

✓

M-139

運性季 62.9.29~30

No. (原山寺)

Date 62.8.10

振動ストークス流れ

別所正利

概要

頁

1. 振動ストークス流れの解について

1

2. 楕円柱

5

3. 平板

11

4. 円筒内柱の周りのポテンシャル流れ

18-23

附録 A. 平板の左右側面回転の解

A-1~16

附録 B. " 前後動の解

B-1~6

概要

最近 振動 または 動揺する物体に働く流体力の研究が多いが、その粘性影響に関する理論的研究は少ない。

理論面から見ると 粘性の研究は ほとんど 境界層理論と 乱流理論から成り立っており、特に 振動する物体の^{まわりの}流れの解が求められた例は少ない。

本報は 振動する物体のまわりの ナビエ・ストークス方程式の線型解(以下 振動 ストークス流れと称する)を 橋内流およびその極限の平板 について解き、次の段階で ϵ^2 近似を求める為の用意をしようとするものである。

1 節では 線型解の レイノルズ数 が充分大きい時の 近似境界層微分方程式を導き、2 節では 橋内流について その近似解を与える。

この橋内流を 極限移行して 平板に近づくと 端点で 渦度 が 自乗積分不可能な無限大となり、 ϵ^2 近似解は 対数的に無限大となる。

物理的に 充分予想されるように この場合

端点から外方に渦のある流れ模型が与えられており、

3節では、^{(1) 節の}境界微分方程式をとりて平板のまわりの粘性流れを求める。

結果は、^{線型}渦が外方に無限遠まであり、端点では渦度は有限となる。

そして力の粘性影響分は角がない場合と比べてオーダーが大きくなる(幅が等しい板に対し Re 増となる)。

なお 4節では、2本2本置き円柱のポテンシャル流れの解 (あまり文が長くないので) を記しておいた。

いづれこれらについての粘性解も求める予定である。
(お近頃のこと)

1. 振動 ストークス 流れ の 解 について

運動方程式

$$\left. \begin{aligned} i\omega u + \frac{p}{\rho} + \nu \zeta_y &= 0 \\ i\omega v + \frac{p}{\rho} + \nu \zeta_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

$$i\omega \zeta - \nu \nabla^2 \zeta = 0, \quad (1.2)$$

$$u = \zeta_y, \quad v = -\zeta_x, \quad \zeta = -\nabla^2 \psi, \quad (1.3)$$

$$\psi = \psi_p + \psi_F, \quad (1.4)$$

よおす, ψ_p は 強制項とすると

$$\zeta = -\nabla^2 \psi_F = -k^2 \psi_F, \quad (1.5)$$

ψ_p の 柱状関数 (速度ポテンシャル) ϕ_p を $\frac{1}{\rho} \lambda$ として

$$\phi_{px} = u_p, \quad \phi_{py} = v_p, \quad (1.6)$$

よおす

$$i\omega \phi_p = -\frac{p}{\rho}, \quad (1.7)$$

$$\text{又} \quad k^2 \psi_F \sim \nabla^2 \psi_F = 0, \quad (1.8) \quad k^2 = \frac{i\omega}{\nu}$$

よおす

$$(k^2 - \nabla^2) K_0(kR) = 0, \quad (1.9) \quad R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

よおすから

$$\psi_F(x, y) = \int_C \phi(x, y') K_0(kR) ds(x, y'), \quad (1.10)$$

と書ける。

よおす $|k| \gg 1$ とすると

$$K_0(kR) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2kR}} e^{-kR}$$

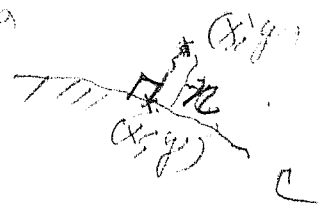
があるから (1.10) の積分は $(x, y) = (x', y')$ の近くの値で決まってしまう

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_0(k\sqrt{x^2+y^2}) dx = \frac{\pi}{k} e^{-ky} \quad (1.11)$$

なる積分があるのだから C の近くで

$$\psi_F(x, y) \doteq \frac{\pi\sigma(x', y')}{k} e^{-ky} \quad (1.12)$$

但し (x', y') は (x, y) から C に下(左)垂線の足で k はそれまでの距離とする。



また C 上では

$$\left. \begin{aligned} \psi_F(x, y)|_C &\doteq \frac{\pi\sigma(x, y)}{k} \\ \frac{\partial \psi_F}{\partial n} |_C &\doteq -\pi\sigma(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

さて境界条件は

前後振動の振動 γ とする

$$\psi = i\omega\gamma, \quad \psi_n = i\omega\gamma_n \quad (1.14)$$

左右振動の振動 η とする

$$\psi = -i\omega\eta x, \quad \psi_n = -i\omega\eta x_n \quad (1.15)$$

回転振動の振動 α とする

$$\psi = \frac{i\omega}{2}\alpha(x^2+y^2), \quad \psi_n = i\omega\alpha(x x_n + y y_n) \quad (1.16)$$

$$\Phi = 11x_1 + 11x_2 + \dots$$

No. 3

Date

まず ψ_0 の近似として

$$\psi_0|_c = f, \quad \left[f = \frac{1}{2} \log y, -i \omega x, \frac{1}{2} \log (xy) \right], \quad (1.17)$$

とすると (1.14) ~ (1.16) の法則微分の条件は, (1.13) により

$$\psi_{pn} = \overline{\phi}_{ps}$$

$$f_n = \psi_{pn} + \psi_{En} = \psi_{pn} - \pi \sigma(xy) = \overline{\phi}_{ps} - \pi \sigma, \quad (1.18)$$

$$\sigma = -\frac{1}{\pi} [f - \psi_0]_n, \quad (1.18)$$

この近似値を入れたと ψ_1 の条件は

$$f = \psi_1|_c - \frac{1}{\pi} [f - \psi_0]_n$$

$$[\psi_0 + \psi_1]_c = f + \frac{1}{\pi} f_n - \frac{\psi_{En}}{\pi} = f + \frac{1}{\pi} f_n + \frac{\phi_{ps}}{\pi}$$

ϕ_{ps} は ψ_0 の近似のポテンシャルとする。

ψ_0 は ψ_0 の近似の流線関数, ψ_1 は ψ_1 の近似の流線関数とする。

$$\psi_1|_c = \frac{1}{\pi} (f_n + \phi_{ps}), \quad (1.19)$$

(1.17), (1.19) をといて $\psi_0 + \psi_1$ を求め, (1.12) の ψ_1 を ψ_0 と入れ変えて $O(1/n)$ までの解が得られる。

同様の前後動を解くことにする。 ($\theta = r \sin \theta$)
(電位平衡)

$$\left. \begin{aligned} \psi_{p0} &= i\omega_3 \frac{\sin \theta}{r}, & \frac{\partial \psi_{p0}}{\partial r} &= -i\omega_3 \frac{\sin \theta}{r^2} \\ \phi_{p0} &= i\omega_3 \frac{\cos \theta}{r}, & \frac{\partial \phi_{p0}}{\partial r} &= -i\omega_3 \frac{\cos \theta}{r^2} \end{aligned} \right\} (1.20)$$

$$\therefore \sigma_r = -\frac{2i\omega_3^2}{\pi} \sin \theta \cos \theta, \quad (1.21)$$

$$\psi_{p1} = -\frac{\pi}{k} \sigma_r = 2i\omega_3 \frac{\sin \theta}{k} \frac{\cos \theta}{r}, \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \therefore \psi &= i\omega_3 \frac{\sin \theta}{r} \left(1 + \frac{2}{k}\right) + \frac{2i\omega_3}{k} \sin \theta e^{-k(r-1)} \\ &= i\omega_3 \sin \theta \left[\frac{1+\frac{2}{k}}{r} - \frac{2}{k} e^{-k(r-1)} \right], \end{aligned} \quad (1.23)$$

