u = \alpha u_0 = \alpha(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2})$ と近似したのでかなり大きい誤差なので改めて

$$u \fallingdotseq 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\alpha\eta e^{-\eta^2}, \quad (2.2.10)$$

とおいて計算して見ると αを決める方程式は

$$.2246\alpha^2 + 1.5\alpha = 1, \quad \alpha = .6108, \quad C_f = \frac{1.379}{\sqrt{R}}$$

となり、ブラジウス式の46%増しとなる。

なお同様な近似で境界値問題をといても殆ど同じ値となった。

3. 非定常線型理論（オセーン近似）

3.1 運動方程式

円周波数 ω で周期的運動をしている場合を考えよう。

この時任意の関数 $f(t)$ をフーリエ変換して

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = F(\omega) \quad , \quad \cdots (3.1.1)$$

とすると逆に

$$f(t) = \frac{T}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \quad , \quad \cdots (3.1.2)$$

以下はこの意味で $F(\omega)$ を扱うものとする。

そうすると運動方程式は高次の項を省略して

$$\left.\begin{aligned} i\omega u + u_x &= -\frac{1}{\rho} p_x + \nu \nabla^2 u \\ i\omega v + v_x &= -\frac{1}{\rho} p_y + \nu \nabla^2 v \end{aligned}\right\} \cdots (3.1.3)$$

また

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 p = 0 \\ &\left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x}\right)\zeta = \nu \nabla^2 \zeta , \quad \zeta = v_x - u_y \end{aligned}\right\} (3.1.4)$$

逆流れでは

$$\left.\begin{aligned} i\omega \tilde{u} - \tilde{u}_x &= -\frac{1}{\rho} \tilde{p}_x + \nu \nabla^2 \tilde{u} \\ i\omega \tilde{v} - \tilde{v}_x &= -\frac{1}{\rho} \tilde{p}_y + \nu \nabla^2 \tilde{v} \end{aligned}\right\} \cdots (3.1.5)$$

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 \tilde{p} = 0 \\ &\left(i\omega - \frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{\zeta} = \nu \nabla^2 \tilde{\zeta} , \quad \tilde{\zeta} = \tilde{v}_x - \tilde{u}_y \end{aligned}\right\} \cdots (3.1.6)$$

ここで流れ関数を導入しよう。

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \zeta = v_x - u_y = -\Delta\psi, \quad (3.1.7)$$

これを2つに分けて

$$\psi = \psi_P + \psi_F \quad , \cdots\cdots \quad (3.1.8)$$

ψ_Pは調和分とし，そのポテンシャルをϕ_Pとすれば

$$u_P = \frac{\partial \psi_P}{\partial y} = \frac{\partial \phi_P}{\partial x}, \quad v_P = -\frac{\partial \psi_P}{\partial x} = \frac{\partial \phi_P}{\partial y}, \quad \cdots (3.1.9)$$

圧力Pは調和関数故，その共役関数をg，つまり

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \cdots (3.1.10)$$

とおく。

そうすると$\underbrace{(3.1.3)}_{(3.1.5)=}$は次のように書く事が出来る。

$$\left.\begin{aligned} \left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_P &= -g, \\ \left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_F &= \nu\nabla^2\psi_F, \end{aligned}\right\} \cdots (3.1.11)$$

$$\left.\begin{aligned} \left(i\omega - \frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{\psi}_P &= -\tilde{g} \\ \left(i\omega - \frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{\psi}_F &= \nu\nabla^2\tilde{\psi}_F \end{aligned}\right\} \cdots (3.1.11')$$

また

$$\left.\begin{aligned} \frac{P}{\rho} &= -\left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x}\right)\phi_P, \\ \nu\zeta &= -\left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_F, \end{aligned}\right\} \cdots (3.1.12)$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{P}/\rho &= -\left(i\omega - \frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{\phi}_P \\ \nu\tilde{\zeta} &= -\left(i\omega - \frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{\psi}_F \end{aligned}\right\} \cdots (3.1.12')$$

境界条件は、C上で u, v、従って $\frac{\partial\psi}{\partial n}$、$\frac{\partial\psi}{\partial s}$ が与えられる訳で、

今 $$\psi = f(x,y),\quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial n} \qquad (3.1.13)$$

とおけば 単振幅を1として

$$\left.\begin{array}{ll} \text{前後ゆれに対し} & f = i\omega y, \\ \text{左右ゆれ 〃} & f = -i\omega x, \\ \text{回転振動 〃} & f = \frac{i\omega}{2}(x^2+y^2), \end{array}\right\} \quad (3.1.14)$$

また境界上では、これらの関係を使って、

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial q}{\partial s} = -\nu\frac{\partial\zeta}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s}\left[\left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x}\right)f\right], \qquad (3.1.15)$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - \nu\frac{\partial\zeta}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n}(q+\nu\zeta) = +\frac{\partial}{\partial n}\left[\left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi\right]$$

$$= +i\omega\frac{\partial\psi}{\partial n} - \frac{\partial v}{\partial n},$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n} = \zeta\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial s}$$

$$\therefore\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = \nu\frac{\partial\zeta}{\partial n} - \zeta\frac{\partial x}{\partial n} + i\omega\frac{\partial\psi}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial s}, \qquad (3.1.16)$$

境界力については、(1.1.10)の定義より

$$\left.\begin{array}{l} X = -p\frac{\partial x}{\partial n} - \mu\zeta\frac{\partial y}{\partial n} - 2\mu\frac{\partial v}{\partial s}, \\ Y = -p\frac{\partial y}{\partial n} + \mu\zeta\frac{\partial x}{\partial n} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial s}, \end{array}\right\} \quad (3.1.17)$$

となる。

3.2 可逆定理

(1.2.1) の積分を導入すると明らかに (1.2.2) なる可逆性が成立つ。

(1.2.1) は (1.2.3) のように変形出来るから (3.1.3) を代入すると

$$E = -\rho \iint_D \left[i\omega (u\tilde{u} + v\tilde{v}) + \tilde{u} u_x + \tilde{v} v_x \right] dx\,dy + \int_C (\tilde{u} X + \tilde{v} Y)\, ds, \quad \cdots (3.2.1)$$

と (1.2.5) に (3.1.5) を代入すると

$$E = -\rho \iint_D \left[i\omega (u\tilde{u} + v\tilde{v}) - u\tilde{u}_x - v\tilde{v}_x \right] dx\,dy + \int_C (u\tilde{X} + v\tilde{Y})\, ds, \quad (3.2.2)$$

可逆性により、2式を等置すると

$$\int_C (\tilde{u} X + \tilde{v} Y)\, ds - \rho \iint_D (\tilde{u} u_x + \tilde{v} v_x)\, dx\,dy = \int_C (u\tilde{X} + v\tilde{Y})\, ds + \rho \iint_D (u\tilde{u}_x + v\tilde{v}_x)\, dx\,dy,$$

となり、部分積分して

$$\int_C (\tilde{u} X + \tilde{v} Y)\, ds = \int_C (u\tilde{X} + v\tilde{Y})\, ds + \rho \int_C (u\tilde{u} + v\tilde{v}) \frac{\partial x}{\partial n}\, ds, \quad (3.2.3)$$

となり、(1.2.7) と同型となる。

今$\tilde{u}$, $\tilde{v}$として、ポテンシャル流れを導入してみよう。

$$\tilde{u} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x}, \quad \tilde{v} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y}, \qquad (3.2.4)$$

また圧力については

$$(i\omega - \frac{\partial}{\partial x})\tilde{\varphi} + \frac{\tilde{p}}{\rho} = \nu \Delta \tilde{\varphi} = 0,$$

これらを代入すると(3.2.2)が得られ、かつ

$$\left.\begin{aligned} \tilde{X} &= -\tilde{p}\frac{\partial x}{\partial n} - 2\mu \frac{\partial \tilde{v}}{\partial s} \\ \tilde{Y} &= -\tilde{p}\frac{\partial y}{\partial n} + 2\mu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial s} \end{aligned}\right\} \cdots (3.2.5)$$

でこの値を使って(3.2.3)が成立つ。

(3.2.5)と(3.1.17)を(3.2.3)に代入すると

$$-\int_C \left[p\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n} - \mu\zeta\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial s}\right] ds$$

$$= -\int_C \tilde{p}\left(u\frac{\partial x}{\partial n} + v\frac{\partial y}{\partial n}\right) ds + \rho\int_C (u\tilde{u} + v\tilde{v})\frac{\partial x}{\partial n}\, ds, \qquad (3.2.6)$$

あるいは(3.2.4)により

$$\int_C \left(p\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n} - \mu\zeta\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial s}\right) ds = \rho\int_C (i\omega - \frac{\partial}{\partial x})\tilde{\varphi}\left(u\frac{\partial x}{\partial n} + v\frac{\partial y}{\partial n}\right) ds$$

$$+ \rho\int_C (u\tilde{u} + v\tilde{v})\frac{\partial x}{\partial n}\, ds, \qquad (3.2.6)$$

さて (3.2.3) に (3.1.17) を代入し，流れ関数を使うと

$$\tilde u X + \tilde v Y = -p\left(\tilde u \frac{\partial x}{\partial n} + \tilde v \frac{\partial y}{\partial n}\right) + \mu\zeta\left(\tilde u \frac{\partial x}{\partial s} + \tilde v \frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

$$\psi_y \quad \psi_s \quad -\psi_x \qquad -2\mu\left(\tilde u \frac{\partial v}{\partial s} - \tilde v \frac{\partial u}{\partial s}\right)$$

$$= -p\frac{\partial\tilde\psi}{\partial s} - \mu\zeta\frac{\partial\tilde\psi}{\partial n} - 2\mu\left(\tilde u \frac{\partial v}{\partial s} - \tilde v \frac{\partial u}{\partial s}\right)$$

$$u\tilde X + v\tilde Y = -\tilde p\frac{\partial\psi}{\partial s} - \mu\tilde\zeta\frac{\partial\psi}{\partial n} - 2\mu\left(u \frac{\partial \tilde v}{\partial s} - v \frac{\partial \tilde u}{\partial s}\right)$$

