

変分原理と随伴流れ

別所

内容

概要

頁

0-1~2

1. 定常流れ (2次元)

1

2. 最小抵抗条件式 (2次元)

17

3. 定常流れ (3次元)

10

4. 最小抵抗条件式 (3次元)

14

5. 微小変形に対する流れの変分 (2次元定常)

15

6. 時間平均流

18

7. 変動流

21

8. 平面ポアセソン流れ

27-33

概説

これまでナビア・ストークス方程式に対し、逆流れを導入して可逆定理を構成し、^(特に線型逆流れ) 種の量の近似の見積りが可能である事を示して来たが、正確に方程式を解くためには煩雑に過ぎるように見える。

元来逆流れは^{数学的には}線型理論で随伴方程式の解として導入されたものであるから、非線型問題でも本来的には随伴方程式を導いてその解とに定義するのが道筋である。

そこで定常問題、変動流れ問題(但し物性は不変動流)について随伴方程式を求めて見る事にした。

それは又変分原理を造る事と等価であり、これを用いて Galerkin 法的近似解法の基礎を与える事にもなる。

本報ではそれを随伴流れと呼ぶ事にしよう。その線型近似は例えはオゼーニ逆流れに等しい。

さて変動流れ^命の方程式は今の場合固有値方程式となり、無限箇の固有値と固有関数で

もつと考えられる。

（時間平均流との干渉も考慮に入れて）
それ故 それらのすべてを考慮してその振幅がわかれば
かなり複雑な変動流がえられるだろう。

それがそのまゝ、乱流を表現しているかどうかは別として
ナビエ・ストークス方程式の近似解（変動分についての線型化
しているのだ）である事は間違いない。

従って 30年代に Burgers はその方向で研究を重ねたように
見えるが固有関数の振幅に苦心してあまり成功しなかった
のは見えない。
（の決定）

今回の定式化では 変動流の運動エネルギー が、
そのレイノルズ数 Re （これは抽象的な概念なので本報では
クッタ・ジコフスキーの k とは表わす）を通じて主流の平均仕事
と結びつける式 および 変動流の運動エネルギー の
総和に関する式 から その振幅を定めうる可能性が
生まれ、一応無理なく解けるように思う。

試算として見た所では やはり固有関数をかな多くとら
なければならぬように見える。

1. 定常流れ (2次元)

運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} G_x + \nu \zeta_y - v \zeta &= 0 \\ \frac{1}{\rho} G_y - \nu \zeta_x + (1+u) \zeta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

$$G = \rho + \frac{\rho}{2} \{ (1+u)^2 + v^2 \} \quad (1.2)$$

$$u = \psi_y, \quad v = -\psi_x, \quad \zeta = -\nabla^2 \psi \quad (1.4)$$

$$u_x + v_y = 0, \quad (1.3)$$

随伴流れ (Adjoint Flow) を導き出して、皇印で示す

事にしよう。

$$u^* = \psi_y^*, \quad v^* = -\psi_x^*, \quad \zeta^* = -\nabla^2 \psi^* \quad (1.5)$$

(1.1) の 2 式に u^*, v^*, ζ^* をかけて加え合え全領域上で

積分すると

$$\iint_D \left[\frac{1}{\rho} (G_x u^* + G_y v^*) + \nu (\zeta_y u^* - \zeta_x v^*) + \zeta \{ (1+u) v^* - v u^* \} \right] dx dy = 0$$

部分積分すると

$$\begin{aligned} \iint_D \left[\nu \zeta \zeta^* - G (u_x^* + v_y^*) + \zeta \{ (1+u) v^* - v u^* \} \right] dx dy \\ = - \int_C \left(\nu \zeta \psi_n^* + \frac{G}{\rho} \psi_s^* \right) ds = \frac{1}{\rho} \int_C (u^* X + v^* Y) ds \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\left. \begin{aligned} X &= -\rho X_n - \nu \zeta \psi_n \\ Y &= -\rho Y_n + \nu \zeta X_n \end{aligned} \right\}, \quad G = \rho \text{ on } C \quad (1.7)$$

$$u = -1, \quad v = 0 \quad \text{on } C \quad (1.8)$$

さて

$$\begin{aligned} \iint_D \{ (1+u)v^* - u^*v \} dx dy &= - \iint_D \{ (1+u)v^* - u^*v \} v^* \psi dx dy \\ &= \iint_D [u \{ (1+u)v^* - u^*v \}_y - v \{ (1+u)v^* - u^*v \}_x] dx dy \\ &\quad - \int_C \{ (1+u)v^* - u^*v \} \psi_n ds \end{aligned} \quad (1.9)$$

7" 定理から Adjoint Flow を

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{p} G_x^* + \mu \psi_y^* + \{ (1+u)v^* - v u^* \}_y &= 0 \\ \frac{1}{p} G_y^* - \mu \psi_x^* - \{ (1+u)v^* - v u^* \}_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

と定義すると, 更に u, v をかけて上と同様積分すると

$$\begin{aligned} \iint_D [\mu \psi \psi^* - \frac{G^*}{p} (u_x + v_y) + u \{ (1+u)v^* - u^*v \}_y - v \{ (1+u)v^* - u^*v \}_x] dx dy \\ = - \frac{1}{p} \int_C (\mu \psi^* \psi_n + G^* \psi_s) ds = \frac{1}{p} \int_C (u \chi^* + v \gamma^*) ds, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \chi^* &= -G^* x_n - \mu \psi^* y_n \\ \gamma^* &= -G^* y_n + \mu \psi^* x_n \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

となるが, G^* の意味は不明である (1.10) から

$$\nabla^2 G^* = 0, \quad (1.13)$$

となってこれは調和関数である。

また G^* を消去すると,

$$\nabla^2 [\psi^* + (1+u)v^* - v u^*] = 0, \quad \dots (1.14)$$

これは元の流れの渦度輸送方程式に相当するものである。

ここで $G^* = 0$ とおいても良いが、そうすると (1.10) より

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} G_n^* &= - \left\{ \psi^* + (1+u)v^* - v u^* \right\}_s \\ \frac{1}{r} G_s^* &= \left\{ \psi^* + (1+u)v^* - v u^* \right\}_n \end{aligned} \quad \text{on } C, \quad (1.15)$$