正しい漸近形を得るためには $\frac{2}{k}$ がかかっている。

よって (1.11) の近似積分で曲率を無視する所を改めて

しかし明らかに $\frac{2}{k}$ の近似の力には関係しない。

よって以上の近似で線形解は求めらる。

考えてよからう。

2. 橋円柱

次に橋円柱 について 考えよう

$$x+iy = z = t + \frac{a^2}{t} = (r + \frac{a^2}{r}) \cos \theta + i (r - \frac{a^2}{r}) \sin \theta, \quad (1.24)$$

$a \leq 1, \quad \lambda = (1-a^2)/(1+a^2)$

これより 橋円は z 平面の単位円に 写像される。

前後動 に対して,

$$\left. \frac{\psi_{p0}}{i\omega_3} \right|_c = y \Big|_c = (r - a^2) \sin \theta = \frac{f}{i\omega_3} \quad (1.25)$$

これから この解は

$$\frac{\psi_{p0}}{i\omega_3} = \frac{1-a^2}{r} \sin \theta, \quad (1.26)$$

$$\left. \frac{\sigma}{i\omega_3} \right| = - \frac{\sin \theta}{\pi} \left[(1+a^2) + (1-a^2) \right] \frac{\partial r}{\partial n}, \quad (1.27)$$

$$\frac{ds}{ds} = \frac{\partial r}{\partial n} = \left| \frac{dz}{dz} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1-a^2)^2 \cos^2 \theta + (1+a^2)^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^4-2a^2 \cos 2\theta}}$$

$$\xrightarrow{a \rightarrow 1} \frac{1}{2 \sin \theta}$$

(1.28)

これは 平板 である (以下 平板 と して)

$$\frac{\sigma}{i\omega_3} = - \frac{k}{\pi} \sin \theta, \quad (1.29)$$

$$\left. \frac{\psi_{p1}}{i\omega_3} \right|_c = \frac{1}{R} \sin \theta \quad (1.30)$$

$$\therefore \frac{\phi_{p1}}{i\omega_3} = \frac{1}{\pi R} \int_{-2}^2 \frac{dz}{z-X} = \frac{1}{\pi R} \log \left(\frac{-2+X}{2+X} \right), \quad (1.31)$$

$$\frac{ds}{ds} = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(1+a^2)^2 \sin^2 \theta + (1-a^2)^2 \cos^2 \theta} = \sqrt{1+a^4-2a^2 \cos 2\theta}$$

左右動では

$$\left. \frac{\psi_{p0}}{i\omega\eta} \right|_c = -x = -(1+a^2)\cos\theta = \frac{f}{i\omega\eta} \quad (1.32)$$

$$\frac{\psi_{p0}}{i\omega\eta} = -\frac{(1+a^2)}{r}\cos\theta, \quad \frac{\phi_{p0}}{i\omega\eta} = -\frac{(1+a^2)}{r}\sin\theta$$

$$\frac{\sigma}{i\omega\eta} = -\frac{\cos\theta}{\pi} \left[-(1-a^2) + (1+a^2) \frac{dr}{dn} \right] \frac{2}{\pi} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+a^4-2a^2\cos 2\theta}}, \quad (1.33)$$

$$\xrightarrow{a=1} \frac{1}{\pi} \frac{\cos\theta}{|\sin\theta|},$$

$$\left. \frac{\psi_{p1}}{i\omega\eta} \right|_c = -\frac{\pi\sigma}{k i\omega\eta} = -\frac{2\cos\theta}{k\sqrt{1+a^4-2a^2\cos 2\theta}} \quad (1.34)$$

今

$$\frac{\psi_{p1}}{i\omega\eta} = -\frac{1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} \frac{\cos(2n+1)\theta}{r^{2n+1}}, \quad (1.35)$$

$$\frac{\phi_{p1}}{i\omega\eta} = -\frac{1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} \frac{\sin(2n+1)\theta}{r^{2n+1}}$$

係数表現が出来るようにと

$$A_{2n+1} = \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta \cos(2n+1)\theta}{\sqrt{1+a^4-2a^2\cos 2\theta}} d\theta = \frac{8}{\pi(1+a^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta \cos(2n+1)\theta}{\sqrt{1-k^2\cos^2\theta}} d\theta$$

$$= \frac{8(-)^n}{\pi(1+a^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta \sin(2n+1)\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} d\theta, \quad m = \frac{2a}{1+a^2} \leq 1, \quad (1.36)$$

$$B_{2n} = \frac{4}{\pi(1+a^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2n\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} d\theta, \quad (1.37)$$

右の定数を定義する

$$A_{2n+1} = (-)^n (B_{2n} - B_{2n+2}), \quad (1.38)$$

とする。

さて

$$B_0 = \frac{4}{\pi(1+a^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m^2 k^2 \theta}} = \frac{4}{\pi(1+a^2)} K(m), \quad (1.39)$$

(楕円積分)

$$B_2 = \frac{4}{\pi(1+a^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-2m^2 \theta) d\theta}{\sqrt{1-m^2 k^2 \theta}} = \frac{4}{\pi(1+a^2)} \left[\left(1-\frac{2}{m^2}\right) K(m) + \frac{2}{m^2} E(m) \right] \quad (1.40)$$

$$B_{2n-2} - B_{2n+2} = \frac{4}{\pi(1+a^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2 z \theta k^2 z \theta d\theta}{\sqrt{1-m^2 k^2 \theta}} = -\frac{16}{\pi(1+a^2)m^2} \left[k^2 z \theta \sqrt{1-m^2 k^2 \theta} - 2n \int \sqrt{1-m^2 k^2 \theta} d\theta \right]$$

$$= \frac{32n}{\pi(1+a^2)m^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2n\theta (1-m^2 k^2 \theta) d\theta}{\sqrt{1-m^2 k^2 \theta}}, \quad k^2 \theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$= \frac{32n}{\pi m^2 (1+a^2)} \left[\left(1-\frac{m^2}{2}\right) B_{2n} + \frac{m^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta \cos 2n\theta d\theta}{\sqrt{1-m^2 k^2 \theta}} \right]$$

$$= \frac{8n}{m^2} \left(1-\frac{m^2}{2}\right) B_{2n} + \frac{16n}{\pi(1+a^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos 2n\theta - 2\theta + \cos 2n\theta + 2\theta)}{\sqrt{1-m^2 k^2 \theta}} d\theta$$

$$= \frac{8n}{m^2} \left(1-\frac{m^2}{2}\right) B_{2n} + 2n (B_{2n-2} + B_{2n+2}),$$

$$(2n+1)B_{2n+2} = -\frac{8n}{m^2} \left(1-\frac{m^2}{2}\right) B_{2n} - (2n-1)B_{2n-2}, \quad (1.41)$$

$$\therefore 3B_4 = -\frac{8}{m^2} \left(1-\frac{m^2}{2}\right) B_2 - B_0$$

$K(m)$ は $m \rightarrow 1$ として $\ln(1-m^2) = 2 \ln \left(\frac{1-a^2}{1+a^2} \right) = 2 \ln(a) - \frac{2}{a^2}$ の