であるから，共役的函数が一価であるには

$$\int_C\left(p\frac{\partial\tilde\psi}{\partial s} + \mu\zeta\frac{\partial\tilde\psi}{\partial n}\right)ds = \int_C\left(\tilde p\frac{\partial\psi}{\partial s} + \mu\tilde\zeta\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)ds - \rho\int_C \nabla\psi\nabla\tilde\psi\frac{\partial x}{\partial n}\,ds, \quad (3.2.7)$$

あるいは

$$\int_C\left(\mu\zeta\frac{\partial\tilde\psi}{\partial n} - \tilde\psi\frac{\partial p}{\partial s}\right)ds = \int_C\left(\mu\tilde\zeta\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\tilde p}{\partial s}\right)ds - \rho\int_C \nabla\psi\nabla\tilde\psi\frac{\partial x}{\partial n}\,ds. \quad (3.2.8)$$

3.3 基本特異性

まず

$$\Phi = K_0(k'R)\,e^{k(x'-x)}, \quad k' = \sqrt{k^2 + 2i\omega k}, \quad k = \frac{1}{2\nu}, \qquad (3.3.1)$$

を導入すると

$$\left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x'} - \nu\Delta\right)\Phi = 0, \quad \cdots\cdots \quad (3.3.1')$$

この関数からさらに次の関数を定義しよう。

$$\Psi = e^{-i\omega x'}\int_{-\infty}^{x'} \Phi\, e^{i\omega x'}\,dx', \quad \cdots \quad (3.3.2)$$

つまり

$$\left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x'}\right)\Psi = \Phi, \qquad (3.3.2')$$

同様にして

$$\left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x'}\right)S = \log R, \quad \cdots \quad (3.3.3)$$

となる関数

$$S = e^{-i\omega x'}\int_{-\infty}^{x'} \log R\; e^{i\omega x'}\,dx', \quad \cdots \quad (3.3.3')$$

を定義しよう。尚この関数は improper だが微係数は proper である。

これらの関数によって (3.1.11), (3.1.11') と対応させると、

$\tilde{\psi}_P = -\dfrac{S}{2\pi}$, $\tilde{\psi}_F = -\dfrac{\Psi}{2\pi}$, $\tilde{\zeta} = -\dfrac{\Phi}{2\pi}$, $\zeta = -\dfrac{\log R}{2\pi}$ とおけば

核関数が出来、

$$\oint_\varepsilon \frac{\partial\tilde{\zeta}}{\partial n}\,ds = -1 = -\oint_\varepsilon \frac{\partial\zeta}{\partial n}\,ds, \quad \cdots \quad (3.3.4)$$

となっている。

1) Ψの特性

i) 原点近傍

$$\Psi = K_0(k'R)\,e^{k(x'-x)} \xrightarrow[R\to 0]{} -\log\left(\frac{\gamma k'R}{2}\right) \quad \cdots (3.3.5)$$

$$\therefore\ \Psi \xrightarrow[R\to 0]{} \mathrm{Const} - e^{-i\omega x'}\int_{-\infty}^{x'} \log R\, e^{i\omega x'}\,dx'$$

$$= \mathrm{Const} - S, \quad \cdots\cdots (3.3.6)$$

となるが S の性質は後出.

ii) $R \gg 1$ 又は レイノルズ数が大きい時

$$K_0(k'R) \fallingdotseq \sqrt{\frac{\pi}{2k'R}}\,e^{-kR-i\omega R}, \quad k' \fallingdotseq k+i\omega, \quad (3.3.7)$$

となるから

$$\Psi \fallingdotseq \begin{cases} e^{-i\omega(x'-x)}\sqrt{\dfrac{\pi}{2k}}\displaystyle\int^{x'-x} \frac{e^{-k'(R-\xi)}\,d\xi}{\sqrt{R}}, & R=\sqrt{\xi^2+(y-y')^2}, \ \text{for } x'<x \\ 0 \quad \text{for } x'>x, \end{cases} \quad (3.3.8)$$

また Ψ は $y \fallingdotseq y'$ の近くでだけ有限な値をとるので

$$\Psi \fallingdotseq e^{-i\omega(x'-x)}\sqrt{\frac{\pi}{2k}}\int_0^{x'-x} \frac{e^{-\frac{k'}{2\xi}(y-y')^2}\,d\xi}{\sqrt{\xi}}, \quad \cdots (3.3.8')$$

としてもよい。

従って、

$$\Psi \xrightarrow[\substack{y=y' \\ (x=0)}]{} e^{-i\omega x'}\sqrt{\frac{\pi}{2k}}\int_0^{x'} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = \sqrt{\frac{2\pi x'}{k}}\,e^{-i\omega x'}, \quad (3.3.9)$$

ここに

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} \fallingdotseq + e^{-i\omega x'} \sqrt{\frac{\pi k'}{2}}\, y' \int_0^{x'} e^{-\frac{k'}{2\xi} y'^2} \frac{d\xi}{\xi^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{k'}{2\xi} y'^2 = \eta^2$$

$$\sqrt{\frac{k'}{2\xi}}\, y' = \eta.$$

$$-\frac{\sqrt{k'}}{2\sqrt{2}} \frac{y' d\xi}{\xi^{\frac{3}{2}}} = d\eta.$$

$$\therefore \left.\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right| \fallingdotseq 2\sqrt{\pi}\, e^{-i\omega x'} \int_{\eta_0}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta, \quad \eta_0 = \sqrt{\frac{k'}{2x'}}\, y', \qquad (3.3.10)$$

$$\xrightarrow[\eta_0 \to 0]{} \pi e^{-i\omega x'} \operatorname{sgn}(y'),$$

2) S の性質

$$\frac{\partial S}{\partial x} = e^{-i\omega x'} \int_{-\infty}^{x'} \frac{x-x'}{R^2} e^{i\omega x'} dx' = e^{i\omega(x-x')} \int_{x-x'}^{\infty} \frac{\xi e^{-i\omega\xi} d\xi}{\xi^2 + (y-y')^2},$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = e^{-i\omega x'} \int_{-\infty}^{x'} \frac{y-y'}{R^2} e^{i\omega x'} dx' = e^{i\omega(x-x')} \int_{x-x'}^{\infty} \frac{(y-y') e^{-i\omega\xi}}{\xi^2 + (y-y')^2} d\xi. \qquad (3.3.11)$$

となるが以下, $x=y=0$ として考えても一般性を損わないので
そうする事にして, 次の積分を導入すると

$$I_1 = e^{-i\omega x'} \int_{-x'}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\xi} d\xi}{\xi + iy'} = e^{-\omega y' - i\omega x'} \int_{-i\omega(x'-iy')}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

$$= e^{-\omega(y'+ix')} E_1\{-i\omega(x'-iy')\},$$

$$I_2 = e^{-i\omega x'} \int_{-x'}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\xi}}{\xi - iy'} d\xi = e^{\omega y' - i\omega x'} \int_{-i\omega(x'+iy')}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

$$= e^{\omega(y'-ix')} E_1\{-i\omega(x'+iy')\}, \qquad (3.3.12)$$

とすると

$$\left.\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{2}(I_1 + I_2) \\ S_y &= \frac{1}{2i}(I_1 - I_2) \end{aligned}\right\} \cdots (3 \cdot 3 \cdot 13)$$

で

$$E_1(z) \underset{z \to 0}{\fallingdotseq} -\gamma - \lg z ,$$

であるから

$$\left.\begin{aligned} S_x &\xrightarrow[R \to 0]{} -\gamma - \lg(\omega R) \overset{?}{-} \frac{\pi}{2} i \\ S_y &\xrightarrow[R \to 0]{} \Theta , \quad \tan\Theta = \frac{y'}{x'} , \end{aligned}\right\} (3 \cdot 3 \cdot 14)$$

次に $R \to \infty$ では、

i) $x - x' \gg 1$, $x'' \ll -1 + x$ では、(3·3·11)を直接部分積分して

$$S_x \fallingdotseq \frac{x - x'}{i\omega R^2} , \quad S_y = \frac{y - y'}{i\omega R^2} , \qquad (3 \cdot 3 \cdot 15)$$

ii) $x - x' \ll -1$, $x' \gg 1 + x$ では、上式の I₂の他に項が出て、結局

$$\left.\begin{aligned} S_x &\fallingdotseq \frac{-x'}{i\omega R^2} - \pi i\, e^{-\omega|y'| - i\omega x'} , \\ S_y &\fallingdotseq \frac{-y'}{i\omega R^2} - \pi\, e^{-\omega|y'| - i\omega x'} \,\mathrm{sgn}(y') , \end{aligned}\right\} (3 \cdot 3 \cdot 16)$$

となる。

3.4 速度場の表現

(3.2.8) においてψ̃に前節の核を導入すると

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\psi} = \frac{1}{2\pi}(S+\Phi),\quad \tilde{\zeta} = -\frac{\Phi}{2\pi},\quad \tilde{p} = -\frac{1}{2\pi}\log R,\\ &\frac{\partial \tilde{p}}{\partial s} = -\frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial n} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n}\log R,\end{aligned}\right\}\quad (3.4.1)$$

とおくと

$$\psi(Q) = \int_C \Big[\mu\zeta\frac{\partial\tilde{\psi}(P,Q)}{\partial n} - \tilde{\psi}\frac{\partial p}{\partial s} + \psi\frac{\partial\tilde{p}}{\partial s} - \mu\tilde{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial n} + \rho\nabla\psi\nabla\tilde{\psi}\frac{\partial x}{\partial n}\Big]ds, \quad (3.4.2)$$

をうる。

ついで C の内部領域 D で正則な ψ_i を考え

$$\psi = \psi_i,\quad \frac{\partial\psi_i}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial n} \quad \text{on } C, \quad (3.4.3)$$

とすれば (3.2.8) より Q を D 内の点とすれば上と同様

$$0 = \int_C \Big[\mu\zeta_i\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial n} - \tilde{\psi}\frac{\partial p_i}{\partial s} + \psi_i\frac{\partial\tilde{p}}{\partial s} - \mu\frac{\partial\psi_i}{\partial n}\tilde{\zeta} + \rho\nabla\psi_i\nabla\tilde{\psi}\frac{\partial x}{\partial n}\Big]ds, \quad (3.4.5)$$