であるから $\left\{ \psi^* + (1+u)v^* - v u^* \right\}$ も調和関数なので

$$v \nabla^2 \psi^* + (1+u) \psi_x^* + v \psi_y^* = 0, \quad \dots (1.16)$$

となり、C 上で ψ^* もしくは ψ_n^* を与えれば

ψ^* は D 内で一意的に定まる。

逆に言うと $\frac{(C \text{ 上 })}{u^*}, v^*$ を任意に定めることにゆがないので

これを許す場合にはやはり G^* を導入して書いた方が便利である。

また (1.14) で 2 次の項を省略すると

$$v \nabla^2 \psi^* - \nabla^2 \psi_x^* = 0, \quad \dots (1.17)$$

となり、これはオセーニ流れの方程式である。

(1.6) と (1.11) を加え、相消すると (1.9) より

$$\int_C (u^* X + v^* Y) ds = \int_C (u X^* + v Y^*) ds - \int_C \{ (1+u) v^* u^* \} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} ds \quad (1.14)$$

となり (1.8) の境界条件の下では右辺第2項が消失する。

境界値問題の変分原理は

$$\delta I = \iint_D [v \delta s^* + \{ (1+u) \delta v^* - v \delta u^* \}] dx dy = 0, \quad (1.15)$$

$$\delta u^* = \delta v^* = 0 \quad \text{on } C$$

のように書け、この解は

$$v \nabla^2 s - (v s)_x - \{ (1+u) s \}_x = 0, \quad (1.16)$$

の解となる。

一方 G は (1.1) より

$$\nabla^2 G + \{ (1+u) s \}_x - (v s)_x = 0, \quad (1.17)$$

つまり、ポアソンの方程式の解であるから、境界条件

$$G_n = -\mu s, \quad \text{on } C, \quad (1.18)$$

によって一意的に定まる。

この時の変分原理は

$$\iint_D [\nabla^2 G + \{ (1+u) s \}_x - (v s)_x] \delta G dx dy = 0, \quad (1.19)$$

$$\delta G(G_x dy - G_y dx)$$

$$-v \delta y + (H u) \delta x$$

No.

5

Date

あるいは部分積分して

$$\begin{aligned} \iint_D [\nabla G \nabla \delta G + v \delta G_x - (H u) \delta u \delta G_y] dx dy \\ = - \int_C [G_n - \delta \{ (H u) x_s + v y_s \}] \delta G ds, \quad (1.20) \end{aligned}$$

蛇足ながら方程式 (1.17) は流場がわかれば総圧の計算が出来るということであるから、逆に境界点理論で u, v, δ がわかればそれでも総圧降下を計算出来る事となり、従来境界点理論の弱点であった力抵抗の計算にも利用出来るように見える。

さて Adjoint Flow の部分原理は (u, v) が求められたとすると

$$\delta J = \iint_D [v \delta \delta' + \{ (H u) v^* - u^* v \} \delta \delta'] dx dy = 0, \quad (1.21)$$

となる。

u, v, δ が求められた後では (1.10) は準線型方程式であるからその解は簡単である。

さて (1.15) を有限要素法で解く時にまず考えられるのは Newton-Raphson 法

であるが、以上の事情を考えると、むしろ (1.15) で下線を
施した項に近似値 (例えば ϵ 近似値として ϵ を代入して) を代入して準線型として解く ^{よう} 逐次近似法が考えられる。

そう言う風にとくとすると最終的に得られる (1.15) の
マトリックスと (1.2) のマトリックスは密接に結びついて
いる事がよくわかるだろう (転置行列か?)。

3節の所説からすると上述の Adjoint Flow は改めて複雑であるので、こちらに合せた式を掲げておく。

(1.6) から Adjoint Flow を (1.10) のかわりに

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{P} G_x^* + v s_y^* + s v^* &= 0 \\ \frac{1}{P} G_y^* + v s_x^* - s u^* - s^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

$$v \nabla^2 s^* + s_x^* + (s u^*)_x + (s v^*)_y = 0, \quad (1.23)$$

$$\frac{1}{P} \nabla^2 G^* + (s v^*)_x - (s^* + s u^*)_y = 0, \quad (1.24)$$

そこで

$$\iint_D (s v^* + s^* v) dx dy = 0$$

なる関係式を使っている。

(3節のように u, u^* に - 符号流束を含めると無限遠の積分面上の積分が有限となるのに注意せよ)

変分原理では今度は (1.15) 右辺の2項の s を独立組とて扱う事になる。

2. 最小抵抗の条件式

抵抗が最小となる為の条件を求めて見よう。

その為には C が法線方向に δn だけ変化した時の抵抗の増分が 0 となればよいから。

$$\delta D = D' - D = \int_C X' ds - \int_C X ds = 0, \quad (2.1)$$

今既に Adjoint flow を導き出している。

$$D' = \int_C (u'^* X' + v'^* Y') ds, \quad (2.2)$$

$$D = \int_C (u^* X + v^* Y) ds,$$

$$\text{但し} \quad \left. \begin{array}{l} u'^* = 1, v'^* = 0 \quad \text{on } C' \\ u^* = 1, v^* = 0 \quad \text{on } C \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

(1.6) に於て (u', v') は Ω の内部に解析接続出来るものと仮定する。

$$D' = \iint_{\Omega} [\nu s' s'^* + s' \{(1+u)v'^* - v'u'^*\}] dx dy + \int_C (u'^* X' + v'^* Y') ds$$

$$\begin{aligned} &= P \int_C [\nu s s^* + s \{(1+u)v^* - v u^*\}] \delta n ds \\ &\quad + \int_C (u'^* X' + v'^* Y') ds, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
 u'^*|_c &= u'^*|_c - \frac{\partial u'^*}{\partial n} \delta n \\
 &= 1 + \int^* y_n \delta n, \\
 v'^*|_c &= v'^*|_c - \frac{\partial v'^*}{\partial n} \delta n \\
 &= - \int^* x_n \delta n
 \end{aligned}
 \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \delta D &\doteq \int \int_c [-2 \int^* + \int^* (1+u) v^* - v u'^*] \delta n ds \\
 &+ \int_c (u'^* X' + v'^* Y' - u^* X - v^* Y) dS, \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_c (u'^* X' + v'^* Y' - u^* X - v^* Y) dS \\
 &\doteq \int_c [(u'^* - u^*) X + (v'^* - v^*) Y + u^* \delta X + v^* \delta Y] dS \\
 &= \int_c \int^* (X y_n - Y x_n) \delta n ds + \int_c (\delta u X^* + \delta v Y^*) ds, \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X y_n - Y x_n &= -\mu \int^* \\
 \delta u X^* + \delta v Y^* &\doteq \mu \int^* \delta n
 \end{aligned}
 \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \delta D &= \int_c [-2 \int^* + \int^* (1+u) v^* - v u'^*] \delta n ds, \\
 \delta D &= -\mu \int_c \int^* \delta n ds, \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