特異性をもつので平版では解は発散する。

回転動に對して

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{p0}}{i\omega\alpha} \Big|_c &= \frac{1}{2} \left[(1+a^2)^2 \cos^2\theta + (1-a^2)^2 \sin^2\theta \right] \\ &= \frac{1}{2} [1+a^4 + 2a^2 \cos 2\theta] = \frac{1}{2} (1+a^4 + 2a^2 \cos 2\theta) \quad (1.42) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\psi_{p0}}{i\omega\alpha} = \frac{a^2 \cos 2\theta}{r^2}, \quad \frac{\phi_{p0}}{i\omega\alpha} = \frac{a^2}{r^2} \sin 2\theta, \quad (1.43)$$

$$\frac{\sigma}{i\omega\alpha} = - \frac{a^2}{\pi} \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{1+a^4-2a^2\cos 2\theta}} \quad (1.44)$$

$$\frac{\psi_{p1}}{i\omega\alpha} \Big|_c = \frac{a^2}{R} \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{1+a^4-2a^2\cos 2\theta}} \quad (1.45)$$

$$\text{令} \quad \frac{\psi_{p1}}{i\omega\alpha} = \frac{a^2}{R} \sum_0^\infty \frac{C_{2n} \cos 2n\theta}{r^{2n}}, \quad \frac{\phi_{p1}}{i\omega\alpha} = \frac{a^2}{R} \sum_0^\infty \frac{C_{2n} \sin 2n\theta}{r^{2n}}, \quad (1.46)$$

と假定する

$$\begin{aligned} C_{2n} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta \cos 2n\theta}{\sqrt{1+a^4-2a^2\cos 2\theta}} d\theta = \frac{4}{\pi(1+a^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta \cos 2n\theta}{\sqrt{1-m^2\sin^2\theta}} d\theta \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2} (B_{2n+2} + B_{2n-2}), \quad (1.47) \end{aligned}$$

$$C_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{1+a^4-2a^2\cos 2\theta}} d\theta = \frac{-4}{\pi(1+a^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{1-m^2\sin^2\theta}} d\theta = -\frac{B_2}{1+a^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2+y^2}{2} &= \frac{1}{2} \left[\left(r+\frac{a^2}{r}\right)^2 \cos^2\theta + \left(r-\frac{a^2}{r}\right)^2 \sin^2\theta \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(r^2 + \frac{a^4}{r^2} + 2a^2 \cos 2\theta \right) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{x^2+y^2}{2} \right)_r = 1 - a^4 //$$

左右動の力は

$$Y = - \int \left(p \frac{\partial x}{\partial s} + \mu \int \frac{\partial x}{\partial u} \right) ds = p i \omega \int \left(p x_s + \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} x_u \right) ds$$

$$\frac{Y}{-p \omega^2 (1+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{2\pi} \left[\left(1 + \frac{A_1}{k} \right) x_1^2 \theta + \frac{2}{k} \frac{(1-a^2) \cos^2 \theta}{(1+a^2)^2 \sqrt{1+a^4-2a^2 \cos 2\theta}} \right] d\theta$$

$$\frac{Y}{-p \omega^2 (1+a^2)^{\frac{3}{2}}} = 1 + \frac{A_1}{k} + \frac{(1-a^2) A_1}{2k(1+a^2)^2} = 1 + \frac{A_1}{k} \left(1 + \frac{1-a^2}{(1+a^2)^2} \right)$$

$$A_1 = B_0 - B_2 = \frac{8}{\pi (1+a^2)^{\frac{3}{2}}} [K(m) - E(m)], m = \frac{2a}{1+a^2}$$

$$K(m) \xrightarrow{m \rightarrow 1} 2 \log 2 - \frac{1}{2} \log(1-m^2),$$

$$E(m) \xrightarrow{m \rightarrow 1} 1$$

$$K - E \xrightarrow{m \rightarrow 1} 3.863 - \frac{1}{2} \log(1-m^2),$$

$$A_1 \xrightarrow{m \rightarrow 0} 2, \quad A_1 \xrightarrow{m \rightarrow 1} 2 \log(1-m^2)$$

四 解法 10 に対して

$$M = - \int_L \left[p \left(\frac{x_3^2}{2} \right)_S + \mu \left(\frac{x_3^2}{2} \right)_n \right] ds$$

$$= + \rho \omega \int_C \left[\phi \left(\frac{x_3^2}{2} \right)_S + \frac{1}{R} \left(\frac{x_3^2}{2} \right)_n \right] ds$$

(2)

$$\frac{M}{-\rho \omega^2 a^4} = \int_0^{2\pi} \left[\left(1 + \frac{C_2}{R} \right) a^4 \cos^2 \theta + \frac{a^4 \cos^2 \theta (1 - a^4)}{R \sqrt{1 + a^4 - 2a^2 \cos \theta}} \right] d\theta$$

(3)

$$\frac{M}{-\pi \rho \omega^2 a^4} = \left(1 + \frac{C_2}{R} \right) + \frac{1 - a^4}{R} C_0 = 1 + \frac{1}{R} \left[C_2 + (1 - a^4) C_0 \right]$$

(4)

3. 平板

積円柱の極限としての平板の解は対数的に無限大となり発散する。

実在の平板では常に厚みがあり、両端も有限の曲率半径をもつとすれば、前節の解を適用出来るであろうが、少々疑問が残る。

さて、1節では 0(右)の値も無視して ϕ 1 近似をホウロウシヤル流小と1次カ
考えて見ると、これを逐次近似的に進める必要はない。
即ち境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \psi_p + \psi_F &= f \\ \psi_{pn} + \psi_{Fn} &= f_n \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

で $\psi_F = \frac{\pi}{\epsilon} \sigma$, $\psi_{Fn} = -\pi \sigma$, (3.2) [(1.13)]

であるから、(3.1)式から

$$\psi_{pn} = f_n - \psi_{Fn} = -\pi \sigma \quad (3.3) [(1.18)]$$

これを (3.1) 式に代入して

$$\psi_p + \frac{1}{\epsilon} \psi_{pn} = f + \frac{f_n}{\epsilon} \quad (3.4) [(1.19)]$$

となり、左辺の2項を ϕ 1 近似と1次カでもよく、
 ψ_p に属する積分方程式を得る。

平板で(18) (中2とする) (19) (中2とする) を標準化して

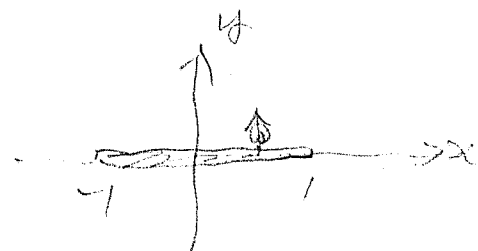
$$\begin{aligned} \psi + \frac{1}{k} \psi_y &= -x, \quad \dots \text{左側} \\ \frac{x^2}{2}, \quad \dots \text{右側} \end{aligned} \quad (3.5)$$

中2で(18) (中2とする) (19) (中2とする)