をうるから、辺々相引くと

$$\psi(Q) = \int_C \Big[\mu(\zeta-\zeta_i)\frac{\partial\tilde{\psi}(P,Q)}{\partial n} - \tilde{\psi}\frac{\partial}{\partial s}(p-p_i)\Big]ds, \quad (3.4.4)$$

をうる。

ψ_i については (3.1.14) より、前後、左右ゆれについては

$$\left.\begin{aligned}&\psi_i = i\omega y \text{ ならば } \zeta_i = 0,\quad \frac{1}{\rho}p_i = -i\omega x,\\ &\psi_i = -i\omega x \text{ ならば } \zeta_i = 0,\quad \frac{1}{\rho}p_i = -i\omega y,\end{aligned}\right\}\quad (3.4.5)$$

のようになるが回転振動については内部問題を解いて p_i, ζ_i を決めねばならない。

3.5 遠場の表現

§3.3 により遠場では

$$\left.\begin{array}{l}\Psi(P,Q) \xrightarrow[Q\to\infty]{} \frac{1}{2\pi}S \doteqdot \frac{1}{2\pi i\omega}\log R,\\ \zeta^2 \longrightarrow 0\end{array}\right\}\ \text{伴流の外で}, \quad (3.5.1)$$

(3.4.2) に代入すると

$$\psi(Q) \doteqdot \psi_P = \frac{1}{2\pi}\int_C \left[\mu\zeta\frac{\partial S}{\partial n} + p\frac{\partial S}{\partial s} - \psi\frac{\partial \log R}{\partial n} + p\nabla\psi\nabla S\frac{\partial x}{\partial n}\right]ds$$

$$\doteqdot A\frac{\partial}{\partial x}\log R + B\frac{\partial}{\partial y}\log R, \quad (3.5.2)$$

$$\left.\begin{array}{l}A = \frac{1}{2\pi i\omega}\int_C \left[\mu\zeta\frac{\partial x}{\partial n} + p\frac{\partial x}{\partial s} - i\omega\psi\frac{\partial x}{\partial n} + p\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}\right]ds,\\ B = \frac{1}{2\pi i\omega}\int_C \left[\mu\zeta\frac{\partial y}{\partial n} + p\frac{\partial y}{\partial s} - i\omega\psi\frac{\partial y}{\partial n} + p\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}\right]ds,\end{array}\right\} (3.5.3)$$

となって無限遠方では 2重吹出しとなる。

境界力は (1.1.10) で与えられる。

境界条件は物体の前後ゆれ，左右ゆれ，ヨーイングの振幅を夫々 ξ_1, ξ_2, ξ_3 とすると，

$$
\left.
\begin{aligned}
&u = i\omega\xi_1, \quad v = 0 && \text{for surge} \\
&u = 0, \quad v = i\omega\xi_2 && \text{〃 sway} \\
&u = -i\omega y\xi_3, \quad v = i\omega x\xi_3 && \text{〃 yawing}
\end{aligned}
\right\} \quad (3.1.7)
$$

これ故前後，左右ゆれでは境界力について (1.1.12) が成立つ。

ヨーイングについては，

$$
\left.
\begin{aligned}
X &= -p\frac{\partial x}{\partial n} - \mu\zeta\frac{\partial y}{\partial n} + 2\mu i\omega\xi_3\frac{\partial y}{\partial n} \\
Y &= -p\frac{\partial y}{\partial n} + \mu\zeta\frac{\partial x}{\partial n} - 2\mu i\omega\xi_3\frac{\partial x}{\partial n}
\end{aligned}
\right\} \quad (3.1.8)
$$

§1.2 と同様 $\hat{u}, \hat{v}$ として ポテンシャル流れを導入して見よう。

$$\hat{u} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x}, \quad \hat{v} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y}, \qquad (3.2.4)$$

(1.2.5) からは その時 同様

$$\Xi = 0, \quad \cdots\cdots \qquad (3.2.5)$$

それ故、(3.2.1) より

$$\int_C (\hat{u} X + \hat{v} Y)\, ds = \iint_D \left[\rho i\omega (u\hat{u} + v\hat{v}) + \hat{u} u_x + \hat{v} v_x \right] dx\,dy$$

(3.2.4) より

$$\iint_D (u\hat{u} + v\hat{v})\, dx\,dy = \iint_D \left(u \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + v \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$= \int_C \left[\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} u \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} v \frac{\partial y}{\partial n} \right] ds - \iint_D \hat{\phi} \underbrace{(u_x + v_y)}_{=0} dx\,dy$$

$$= \int_C \left(u\hat{u} \frac{\partial x}{\partial n} + v\hat{v} \frac{\partial y}{\partial n} \right) ds = \int_C u \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n}\, ds.$$

$$\iint_D (\hat{u} u_x + \hat{v} v_x)\, dx\,dy = \iint_D (\hat{v} v_x - \hat{u} v_y)\, dx\,dy$$

$$= \int_C \left(\hat{v} v \frac{\partial x}{\partial n} + v\hat{u} \frac{\partial y}{\partial n} \right) ds + \iint_D v \overbrace{(\hat{u}_y - \hat{v}_x)}^{0} dx\,dy$$

$$= \mp \int_C v \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial s}\, ds$$

$$\therefore \int_C (\hat{u} X + \hat{v} Y)\, ds = \int_C \left[u \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} + v \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial s} \right] ds, \quad \cdots \quad (3.2.6)$$

3.3 基本特異性

今点Q(≡x', y')に単位力が加わる時の解を考えよう。

(1.3.1)と同様にまず

$$\Phi(P,Q) = K_0(k'R)\,e^{k(x-x')},\quad k'=\sqrt{k^2+2i\omega k},\quad k=\frac{1}{2\nu},\qquad (3.3.1)$$

とおくと

$$\left(i\omega+\frac{\partial}{\partial x}-\nu\nabla^2\right)\Phi=0, \quad ---- \qquad (3.3.2)$$

を満たしている故

$$\left.\begin{aligned}
(\text{速度})\quad 2\pi U^{(1)}(P,Q) &= -\frac{\partial}{\partial x}\log R+\cancel{2}k\,\Phi(P,Q)-\frac{\partial}{\partial x}\Phi\\
2\pi V^{(1)}(P,Q) = 2\pi U^{(2)}(P,Q) &= -\frac{\partial}{\partial y}\log R-\frac{\partial \Phi}{\partial y},\\
2\pi V^{(2)}(P,Q) &= \frac{\partial}{\partial x}\log R+\frac{\partial}{\partial x}\Phi(P,Q).
\end{aligned}\right\}\ (3.3.3)$$

$$\left.\begin{aligned}
(\text{圧力})\quad 2\pi P^{(1)}(P,Q) &= \left(i\omega+\frac{\partial}{\partial x}\right)\log R.\\
2\pi P^{(2)}(P,Q) &= \left(i\omega+\frac{\partial}{\partial x}\right)H,\\
\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\log R,&\quad \frac{\partial H}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\log R
\end{aligned}\right\}\ (3.3.4)$$

$$\left.\begin{aligned}
(\text{渦度})\quad 2\pi Z^{(1)} &= \cancel{2}k\frac{\partial}{\partial y}\Phi(P,Q)\\
2\pi Z^{(2)} &= \nabla^2\Phi = \frac{1}{\nu}\left(i\omega+\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi
\end{aligned}\right\}\ (3.3.5)$$

とおけば

$$\left.\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\oint X^{(1)}ds &= \lim_{\varepsilon\to 0}\oint Y^{(2)}ds = 1,\\
\lim_{\varepsilon\to 0}\oint X^{(2)}ds &= \lim_{\varepsilon\to 0}\oint Y^{(1)}ds = 0
\end{aligned}\right\}\ (3.3.6)$$

P→Q の時 $v^{(P)}, v^{(Q)}$ の特異性は定常問題と全く同じであるので (3.3.6) が成立つ。

レイノルズ数が充分大きい時は (2.3.1) は

$$\Phi \doteqdot \sqrt{\frac{\pi}{2k'R}}\, e^{-[k'R - k(x-x')]} , \quad \cdots$$

であるが
$$k' \doteqdot k\left(1+\frac{i\omega}{k}\right) \doteqdot k + i\omega \doteqdot k$$

であるから
$$\Phi \doteqdot \sqrt{\frac{\pi}{2kR}}\, e^{-k(R-x) - i\omega R} , \quad (x'=0 として) \quad (3.3.7)$$

となり，(1.5.1) と較べて $e^{-i\omega R}$ なる因子が加わっただけの差である。

また $R-x \doteqdot \frac{y^2}{2x}$ であるから上式はまた

$$\Phi(P,0) \doteqdot \sqrt{\frac{\pi}{2kx}}\, e^{-\frac{ky^2}{2x} - i\omega x} , \quad \cdots\cdots (3.3.8)$$

とも書ける。

これに時間因子 $e^{i\omega t}$ を考えると，それは単位速度で x の正方向に流れてゆく事を示し，その拡散の仕方は定常流れと全く等しい事を示す。

以下略

3.4 速度場の表現

前節で見たようにこの場合の核関数の特異性は定常問題と全く同じであり，また可逆性も同じなので速度場の表現も同じになり §1.3 と同様前後，左右ゆれに対しては (1.3.10) ~ (1.3.12) と同じく前節の核により

$$u(Q) = -\int_C \left[X U^{(1)}(Q,P) + Y V^{(1)}(Q,P) \right] ds,$$

$$v(Q) = -\int_C \left[X U^{(2)} + Y V^{(2)} \right] ds, \qquad (3.4.1)$$

$$p(Q) = -\int_C \left[X P^{(1)}(Q,p) + Y P^{(2)}(Q,p) \right] ds, \qquad (3.4.2)$$

$$\zeta(Q) = -\int_C \left[X Z^{(1)}(Q,p) + Y Z^{(2)}(Q,p) \right] ds, \qquad (3.4.3)$$

となる。（なおヨーイングについてはもう一つ項が残ると考えられるので隔壁の為以下では考えない）

そしてこれをポテンシャルをもつ部分と粘性による部分に分けると

$$u = u_p + u_F$$
$$v = v_p + v_F \qquad (3.4.4)$$

u_p, v_p については速度ポテンシャルが存在して．

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(Q) = u_p(Q), \quad \frac{\partial}{\partial y}\Phi(Q) = v_p(Q), \qquad (3.4.5)$$

$$\Phi(Q) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \left[X \log R - Y \Theta \right] ds. \qquad (3.4.6)$$

この速度ポテンシャルの加速度ポテンシャルを

$$\phi_A(Q) = \left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x'}\right)\phi(Q), \quad \cdots (3.4.7)$$

のように導入すると、前節の $P^{(1)}, P^{(2)}$ を参照して (3.4.2) より

$$p(Q) = \phi_A(Q), \quad \cdots (3.4.8)$$

つまり圧力は速度場のポテンシャル部分の加速度ポテンシャルに等しい。

粘性部分は (1.3.15) と同様で、前節の Φ により

$$\left.\begin{aligned} u_F &= \frac{1}{2\pi}\int_C \left[X\left(-2k\Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + Y\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right] ds, \\ v_F &= \frac{1}{2\pi}\int_C \left[X\frac{\partial \Phi}{\partial y} - Y\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right] ds, \end{aligned}\right\} (3.4.9)$$

従って (1.3.19) は成立たない。

3.5 遠場の表現.