それ故

$$\int_0 \delta u \, ds = 0,$$

(2.10)

の条件の下で $\delta D = 0$.

$$\delta \mathcal{L}^* = \text{const.} \quad \text{on } \Gamma$$

(2.11)

オセルニ流れでは「もう一つ線型項があったから」
今はむしろ ストークス流れの式 と同型である。

オセルニ流れの場合 線型化によって 可逆定数項が
非対称になっているのが原因と考えられる。

3. 定常流れ (3次元)

運動方程式は

$$\nabla G - \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \rho \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = 0, \quad (3.1)$$

$$G = p + \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2 + w^2), \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.3)$$

以下 $\mathbf{u}$ は一様流れも含むものとする。

$$\mathbf{u} = \{u, v, w\}, \quad \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3),$$

$$\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u & v & w \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{vmatrix}.$$

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega} = -\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{vmatrix}$$

(3.1) に $(\nabla \times)$ を作用させると、

$$\mu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \rho \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = 0, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) &= \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \\ &= \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}, \end{aligned}$$

$$\therefore \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.5)$$

(3.1) に $(\nabla \cdot)$ を作用させると、

$$\nabla^2 G - \rho \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = 0, \quad (3.6)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}),$$

境界条件は $u = v = w = 0$ on S (3.7)

(非圧縮性) $(u \cdot n) = 0$ (3.8)

S 上では $G = p$ とおける

$$\left. \begin{aligned} \nabla p &= -\mu \nabla \times u \\ (n \cdot \nabla) p &= -\mu (n \times \nabla) \cdot u \\ (n \times \nabla) p &= \mu (n \cdot \nabla) u \end{aligned} \right\} \text{ on } S \quad (3.9)$$

また n に沿った力 $\sigma = \{X, Y, Z\}$ は

$$\sigma = -p n - \mu (n \times u) \quad \text{on } S \quad (3.10)$$

さて今 Adjoint Flow $u^* = \{u^*, v^*, w^*\}$ を導入し

(3.1) にかけて領域上で積分すれば

$$\begin{aligned} \int_D u^* \cdot \nabla G \, d\tau &= - \int_D G \nabla \cdot u^* \, d\tau + \int_S G (u^* \cdot n) \, dS, \\ \int_D u^* \cdot \nabla^2 u \, d\tau &= - \int_D u^* \cdot (\nabla \times u) \, d\tau \\ &= - \int_D u \cdot \nabla \times u^* \, d\tau + \int_S u \times u^* \cdot n \, dS, \\ &= - \int_D u \cdot u^* \, d\tau + \int_S u \times u^* \cdot n \, dS, \\ u^* \cdot (u \times u) &= u \cdot (u \times u^*) = u \cdot (u^* \times u) \end{aligned}$$

等しいから

$$\int_D [\mu \omega \cdot \omega^* - G \nabla \cdot u^* - \rho u \cdot (\omega \times u^*)] d\tau + \int_S [G(u^* \cdot n) + \mu (\omega \times u^*) \cdot n] dS = 0,$$

をうるから $[(\nabla \cdot u^*) = 0]$ (3.10) になり

$$\int_D [\mu \omega \cdot \omega^* - G \nabla \cdot u^* - \rho u \cdot (\omega \times u^*)] d\tau + \int_C (\underline{t} \cdot u^*) dS = 0, \quad (3.11)$$

$\uparrow$
 $(u^* + 1)$
 $(m \text{ の方向 } \text{che } \text{che } \text{の } \underline{t})$

$\Rightarrow$ 方

$$\int_D u \cdot \nabla^2 u^* d\tau = - \int_D \omega \cdot \omega^* d\tau = \int_S \omega^* \times u \cdot n dS$$

2. G^* を $\underline{G}$ として

$$\int_D u \cdot \nabla G^* d\tau = - \int_D G^* \nabla \cdot u d\tau + \int_S G^* (u \cdot n) dS$$

2.83 から上の D 上の $\underline{t}$ の分は

$$\int_D [\nabla G^* - \mu \nabla^2 u^* - \rho (\omega \times u^*)] \cdot u d\tau = \int_S [\omega^* \times u \cdot n + G^* (u \cdot n)] dS - \int_S (\underline{t} \cdot u^*) dS = 0$$

$\uparrow$
 $(u^* + 1)$
 (3.12)

$\uparrow$
 $(u - 1)$

これより Adjoint flow の方程式は、

$$\nabla G^* - \mu \nabla^2 U^* - \rho (\omega \times U^*) = 0, \quad (3.13)$$

これより G^* を消去すると

$$\mu \nabla^2 \omega^* + \rho \nabla \times (\omega \times U^*) = 0, \quad (3.14)$$

$\mu \nabla^2 U^*$ を消去すると

$$\nabla^2 G^* - \rho \nabla \cdot (\omega \times U^*) = 0, \quad (3.15)$$

(3.12) の D 上の積分の内

$$U \cdot (\omega \times U^*) = (\nabla \times U) \cdot (U^* \times U)$$

として部分積分すると 1 節のような Adjoint Flow が得られるが 形式的には上記の Adjoint Flow を採る方が単純明快であろう。

即ち数値計算には、

$$I = \int_D [\mu \omega \cdot \omega^* - U \cdot (\omega \times U^*)] d\tau, \quad (3.16)$$

なる積分の右辺第 2 項の ω を既知 (解法は前段の近似値を代入して) として U^* また U について変分して 0 とおいた方程式をというに行けばよいから、両流れのマトリックスには対称性がある。

4. 最小抵抗条件式 (3次元)

2次元の場合と全く同じようにして、 δn の変化に対して 抵抗の変分 δD は

$$\delta D = -\mu \int_D \omega \cdot \omega^* \delta n ds \quad (4.1)$$

となり,

$$\int_D \delta n ds = 0, \quad (4.2)$$

つまり 体積一定条件の下で 最小抵抗 (数学的には最小かどうかはわからず 停留値である)

