

✓

No.

Date 62. 8. 17

非斉次偏微分方程式の近似解

頁

I. 円以外の断面形状の場合

1

1. 定常流れ

1

2. 振動流れ (斉次解のみ)

5-6

2. 平板の場合

7-8

1. 円以外の断面の場合

1.1 時間平均流れ

解くべき方程式は

$$\nabla^2 \psi(x, y) = -\zeta(x, y). \quad (1.1)$$

$$\nabla^2 \zeta(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(\partial \zeta)_y] + (\partial^2 \zeta)_x, \quad (1.2)$$

であるが、物体が円以外の断面の場合、等角寫像により、単位円に寫像して、その面を考えれば円の場合と同様な方法で近似解が求められる。

そこで物体外形が次の寫像で z -平. の単位円に寫像されるものとする。

$$z = x + iy = z(\theta), \quad t = z + i\eta = re^{i\theta}, \quad (1.3)$$

$$\frac{dz}{d\theta} = \xi_x - i\xi_y, \quad \left| \frac{dz}{d\theta} \right|^2 = \xi_x^2 + \xi_y^2 = \rho^2, \dots$$

$$\text{例として橋円では } z = t + \frac{a^2}{t}, \quad \frac{dz}{d\theta} = 1 - \frac{a^2}{t^2} = 1 - \frac{a^2 e^{-2i\theta}}{r^2} \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{\rho^2} = 1 + \frac{a^4}{r^4} - 2\frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta$$

(1.1), (1.2) を t -平. の方程式に変換する。

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \xi_{xx} + \xi_{yy} = \eta_{xx} + \eta_{yy} = 0, \quad \left. \begin{array}{l} \end{array} \right\}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \xi_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \eta_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2\xi_x \eta_x \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \xi_{xx} \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_{xx} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \left. \begin{array}{l} \end{array} \right\}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \xi_y^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \eta_y^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2\xi_y \eta_y \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \xi_{yy} \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_{yy} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \left. \begin{array}{l} \end{array} \right\}$$

$$\therefore \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = g^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right), \quad (1.4)$$

$$\text{また} \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

また

$$\begin{aligned} u' \zeta_x + v' \zeta_y &= \psi'_y \zeta_x - \psi'_x \zeta_y = (\zeta_y \psi'_3 + \eta_y \psi'_1)(\zeta_x \zeta_3 + \eta_x \zeta_1) \\ &\quad - (\zeta_x \psi'_3 + \eta_x \psi'_1)(\zeta_y \zeta_3 + \eta_y \zeta_1) \\ &= (\zeta_x \eta_y - \zeta_y \eta_x) \psi'_1 \zeta_3 + (\zeta_y \zeta_x - \zeta_x \zeta_y) \psi'_3 \zeta_1 \\ &= g^2 (\psi'_1 \zeta_3 - \psi'_3 \zeta_1) \\ &= \frac{g^2}{r} (\psi'_\theta \zeta_r - \psi'_r \zeta_\theta), \end{aligned} \quad (1.5)$$

また (1.1) は

$$\nabla^2(r, \theta) \bar{\psi} = -\frac{1}{g^2} \bar{\zeta}, \quad \nabla^2(r, \theta) = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2}, \quad (1.6)$$

(1.2) は

$$\text{よ} \nabla^2(r, \theta) \bar{\zeta} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} [\psi'_\theta \zeta_r - \psi'_r \zeta_\theta], \quad (1.7)$$

この内 (1.7) は円筒の場合と全く同じ形なので $\bar{\psi}, \bar{\zeta}$ が与えられる場合は円筒の場合と全く同じ手法で解が求まる。

また (1.6) について (1.7) に よって 得られた 解 を $\bar{\zeta}^2$ で割って おけば 円筒 の場合 と 同い という 事 であり、 齊次 解 は 零

$$\nabla^2(r, \theta) \bar{\zeta} = 0, \quad \nabla^2 \bar{\psi} = 0 \quad (1.8)$$

の 解、つまり $t-H$ の 調和 関数 と。

$$\nabla_{(t-H)}^2 \bar{\psi} = -\frac{1}{g^2} (\text{Harmonics in } t-H). \quad (1.9)$$

の角と角との和で表わされる。

(1.9) の角は (1.10) のように書ける。
 $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \log R \cdot r' dr' d\theta'$

$$\psi_0(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty (1 - 2a^2 \cos \theta + a^4) \log R \cdot \log r' \cdot r' dr' d\theta' \quad (1.10)$$

$$\psi_n(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty (1 - 2a^2 \cos \theta + a^4) \log R \cdot \frac{dr' d\theta'}{r'^{n+1}} \cos n\theta' \quad (1.10)$$

$$\text{但し } R^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta'),$$

$$\text{即ち } \log R = \begin{cases} \log r - \sum \frac{1}{m} \left(\frac{r'}{r}\right)^m \cos m(\theta - \theta'), & \text{for } r > r' \\ \log r' - \sum \frac{1}{m} \left(\frac{r}{r'}\right)^m \cos m(\theta - \theta'), & \text{for } r < r' \end{cases}$$