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(\xi,0)}{x-\xi} d\xi, \quad (3.6)$$

$$\psi(x,y) = \phi_x(x,y)$$

左側(18) (中2とする) (19) (中2とする)



$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(\xi,0)}{x-\xi} d\xi - \frac{1}{k} \phi(x,0) = f(x), \quad (3.5')$$

なる特異積分方程式となり、水面と板の平板の
重力係数問題に類似する積分方程式に似ている。

(板の厚さは長さは数で実数であった)

これを一度積分すると

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \phi(\xi,0) \log|x-\xi| d\xi - \frac{1}{k} \phi(x,0) = f_{\text{int}}(x), \quad (3.7)$$

となり、準特異積分方程式の解は一義的に定まる。

この方程式の固有値方程式は

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \phi(\xi,0) \log|x-\xi| d\xi + \frac{1}{k} \phi(x,0) = 0, \quad (3.8)$$

正無限区間の固有値を求めよ。

λ_n に対応する固有関数を $y_n(x)$ とし、

$$\begin{aligned} \phi(x, 0) &= \sum_n A_n y_n(x) \\ f_{\text{inc}}(x) &= \sum_n C_n y_n(x) \end{aligned} \quad (3.9)$$

とすると (3.7) から

$$\left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{k}\right) A_n = C_n, \quad A_n = \frac{k \lambda_n}{k - \lambda_n} C_n, \quad (3.10)$$

となり、解は求まるが、(3.5)を積分した際の不定定数
が一つあるので、解は $f_{\text{inc}}(x) = \text{const.}$ に対して
分だけ不定であり、適当な条件 [例えば $\phi(x, 0)$ が無限遠
で 0 に近づく] によって定めなければならぬ。

今は $k \gg 1$ なる場合を考えているので $1/k$ 近似とによ
れば
$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x, 0)}{x - \xi} d\xi \approx f(x), \quad (3.11)$$

ととるのが筋であろうが、こうすると前節のようになって
具合が悪くなる筈である。

そこで水波理論の手法を借りて (3.5) を解くと
附録 A のように要素解が求まるので、これらを組合せて
解を作ればよい。

1) 左右動

(A.6)より 齊次解 を入れて

$$\begin{aligned}\psi_s &= \psi_1 + A_s \psi_{0x} \\ \phi_s &= \phi_1 + A_s \phi_{0x}\end{aligned}, \quad (3.12)$$

となり、定数は板の外側の渦に働く y 方向の力の
総和が 0 となるように決めるのが適当と思われる。

つまり

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_1 dx = -A_s \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{0x} dx = +A_s [\phi_0(1,0)]_{-\infty}^{\infty}, \quad (3.13)$$

力は

$$\frac{Y}{-\rho \omega^2 \eta} = 4 \int_0^1 \phi_s dx, \quad (3.14)$$

$$A_s \doteq \frac{2i}{\sqrt{\pi k}} \quad (3.13')$$

$$\frac{Y}{-\rho \omega^2 \eta} = \pi - 4i \sqrt{\frac{\pi}{k}}, \quad (3.14')$$

2) 回転動

$$\begin{aligned} \psi_R &= \frac{1}{2} (\psi_2 + A_R \psi_{1,x}) \\ \phi_R &= \frac{1}{2} (\phi_2 + A_R \phi_{1,x}) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad (3.15)$$

A_R は、原点に置くモーメントが 0 となるように決める
(流体中の端に置く)
とすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \phi_2 dx = -A_R \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{1,x} x dx, \quad (3.16)$$

モーメントは

$$\frac{M}{-\rho \omega^2 d} = 2 \int_0^1 (\phi_2 + A_R \phi_{1,x}) x dx, \quad (3.17)$$

$$A_R = - \frac{-\frac{2}{3R}}{-\frac{\sqrt{\pi} i}{2\sqrt{R}}} = \frac{4i}{3\sqrt{\pi R}}, \quad (3.16')$$

$$\frac{M}{-\rho \omega^2 d} = \frac{\pi}{2} - \frac{2i\sqrt{\pi}}{3\sqrt{R}} \rightarrow \quad (3.17')$$

$$(3.17')$$

3) 前縁効

$$\psi_g = \frac{1}{R} (J_0 + A_g J_1) \quad (3.18)$$

定数は流体中の渦に働く x 方向の力の和
が 0 となるものとする。

$$\int_1^\infty J_0 dx = -A_g \int_1^\infty J_1 dx, \quad (3.19)$$

力/長

$$\frac{X}{-P\omega^2 \zeta} = 4 \int_0^1 \psi_g dx = \frac{4}{R} \int_0^1 (J_0 + A_g J_1) dx \quad (3.20)$$

$$A_g = -\frac{2}{\pi R} \log 2\alpha \quad // \quad (3.19')$$

$$\frac{X}{-P\omega^2 \zeta} = \frac{4}{R} \left(1 - \frac{\log 2\alpha}{\pi R} \right) \quad // \quad (3.20')$$

今附録Aでは $z=0$ で考えているが、問題の状況から、左右、回転動では中は実軸の周りに反対称、前後動は ψ が実軸の周りに反対称と考えられる。
 したがって次の表現がある。

左右・回転動では

$$\begin{aligned}\psi_p(x, y) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\xi, 0)(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi(\xi, 0)}{\partial \xi} \log R d\xi, \quad (3.21)\end{aligned}$$

つまりポテンシャル部分は (2.26) によるサーキュレーション分布と等価であり、これに求心力分を加えると結局全流小同数は

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi, 0) \frac{\partial}{\partial \xi} [\log R + K_0(\xi R)] d\xi, \quad (3.22)$$

となる。

前後動では

$$\psi_p(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y \phi(\xi, 0)}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi, \quad (3.23)$$

であるから全流小同数は

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi, 0) \frac{\partial}{\partial y} [\log R + K_0(\xi R)] d\xi, \quad (3.24)$$

となり、(3.22), (3.24) の式中、 ψ は力となる意味がかわかる。

4. ひれ付円筒のまわりのポテンシャル流れ

右図のように 2枚ひれのついた円筒を考える。

u - $pl.$ を経て t - $pl.$ の半径 b の円に

写像すると

$$\left. \begin{aligned} z + \frac{a^2}{z} &= u, \\ t + \frac{b^2}{t} &= u, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

$$z = \frac{1}{2} \left[t + \frac{b^2}{t} + \sqrt{\left(t + \frac{b^2}{t}\right)^2 - 4a^2} \right] \quad (4.2)$$

ひれの長さ δa と b との関係は、

$$\left. \begin{aligned} b + \sqrt{b^2 - a^2} &= a(1 + \delta), \\ \frac{b}{a} &= 1 + \frac{\delta^2}{2(1+\delta)} \stackrel{\delta \rightarrow 0}{\approx} 1 + \frac{\delta^2}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

t - $pl.$ の円周上で $t = b e^{i\theta}$ とおくと

$$x + iy = \begin{cases} b \cos \theta + \sqrt{b^2 \cos^2 \theta - a^2} & \text{for } \cos \theta > \frac{a}{b} \\ b \cos \theta + i \sqrt{a^2 - b^2 \cos^2 \theta} & \text{for } \cos \theta < \frac{a}{b} \end{cases} \quad (4.2')$$