条件は

$$\omega \cdot \omega^* = \text{const}, \quad \text{on } S \quad (4.3)$$

なお 1 証明の際には 2 条件が必要である,

$$\omega'|_S - \omega|_S = \omega'|_{S'} - (\delta m \cdot \nabla) \omega$$

こゝに

$$(\delta m \cdot \nabla) \omega = (\delta m \times \nabla) \times \omega - (\delta m \times \omega)$$

で「あるが」 $(\delta m \times \nabla)$ は 面内 微分なので 境界条件より, 右辺第 1 項は なくなり

$$(\delta m \cdot \nabla) \omega = -(\delta m \times \omega), \quad \text{on } S \quad (4.4)$$

5. 微小変形による流れの変分 (2次元定常)

今 S のまわりの (1.1) による流れ (u_0, v_0, ζ_0) があるとして S が僅かに変形した時 $(u_0+u, v_0+v, \zeta_0+\zeta)$ となつたとしよう。

u, v の2次の項を省略すると (1.1) は

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} G_x + v \zeta_y - v_0 \zeta - \zeta_0 v &= 0 \\ \frac{1}{\rho} G_y - v \zeta_x + (1+u_0) \zeta + \zeta_0 u &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Adjoint flow を導く

$$\iint_D \left[\frac{1}{\rho} (G_x u^* + G_y v^*) + v (\zeta_y u^* - \zeta_x v^*) + \{ (1+u_0) v^* - v_0 u^* \} + \zeta_0 (u v^* - v u^*) \right] dx dy = 0$$

部分積分して

$$\iint_D \left[v \zeta \zeta^* - \frac{G}{\rho} (u_x^* + v_y^*) + \zeta \{ (1+u_0) v^* - v_0 u^* \} + \zeta_0 (u v^* - v u^*) \right] dx dy + \int_C \left(\zeta \gamma_n^* + \frac{G}{\rho} \psi_s^* \right) ds = 0, \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \text{さて} \quad \iint_D \zeta \{ (1+u_0) v^* - v_0 u^* \} dx dy &= \int_C \{ (1+u_0) v^* - v_0 u^* \} (v \psi_s + u \chi_s) ds \\ &+ \iint_D \left[u \{ (1+u_0) v^* - v_0 u^* \}_y - v \{ (1+u_0) v^* - v_0 u^* \}_x \right] dx dy \end{aligned} \quad (5.3)$$

元の Adjoint flow の方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} G_x^* + \nu S_y^* + S_0 v^* + \{ (1+u_0)v^* - v_0 u^* \}_y &= 0, \\ \frac{1}{\rho} G_y^* - \nu S_x^* - S_0 u^* - \{ (1+u_0)v^* - v_0 u^* \}_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

$$\text{従って} \quad \nabla^2 [\nu S^* + (1+u_0)v^* - v_0 u^*] + (S_0 u^*)_x + (S_0 v^*)_y = 0, \quad (5.5)$$

$$\frac{1}{\rho} \nabla^2 G^* + (S_0 v^*)_x - (S_0 u^*)_y = 0, \quad (5.6)$$

いづれにしても準線型方程式であるから

$$I = \iint_D [\nu S S^* + S_0 (u v^* - v u^*) + S \{ (1+u_0)v^* - v_0 u^* \}] dx dy, \quad (5.7)$$

の变分問題として解く事が出来る。

この時境界条件は u, v が C 上で与えられる
or u^*, v^*

として解く訳であるが、最小抵抗問題では (2.5)

により、

$$\left. \begin{aligned} u &= \int y_n \delta n \\ v &= - \int x_n \delta n \end{aligned} \right\} \text{ on } C \quad (5.8)$$

だから

$$u x_n + v y_n = 0, \text{ on } C \quad (5.9)$$

と (2.11) から出る関係

$$S_0 S_0^* + S S_0^* + S_0 S^* = \text{const. on } C, \quad (5.10)$$

によって解は定まると考えられる。

有限要素法の一次方程式を立てい、(5.9), (5.10)
の条件を加えて解いて、 u, v が求められると

$$u x_s + v y_s = -\int \delta n \quad , \quad \sim \quad (5.11)$$

により、所要の座標量 δn が求められる。

21で (5.10) を直接使うと Adjoint flow の
方程式もたてなければならぬことになる。

6. 時間平均流

上棒で時間平均値を示す事によつてその運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \bar{G}_x + \nu \bar{\Delta} \bar{\zeta} - \bar{v} \bar{\zeta} - \frac{1}{4} (\bar{v} \bar{\zeta}^2 + \bar{v}^2 \bar{\zeta}) &= 0 \\ \frac{1}{\rho} \bar{G}_y - \nu \bar{\Delta} \bar{\zeta}_x + (1+\bar{u}) \bar{\zeta} + \frac{1}{4} (\bar{u} \bar{\zeta}^2 + \bar{u}^2 \bar{\zeta}) &= 0 \\ \frac{1}{\rho} \bar{G} &= \frac{\bar{P}}{\rho} + \bar{u} + \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2) + \frac{1}{4} (\bar{u} \bar{v}^2 + \bar{u}^2 \bar{v}) \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

連続方程式

$$\bar{u}_x + \bar{v}_y = 0 \quad (6.2)$$

ここで u, v, ζ は変動流の速度、温度で (A) は 平均値を意味するものとし、その積は、時間平均を意味するものとする。
 次節に見るよつて、変動流は固有周波数をもつ固有関数と

表せる立場をとるので、変動流の量は

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, t) &= R \sum_n f_n(x, y) e^{i \omega_n t} \\ g(x, y, t) &= R \sum_n g_n(x, y) e^{i \omega_n t} \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

と表わされ、その種の平均値は

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T f g dt = \frac{1}{4} \sum_n (f_n \bar{g}_n + \bar{f}_n g_n) \quad (6.4)$$

となり、(6.1) の 1 等式はすべてこの形のようにすべての固有関数の積の和を示しているものとする。

さて 随伴流を導き入る。前同様 (6.1) から

$$\iint_D \left[\left\{ \frac{\bar{u}}{r} + \nu \nabla^2 \bar{u} - \bar{v} \bar{u} - \frac{1}{4}(\nu \bar{u}^2 + \bar{v}^2) \right\} \bar{u}^* \right. \\ \left. + \left\{ \frac{\bar{v}}{r} + \nu \nabla^2 \bar{v} + (H\bar{u}) \bar{v} + \frac{1}{4}(\bar{u} \bar{u}^2 + \bar{v} \bar{v}^2) \right\} \bar{v}^* \right] dx dy = 0, \quad (6.5)$$