と展開し、積分する

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{(1 - 2a^2 \cos \theta + a^4)}{r'^{n+1}} \log R \cdot \cos n\theta' d\theta'$$

$$= \left(1 + \frac{a^4}{r^4}\right) \left[\log r - \frac{a^2}{2r^2} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \cos 2\theta \right] \quad \text{for } n=0$$

$$= -\frac{1 + (a^4/r^4)}{2} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \cos 2\theta + \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{r'}{r}\right)^3 \cos 3\theta \quad \text{for } n=1$$

$$= -\frac{(1 + a^4)}{2n} \left(\frac{r'}{r}\right)^n \cos n\theta + \frac{a^2}{2} \left[\frac{1}{n+2} \left(\frac{r'}{r}\right)^{n+2} \cos(n+2)\theta + \frac{1}{n-2} \left(\frac{r'}{r}\right)^{n-2} \cos(n-2)\theta \right] \quad \text{for } n \geq 2$$

$$= -\frac{(1 + a^4)}{4} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \cos 2\theta - \frac{a^2}{r^2} \left[\log r - \frac{1}{8} \left(\frac{r'}{r}\right)^4 \cos 4\theta \right], \quad \text{for } n=2$$

以上は $r > r'$ の場合で、 $r < r'$ ならば r と r' を入れ替える。

(結果の所観察の方が早い。また複素関数を用いて

除いてある) 結果は次の通り

$h=0$

$$\left(1 - \frac{2a^2}{r^2} \cos \theta + \frac{a^4}{r^4}\right) \log r$$

$$= V^2 \left[\frac{r^2}{4} (\log r - 1) + \frac{a^4}{4r^2} (\log r + 1) + \frac{a^2}{2} \left(\log r - \frac{1}{2r^2} \right) \cos \theta \right]$$

(1.11)

$$\left(1 - \frac{2a^2}{r^2} \cos \theta + \frac{a^4}{r^4}\right) \frac{\cos \theta}{r}$$

$$= V^2 \left[\left(\frac{r}{2} \log r + \frac{a^4}{8r^2} + \frac{a^2}{2r} \log r \right) \cos \theta + \frac{a^2}{8r} \cos 3\theta \right],$$

(1.12)

$$\left(1 - \frac{2a^2}{r^2} \cos \theta + \frac{a^4}{r^4}\right) \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$= V^2 \left[-\frac{\cos \theta}{r} + \frac{a^4 \cos \theta}{12r^4} - \frac{a^2}{6r^2} + \frac{a^2}{10r^2} \cos 3\theta \right]$$

(1.13)

$$\left(1 - \frac{2a^2}{r^2} \cos \theta + \frac{a^4}{r^4}\right) \frac{\cos h\theta}{r^n}$$

$$= V^2 \left[-\frac{1}{4(n-1)r^{n-2}} + \frac{a^4}{4(n+1)r^{n+2}} \right.$$

$$\left. - \frac{a^2}{4r^n} \left(\frac{\cos h-2\theta}{n-1} - \frac{\cos h+2\theta}{n+1} \right) \right] \quad \text{for } h \geq 2$$

(1.14)

2. 振動流れ

方程式は

$$-k^2 \zeta + \nabla^2 \zeta = + \frac{1}{2} \left[(u\bar{\zeta} + \bar{u}\zeta)_x + (v\bar{\zeta} + \bar{v}\zeta)_y \right], \quad (2.1)$$

(1.3) によつて $k = pl$ の零位円を寫像せしめると

前節同様

$$\nabla_{(r,\theta)}^2 \zeta - \frac{k^2}{g_0} \zeta = \frac{1}{2} \left[\bar{\psi}_1 \zeta_1 + \psi_1 \bar{\zeta}_1 - \bar{\psi}_3 \zeta_3 - \psi_3 \bar{\zeta}_3 \right], \quad (2.2)$$