根号の符号は象限によつて変るが以下が1象限のみの結果。

$$\frac{x^2 + y^2}{2} = \begin{cases} b^2 \cos^2 \theta - \frac{a^2}{2} + b \cos \theta \sqrt{b^2 \cos^2 \theta - a^2}, & \cos \theta > \frac{a}{b} \\ \frac{a^2}{2}, & \cos \theta < \frac{a}{b} \end{cases} \quad (4.4)$$

a) 左右動

$$\psi|_c = x, \quad (4.5)$$

$$f = \phi + i\psi = i \left[z - \left(t + \frac{b^2}{t} \right) \right], \quad (4.6)$$

と仮定し境界条件(4.5)を満たし、かつ(4.2)より

$$\begin{aligned} z &\xrightarrow{|t| \gg b} \frac{1}{2} \left(t + \frac{b^2}{t} \right) \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4a^2}{\left(t + \frac{b^2}{t} \right)^2}} \right] \\ &\doteq \left(t + \frac{b^2}{t} \right) \left(1 - \frac{a^2}{t^2} \right) \doteq t \left(1 + \frac{b^2 - a^2}{t^2} \right), \quad (4.7) \end{aligned}$$

であるから

$$f \xrightarrow{|t| \gg b} i \left(\frac{2b^2 - a^2}{t} \right) \doteq i \frac{(2b^2 - a^2)}{z}, \quad (4.8)$$

となり、無限遠で正則であるからこれは求める解である。

それ故

$$\phi|_c = \begin{cases} 2b \sin \theta & , \text{ for } |\cos \theta| > \frac{a}{b} \\ 2b \sin \theta - \sqrt{a^2 - b^2 \cos^2 \theta}, & \text{ for } |\cos \theta| < \frac{a}{b} \end{cases} \quad (4.9)$$

$$I = - \oint \phi \, dx = -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi \frac{dx}{d\theta} d\theta, \quad (4.10)$$

と仮定

$$\frac{dx}{d\theta} = \begin{cases} -b \sin \theta - \frac{b^2 \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta - a^2}}, & |\cos \theta| > \frac{a}{b} \\ -b \sin \theta, & \text{ for } |\cos \theta| < \frac{a}{b} \end{cases} \quad (4.11)$$

$$I = 4b^2 \left[2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta + 2 \int_{\frac{a}{b}}^{\theta_0} \frac{\cos \theta \sin^3 \theta}{\sqrt{a^2 - b^2 \cos^2 \theta}} d\theta - \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - \cos^2 \theta} \sin \theta d\theta \right]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \cos \theta_0 = \frac{A}{b}, \quad \sin \theta_0 = \sqrt{1 - \frac{A^2}{b^2}} = \frac{E}{b}$$

$$\int_0^{\theta_0} \frac{\cos \theta \sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \frac{A^2}{b^2}}} = \int_0^{\frac{E}{b}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{\frac{4E^2}{b^2} - x^2}} = \frac{E^2}{b^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta' d\theta' = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{E^2}{b^2}$$

$$\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{A^2}{b^2} - \cos^2 \theta} \sin \theta d\theta = \int_0^{\frac{AE}{b}} \sqrt{\frac{A^2}{b^2} - x^2} dx = \frac{A^2}{b^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi A^2}{4b^2}$$

$$\therefore I = 2\pi b^2 + 2\pi E^2 - \pi A^2 = \pi(4b^2 - 3A^2), \quad (4.11)$$

$\delta \rightarrow 0$ の時は (4.3) より

$$I \div \pi A^2 (1 + 4\delta^2), \quad (4.11')$$

と正から円柱分 πA^2 に 4 倍の鏡像効果を考え、
円柱に よる増速効果 (速度加倍だから 4 倍になる)
を考えると $4(2 \times \frac{\pi \delta A^2}{2})$ となる。(4.11'')

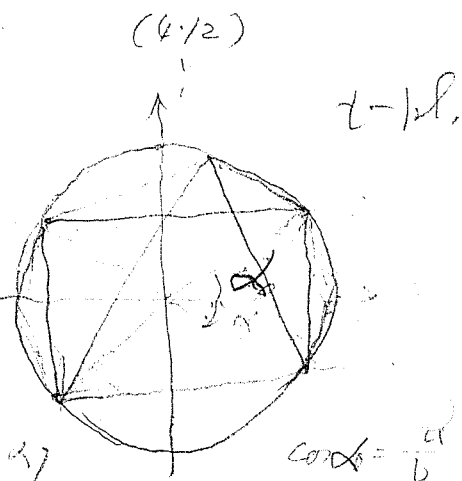
従って 4 倍が小さい時は この点の速度増加の由来
と鏡像効果を考えれば 近似的な速度
ポテンシャルが得られる。

b) 回転動力

$$\psi|_c = \frac{x^2 - 1}{2} v^2$$

で、あるが右図から

$$\log\left(\frac{t - be^{i\alpha}}{t - be^{-i\alpha}}\right) = \begin{cases} i(\alpha - \pi), & \text{for } |b| < \alpha \\ i\alpha, & \text{for } |b| > \alpha \end{cases}$$



$$\log \left(\frac{t + be^{i\alpha}}{t + be^{-i\alpha}} \right) = \begin{cases} i(\alpha - \pi), & \text{for } \pi - \alpha > \theta > \pi - \alpha, \\ i\alpha, & \text{for } |\theta| < \pi - \alpha, \end{cases}$$

で「ふるから今

$$w(t) = \frac{(t + \frac{b^2}{t})^2}{4} \times \frac{1}{\pi i} \left\{ \log \left(\frac{t^2 - b^2 e^{-2i\alpha}}{t^2 - b^2 e^{2i\alpha}} \right) + 2i\alpha \right\} + \frac{1}{4} \left(t + \frac{b^2}{t} \right) \sqrt{\left(t + \frac{b^2}{t} \right)^2 - 4a^2} \quad (4.13)$$

உயிர் உ

$$\text{Re}[ZV(b e^{i\theta})] = \begin{cases} b^2 \cos^2 \theta + b \cos \sqrt{1+b^2} \sin \theta, & \text{for } |b| \geq \alpha, \\ 0, & \text{for } |b| < \alpha \end{cases} \quad (4.17)$$

$$w(t) \xrightarrow{t \gg b} \frac{(1 + \frac{b^2}{t^2})^2}{4\pi i} \left(2i\alpha - \frac{2ib^2}{t^2} 22\alpha \right) + \frac{(1 + \frac{b^2}{t^2})^2}{4} \left(1 - \frac{2a^2}{t^2} \right)$$

$$= \frac{(1 + \frac{b^2}{t^2})^2}{4} \left(1 + \frac{2\alpha}{\pi} - \frac{2a^2 + \frac{2ib^2}{\pi} 22\alpha}{t^2} \right) \quad (4.15)$$

可なり

$$f(z) = i \left\{ w(z) - \frac{(z^2 - \frac{1}{4})}{4} \left(1 + \frac{2\alpha}{\pi} \right) \right\}, \quad (4.16)$$

$$\overrightarrow{1415} b \rightarrow \text{cont.} + O\left(\frac{1}{z}\right),$$

となるから, f が解である。

さて

$$\phi = \int_{t=be^{i\theta}} b^2 \frac{\cos^2 \theta}{\pi} \log \left| \frac{e^{2i\theta} - e^{-2i\alpha}}{e^{2i\theta} - e^{2i\alpha}} \right| + \frac{b^2}{2} \left(1 + \frac{2\alpha}{\pi} \right) \frac{2\pi - 2\theta}{2},$$