となり, 部分積分より,

$$\iint_D \left[\nu \bar{u} \bar{u}^* - \bar{G} (\bar{u}^* + \bar{v}^*) + \bar{u} \left\{ (H\bar{u}) \bar{v}^* - \bar{v} \bar{u}^* \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \{ (\bar{u} \bar{u}^2 + \bar{v} \bar{v}^2) \bar{v}^* - (\bar{v} \bar{u}^2 + \bar{u} \bar{v}^2) \bar{u}^* \} \right] dx dy \\ = \frac{1}{r} \int_C (\bar{u}^* \bar{X} + \bar{v}^* \bar{Y}) ds, \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \bar{X} &= -\bar{p} x_n - \mu \bar{u} y_n \\ \bar{Y} &= -\bar{p} y_n + \mu \bar{u} x_n \\ \bar{G} &= \bar{p} - \frac{1}{2}, \quad \bar{u} = -1, \bar{v} = 0, \bar{u} = \bar{v} = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \bar{X} &= -\bar{p} x_n - \mu \bar{u} y_n \\ \bar{Y} &= -\bar{p} y_n + \mu \bar{u} x_n \end{aligned}} \right\} \text{on } C \quad (6.7)$$

また $\iint_D \bar{u} \bar{v}^* dx dy = -\iint_D \bar{v}^* \bar{u} dx dy$ であるから, 境界流れの方程式を

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \bar{G}^* + \nu \nabla^2 \bar{u}^* + \bar{u} \bar{v}^* = 0 \\ \frac{1}{r} \bar{G}^* - \nu \nabla^2 \bar{v}^* - \bar{v} (H\bar{u}^*) = 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

とおくと, (6.6) から

$$\frac{1}{r} \int_C (\bar{u}^* \bar{X} + \bar{v}^* \bar{Y} - \bar{u} \bar{X}^* - \bar{v} \bar{Y}^*) ds = \frac{1}{4} \iint_D [(\bar{u} \bar{u}^2 + \bar{v} \bar{v}^2) \bar{v}^* - (\bar{v} \bar{u}^2 + \bar{u} \bar{v}^2) \bar{u}^*] dx dy, \quad (6.9)$$

である。

(6.1) は非線形方程式であるから, 右辺の項は残しておいた形にはならない。

さて (6.1) から $\bar{G}$ を消去すると

$$\nu \nabla^2 \bar{\zeta} - (1+\bar{u})\bar{\zeta}_x - \bar{v}\bar{\zeta}_y - \frac{1}{4}\{(u\bar{\zeta} + \bar{u}\zeta)_x + (v\bar{\zeta} + \bar{v}\zeta)_y\} = 0, \quad (6.10)$$

$\nu \bar{\zeta}$ を消去すると

$$\frac{1}{\rho} \nabla^2 \bar{G} + \{(1+\bar{u})\bar{\zeta}\}_y - (\bar{v}\bar{\zeta})_x - \frac{1}{4}\{(u\bar{\zeta} + \bar{u}\zeta)_x - (v\bar{\zeta} + \bar{v}\zeta)_y\} = 0, \quad (6.11)$$

(6.8) から 同様に

$$\nu \nabla^2 \bar{\zeta}^* + (1+\bar{u}^*)\bar{\zeta}_x^* + \bar{v}^*\bar{\zeta}_y^* = 0, \quad (6.12)$$

$$\frac{1}{\rho} \nabla^2 \bar{G}^* + (\bar{\zeta} \bar{v}^*)_x - \{\bar{\zeta} (1+\bar{u}^*)\}_y = 0, \quad (6.13)$$

解の判別は 与えられた u, v, ζ に対し, 非斉次方程式 (6.10) の境界値問題を解いて $\bar{u}, \bar{v}, \bar{\zeta}$ を求めそれを (6.11) に代入して $\bar{G}$ を求める事になるが (6.10) の斉次方程式は (1.16) とより定常流の場合と全く同じである。

(6.7) の境界条件の下で 領域 D は (6.1) の 2 式に $\bar{u}, \bar{v}$ をかけて積分すると (6.1) を得たと同様に

$$\frac{D}{\rho} = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u} \Big|_{x=\infty} dy = \iint_D \left[\nu \bar{\zeta}^2 - \frac{1}{4} \{(1+\bar{u})(v\bar{\zeta} + \bar{v}\zeta) - \bar{v}(u\bar{\zeta} + \bar{u}\zeta)\} \right] dx dy, \quad (6.14)$$

7. 変動流

運動方程式は

$$\begin{cases} i\omega u + \frac{1}{\rho} G_x + \nu \zeta_y - \bar{v} \zeta - \bar{v} \zeta = 0, \\ i\omega v + \frac{1}{\rho} G_y - \nu \zeta_x + (1+\bar{u})\zeta + u\bar{\zeta} = 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\frac{1}{\rho} G = \frac{p}{\rho} + u + u\bar{u} + v\bar{v} \quad (7.2)$$

(7.1) から G と ζ を消去すると

$$i\omega \zeta - \nu \nabla^2 \zeta + (1+\bar{u})\zeta_x + \bar{v}\zeta_y + u\bar{\zeta}_x + v\bar{\zeta}_y = 0, \quad (7.3)$$

$$\frac{1}{\rho} \nabla^2 G = (\bar{v}\zeta + \bar{v}\zeta)_x - \{(1+\bar{u})\zeta + u\bar{\zeta}\}_y \quad (7.4)$$

以後物体は振動しないとして ± 境界条件は齊次とする。

随伴流れを導入しよう

まず (7.1) から

$$\begin{aligned} \iint_D \left[i\omega(uu^* + vv^*) + \frac{1}{\rho}(G_x u^* + G_y v^*) + \nu \zeta \zeta^* \right. \\ \left. + \{(1+\bar{u})\zeta + u\bar{\zeta}\} \bar{v}^* - (\bar{v}\zeta + \bar{v}\zeta) u^* \right] dx dy = 0 \end{aligned} \quad (7.5)$$

これから

$$i\omega u^* + \frac{1}{\rho} G_x^* + \nu \zeta_y^* + \bar{\zeta} v^* + (\bar{u} v^* - \bar{v} u^*)_y = 0,$$

$$i\omega v^* + \frac{1}{\rho} G_y^* - \nu \zeta_x^* - \bar{\zeta} u^* - (\bar{u} v^* - \bar{v} u^*)_x - \bar{\zeta}^* = 0 \quad (7.6)$$

$$-i\omega \zeta^* + \nu \nabla^2 \zeta^* + (\bar{\zeta} u^*)_x + (\bar{\zeta} v^*)_y + \bar{\zeta}_x^* + \nabla^2 (\bar{u} v^* - \bar{v} u^*) = 0, \quad (7.7)$$

$$\frac{\nabla^2 G^*}{\rho} + (\bar{\zeta} v^*)_x - (\bar{\zeta} u^*)_y - \bar{\zeta}_y^* = 0, \quad (7.8)$$