伴流の外側では速度ポテンシャルが存在して

(3.4.6)で表わされるが

$$\int_C X\, ds = M, \qquad \int_C Y\, ds = \Gamma, \qquad \cdots (3.5.1)$$

とすると遠場では

$$\phi(Q) = -\frac{M}{2\pi}\log r' + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta', \qquad \cdot (3.5.2)$$

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}, \quad \theta' = \tan^{-1}\frac{y'}{x'}$$

伴流の内側ではこの ϕ の他に u_F, v_F があって (3.4.9)に

(3.3.5) より

$$u_F \fallingdotseq \frac{M}{2\pi}\left(-2k\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial x'}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial y'}$$

$$= \frac{M}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2kr'}}\left(-2k + \frac{ky'^2}{2x'^2} - i\omega\right)e^{-\frac{ky'^2}{2x'} - i\omega x'}$$

$$+ \frac{\Gamma}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2kr'}}\left(-\frac{ky'}{x'}\right)e^{-\frac{k}{2x'}y'^2 - i\omega x'}$$

(3.5.3) ?

$$v_F \fallingdotseq \frac{M}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2kr'}}\left(-\frac{ky'}{x'}\right)e^{-\frac{k}{2x'}y'^2 - i\omega x'}$$

$$- \frac{\Gamma}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2kr'}}\left(\frac{ky'^2}{2x'^2} - i\omega\right)e^{-\frac{k}{2x'}y'^2 - i\omega x'}$$

3.6 平板の解

レイノルズ数が充分大きい時の前縁効果を考えよう。

(3.3.8)の近似値より，(1.8.1)と同様な境界積分方程式は

$$1 = \sqrt{\frac{2k}{\pi}}\left(1+\frac{i\omega}{2k}\right)\int_0^{x'}\frac{X(x)}{\sqrt{x'-x}}e^{i\omega(x-x')}dx\,,$$

$$\fallingdotseq \sqrt{\frac{2k}{\pi}}\int_0^{x'}\frac{X(x)}{\sqrt{x'-x}}e^{i\omega(x-x')}dx\,, \quad \cdots (3.6.1)$$

これはアーベルの積分方程式でその解は

$$X(x)e^{i\omega x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{e^{i\omega x'}dx'}{\sqrt{x-x'}}\,, \quad \cdots (3.6.2)$$

ここに

$$x' = x(1-u^2) \qquad \omega x u^2 = \frac{\pi}{2}t^2 \qquad u = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega x}}\,t$$

$$\int_0^x\frac{e^{i\omega x'}dx'}{\sqrt{x-x'}} = 2\sqrt{x}\,e^{i\omega x}\int_0^1 e^{-i\omega x u^2}du$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}e^{i\omega x}\int_0^{\sqrt{\frac{2\omega x}{\pi}}}e^{-\frac{\pi}{2}it^2}dt = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}e^{i\omega x}\left[C\left(\sqrt{\frac{2\omega x}{\pi}}\right) - iS\left(\sqrt{\frac{2\omega x}{\pi}}\right)\right], \quad \cdots (3.6.3)$$

ここにC，Sはフレネル積分である。

それ故

$$\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{e^{i\omega x'}}{\sqrt{x-x'}}dx' = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2\pi\omega}\,e^{i\omega x}(C-iS)\,,$$

$$\therefore\ X(x) = \frac{e^{-i\omega x}}{\sqrt{2\pi k x}} + \sqrt{\frac{\omega}{k}}\left[C\left(\sqrt{\frac{2\omega x}{\pi}}\right) - iS\left(\sqrt{\frac{2\omega x}{\pi}}\right)\right], \quad (3.6.4)$$

なお $x\to\infty$ のとき $C \fallingdotseq S \fallingdotseq \frac{1}{2}$ である。

このようにして第1項は定常解に $e^{-i\omega x}$ がかかっているだけで容易に予想しうる所であるが，実際には第2項があらわれて

これは $x=0$ で 0 x の大きい所で x に拘わらず一定値となる。

両者の振巾は $x=\frac{1}{\pi\omega}$ の所で等しくなるから その後方では 第2項が主部となる。

$C\left(\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\right)$

また
$$M = 2\int_0^1 X\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega}}\left[\left(1+\frac{i}{2}+\omega\right)(C-iS) - i\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}}\,e^{i\omega}\right], \quad (3.6.5)$$

なお 第1項の寄与は振動部分のみである。

それ故 ω が大きくなると $X(x)$ の内 (3.6.4) の第2項の方が主部となると考えられる。

次に左右動については (3.5.3) 等から考えて v_F は u_F よりオーダーが小さいので v_F について境界条件を指定するのは不当であろう。

そうすると v_P について境界条件を指定する事になるが これは粘性の無い場合の振動翼理論そのものである。

振動翼理論によって圧力 p (加速度ポテンシャル)(今は Y) は 求められるが M (今は X) は未定である。

この M は $u_F=0$ の条件から定められるだろう。

つまりこれがクッタの流出条件と言う事になる。

3.7 エネルギー定理

物体 C と遠方の検査面 L で囲まれた領域 D' で単位時間に粘性によって失われるエネルギーは

$$E^* = \mu \iint_{D'} \left[u_x \bar{u}_x + v_y \bar{v}_y + \frac{1}{2}(u_y + v_x)(\bar{u}_y + \bar{v}_x) \right] dx\,dy, \quad (3.7.1)$$

ここに上棒は複素共役値を示すものとする。

§3.2 と同様変形して (3.2.1) に対応する式は

$$E^* = -\frac{\rho}{2} \iint_{D} \left[i\omega(u\bar{u} + v\bar{v}) + \bar{u} u_x + \bar{v} v_x \right] dx\,dy$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{C-L} (\bar{u} X + \bar{v} Y)\, ds, \quad (3.7.2)$$

同様にして

$$E^* = -\frac{\rho}{2} \iint_{D'} \left[-i\omega(u\bar{u} + v\bar{v}) + u\bar{u}_x + v\bar{v}_x \right] dx\,dy$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{C-L} (u\bar{X} + v\bar{Y})\, ds, \quad (3.7.3)$$

2式を加え合せて、2重積分を一部積分すると

$$2E^* = +\frac{\rho}{2} \int_{C-L} (u\bar{u} + v\bar{v}) \frac{\partial x}{\partial n}\, ds$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{C-L} (u\bar{X} + v\bar{Y} + \bar{u}X + \bar{v}Y)\, ds, \quad (3.7.4)$$

L 上で $X = Y = 0$,　C 上で $u = 1, v = 0$ 又は $u = 0, v = 1$ ならば

$$E^* = \frac{1}{4} \int_{C} (u\bar{X} + v\bar{Y} + \bar{u}X + \bar{v}Y)\, ds - \frac{\rho}{4} \int_{L} (u\bar{u} + v\bar{v}) \frac{\partial x}{\partial n}\, ds, \quad (3.7.5)$$

つまり領域内での消失エネルギーは物体のなす仕事から検査面から出て行く運動エネルギーを差引いたものである。

所で無限遠方の漸近展開はポテンシャル分は(3.5.2)で粘性分は(3.5.3)のようになるがどちらでも(3.7.5)右辺第2項は0になる。

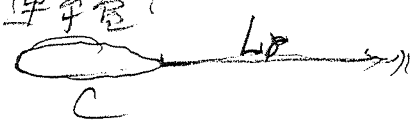
それ故(3.7.5)は

$$E^{*} = \frac{1}{4}\int_C \left(u\bar{X} + v\bar{Y} + \bar{u}X + \bar{v}Y\right) ds, \qquad (3.7.6)$$

つまり物体のなす仕事はすべて領域内で粘性によって失われる。

となるがこれは振動翼の時には明らかに誤りである。

その理由は速度のポテンシャル分が図のL_wに沿って不連続であるからそれを考慮しなければならない。



その為には(3.7.6)の積分をCとさらにL_wの上,下面にとらねばならない。

なおこのようにして少くとも前後ゆれでは抵抗成分は出て来ない。

抵抗成分はこれらの速度の2次の量の内の定常成分が一様流れと干渉してあらわれる事になると思われる。

4. 安定理論

従来の流れの安定理論では微少な
$f(y)e^{i(\alpha x-\beta t)}$ の型の攪乱を想定し，渦度輸送
方程式から高次の微少量を無視して準線型の
Orr-Sommerfeld の微分方程式から $f(y)$ をといて
固有関数を求めその解の固有値 β の虚部の正負に
よって安定性を判別している。

安定，不安定の限界は勿論 β の虚部が 0 つまり
周期的固有関数が存在する所である。
それ故安定限界を見つける別の方法として，与えられた
周波数に対して固有関数（物体表面上で $u=v=0$
で無限遠で正則）があるかないかによって判定する
事が出来ると考えられる。