$b, \frac{10}{\pi} > \alpha,$

$$\begin{aligned} & \left| b^2 \frac{\cos^2 \theta}{2\pi} \log \left| \frac{2 - 2 \cos(2\theta + 2\alpha)}{\cos^2 \theta - \cos^2 \alpha + (1 - \cos 2\alpha)^2} \right| \right| \rightarrow b^2 \frac{\cos^2 \theta}{2\pi} \log \left| \frac{1 - \cos(2\theta + 2\alpha)}{1 - \cos 2\alpha} \right| + b^2 \cos \theta \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad (4.17) \\ & \Rightarrow b^2 \frac{\cos^2 \theta}{2\pi} \log \left| \frac{1 - \cos(2\theta + 2\alpha)}{1 - \cos 2\alpha} \right| + b^2 \cos \theta \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

$$I = - \oint \phi d\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right), \quad (4.18)$$

さて $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $a=0$ は特殊な場合 (表 4.6 の) で

$$I = \frac{4b^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = 2\pi b^2 = \frac{\pi}{2} (2b)^2, \quad (4.19)$$

一般にはこの積分はかなり複雑なので以下 $\alpha \rightarrow 0$ の近似値を求めよう。

$$\phi = \frac{b^2}{\pi}(1-\theta^2) \log\left(\frac{\alpha+\theta}{\alpha-\theta}\right) + b^2\left(1+\frac{2}{\pi}\alpha\right)\theta, \quad \alpha > \theta > 0,$$

$$d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) = d\left[b^2(1-\theta^2) + b^2\left(1+\frac{2}{\pi}\alpha\right)\sqrt{\alpha^2-\theta^2}\right]$$

$$= -b^2\left[2\theta + \theta\sqrt{\alpha^2-\theta^2} + \frac{(1-\frac{2}{\pi}\alpha)\theta}{\sqrt{\alpha^2-\theta^2}}\right]d\theta,$$

$$I \doteq 4b^4 \int_0^\alpha \left\{ \frac{(1-\theta^2)}{\pi} \log\left(\frac{\alpha+\theta}{\alpha-\theta}\right) + \left(1+\frac{2}{\pi}\alpha\right)\theta \right\} \left(2 + \frac{1+\alpha^2-\frac{3}{2}\theta^2}{\sqrt{\alpha^2-\theta^2}}\right) \theta d\theta$$

$$\doteq 4b^4 \alpha^2 \int_0^1 \left[\frac{1-x^2}{\pi} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \left(1+\frac{2}{\pi}\alpha\right)\alpha x \right] \left[2 + \frac{\frac{1}{\alpha} + \alpha - \frac{3}{2}\alpha x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right] x dx$$

$$\int_0^1 x \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = \frac{x^2-1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2-1) \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) dx$$

$$= 1,$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = -\sqrt{1-x^2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} dx$$

$$= \pi,$$

$$I \doteq 4b^4 \alpha^2 \left[\frac{2}{\pi} + \frac{1}{\alpha} + \frac{\pi}{4} + o(\alpha^2) \right],$$

$$\alpha \doteq \delta.$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$I \doteq 4\alpha^4 \delta (1+2\delta^2) \left[1 + \left(\frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{4}\right)\delta \right] = 4\alpha^4 \delta, //$$

附録 A. 左右, 回転動の解.

基本解の境界積分方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \psi_0 + \frac{1}{k} \psi_{0,y} &= 0, \\ \psi_1 + \frac{1}{k} \psi_{1,y} &= x, \\ \psi_2 + \frac{1}{k} \psi_{2,y} &= \frac{2x^2-1}{2}, \end{aligned} \right\} y = \pm 0, |x| < 1, \quad (A.1)$$

そこで ψ は実軸に於いて対称なとす。

今解を

$$\left. \begin{aligned} \psi_0(x, y) &= - \int_0^\infty \frac{(1 - \cos px) e^{-py}}{1 - \frac{p}{k}} \frac{J_0(p)}{p} dp, \\ \psi_1 &= \int_0^\infty \frac{\sin px e^{-py}}{1 - \frac{p}{k}} \frac{J_1(p)}{p} dp, \\ \psi_2 &= - \int_0^\infty \frac{\cos px e^{-py}}{1 - \frac{p}{k}} \frac{J_2(p)}{p} dp, \end{aligned} \right\} y \geq 0, \quad (A.2)$$

より x , y の変換変数として $u = x + iy$ と $v = x - iy$ を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_0(x, y) &= - \int_0^\infty \frac{e^{-py} \sin px}{1 - \frac{p}{k}} \frac{J_0(p)}{p} dp, \\ \phi_1(x, y) &= \int_0^\infty \frac{e^{-py} \cos px}{1 - \frac{p}{k}} \frac{J_1(p)}{p} dp, \\ \phi_2(x, y) &= \int_0^\infty \frac{e^{-py} \sin px}{1 - \frac{p}{k}} \frac{J_2(p)}{p} dp, \end{aligned} \right\} y \geq 0, \quad (A.3)$$

となる。この際 ϕ は虚軸に於いて反対称な"存在"

は"存在しない"。

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} (1 - e^{ipz}) \frac{J_0(p)}{p} dp = f_0(z), \\
 & -i \int_0^{\infty} e^{ipz} \frac{J_1(p)}{p} dp = f_1(z), \\
 & - \int_0^{\infty} e^{ipz} \frac{J_2(p)}{p} dp = f_2(z), \\
 & f_0(z) = \frac{\pi i}{2} - \log t, \\
 & f_1(z) = \frac{1}{t}, \\
 & f_2(z) = \frac{1}{2t^2},
 \end{aligned} \quad (A.4)$$

$$\begin{aligned}
 t &= z + \sqrt{z^2 + 1}, \quad z = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), \\
 t &= e^{i\theta} \quad z = \cos \theta, \quad t = e^{i\theta} + i \sin \theta \quad z = \cos \theta,
 \end{aligned}$$

これから, (A.2) は (A.1) を満たしている事がわかる。

これらの解を評価するために次の積分を導入する。

$$\begin{aligned}
 \Phi_m(x, y) &= \frac{1}{2} \left\{ S_m(z) - \overset{\text{上側}}{S_m^+(z)} \right\}, \\
 \Psi_m(x, y) &= \frac{1}{2} \left\{ S_m(z) + \overset{\text{下側}}{S_m^-(z)} \right\},
 \end{aligned} \quad (A.5)$$

よって (1) EP は 変数値をとる Φ を意味するものとする。

$$\begin{aligned}
 S_0(z) &= - \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{+ipz})}{1 - \frac{p}{z}} \frac{J_0(p)}{p} dp, \\
 S_0^+(z) &= - \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{+ipz})}{1 - \frac{p}{z}} \frac{J_0(p)}{p} dp,
 \end{aligned} \quad (A.6.1)$$

$$\left. \begin{aligned} S_1(z) &= -i \int_0^\infty \frac{e^{i p z} J_1(p)}{(1 - \frac{p}{k}) p} dp, \\ S_1^*(z) &= -i \int_0^\infty \frac{e^{+i p z} J_1(p)}{(1 - \frac{p}{k}) p} dp, \end{aligned} \right\} \quad (A.6.2)$$

$$\left. \begin{aligned} S_2(z) &= - \int_0^\infty \frac{e^{i p z} J_2(p)}{(1 - \frac{p}{k}) p} dp, \\ S_2^*(z) &= - \int_0^\infty \frac{e^{i p z} J_2(p)}{(1 - \frac{p}{k}) p} dp, \end{aligned} \right\} \quad (A.6.3)$$