とおけばよい。

齊次境界条件の下では (7.3) は ^{平行流の} Orr-Sommerfeld eq. に
相当し 固有値方程式であり、一般には可解無限箇
の固有値と固有関数をもつと考えられる。

その固有円周波数を ω_n , 固有流れ関数を ψ_n としよう。
随伴流れについても ω_n^* , ψ_n^* を考える事が出来るが、
その固有値問題は同じ汎関数 (7.5) の変分問題として
定式化出来るから

$$\omega_n = \omega_n^* \quad (7.9)$$

となるはずである。

ここで ^(2つの) (ω_n, ω_m) なる固有値について (7.5) の積分を作つて
見ると 左辺の積分の第2項以下は、同じになるので

$$i(\omega_n - \omega_m) \int_D \nabla \psi_n \nabla \psi_m^* dx dy = 0 \quad (7.10)$$

となるから, $\omega_n \neq \omega_m$ では

$$\int_D \nabla \psi_n \nabla \psi_m^* dx dy = 0 \quad (7.11)$$

を得る。

つまり, この意味で固有関数は直交系である。

さて仕事率を考慮しよう。

(7.1)に $\hat{u}, \hat{v}$ を代入して積分すると、

$$\iint_D \left[i\omega(u\hat{u} + v\hat{v}) + \nu \zeta \zeta^* - (\alpha \zeta^* + \bar{\alpha} \zeta) \hat{u} + \{ (1+\alpha) \zeta + \alpha \zeta^* \} \hat{v} \right] dx dy = 0, \quad (7.12)$$

これを実部と虚部に分けて

$$\omega = \omega^{(r)} + i \omega^{(i)} \quad (7.13)$$

とおくと、

$$\iint_D \left\{ \omega^{(r)}(u\hat{u} + v\hat{v}) + \frac{1}{2\nu} \left[(1+\alpha)(\zeta \hat{v} - \zeta^* \hat{v}) - \bar{\alpha}(\zeta \hat{u} - \zeta^* \hat{v}) \right] + \frac{1}{2} \zeta(\hat{u} - \hat{v}) \right\} dx dy = 0. \quad (7.14)$$

$$\iint_D \left[-\omega^{(i)}(u\hat{u} + v\hat{v}) + \nu \zeta \zeta^* + \frac{1}{2} \{ (\alpha \zeta^* \hat{v} + \bar{\alpha} \zeta \hat{v}) - \bar{\alpha}(\zeta \hat{u} + \zeta^* \hat{v}) \} \right] dx dy = 0, \quad (7.15)$$

(時間的に)
 $\omega^{(i)} > 0$ ならば「減衰」する流れであり $\omega^{(i)} < 0$ ならば「発散」する流れで、この後の場合 時間平均値を考える事は出来ないうようにも思えるが、今は細かに断る必要はない。

さて(7.15)左辺第1項は系の振動流束の運動エネルギーの時間的変化を表わしているが、系全体としてそれは変化しない流れを考えているから、その総和は0とならねばならない。

$$\sum_n \omega_n^2 |a_n|^2 \iint_D (u_n u_n + v_n v_n) dx dy = 0, \quad (7.16)$$

こゝに a_n は各固有値類の振幅とせよ。
 そうすると (7.15) は

$$\sum_n |a_n|^2 \iint_D \left[2\zeta \zeta_n' + \frac{1}{2} \{ (1+\zeta)(\zeta_n' + \zeta_n' \zeta_n') - \zeta (\zeta_n \zeta_n' + \zeta_n' \zeta_n) \} \right] dx dy = 0 \quad (7.17)$$

こゝに (6.14) から、よく知られているように 抵抗は 零系、
 粘性による「流れ」— 逸散に使われると 言う関係が成り立つ。
 しかし 先の固有値類の段階では (7.15) が成立し
 右辺が3項の「レイノルズ」流の互に平衡するが、これは
 粘性による散逸と運動エネルギー — の時空的変化に
 等しい。

今 $\omega_n^2 > 0$ とすると (7.16) から 直ちに
 $|a_n|^2 = 0$ for all n (7.18)
 を得、流れは安定となる。

従つて 解の挙動としては、与えられた 平均流と外場
 に対して (7.3) の 準線型 固有値問題の 解が 固有値と
 固有方程式を求め、もし すべての $\omega_n^2 > 0$ ならば 安定で
 あるから、解は 層流解 によく 終りてゐる。

次 = (6.12) の中に 肩のものが出て来るならば 流れ擾動成分を管の
うす部で、それがわかれば (6.10) に代入して 平均流れの速度
成分が変化して来、それを (7.4) に代入すると 固有値と固有関数
が変化して来る。

しかし固有関数の振幅は 任意なので、その振幅を
あらかじめ一意的に決める事は出来ない点に難点となる。

一案としては先ず $\alpha \rightarrow 1$ 近似 (層流解) の速度分布を以て
(7.3) を解いて 固有値と固有関数を求め、それに任意の
振幅 a_n をかけたものを (6.10) に代入して 平均流れを計算すると、
固有関数はわかっているから 近似は近似的に

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}_0 + \sum_n |a_n|^2 \bar{\psi}_n \quad (7.19)$$

のような解が得られよう。

こゝに $\bar{\psi}_n$ は a_n に比例しない。

(各固有関数についての)

これを (7.12) に代入すると $|a_n|^2$ を定める方程式をうる。

この $|a_n|^2$ を用いて固有値問題を解き直す。

(7.19) から平均流れをうるから その値を用いて、

このようにして一応逐次近似解法を構成する事が

出来る。

このように大変な計算量は予想されるが、一応解の順序は出来上った。

従来安定理論で取扱われるのは最低次の固有値であつたのでよくわからな^{恐れ}が、高次の固有値も安定下限レイノルズ数があつて、レイノルズ数が、高くなる程不安定な固有周数が多くなり、無秩序に近い流れが出来るものと考えられる。