となつて 円柱の場合の手法が適用出来るが今は

齊地解から少し複雑なものを以下を以てして少し置く。

$$\nabla^2 \zeta - \frac{k^2}{g_0} \zeta = 0, \quad (2.3)$$

この解の $|k| \gg 1$ の漸近解を

$$\zeta = e^{-k\rho(r,\theta)} f(r,\theta), \quad (2.4)$$

と仮定

$$\zeta_r = \left[-(k\rho)_r f + f_r \right] e^{-k\rho(r,\theta)}$$

$$\zeta_{rr} = \left[(k\rho)_r^2 f - (k\rho)_{rr} f - 2(k\rho)_r f_r + f_{rr} \right] e^{-k\rho}$$

$$\zeta_{\theta\theta} = \left[(k\rho)_\theta^2 f - (k\rho)_{\theta\theta} f - 2(k\rho)_\theta f_\theta + f_{\theta\theta} \right] e^{-k\rho},$$

$$\nabla^2 \zeta - \frac{k^2}{g_0} \zeta = \left[\left\{ k^2 \left(\rho_r^2 + \frac{\rho_\theta^2}{r^2} - \frac{1}{g_0} \right) - k \nabla^2 \rho \right\} f - 2k\rho_r f_r + \frac{f_r}{r} - \frac{2k\rho_\theta f_\theta}{r^2} + \nabla^2 f \right] e^{-k\rho}, \quad (2.5)$$

この式を $O(k)$ の項に満足するに

$$\frac{1}{b^2} = k_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \dots (2.6)$$

$$f \nabla^2 p + 2 p_r \frac{f}{r} + \frac{2 p_\theta}{r^2} f_\theta = 0,$$

特に極座標では (1.3') より

$$\frac{1}{b^2} = 1 - \frac{2a^2}{r^2} \cos^2 \theta + \frac{a^4}{r^2} = \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{2a}{r} \sin \theta\right)^2,$$

より $p_r = \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right), \quad p_\theta = 2a \sin \theta.$

$$p = r + \frac{a^2}{r} - 2a \cos \theta,$$

これらは (2.6) の 1 式 を満たす。

また $\nabla^2 p = \frac{1}{r} + \frac{a^2}{r^3} - \frac{2a}{r^2} \cos \theta = \frac{p}{r^2}, \quad (2.8)$

となるので

$$f = \sqrt{\frac{a \sin \theta}{\left(r - \frac{a^2}{r}\right)}}, \quad \dots (2.9)$$

とすると

$$p_r \frac{f_r}{f} = -\frac{1 - \frac{a^2}{r^2}}{2r^2}, \quad p_\theta \frac{f_\theta}{f} = \frac{a \cos \theta}{r^2}$$

よって (2.6) の 2 式 も満たす。

よって (2.3) の漸近解は 2 点 のように得る

$$\psi(r, \theta) = \sqrt{\frac{a \sin \theta}{r - \frac{a^2}{r}}} e^{-k \left(r + \frac{a^2}{r} - 2a \cos \theta\right)}, \quad \dots (2.10)$$

$\sin \theta > 0$

3. 平板の場合

前1, 2節の例で 楕円の極限として 平板の場合
が得られるが, 振動流れでは板上で発散して
具合が悪い。
漸近近似解

そこで振動流れでは 物理空間の方程式 そのものを
扱うべきであろう。

$$[\nabla^2 - k^2] \zeta(x, y) = 0, \quad (3.1)$$

この解を

$$\zeta(x, y) = f(x, y) e^{-ky}, \quad (3.2)$$

とおくと,

$$[-2kf_y + \nabla^2 f] e^{-ky} = 0,$$

となるから

$$f_y(x, y) = 0$$

とおくと

つまり

$$\zeta(x, y) = e^{-ky} f(x), \quad (3.3)$$

が 漸近的 齊次 解となる。

非齊次 方程式については 全く

$$[\nabla^2 - k^2] \zeta(x, y) = e^{-ky} F(x, y) \quad (3.4)$$

の場合,

$$\zeta = e^{-ky} h(x, y), \quad (3.5)$$

とおくと

$$-2b h_y + \nabla^2 h_x = F(x, y),$$

$$h \doteq -\frac{1}{2b} \int F(x, y) dy, \quad \dots (3.6)$$

また

$$[\nabla^2 - b^2] f(x, y) = e^{-by} F(x, y), \quad \dots (3.7)$$

$b \neq 0$

の場合は

$$f = e^{-by} g(x, y), \quad \dots (3.8)$$

とすると

$$[(p^2 - b^2)g - 2bg_y + \nabla^2 g] = F(x, y), \quad \dots (3.9)$$

次にさらに 対応する 流線函数は ⁵⁰⁰一般に (3.8) の形式と
すると

$$\nabla^2 \psi = -e^{-by} g(x, y), \quad \dots (3.10)$$

で
て
か
く

$$\psi = e^{-by} A(x, y), \quad \dots (3.11)$$

とすると

$$p^2 A - 2bAy + \nabla^2 A = -g(x, y), \quad \dots (3.12)$$

$$A \doteq -\frac{1}{p^2} g(x, y),$$

とすると