前節によって微小な(線型的)周期的攪乱の型が得られたので
この後者の方法の固有値方程式を書き下す事が
出来る。

4.1 運動方程式

ナビアーストークスの運動方程式と連続の式は
(単位密度の流れで u, v は撹乱速度とする)

$$u_t + u_x + uu_x + vu_y = -\frac{p_x}{\rho} + \nu\nabla^2 u$$

$$v_t + v_x + uv_x + vv_y = -\frac{p_y}{\rho} + \nu\nabla^2 v \qquad \cdots (4.1.1)$$

$$u_x + v_y = 0 \ , \qquad \cdots (4.1.2)$$

今 $\quad u = \bar{u} + u' \ , \ v = \bar{v} + v' \ , \qquad \cdots (4.1.3)$

とおき $\bar{u}, \bar{v}$ は平均速度とし

$$u' = u'_c \cos\omega t - u'_s \sin\omega t = Re\{u' e^{i\omega t}\}$$

$$v' = v'_c \cos\omega t - v'_s \sin\omega t = Re\{v' e^{i\omega t}\} \qquad (4.1.4)$$

として u', v' は微小であるとしその自乗のオーダーを無視出来るとしよう。

そうすると (4.1.1) は定常部分については

$$\bar{u}_x + \bar{u}\bar{u}_x + \bar{v}\bar{u}_y = -\frac{\bar{p}_x}{\rho} + \nu\nabla^2\bar{u}$$

$$\bar{v}_x + \bar{u}\bar{v}_x + \bar{v}\bar{v}_y = -\frac{\bar{p}_y}{\rho} + \nu\nabla^2\bar{v} \qquad (4.1.5)$$

$$\bar{u}_x + \bar{v}_y = 0$$

でこれは §2 で取扱った方程式であり、今はこの解は与えられたものとする。次に u', v' については

$$u'_t + u'_x + \frac{p'_x}{\rho} - \nu\nabla^2 u' = -\left[\bar{u}u'_x + \bar{v}u'_y + u'\bar{u}_x + v'\bar{u}_y\right],$$

$$v'_t + v'_x + \frac{p'_y}{\rho} - \nu\nabla^2 v' = -\left[\bar{u}v'_x + \bar{v}v'_y + u'\bar{v}_x + v'\bar{v}_y\right], \qquad (4.1.6)$$

$$u'_x + v'_y = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\nabla^2 p' = -2\left[\bar{u}\,u'_{xx} - \bar{v}\,v'_{yy} + u'\bar{u}_{xx} - v'\bar{v}_{yy}\right], \quad (4.1.7)$$

$\zeta' = v'_x - u'_y$，として

$$\zeta'_t + \zeta'_x - \nu\nabla^2\zeta' = -\left[\bar{u}\,\zeta'_x + \bar{v}\,\zeta'_y + u'\bar{\zeta}_x + v'\bar{\zeta}_y\right], \quad (4.1.8)$$

これは準線型方程式であるから線型の場合に準じて核関数をもとめれば前節のような表現をうる事が出来る。

しかしそれらの核関数は一方で$(\bar{u}, \bar{v})$の関数でもあり一般に求めるのは不便なので前節の核関数を使う事にし，これらを(3.1.3)の非斉次方程式とみなして表現する事にする。

境界条件は次の斉次条件である。

$$u = v = 0 \quad \text{on } C \quad (4.1.9)$$

なお以下では(4.1.4)の周期運動のみを考えるので

$$u_t \Rightarrow \mathrm{Re}\left[i\omega u e^{i\omega t}\right],\quad v_t = \mathrm{Re}\left[i\omega v e^{i\omega t}\right], \quad (4.1.10)$$

とし u, v は複素数と考える。

そうすると (4.1.6) は $p+(1)$ をとって

$$\left.\begin{aligned} i\omega u + u_x + \frac{p_x}{\rho} - \nu\nabla^2 u &= -\left[\bar{u}u_x + \bar{v}u_y + u\bar{u}_x + v\bar{u}_y\right], \\ i\omega v + v_x + \frac{p_y}{\rho} - \nu\nabla^2 v &= -\left[\bar{u}v_x + \bar{v}v_y + u\bar{v}_x + v\bar{v}_y\right]. \end{aligned}\right\}(4.1.11)$$

逆流れでは $(\bar{u},\bar{v})$ の逆流れを $(\hat{\bar{u}},\hat{\bar{v}})$ として、

$$\left.\begin{aligned} i\omega\hat{u} - \hat{u}_x + \frac{\hat{p}_x}{\rho} - \nu\nabla^2\hat{u} &= -\left[\hat{\bar{u}}\hat{u}_x + \hat{\bar{v}}\hat{u}_y + \hat{u}\hat{\bar{u}}_x + \hat{v}\hat{\bar{u}}_y\right], \\ i\omega\hat{v} - \hat{v}_x + \frac{\hat{p}_y}{\rho} - \nu\nabla^2\hat{v} &= -\left[\hat{\bar{u}}\hat{v}_x + \hat{\bar{v}}\hat{v}_y + \hat{u}\hat{\bar{v}}_x + \hat{v}\hat{\bar{v}}_y\right], \end{aligned}\right\}(4.1.12)$$

此式の右辺は次の様にかかれる

$$\left.\begin{aligned} i\omega u + u_x + \frac{p_x}{\rho} - \nu\nabla^2 u &= -\left[(u\bar{u} + v\bar{v})_x - v\bar{\zeta} - \bar{v}\zeta\right], \\ i\omega v + v_x + \frac{p_y}{\rho} - \nu\nabla^2 v &= -\left[(u\bar{u} + v\bar{v})_y + u\bar{\zeta} + \bar{u}\zeta\right], \end{aligned}\right\}(4.1.11')$$

$$\left.\begin{aligned} i\omega\hat{u} - \hat{u}_x + \frac{\hat{p}_x}{\rho} - \nu\nabla^2\hat{u} &= -\left[(\hat{u}\hat{\bar{u}} + \hat{v}\hat{\bar{v}})_x - \hat{v}\hat{\bar{\zeta}} - \hat{\bar{v}}\hat{\zeta}\right], \\ i\omega\hat{v} - \hat{v}_x + \frac{\hat{p}_y}{\rho} - \nu\nabla^2\hat{v} &= -\left[(\hat{u}\hat{\bar{u}} + \hat{v}\hat{\bar{v}})_y + \hat{u}\hat{\bar{\zeta}} + \hat{\bar{u}}\hat{\zeta}\right], \end{aligned}\right\}(4.1.12')$$

4.2 可逆定理

(1.2.1) なる積分を導入し、(1.2.2) の可逆性を頭において

(1.2.3) に (4.1.11) を代入すると、

$$E = \int_C (\hat{u} X + \hat{v} Y)\, ds - \rho \iint_D \left[i\omega (u\hat{u} + v\hat{v}) + \hat{u} u_x + \hat{v} v_x \right] dx\,dy$$

$$+ \rho \iint_D \left[\hat{u} \left\{ (u\bar{u} + v\bar{v})_x - v\hat{\zeta} - \hat{v}\zeta \right\} + \hat{v} \left\{ (u\hat{u} + v\hat{v})_y + u\hat{\zeta} + \hat{u}\zeta \right\} \right] dx\,dy \qquad (4.2.1)$$

(1.2.5) に (4.1.12') を代入すると

$$E = \int_C (u \hat{X} + v \hat{Y})\, ds - \rho \iint_D \left[i\omega (u\hat{u} + v\hat{v}) - u\hat{u}_x - v\hat{v}_x \right] dx\,dy$$

$$+ \rho \iint_D \left[u \left\{ (\hat{u}\hat{u} + \hat{v}\hat{v})_x - \hat{v}\hat{\zeta} - \hat{v}\hat{\zeta} \right\} + v \left\{ (\hat{u}\hat{u} + \hat{v}\hat{v})_y + \hat{u}\hat{\zeta} + \hat{u}\hat{\zeta} \right\} \right] dx\,dy \qquad (4.2.2)$$

両式を等置すると

$$\int_C (\hat{u} X + \hat{v} Y)\, ds = \int_C (u \hat{X} + v \hat{Y})\, ds + \rho \int_C (u\hat{u} + v\hat{v}) \frac{\partial x}{\partial n}\, ds$$

$$+ \rho \int_C \left[(\hat{u}\hat{u} + \hat{v}\hat{v}) \left(u \frac{\partial x}{\partial n} + v \frac{\partial y}{\partial n} \right) - (u\bar{u} + v\bar{v}) \left(\hat{u} \frac{\partial x}{\partial n} + \hat{v} \frac{\partial y}{\partial n} \right) \right] ds$$

$$+ \rho \iint_D \left[-u(\hat{v}\hat{\zeta} + \hat{v}\hat{\zeta}) + v(\hat{u}\hat{\zeta} + \hat{u}\hat{\zeta}) + \hat{u}(v\hat{\zeta} + v\zeta) - \hat{v}(u\hat{\zeta} + \hat{u}\zeta) \right] dx\,dy, \qquad (4.2.3)$$

$$\downarrow$$

$$(\hat{u}v - u\hat{v})(\zeta + \hat{\zeta}) + (\hat{u}v - u\hat{v})\hat{\zeta} + (\hat{u}\bar{v} - \hat{u}\hat{v})\zeta$$

$u=v=0$ on C とすると

$$\int_C (\hat{u}X+\hat{v}Y)\,ds = \rho\iint_D \Big[(\hat{u}v-u\hat{v})(\bar{\zeta}+\hat{\zeta}) + (\hat{u}v-u\hat{v})\hat{\zeta} + (\hat{u}\bar{v}-\bar{u}\hat{v})\zeta\Big]\,dx\,dy, \tag{4.2.3}$$

さらに $\hat{u}=\hat{v}=0$ とすると左辺は消える。

ここで $\hat{u}, \hat{v}$ として前節の線型解を代入すると (4.2.2)は

$$E = \int_C (u\hat{X}+v\hat{Y})\,ds - \rho\iint_D \Big[i\omega(u\hat{u}+v\hat{v}) - u\hat{u}_y - v\hat{v}_x\Big]\,dx\,dy \tag{4.2.4}$$