この理論の難点^点は (7.12) 式 従つて (7.14), (7.15) が成立つてあろうか。つまり時間的に発散する場合について、運動方程式 (6.1), (7.1) が成立つてあろうかと言ふ点であるが (7.1) については準線型なのでフーリエ変換のかわりにラプラス変換と考えればよいから問題なく (7.12) は成立つ。

従つて時間的^{時間的}平均として (6.1) が成立つかどうかと言ふ点に帰着するが、これは右辺の変動量の平均値が存在するならば問題はないように思われ、またそれが存在すると言ふのが^{従来からの}乱流統計論の基本的仮定である。

8. 平面ポアセイル流れ

時間平均流れが x 軸に平行で $y = \pm 1$ の間に限られた流れを考えよう。^{簡単のために} なお温度は z -成分のみを考える。

平均流れの運動方程式は (6.1) で与えられるが、 $1 + \bar{u} = U(y)$, $\bar{v} = 0$, $(\bar{\tau} = -U_y)$ とおくと

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \bar{G}_x - \nu U_{yy}(y) - \frac{1}{\rho} (\bar{u}\bar{v} + \bar{v}\bar{u}) = 0 \\ \frac{1}{\rho} \bar{G}_y + U\bar{\tau} + \frac{1}{\rho} (u\bar{\tau} + \bar{u}\tau) = 0 \end{cases} \quad (8.1)$$

$$\frac{1}{\rho} \bar{G} = \frac{1}{\rho} \bar{P} + \frac{U^2}{2} + \frac{1}{\rho} (u\bar{u} + v\bar{v}), \quad (8.2)$$

(8.1), (8.2) の変動流の項はすべて固有関数系によって (6.4) のような和の形に表わされるものとする。

さて (8.1) の 1 式において U , U_y 等は y のみの関数と仮定

$$\bar{G}_{xx} = 0, \quad (8.3)$$

となり、これから

$$\frac{1}{\rho} \bar{G} = -Ax + B(y), \quad (8.4)$$

を得る。 A は y に依らない定数と仮定。

これを (8.1) の 2 式に代入すると

$$B_y(y) = -U\bar{\tau} - \frac{1}{\rho} (u\bar{\tau} + \bar{u}\tau), \quad (8.5)$$

(8.2) を y で微分すると (8.4) を代入して (8.5) に

$$B_y(y) = \frac{1}{\rho} \bar{P}_y + U U_y + \frac{1}{\rho} (u\bar{u} + v\bar{v}), \quad (8.6)$$

上の両式から

$$\frac{1}{\rho} k_y = -\frac{1}{4}(u\hat{z} + v\hat{y}) - \frac{1}{4}(u\hat{u} + v\hat{v}) \quad (8.7)$$

これを積分すると

$$\frac{1}{\rho} \bar{p}(x, y) = -Ax - \frac{1}{4}(u\hat{u} + v\hat{v}) - \frac{1}{4} \int_1^y (u\hat{z} + v\hat{y}) dy \quad (8.8)$$

$$\text{なお } \frac{1}{\rho} \bar{p}(x, 1) = -Ax \approx \frac{1}{\rho} \bar{p}(x, 1) \quad (8.9)$$

$$\text{つまり } A = -\frac{1}{\rho} \bar{p}_y(y=1) \quad (8.9)$$

この圧力傾斜を用いて (8.1) の式は

$$A + \nu U_{yy}(y) + \frac{1}{4}(v\hat{z} + \hat{v}\hat{y}) = 0 \quad (8.10)$$

のようにかける。

これを y で積分すると

$$2A + \nu U_y(y) \Big|_1^1 + \frac{1}{4} \int_1^1 (v\hat{z} + \hat{v}\hat{y}) dy = 0 \quad (8.11)$$

今 $U(y)$ は y に関して対称と考えている。

平均流速を U_m として, (8.10) に $U(y)$ をかけて積分すると

$$2AU_m - \nu \int_{-1}^1 U_{yy} dy + \frac{1}{4} \int_{-1}^1 U(v\hat{z} + \hat{v}\hat{y}) dy = 0 \quad (8.12)$$

$$U_m = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 U(y) dy \quad (8.13)$$

さて圧力損失は、摩擦係数 λ を用いて次のように表わされる。

$$\frac{\rho A \times 2(\frac{4R}{2})}{\frac{\rho}{2} U_m^2} = \lambda = \frac{4}{U_m} A \quad (8.14)$$

またレイノルズ数は

$$R = \frac{U_m}{\nu} \quad (8.15)$$

次に振動流束について (7.1) から

$$\begin{cases} i\omega u + \frac{1}{\rho} G_x - \nu \nabla^2 u - \nu \bar{\zeta} = 0 \\ i\omega v + \frac{1}{\rho} G_y - \nu \nabla^2 v + U\bar{\zeta} + u\bar{\zeta} = 0 \end{cases} \quad (8.16)$$

$$\frac{1}{\rho} G = \frac{p}{\rho} + u U(\eta), \quad (8.17)$$

G を消去すると

$$i\omega \bar{\zeta} + U(\eta) \bar{\zeta}_x + \nu \bar{\zeta}_{\eta\eta} - \nu \nabla^2 \bar{\zeta} = 0, \quad (8.18)$$

今 流束周数を導入して

$$\eta = \phi(\eta) e^{-ikx} [x e^{i\omega t}], \quad (8.19)$$

とかくと

$$u = \phi e^{-ikx}, \quad v = ik\phi e^{-ikx}, \quad \bar{\zeta} = (k^2\phi - \phi_{\eta\eta}) e^{-ikx}$$

$$\nabla^2 \bar{\zeta} = -(k^2 - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2})^2 \phi e^{-ikx}$$

等となるから (8.18) に代入して $i\omega$ を割ると

$$(\omega - kU)(k^2\phi - \phi_{\eta\eta}) - kU_{\eta\eta}\phi = i\nu(k^2 - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2})\phi, \quad (8.20)$$

なる Orr-Sommerfeld eq. を得る。

ここで

$$\phi(\pm 1) = \phi_{\eta}(\pm 1) = 0, \quad (8.21)$$

なる境界条件を考えると、上式は固有値方程式となる。

さて以下簡潔の爲に次の記号を導入しよう。

$$[f] = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f d\eta,$$

(8.20) に $\hat{\phi}$ をかけて積分すると

$$\omega \{ k^2 [\phi \hat{\phi}] + [\phi_y \hat{\phi}_y] \} = k \{ [U \phi \hat{\phi}] + [U \phi_{yy} \hat{\phi}] - [U_{yy} \phi \hat{\phi}] \} \\ = i \nu \{ k^4 [\phi \hat{\phi}] + 2k^2 [\phi_y \hat{\phi}_y] + [\phi_{yy} \hat{\phi}_{yy}] \}, \quad (8.22)$$

