

平面ポアソンの流小の一解法

Orr-Sommerfeld eq. の数値解法には、^(大抵) 微分方程式として数値的に解く方法と解を直交関数系に展開して解く方法とあるが、この後者の由 C. Grosche & H. Sommer (J.F.M. vol. 34 1968) は粘性項の固有関数系を用いている。

彼等の方法では境界条件を満たす直交系を使えるのが便利なので、以下それを少し変形した方法について言及する。

まず O-S eq. は

$$(C-U)(R^2\phi - \phi_{yy}) - U_{yy}\phi - \frac{12}{R}(R^2 - \frac{d^2}{dy^2})\phi = 0, \quad (1)$$

今

$$(R^2 - \frac{d^2}{dy^2})(R^2\phi - \phi_{yy} + \lambda^2\phi) = 0, \quad (2)$$

なる固有値(λ)問題を考える。

解は

$$f_n(y) = c_n \left(\frac{\cosh k y}{\cosh k} - \frac{\cosh p_n y}{\cosh p_n} \right), \quad p_n = \sqrt{\lambda_n^2 - R^2} \quad (3)$$

$$h_n(y) = s_n \left(\frac{\sinh k y}{\sinh k} - \frac{\sinh g_n y}{\sinh g_n} \right), \quad g_n = \sqrt{\lambda_n^2 - R^2} \quad (4)$$

のように与えられ、境界条件

$$\phi(\pm 1) = \phi_y(\pm 1) = 0, \quad (5)$$

を満足すると固有値は

$$k \tanh k + p_n \tanh p_n = 0, \quad (6)$$

$$k \coth k - g_n \cot g_n = 0, \quad (7)$$

β_n, γ_n は実数で n が大きいとき

$$\begin{aligned} k \tanh kr + \lambda_n \tan \lambda_n &\doteq 0 \\ k \coth kr - \mu_n \cot \mu_n &\doteq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

となるから $\lambda \gg k$ とすると

$$\lambda_n \doteq n\pi - \frac{k \tanh kr}{\lambda_n}$$

$$\mu_n = (n + \frac{1}{2})\pi + \frac{k \coth kr}{\mu_n}$$

さて

$$\begin{aligned} F_n(y) &= (k^2 - \frac{d^2}{dy^2}) f_n(y) = -C_n \frac{\lambda_n^2}{\cosh \beta_n} \cosh \beta_n y \\ H_n(y) &= (k^2 - \frac{d^2}{dy^2}) h_n(y) = -S_n \frac{\mu_n^2}{\sinh \gamma_n} \sinh \gamma_n y \end{aligned} \quad (10)$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cosh \beta_n y \cosh \beta_m y dy &= \langle \cosh \beta_n y \cosh \beta_m y \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\cosh(\beta_n - \beta_m) y + \cosh(\beta_n + \beta_m) y) dy \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sinh(\beta_n - \beta_m)}{\beta_n - \beta_m} + \frac{\sinh(\beta_n + \beta_m)}{\beta_n + \beta_m} \right\} = \frac{1}{2(\beta_n^2 - \beta_m^2)} (\beta_n \sinh \beta_n \cosh \beta_m + \beta_m \cosh \beta_n \sinh \beta_m) \\ &= \frac{\cosh \beta_n \cosh \beta_m}{2(\beta_n^2 - \beta_m^2)} (\beta_n \tanh \beta_n - \beta_m \tanh \beta_m) = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq m \\ \frac{1}{2} (1 + \frac{\sinh^2 \beta_n}{2\beta_n^2}) & \text{for } n = m \end{cases} \quad (11) \end{aligned}$$

同様に

$$\langle \sinh \gamma_n y \sinh \gamma_m y \rangle = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq m \\ \frac{1}{2} (1 - \frac{\sinh^2 \gamma_n}{2\gamma_n^2}) & \text{for } n = m \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{したがって } \langle F_n(y) F_m(y) \rangle = \delta_{n,m}, \quad \langle H_n H_m \rangle = \delta_{n,m} \quad (13)$$