するとこれらは上の微分方程式を満たす。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{i}{k} \frac{d}{dz} + 1 \right) S_m(z) &= g_m(z), \\ \left(\frac{i}{k} \frac{d}{dz} + 1 \right) S_m^*(z) &= g_m^*(z), \end{aligned} \right\} \quad (A.7)$$

これを解いて、 S_m, S_m^* のもう一つの表現がある。

$$\left. \begin{aligned} S_m(z) &= -i k e^{i k z} \int_{-\infty + i\varepsilon}^z e^{-i k u} g_m(u) du, \\ S_m^*(z) &= -i k e^{i k z} \int_{+\infty + i\varepsilon}^z e^{-i k u} g_m(u) du, \end{aligned} \right\} \quad (A.8)$$

積分の下限は無限遠で関数が収束するように選ぶ。

部分積分し、(A.7) の関係を使うと

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} S_m(z) &= -ik e^{ikz} \int e^{-ikv} d\hat{g}_m(v), \\ \frac{d}{dz} S_m^*(z) &= -ik e^{ikz} \int e^{-ikv} d\hat{g}_m(v), \end{aligned} \right\} \dots (A.9)$$

と仮定する (A.4) の $\hat{g}_m$ の逆変換を代入すると、

$$\left. \begin{aligned} S_m'(z) &= ik e^{ikz} \int_{-\pi+\infty}^{+\infty} e^{-ikv} dv, \\ S_m^{*'}(z) &= ik e^{ikz} \int_{-\pi+\infty}^{+\infty} e^{-ikv} dv, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \dots (A.9') \\ & (\text{with } v_0 = z) \end{aligned}$$

今 $|k| \gg 1$ と考えるので $z = \pm 1$ の近傍以外では

$$\left. \begin{aligned} S_m(z) &\doteq \hat{g}_m(z) - \frac{i}{k} \frac{d\hat{g}_m}{dz}, \\ S_m^*(z) &\doteq \hat{g}_m(z) - \frac{i}{k} \frac{d\hat{g}_m}{dz}, \end{aligned} \right\} \dots (A.10)$$

さて

$$e^{ikz} \int_{-\pi+\infty}^{+\infty} e^{-ikv} dv = \frac{1}{-ik},$$

$$\begin{aligned} e^{ikz} \int_{-\pi+\infty}^{+\infty} e^{-ikv} dv &= 2e^{ikz} \int_{-\pi+\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dx = 2e^{ikz} \left[\frac{x e^{-ikx}}{-ik} + \frac{e^{-ikx}}{k^2} \right] \\ &= \frac{2i}{k} \left(z - \frac{i}{k} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{ikz} \int_{-\pi+\infty}^{+\infty} e^{-ikv} dv &= e^{ikz} \int_{-\pi+\infty}^{+\infty} e^{-ikx} (4x^2 - 1) dx \\ &= \frac{i}{k} \left[4z^2 - 1 - \frac{8iz}{k} - \frac{8}{k^2} \right], \end{aligned}$$

これから (A.9') に代入して

$$S_0'(z) = 1 + ik e^{ikz} \int_{\pi i + \infty}^{v_0} e^{-ik \cosh v} dv,$$

$$S_1'(z) = 2\left(z - \frac{i}{k}\right) + ik e^{ikz} \int_{\pi i + \infty}^{v_0} e^{-ik \cosh v} dv, \quad (A.11)$$

$$S_2'(z) = 4z^2 - 1 - \frac{8iz}{k} - \frac{8}{k^2} + ik e^{ikz} \int_{\pi i + \infty}^{v_0} e^{-ik \cosh v} dv,$$

$$S_0^{*'}(z) = 1 + i\hat{k} e^{i\hat{k}z} \int_{\pi i + \infty}^{v_0} e^{-i\hat{k} \cosh v} dv,$$

$$S_1^{*'}(z) = 2\left(z - \frac{i}{\hat{k}}\right) + i\hat{k} e^{i\hat{k}z} \int_{\pi i + \infty}^{v_0} e^{-i\hat{k} \cosh v} dv, \quad (A.11')$$

$$S_2^{*'}(z) = 4z^2 - 1 - \frac{8iz}{\hat{k}} - \frac{8}{\hat{k}^2} + i\hat{k} e^{i\hat{k}z} \int_{\pi i + \infty}^{v_0} e^{-i\hat{k} \cosh v} dv,$$

先ず $\frac{12}{k^2}$ 初めに $z=1$ に於ける値を計算する。

$$\int_0^{\pi i + \infty} e^{-ik \cosh v} dv = i \int_0^{\pi} e^{-ik \cosh v} dv + (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-ik \cosh v} dv$$

$$= \pi (-1)^n i J_n(k) + \frac{\pi i (-1)^n}{2} H_n^{(1)}(k)$$

$$= \frac{\pi}{2} (-1)^n i^{n+1} \left[2H_n^{(1)}(k) + H_n^{(2)}(k) \right]$$

$$= i\sqrt{\frac{\pi}{2k}} \left[2(-1)^n e^{i(k - \frac{\pi}{4})} + e^{i(k - \frac{\pi}{4})} \right]$$

$$= i\sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{-i(k - \frac{\pi}{4})} \left[1 - 2i(-1)^n e^{2ik} \right]$$

$$\int_0^{\infty} e^{-i\hat{k} \cosh v} dv = \frac{\pi}{2i} (-1)^n H_n^{(2)}(\hat{k}) = \frac{1}{i\sqrt{2\hat{k}}} e^{-i(\hat{k} - \frac{\pi}{4})}$$

$$\left. \begin{aligned} S_0'(\#) &\doteq 1 + \sqrt{\frac{\pi k}{2}} e^{\frac{\pi}{4}i} [1 - o(e^{2i4})], \\ S_1'(\#) &\doteq 2(1 - \frac{i}{k}) + \sqrt{\frac{\pi k}{2}} e^{\frac{\pi}{4}i}, \\ S_2'(\#) &\doteq 3 - \frac{8i}{k} + \sqrt{\frac{\pi k}{2}} e^{\frac{\pi}{4}i} \end{aligned} \right\} (A.12)$$

$$\left. \begin{aligned} S_0^{*'}(1) &\doteq 1 - \sqrt{\frac{\pi k}{2}} e^{\frac{\pi}{4}i}, \quad \hat{S}_0'(1) = 1 - \sqrt{\frac{\pi k}{2}} e^{\frac{\pi}{4}i} \\ S_1^{*'}(1) &\doteq 2 - \frac{2i}{k} - \sqrt{\frac{\pi k}{2}} e^{\frac{\pi}{4}i}, \quad \hat{S}_1'(1) = 2 + \frac{2i}{k} - \sqrt{\frac{\pi k}{2}} e^{\frac{\pi}{4}i} \\ S_2^{*'}(1) &\doteq 3 - \frac{8i}{k} - \sqrt{\frac{\pi k}{2}} e^{\frac{\pi}{4}i}, \quad \hat{S}_2'(1) = 3 + \frac{8i}{k} - \sqrt{\frac{\pi k}{2}} e^{\frac{\pi}{4}i} \end{aligned} \right\} (A.12')$$