さて一般に $\omega = \omega^{(r)} + i \omega^{(i)}$ のように固有値は複素値をとる

と式を 実部と虚部に別けて書くと

$$\omega^{(r)} \{ k^2 [\phi \hat{\phi}] + [\phi_y \hat{\phi}_y] \} = k \{ [U \phi \hat{\phi}] + [U_{yy} \phi \hat{\phi}] + \frac{1}{2} [U(\phi_{yy} \hat{\phi} + \phi \hat{\phi}_{yy})] \}, \quad (8.23)$$

$$\omega^{(i)} \{ k^2 [\phi \hat{\phi}] + [\phi_y \hat{\phi}_y] \} + \frac{i k}{2} [U(\phi_{yy} \hat{\phi} - \phi \hat{\phi}_{yy})] \\ = \nu \{ k^4 [\phi \hat{\phi}] + 2k^2 [\phi_y \hat{\phi}_y] + [\phi_{yy} \hat{\phi}_{yy}] \}. \quad (8.24)$$

弾性問題等ではこのように式から ω のよい近似値が
得られたのであるが、安定問題ではあまりうまくいかない。
(ϕ に 適当な関数を代入して)

特に (8.24) 左辺の2項は固有値方程式も解がないと
出て来ない。

一方 (8.24) 左辺の1項については全体としては (7.16) の
関係がなければならぬ。

即ち各固有値, 固有関数を ω_n, ϕ_n とし振幅を a_n
とすると

$$\sum_n \omega_n^{(i)} |a_n|^2 \{ k^2 [\phi_n \hat{\phi}_n] + [\phi_{n,y} \hat{\phi}_{n,y}] \} = 0, \quad (8.25)$$

その値 (8.12) は

$$\lambda = \frac{4}{R U_m^2} [U_y^2] + \frac{4}{U_m^2} \sum_n k_n [U (\phi_n^A \phi_{ny} - \phi_n^A \phi_{ny})] \quad (8.25)$$

(8.24) に (8.23) と (8.25) を代入すると

$$\lambda = \frac{4}{R U_m^2} [U_y^2] + \frac{2}{R U_m^2} \sum_n \{ k_n^2 [\phi_n^A \phi_n^A] + 2 k_n [\phi_{ny} \phi_{ny}] + [\phi_{ny} \phi_{ny}] \} \quad (8.26)$$

さうして

なお、今の場合、流線のように固有値は、出口側には野分電磁場
から、こゝでは便宜上離散化スペクトルとして扱うこと。

さて、(8.20) に対して 随伴方程式を考へよう。

今その流れ関数を ϕ^* として (8.20) に かけて積分すると

$$\begin{aligned} c \{ k^2 [\phi \phi^*] + [\phi \phi^*] \} - \{ k^2 [U \phi \phi^*] + [U \phi_{yy} \phi^*] + [U_{yy} \phi \phi^*] \} \\ = \frac{iV}{R} \{ k^2 [\phi \phi^*] + 2 k [\phi_{ny} \phi^*] + [\phi_{ny} \phi_{ny}^*] \} \\ k = \omega / c, \end{aligned} \quad (8.27)$$

ϕ^* も 齊次境界条件をもつものとする

$$[U \phi_{yy} \phi^*] = [U \phi^*_{yy} \phi] \quad (8.30)$$

となるので、 ϕ^* の満たす方程式を

$$\begin{aligned} c (k^2 \phi^* - \phi^*_{yy}) - k^2 U \phi^* + U \phi^*_{yy} + 2 U_y \phi^*_y \\ - \frac{iV}{R} (k^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \phi^* = 0, \end{aligned} \quad (8.31)$$

とあはれは" 隣接系となり、これは十分条件を満足するから、

(8.29) となる。

(8.20) を解くには直接 y 方向に階差方程式を立てると
与えられた k に対し
 ω に関する固有値方程式を得るからこれを解くのが最も

手取り早いように見える。(k に対しては連続スペクトル)

以下では ^{少し} Galerkin 法によって求えてみる。

その後に (8.21) の条件を満たす正規直交系 $p_n(y)$ を導入しよう。

$$\frac{1}{2} \int_0^1 p_n p_m dy = \delta_{n,m}, \quad (8.32)$$

例えば $p_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} (1 + \cos \pi y), \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{12}} (1 - 2 \cos \pi y - 3 \cos 2\pi y),$ (8.33)

or $\sqrt{\frac{8}{3}} (\sin \pi y + \frac{1}{2} \sin 2\pi y), \quad \sqrt{\frac{2}{3}} (\sin \pi y - \sin 2\pi y - \sqrt{3} \sin 4\pi y),$

そして
$$\phi(y) = \sum_n A_n p_n(y), \quad \phi^* = \sum_n A_n^* p_n(y), \quad (8.34)$$

と展開出来るものとすると、(8.20) に p_m をかけて積分すると

$$(C k^2 - i \nu k^3) A_m + \sum_n A_n \left\{ C [p_{ny} p_{my}] - k^2 [U p_n p_m] - [U_{yy} p_n p_m] \right. \\ \left. + [U p_{nyy} p_m] - \frac{i \nu}{k} [2 k^2 [p_{ny} p_{my}] + [p_{nyy} p_{myy}]] \right\} = 0, \quad (8.35)$$

これが C に関する固有値方程式となる。

同様に (8.31) から

$$(cR^2 - iV R^3) A_m^* + \sum_n A_n^* \left(c [P_{ny} P_{my}] - R^2 [U P_n P_m] - [U'' P_n P_m] + [U P_{nyy} P_m] - \frac{iV}{R} \{ 2R^2 [P_{ny} P_{my}] + [P_{nyy} P_{myy}] \} \right) = 0 \quad (8.36)$$

を得るが

$$[U P_{nyy} P_m] = [(U P_m)_{yy} P_n], \quad (8.37)$$

なので (8.36) の行列式は (8.35) の転置行列である。

それ故固有値は等しい。

いづれにしてもこれらの固有値方程式から与えられた ω に対し可解番号の ω (複素) 固有値 ω が得られ、それらは互に (7.11) の意味で直交している。

以下の解く手順は 7 節で述べた通りである。