と な り ま す ば C_n, S_n を 定 め る 可 い

BPT5

$$\left. \begin{aligned} C_n^2 \frac{\lambda_n^2}{2 \cos^2 p_n} \left(1 + \frac{\sin 2p_n}{2 p_n}\right) &= 1 \\ S_n^2 \frac{\lambda_n^4}{2 \lambda_n^2 p_n} \left(1 - \frac{\sin 2p_n}{2 p_n}\right) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

2.2.12

$$\begin{aligned} \langle \cosh ky \cos p_n y \rangle &= \frac{\rho \sinh k \cos p_n}{\hbar k} + \frac{p_n}{k} \langle \sinh ky \cos p_n y \rangle \\ &= \frac{\sinh k \cos p_n}{k} + \frac{p_n}{k^2} \cosh k \sin p_n - \frac{k^2}{k^2} \langle \cosh ky \cos p_n y \rangle \\ &= \frac{\cosh k \cos p_n}{k^2 + k^2} (k \tan k + p_n \tan p_n) = 0 \end{aligned}$$

1.7) 1.7.12

$$\langle \sinh ky \sin p_n y \rangle = 0 \quad (15)$$

2.2.12

$$\langle f_n(y) f_m(y) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq m \\ + \frac{C_n^2 \lambda_n^2}{2 \cos^2 p_n} \left(1 + \frac{\sin 2p_n}{2 p_n}\right) = + \frac{1}{\lambda_n^2} & \text{for } n = m \end{cases} \quad (16)$$

$$\langle h_n H_m \rangle = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq m \\ + \frac{1}{\mu_n^2} & \text{for } n = m \end{cases} \quad (17)$$

B 3.3.12

$$\langle \cosh^2 ky \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1 + \cosh(2ky)) dy = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sinh(2k)}{2k}\right)$$

$$\langle \sinh^2 ky \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\sinh(2k)}{2k} - 1 \right) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \langle f_n f_m \rangle &= \frac{C_n^2}{2} \left(1 + \frac{\sinh 2k}{2k}\right) + \frac{\delta_{n,m}}{\lambda_n^2} \\ \langle h_n h_m \rangle &= \frac{S_n^2}{2} \left(\frac{\sinh 2k}{2k} - 1 \right) + \frac{\delta_{n,m}}{\mu_n^2} \end{aligned} \quad (19)$$

今 $\phi = \sum_n a_n f_n(y)$ (20)

と展開出来るように

$$\nabla^2 \phi - \phi_{yy} = \sum_n a_n F_n(y) \quad (21)$$

これを(1)に代入すると

$$\sum_n a_n \left[(C-U) F_n(y) - U_{yy} f_n(y) - \frac{iV}{k} \left(k^2 - \frac{d^2}{dy^2} \right) F_n \right] = 0$$

① $f_m(y)$ とかけて積分すると $\langle f_m \frac{d^2}{dy^2} F_n \rangle = \langle F_n \frac{d^2}{dy^2} f_m \rangle$ であるから

$$\left(\frac{C}{\lambda_m^2} - \frac{iV}{k} \right) a_m - \sum_n a_n \left\{ \langle U F_n f_m \rangle + \langle U_{yy} f_n f_m \rangle \right\} = 0 \quad (22)$$

$$\langle U \rangle \approx U_m \quad (23)$$

とすると

$$\left(\frac{C-U_m}{\lambda_m^2} - \frac{iV}{k} \right) a_m - \sum_n a_n \left[\langle (U-U_m) F_n f_m \rangle + \langle U_{yy} f_n f_m \rangle \right] = 0 \quad (25)$$

m が充分大きいと 和の項は小さくなると思える

$$\frac{C-U_m}{\lambda_m^2} - \frac{iV}{k} \approx 0, \quad C \approx U_m + \frac{iV}{k} \lambda_m^2, \quad (24)$$

$$\approx U_m + \frac{iV}{k} n^2 \pi^2,$$

これは $n \gg 1$ の良い近似であることがう。