となるから (4.2.1)と等置すると

$$\begin{aligned}\int_C (\hat{u}X+\hat{v}Y)\,ds = {}& \int_C (u\hat{X}+v\hat{Y})\,ds + \rho\int_C (u\hat{u}+v\hat{v})\frac{\partial x}{\partial n}\,ds \\ & - \rho\oint_C (u\bar{u}+v\bar{v})\Big(\hat{u}\frac{\partial x}{\partial n}+\hat{v}\frac{\partial y}{\partial n}\Big)\,ds \\ & + \rho\iint_D \Big[\hat{u}(v\bar{\zeta}+\bar{v}\zeta) - \hat{v}(u\bar{\zeta}+\bar{u}\zeta)\Big]\,dx\,dy,\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

$u=v=0$ on C とすると

$$\int_C (\hat{u}X+\hat{v}Y)\,ds = \rho\iint_D \Big[(\hat{u}v-u\hat{v})\bar{\zeta} + (\hat{u}\bar{v}-\bar{u}\hat{v})\zeta\Big]\,dx\,dy, \tag{4.2.6}$$

4.3 速度場の表現と固有値方程式

(4.2-6) の表現において $(\bar{u},\bar{v})$ を前節の核関数に選ぶと

(4.2.1) 右辺第1項から (u,v) が出て来て (3.4.1) と同様

$$u(Q) = -\int_C [XU^{(1)}(Q,P) + YV^{(1)}]ds + \rho\iint_D [(v\bar{\zeta}+\bar{v}\zeta)U^{(1)} - (u\bar{\zeta}+\bar{u}\zeta)V^{(1)}]dxdy,$$

$$v(Q) = -\int_C [XU^{(2)} + YV^{(2)}]ds + \rho\iint_D [(v\bar{\zeta}+\bar{v}\zeta)U^{(2)} - (u\bar{\zeta}+\bar{u}\zeta)V^{(2)}]dxdy, \quad (4.3.1)$$

のような表現を得る。

境界条件 (4.1.9) の積分方程式は $Q\in C$ で

$$\int_C [XU^{(1)} + YV^{(1)}]ds = \rho\iint_D [(v\bar{\zeta}+\bar{v}\zeta)U^{(1)} - (u\bar{\zeta}+\bar{u}\zeta)V^{(1)}]dxdy,$$

$$\int_C [XU^{(2)} + YV^{(2)}]ds = \rho\iint_D [(v\bar{\zeta}+\bar{v}\zeta)U^{(2)} - (u\bar{\zeta}+\bar{u}\zeta)V^{(2)}]dxdy, \quad Q\in C \quad (4.3.2)$$

との方程式を満たす (u,v,ω) がある ω で存在するならば

つまり固有値 ω とその固有関数 (u,v) があるならば

その時の流れは中立の安定である。

Orr-Sommerfeld の方程式では固有関数の

微分方程式を作ってその固有値問題として

安定判別をしているが、この方法では積分方程式の固有値問題に帰着した訳である。

(4.3.2)を解く方法について今後検討の余地があるが近似的に解くには§2.4で試みたように(ξ,ζ)、(u,v)の近似値を代入して、両辺の積分を計算するとこれはωに対する方程式となる故、それを解いてωを求めればよい。

(4.3.2)のかわりに(4.2.6)を使う方がもっと簡単で、例えば(4.2.6)において $\bar{u}=$[illegible], $\bar{v}=0$ なる線型解を使えば

$$\int_C X\,ds = \rho\iint_D \left[(\bar{u}v-u\bar{v})\bar{\xi}+(\bar{u}v-\bar{u}\bar{v})\zeta\right]dx\,dy, \quad (4.3.3)$$

となり、$(\bar{u},\bar{v})$, $\bar{\xi}$, (u,v), ζ, X の近似値を導入すれば容易に積分出来る故、それを解いて固有値ωを求める事ができる。つまり(4.2.6)はレーリー・リッツ法の基本式となる。

いずれにしても(4.3.2)は準線型の固有値方程式であるからその解法はいろいろあるであろう。

5. 非定常非線型問題

前節では周期解の自乗成分は微少として無視した。

しかし乱流となるともはやそのような近似は許されない。

このような問題の取扱いではやはり(3.1.1)のように変換して論ずるわけであるが，困難は非線型成分にある。

さて2つの関数 $f(t), g(t)$ について

$$\left.\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-i\omega t}dt &= F(\omega)\\ \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t)e^{-i\omega t}dt &= G(\omega)\end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (5.1)$$

となるとすると

$$f(t)=\frac{T}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega,\quad g(t)=\frac{T}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \quad (5.2)$$

この時

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)g(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{T}{4\pi^2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i(\omega'+\omega''-\omega)t}dt \cdot \iint F(\omega')G(\omega'')d\omega' d\omega''$$

$$= \frac{T}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega')G(\omega-\omega')d\omega', \quad \cdots \quad (5.3)$$

5.1 運動方程式

ナビア・ストークスの運動方程式は (4.1.1) であらわされる
（無次元の式）
ものとし, それを (5.1) の意味でフーリエ変換し, 以下
簡単の為にフーリエ変換したものも同じ記号で表わすと

$$
\left.
\begin{aligned}
i\omega u + u_x + uu_x + vu_y &= -\frac{p_x}{\rho} + \nu\nabla^2 u \\
i\omega v + v_x + uv_x + vv_y &= -\frac{p_y}{\rho} + \nu\nabla^2 v
\end{aligned}
\right\} \qquad (5.1.1)
$$

$$
u_x + v_y = 0 \qquad (5.1.2)
$$

さらに自乗成分は (5.3) の形, 例えば

$$
uu_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(\omega')\,u_x(\omega-\omega')\,d\omega',
$$

の形となっている事を意味する省略記法とする。

境界条件は時間領域では $u=-1$, $v=0$ on C であるから
周波数領域では

$$
\left.
\begin{aligned}
u\Big|_C &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega t}\,dt = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{for } \omega = 0 \\ 0 & \text{for } \omega \neq 0 \end{cases} \\
v\Big|_C &= 0
\end{aligned}
\right\} \qquad (5.1.3)
$$

5.2 可逆定理

§2 の時と同様に先ず (5.1.1) の速度場と (3.1.5) の速度場について (1.2.1) の積分を作り, その可逆性 (1.2.2) を考えて見よう。

(3.2.1) を導いたのと同様にして (5.1.1) から

$$\Xi = -\rho\iint_D\Big[i\omega(u\tilde{u}+v\tilde{v}) + \tilde{u}\Big(U+\frac{u^2+v^2}{2}\Big)_x + \tilde{v}\big(U_y + uu_y + vv_y\big) + \tilde{v}\zeta - \tilde{u}v\zeta + \tilde{v}u\zeta\Big]dx\,dy + \int_C(\tilde{u}X+\tilde{v}Y)\,ds, \quad \cdots (5.2.1)$$

一方 (3.2.2) はそのまま成立つので上式と等置して

$$\int_C(\tilde{u}X+\tilde{v}Y)\,ds = \int_C(u\tilde{X}+v\tilde{Y})\,ds - \rho\iint_D \zeta\{\tilde{u}v - u\tilde{v}\}\,dx\,dy$$

$$= \rho\int_C\Big[\Big(\frac{u^2+v^2}{2}\Big)\Big(\tilde{u}\frac{\partial x}{\partial n}+\tilde{v}\frac{\partial y}{\partial n}\Big) + (u\tilde{u}+v\tilde{v})\frac{\partial x}{\partial n}\Big]ds, \quad \cdots (5.2.2)$$

特に $u=-1,\ v=0,\ \tilde{u}=1,\ \tilde{v}=0$ on C とすると

$$\int_C X\,ds = -\int_C \tilde{X}\,ds + \rho\iint_D \zeta(\tilde{u}v - u\tilde{v})\,dx\,dy, \quad (5.2.3)$$

となって (2.1.5) と同型であるが上式で $\zeta, \tilde{v}, \tilde{u}$ は前節で述べた畳み込み関数となっている点が違っている。

また上式は周波数領域での話である点も基本的に違う。

次に $\hat{u},\hat{v}$ がポテンシャルをもち

$$\hat{u}=\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial x},\quad \hat{v}=\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial y},\quad \cdots\cdots \qquad (5.21※)$$

とすると 前同様 $E=0$ となるので (5.21) より

$$\int_C(\hat{u}X+\hat{v}Y)ds = i\omega\rho\int_C\hat{\Phi}\left(u\frac{\partial X}{\partial n}+v\frac{\partial Y}{\partial n}\right)ds$$

$$+\rho\int_C\left[\left(u+\frac{u^2+v^2}{2}\right)\left(\hat{u}\frac{\partial x}{\partial n}+\hat{v}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right]ds$$

$$+\rho\iint_D\zeta\{\hat{v}(1+u)-\hat{u}v\}dxdy, \qquad (5.215)$$

再び $u=-1, v=0,\ \dfrac{\partial\hat{\Phi}}{\partial n}=\dfrac{\partial X}{\partial n}$ とおくと

$$\int_C\left[-p\overbrace{\left(\hat{u}\frac{\partial x}{\partial n}+\hat{v}\frac{\partial y}{\partial n}\right)}^{\frac{\partial X}{\partial n}}+\mu\zeta\overbrace{\left(\hat{u}\frac{\partial x}{\partial s}+\hat{v}\frac{\partial y}{\partial s}\right)}^{\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial s}}\right]ds$$

$$=i\omega\rho\int_C\hat{\Phi}\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial n}ds+\rho\iint_D\zeta\{\hat{v}(1+u)-\hat{u}v\}dxdy, \qquad (5.216)$$

特に $\omega=0$ とすると 16頁の式と同型である。

5.3 速度場の表現

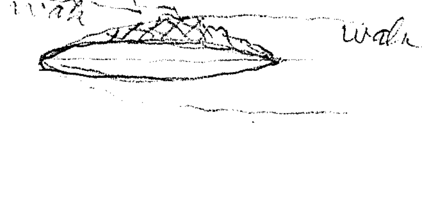
(5.2.2) は (4.2.5) と同型であるから 境界条件 (5.1.3) の下では $\underbrace{(4.3.1)}_{\text{あるいは } (2.2.1)}$ と同型の表現が出来る。

即ち、

$$
\left.
\begin{aligned}
u(Q;\omega) &= -\int_C \left[X\hat{U}^{(1)} + Y\hat{V}^{(1)}\right] ds - \rho\iint_D \left[\zeta v\hat{U}^{(1)} - \zeta u\hat{V}^{(1)}\right] dxdy, \\
v(Q;\omega) &= -\int_C \left[X\hat{U}^{(2)} + Y\hat{V}^{(2)}\right] ds - \rho\iint_D \left[\zeta v\hat{U}^{(2)} - \zeta u\hat{V}^{(2)}\right] dxdy
\end{aligned}
\right\} \quad (5.3.1)
$$

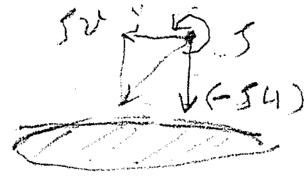
境界条件は (5.1.3) つまり $\omega \neq 0$ では斉次の境界条件であるから §4 の場合と同型であるが 今の場合 右辺第2項は 定常分と ω 成分の干渉だけでなくすべての成分との干渉項を含むので 解が不定になるとは限らない。

この境界方程式の一般的解法はかなり困難と考えられるが 高レイノルズ数では 右辺第2項の積分範囲は 自分の境界層と逆流れ $\hat{U}, \hat{V}$ の伴流に囲まれた部分に限られるので ナビア・ストークス方程式を直接解くよりは大分楽になるように思われる。



また境界層理論の場合のように平均流れのみに注目し層内速度分布に実験値を用いて解く方法も考えられる。

乱流境界層理論ではレイノルズ応力 τ_R が主役を演じているが (5.3.1) で $(\zeta u, \zeta v)$ の推定が問題である。これは $(\zeta dxdy)$ は流体粒子のサーキュレーションであるからクッタ・ジュコフスキイの定理により揚力であって図のように流体粒子が上流側に物体の方に吸い寄せられる力である。



さて G.I. Taylor の渦度交換理論によれば乱流混合領域では渦度変動は平均速度を $\bar{u}$ として

$$\zeta = l_v \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}, \quad l_v : \text{混合距離} \qquad (5.3.2)$$

また

$$\left.\begin{aligned} \zeta u \sim \zeta v &= l_v^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}, \\ \tau_R &= \frac{\rho}{2} l_v^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2, \\ \rho\zeta u \sim \rho\zeta v &= \frac{\partial \tau_R}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \qquad (5.3.3).$$

また von Karman の相似性の仮数より

$$\zeta u \sim \zeta v = \frac{l_v}{\kappa} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2 = \frac{2}{\rho\kappa} \frac{\tau_R}{l_v}, \quad \cdots (5.3.4)$$

また τ_R は一定である。

(こゝでは u は相似速度とした)

それ故 カルマンの仮説では $l_0 \propto y$, τ_R: const で

$$su\,\tilde{v}'' \propto \frac{1}{y}$$

となる（Ⅱに階数関係則，対数法則を適用しても同じ）

これを (5.3.1) 第2項に代入して (1.4.6) の近似値を入れて

積分すると対数的に無限大となって積分出来ない。

即ち (5.3.1) 第1式右辺第2項の内の更に第2項は

（第1項と同じオーダーと考えられる）

$$I = 2\rho \iint_{D/2} su\,\tilde{v}''\,dx\,dy = \rho\sqrt{\frac{R}{2\pi}} \iint_{D/2} \frac{(su)\,y\,e^{-\frac{Ry^2}{2(X'-X)}}}{(X'-X)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy \quad ,(5.3.5)$$

（$X=1$となる）

Ⅱに対数法則を適用し $l_0 = 0.4y$ とおくと (5.3.4) より

$$\rho su = 5\frac{X}{y} \quad ,（\tau_R\text{はここでは}X\text{に等しいとして}）,\ (5.3.6)$$

$$I = 5\sqrt{\frac{R}{2\pi}} \int_0^{X'} \frac{X(x')}{X'-X}\,dx' \sqrt{\frac{2}{R}} \int_0^{\infty} e^{-\eta^2}\,d\eta$$

$$= 2.5 \int_0^{X'} \frac{X(x')}{X'-X}\,dx' \quad , \quad \cdots\cdots \quad (5.3.7)$$

これは積分不可能である。

また (5.3.1) 第1式の右辺第1項 ($\sqrt{R_e}$のオーダー) に比し

オーダーが小さく無視しうる。

この事は (5.3.1) の境界積分方程式はもっと慎重に取扱うべき事を示している。

と言うのは前頁の議論は乱流混合層の話であったが

$\tilde{U}_i$, $\tilde{V}_i$ は層流底層で大きい値をとる訳であるから

2重積分項でも

層流底層の分を考えないと工合が悪いと考えられる。

いずれにしても境界層理論とはアプローチが異なる

ので解法も異なって来るであろう。

平板抵抗

No. 1

Date

$$\sigma = \frac{U}{2\nu}$$

$$D_0 = 4\rho\nu\sqrt{\frac{1}{\pi\, 2\sigma\nu}} = 4\rho\sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \qquad , \; C_f = \frac{4}{\sqrt{\pi}\,R}$$

$$X_0 = \rho\sqrt{\frac{\nu}{\pi x}}$$

$$\underline{u = -1,\; v = 0 \quad \tilde{u} = +1,\; \tilde{v} = 0}$$

$$\int_C X\,ds = \int_C \tilde{X}\,ds + \rho\iint_D \zeta\,(v\tilde{u} - u\tilde{v})\,dx\,dy \qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1.128\,\text{V}$$

$$\int_C X\,ds = D \quad , \int_C \tilde{X}\,ds = D_0.$$

$$D = D_0 + \rho\iint_D \zeta\,(v\tilde{u} - u\tilde{v})\,dx\,dy$$

$$= D_0 + 2\rho\iint_{\frac{D}{2}} \zeta\,(v\tilde{u} - u\tilde{v})\,dx\,dy. \qquad \frac{4}{\sqrt{\pi}} = 2.25\,\text{V}$$

$$D = \alpha D_0 \qquad \left(\alpha = \frac{1.328}{4/\sqrt{\pi}} = .58845\right)$$

$$\alpha = 1 + \frac{2}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\nu}}\iint_{\frac{D}{2}}$$

$$u = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\alpha\int_{\sqrt{\frac{k y^2}{2x}}}^{\infty} e^{-\eta^2}\,d\eta = -\alpha\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\sqrt{k}\,y}{2\sqrt{\nu x}}\right) \qquad \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{y}{\sqrt{2\nu x}} = \frac{y}{2\sqrt{\nu x}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2x}}\,y = -\frac{\sqrt{k}\,y}{2\sqrt{2}\,x^{\frac{3}{2}}}$$

$$\zeta = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\alpha\sqrt{\frac{k}{2x}}\;e^{-\frac{k y^2}{2x}} = \alpha\sqrt{\frac{1}{\pi x\nu}}\;e^{-\frac{k y^2}{2x}} \qquad \frac{k}{2\nu\pi x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\alpha\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{2}\,x^{\frac{3}{2}}}\,y\,e^{(\;)} = -\frac{\alpha\,y}{2\sqrt{\pi\nu}\;x^{\frac{3}{2}}}\,e^{-\frac{k y^2}{2x}} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$v = +\frac{\alpha}{2k}\sqrt{\frac{1}{\pi x\nu}}\left(\cancel{1}-e^{-\frac{k y^2}{2x}}\right) \qquad [illegible]\left(-\frac{ky}{2x}\right)$$

$$v = \alpha\sqrt{\frac{\nu}{\pi x}}\left(1 - e^{-\frac{y^2}{4\nu x}}\right) \qquad 2\sqrt{\frac{\nu}{\pi x}} \times \frac{y}{2\nu x}$$

Date

$1+ \mathrm{erfc} = 1 - \mathrm{erf}$, $\alpha\,\mathrm{erf} = \alpha$

η	$\frac{y}{2\sqrt{\nu x}}$	erf( )	erf$(\frac{\eta}{2})$	erfc( )
0	0	0	0	1
.4	.2	.1323	.2227	.7773
.8	.4	.2647	.4284	.5716
1	0.5	.3298	.5205	.4795
2	1	.6298	.8427	.1573
3	1.5	.8461	.9661	.0339
4	2	.9555	.9953	.0047

$\times\,\alpha = .58845$

傾斜は合う
つまりαが合う

$\frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \times \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\nu}$

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\nu}\iint_{\frac{D}{2}} \sqrt{\frac{1}{\pi x \nu}}\, e^{-\frac{y^2}{4\nu x}} \Big[2\sqrt{\frac{\nu}{\pi x}}$$

$$+ 2\sqrt{\frac{\nu}{\pi x}}\,(1 - e^{-\eta^2})\,\mathrm{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu(1-x)}}\right)$$

$$+ 2\,\mathrm{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu x}}\right)\sqrt{\frac{\nu}{\pi(1-x)}}\left(1 - e^{-\frac{y^2}{4\nu(1-x)}}\right)\Big]\,dx\,dy$$

$$\alpha = 1 \pm \frac{\alpha^2}{\sqrt{\pi\nu}} \iint \Big[\frac{e^{-\eta^2}}{x}(1 - e^{-\eta^2})\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\eta\right)$$

$$+ \frac{e^{-\eta^2}}{\sqrt{x(1-x)}}\left(1 - e^{-\frac{x}{1-x}\eta^2}\right)\mathrm{erfc}(\eta)\Big]\,dx\,dy$$

α 21

$\eta = \frac{y^2}{4\nu x}$

$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu x}}$

$I = .6490$

$\alpha \mp 1 \mp \frac{\alpha^2}{\sqrt{\pi\nu}} I$

$\alpha = .6905$

$$\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2.5960}}{1.2980} =$$

$C_f = \frac{1.159}{\sqrt{R}}$

17.4%

$\mathrm{erfc}(\xi) \doteqdot 1 - \xi\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\xi^2} + \cdots$

$C_f = \frac{1.294}{\sqrt{R}} \longrightarrow \frac{1.328}{\sqrt{R}}$

err. 2.6%

$$\frac{y}{\sqrt{x}} \qquad \eta = \frac{y}{2\sqrt{1-x}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\iint \frac{e^{-\eta^2}}{x}(1-e^{-\eta^2})\left(1-\eta\sqrt{\frac{2\times x}{\pi(1-x)}}\,e^{-\frac{x}{1-x}\eta^2}\right)dx\,dy = .4346$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}\int_0^\infty e^{-\eta^2}(1-e^{-\eta^2})\left(1-\eta\sqrt{\frac{2x}{\pi(1-x)}}\,e^{-\frac{x}{1-x}\eta^2}\right)d\eta$$

$= .4346$
$(.5754)$

$$\eta' = \sqrt{2}\,\eta$$

$$\int_0^\infty e^{-\eta^2}d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_0^\infty e^{-2\eta^2}d\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-\eta'^2}d\eta' = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}\int_0^\infty e^{-\eta^2}(1-e^{-\eta^2})\,dx = 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \;// = .5857\,?$$

$-.1511\,?$
$.4346$

$$\frac{\eta^2}{1-x} = t, \quad \eta\,d\eta = \frac{1-x}{2}dt$$

$$\int_0^\infty e^{-\eta^2(1+\frac{x}{1-x})}\eta\,d\eta = \int_0^\infty e^{-\frac{\eta^2}{1-x}}\eta\,d\eta = \frac{1-x}{2}\int_0^\infty e^{-t}dt = \frac{1-x}{2}$$

$$-\int_0^\infty e^{-\eta^2(2+\frac{x}{1-x})}\eta\,d\eta = \int_0^\infty e^{-\frac{2-x}{1-x}\eta^2}\eta\,d\eta = \frac{1-x}{2(2-x)}$$

$$= \frac{1-x}{2}\left(1-\frac{1}{2-x}\right) = \frac{(1-x)^2}{2(2-x)}$$

$$1-x = t$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\times\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\times\frac{(1-x)^2}{2(2-x)}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{2-x}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{t^{\frac{3}{2}}}{1+t}dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^1 \sqrt{t}\,dt - \int_0^1 \frac{\sqrt{t}\,dt}{1+t}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{3} - \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \left(1-\frac{8}{3\pi}\right) = .15117$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}} = 2\,(\theta) = \frac{\pi}{2}$$

No.

Date

積分法

1%

$$\alpha = 1 - .2929\alpha^2 - (0.5\alpha - .0683\alpha^2)$$

$$\begin{array}{r} .2929 \\ -.0683 \\ \hline .2246 \end{array}$$

$$.2246\alpha^2 + 1.5\alpha - 1 = 0$$

$$\alpha = \frac{-1.5 \pm \sqrt{2.25 + .8984}}{.4492} = .6108 \longrightarrow 1.379$$

$\underline{+4.6\%}$

$$.4317\alpha^2 + \alpha - 1 = 0, \quad \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 1.7268}}{.8634} = \underline{\underline{.7543}}$$

1.2980

$$\frac{2}{\sqrt{\pi x}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}\int_0^\infty e^{-\eta^2}\left(1-e^{-\frac{x}{1-x}\eta^2}\right)\left(1-2\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\eta^2}\right)d\eta = .8634$$

.434

$$\int_0^\infty e^{-\eta^2}d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_0^\infty e^{-\frac{\eta^2}{1-x}}d\eta = \sqrt{1-x}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_0^\infty e^{-\eta^2}\left(1-e^{-\frac{x}{1-x}\eta^2}\right)d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1-\sqrt{1-x}\right)$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \quad = \int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right)dx = 2-1=1$$

$$\int_0^\infty e^{-2\eta^2}\eta\,d\eta = \frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-u}du = \frac{1}{4} \qquad 2\eta^2 = u$$

$$-)\ \int_0^\infty e^{-\frac{\eta^2}{1-x}-\eta^2}\eta\,d\eta = \int_0^\infty e^{-\frac{2-x}{1-x}\eta^2}\eta\,d\eta = \frac{1-x}{2(2-x)}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-\frac{2-2x}{2-x}\right) = \frac{x}{4(2-x)}$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}\int_0^\infty e^{-\eta^2}\left(1-e^{-\frac{x}{1-x}\eta^2}\right)\eta e^{-\eta^2}d\eta = \frac{4}{\pi}\times\frac{1}{4}\int_0^1\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x}\,(2-x)}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{t^2\,dt}{(1+t^2)} = \frac{2}{\pi}\left[1-\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}\right] = \frac{2}{\pi}\left(1-\frac{\pi}{4}\right) \qquad 1-x=t^2$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}\right) = .1366$$

1.2980
.1366 2
.4346
~~.5712~~

.4346
.0683
.3663

$$\alpha = 1-\alpha-\alpha^2\ \cancel{.5712}\ .2980, \quad \alpha^2\ \cancel{.5712}\ .2980 + 2\alpha - 1 = 0$$

$$\alpha = \frac{-2+\sqrt{4+1.192}}{.5960} = .4674$$

$$P: .3663\alpha^2 + 1.5\alpha - 1 = 0 \longrightarrow \frac{-1.5+\sqrt{2.25+1.4652}}{.7326} = .5835$$

$\longrightarrow 1.317$

$\sqrt{\alpha}\,\eta = \eta'$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\eta^2} d\eta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^\infty e^{-\eta'^2} d\eta' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Date

境界条件から

$$u = \sqrt{2}\int X\, V^{(1)} dx - 2P\iint_D \zeta\,(v V^{(2)} - u V^{(3)})\,dx\,dy.$$

$$V^{(1)} = \sqrt{\frac{k}{2\pi |x-x'|}}\, e^{-\frac{(y-y')^2}{2(x-x')}}, \quad V^{(2)} = \frac{\sqrt{k}\,|y-y'|}{2\sqrt{2\pi}(|k|)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{y^2}{2x}}$$

$\frac{1}{\sqrt{\pi\nu}}$ $\quad \nu = \sqrt{\frac{k}{\pi\nu}}$ $\quad \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 1 \quad t = \frac{1}{2\nu}$

$$\sqrt{\frac{2k}{\pi}}\int_0^{x'} \frac{X\,dx}{\sqrt{x'-x}} \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{x'} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x'-x}} = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}}$$

$$u = \sqrt{\frac{2k}{\pi}}\int_0^{x'} \frac{X\,dx}{\sqrt{x'-x}} - \sqrt{\frac{2k}{\pi}}\iint_D \zeta\left(v\,\frac{e^{-\frac{k y^2}{2(x'-x)}}}{\sqrt{x'-x}} - u\,\frac{y\, e^{-\frac{y^2}{2(x'-x)}}}{2(x'-x)^{\frac{3}{2}}}\right)dx\,dy$$

①

$$\zeta v = \frac{2}{\pi x}\, e^{-\frac{k}{2x}y^2}\left(1 - e^{-\frac{k}{2x}y^2}\right), \quad \frac{k}{2x}y^2 = \eta^2, \quad \sqrt{\frac{k}{2x}}\,y = \eta$$

$$\zeta u = \zeta\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta\, e^{-\eta^2}\right) = \frac{e^{-\eta^2}}{\sqrt{\pi x \nu}} - \frac{2\eta}{\pi\sqrt{x\nu}}\, e^{-\eta^2}.$$

ζv の項 $\quad \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2k}{\pi}}\int_0^{x'} \frac{dx}{x\sqrt{x'-x}}\sqrt{\frac{2x}{k}}\int_0^\infty e^{-\eta^2}(1-e^{-\eta^2})\, e^{-\frac{x}{x'-x}\eta^2} d\eta. \quad 2x \to \nu$

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{x'} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x'-x}}\left[\int_0^\infty \left[e^{-\frac{x'}{x'-x}\eta^2} - e^{-\frac{2x'-x}{x'-x}\eta^2}\right]d\eta\right]$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\sqrt{\frac{x'-x}{x'}} - \sqrt{\frac{x'-x}{2x'-x}}\right) \qquad x = x' t$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x'} \frac{dx}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x'}} - \frac{1}{\sqrt{2x'-x}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2-t}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[2 - \frac{\sqrt{2}}{3}\pi\right] = 1.1284\,(.5190) = .5857.$$

$t = u^2$

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{2-t}} = 2\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{2-u^2}} = 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi.$$

$u = \sqrt{2}\sin\theta \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$

No. 6

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\eta^2}\eta^2 d\eta = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha\eta^2} d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{1}{\alpha^{\frac{3}{2}}}$$

$$2\int_0^\infty e^{-\alpha\eta^2}\eta\, d\eta = \frac{2}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\eta^2} \cdots \frac{1}{\alpha}$$

Date

$\frac{y^2}{2x} = \eta^2, \quad \frac{1}{x} y\,dy = \eta\, d\eta$

$$\sqrt{\frac{2a}{\pi}} \iint \frac{y}{2(x \cdot x)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x}{x \cdot x}\eta^2} dx\, dy$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-\eta^2} - \frac{2\eta}{\pi x} e^{-\eta^2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}$$

$dy = \sqrt{2x}\, d\eta, \quad y\, dy = \frac{2x}{2x}\eta\, d\eta$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{(x'-x)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty e^{-\eta^2}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta\right) e^{-\frac{x}{x'-x}\eta^2} \eta\, d\eta$$

$$= \left[\frac{x'-x}{2x'} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(\frac{x'-x}{2x'-x}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \left[\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}} - \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2-t}}\right] dt$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}}\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right] = \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3\pi}\right]$$

$.2834 \quad .0908$

$$\int_0^1 \sqrt{t}\, dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad t = 2\sin^2\theta$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2-t}}\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\sin 2\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

$= .2854$

$$1 = \alpha + .5857\alpha^2 + [0.5\alpha - .2122\alpha^2]$$

$.2929$, $.0908$

$.7122$, 1.2929

$.2848$, $.5857$, $.8735$

$.5857$, $.2122$, $.3735$, $.7470$

$$.3735\alpha^2 + 1.5\alpha - 1 = 0$$

$$\alpha = \frac{-1.5 + \sqrt{1.5^2 + 1.4940}}{.7470} = .5822$$

$.1202 / .0804 \alpha^2 + 1.5\alpha - 1 = 0$

$.2929$, $.2778$, $.5907$

$.5907\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$

$\alpha = .6667 - .0538\alpha^2 \qquad \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\alpha = 1.314$

$\alpha = .7057$

$.8084 \quad 1.5 + 1 \quad .1614 \quad = \alpha = .6156 \quad .8829 \quad$ err. 4.6%