$$\left. \begin{aligned} S_0'(1) \pm \hat{S}_0^{*'}(1) &= \begin{cases} 2 + i\sqrt{\pi k} \\ \sqrt{\pi k} \end{cases} \\ S_1'(1) \pm \hat{S}_1^{*'}(1) &= \begin{cases} 4 + i\sqrt{\pi k} \\ -\frac{4i}{k} + \sqrt{\pi k} \end{cases} \\ S_2'(1) \pm \hat{S}_2^{*'}(1) &= \begin{cases} 6 + i\sqrt{\pi k} \\ -\frac{16i}{k} + \sqrt{\pi k} \end{cases} \end{aligned} \right\} (A.13)$$

$$\left. \begin{aligned} S_0(1) &= g_0(1) - \frac{i}{k} S_0'(1) = \frac{\pi}{2}i - \frac{i}{k} (1 + \sqrt{\frac{\pi k}{2}} e^{\frac{\pi}{4}i}), \\ S_0^{*'}(1) &= g_0(1) - \frac{i}{k} S_0^{*'}(1) = \frac{\pi}{2}i - \frac{i}{k} (1 - \sqrt{\frac{\pi k}{2}} e^{\frac{\pi}{4}i}), \\ \hat{S}_0^{*'}(1) &= -\frac{\pi}{2}i + \frac{i}{k} (1 - \sqrt{\frac{\pi k}{2}} e^{\frac{\pi}{4}i}) \end{aligned} \right\} (A.14')$$

$$\begin{aligned}
 S_1(1) &= g_1(1) - \frac{i}{k} S_1'(1) = 1 - \frac{i}{k} \left(\sqrt{\frac{\pi k}{2}} e^{\frac{\pi i}{4}} + 2 - \frac{2i}{k} \right) \\
 \hat{S}_1^\psi(1) &= \hat{g}_1(1) + \frac{i}{k} \hat{S}_1'(1) = 1 + \frac{i}{k} \left(-\sqrt{\frac{\pi k}{2}} e^{-\frac{\pi i}{4}} + 2 + \frac{2i}{k} \right)
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} S_1(1) \\ \hat{S}_1^\psi(1) \end{aligned}} \right\} (A.14.2)$$

$$\begin{aligned}
 S_2(1) &= g_2(1) - \frac{i}{k} S_2'(1) = \frac{1}{2} - \frac{i}{k} \left(\sqrt{\frac{\pi k}{2}} e^{\frac{\pi i}{4}} + 3 - \frac{8i}{k} \right) \\
 \hat{S}_2^\psi(1) &= \hat{g}_2(1) + \frac{i}{k} \hat{S}_2'(1) = \frac{1}{2} + \frac{i}{k} \left(-\sqrt{\frac{\pi k}{2}} e^{-\frac{\pi i}{4}} + 3 + \frac{8i}{k} \right)
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} S_2(1) \\ \hat{S}_2^\psi(1) \end{aligned}} \right\} (A.14.3)$$

$$S_0(1) \pm \hat{S}_0^\psi(1) = \left\{ \begin{array}{l} -i\sqrt{\frac{\pi}{k}} \\ \pi i - \frac{2i}{k} + \sqrt{\frac{\pi}{k}} \end{array} \right\}$$

$$S_1(1) \pm \hat{S}_1^\psi(1) = \left\{ \begin{array}{l} 2 - \frac{4}{k^2} - i\sqrt{\frac{\pi}{k}} \\ -\frac{4i}{k} + \sqrt{\frac{\pi}{k}} \end{array} \right\}$$

$$S_2(1) \pm \hat{S}_2^\psi(1) = \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{16}{k^2} - i\sqrt{\frac{\pi}{k}} \\ -\frac{6i}{k} + \sqrt{\frac{\pi}{k}} \end{array} \right\}$$

(A.14')

次に $\gamma = 0$ の場合 (A.11) より

$$S_0'(0) = 1 - ik \int_{\frac{\pi}{2}i}^{\pi+i\infty} e^{-ik \cosh v} \cosh v dv,$$

$$S_1'(0) = -\frac{2i}{k} - ik \int_{\frac{\pi}{2}i}^{\pi+i\infty} e^{-ik \cosh v} \cosh 2v dv,$$

$$S_2'(0) = -1 - \frac{8}{k^2} - ik \int_{\frac{\pi}{2}i}^{\pi+i\infty} e^{-ik \cosh v} \cosh 3v dv,$$

$$\hat{S}_0^{*'}(0) = 1 + ik \int_{\frac{\pi}{2}i}^{\infty} e^{ik \cosh v} \cosh v dv,$$

$$\hat{S}_1^{*'}(0) = \frac{2i}{k} + ik \int_{\frac{\pi}{2}i}^{\infty} e^{ik \cosh v} \cosh 2v dv,$$

$$\hat{S}_2^{*'}(0) = -1 - \frac{8}{k^2} + ik \int_{\frac{\pi}{2}i}^{\infty} e^{ik \cosh v} \cosh 3v dv,$$

(A.15)

これらの積分はまた ハンケル, ベッセル, ストローウマン関数
で表わされるが k が充分大で... とし, $O(e^{ik})$
の値は無視するとすると, 結局 $v = \frac{\pi}{2}i$ の近くのみで
定まってしまう。

即ち,

$$S'_0(0) \doteq 1 + k \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \delta} e^{-ik \cos \theta} \cos \theta d\theta \doteq 1 - k \int_0^{\infty} e^{-kv} dv$$

$$\doteq 1 + \frac{1}{k},$$

$$S'_1(0) \doteq -\frac{2i}{k} + k \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \delta} e^{-ik \cos \theta} \cos 2\theta d\theta \doteq -\frac{2i}{k} + k \int_0^{\infty} e^{-kv} \cos v dv$$

$$= -\frac{2i}{k} - i,$$

$$S'_2(0) \doteq -1 - \frac{\delta}{k} + k \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \delta} e^{-ik \cos \theta} \cos 3\theta d\theta \doteq -1 - \frac{\delta}{k} + k \int_0^{\infty} e^{-kv} \cos v dv$$

$$= -1 - \frac{3}{k},$$

$$\hat{S}_0^{\psi'}(0) \doteq 1 - k \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \delta} e^{ik \cos \theta} \cos \theta d\theta \doteq 1 - k \int_0^{\infty} e^{-kv} dv$$

$$= 1 - \frac{1}{k},$$

$$\hat{S}_1^{\psi'}(0) \doteq -\frac{2i}{k} - k \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \delta} e^{ik \cos \theta} \cos 2\theta d\theta \doteq -\frac{2i}{k} - k \int_0^{\infty} e^{-kv} \cos v dv$$

$$= i + \frac{2i}{k},$$

$$\hat{S}_2^{\psi'}(0) \doteq -1 - k \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \delta} e^{ik \cos \theta} \cos 3\theta d\theta \doteq -1 - k \int_0^{\infty} e^{-kv} \cos v dv$$

$$= -1 + \frac{3}{k},$$

$$S'_0(0) \pm \hat{S}_0^{\psi'}(0) = \left\{ \frac{2}{k} \right\}$$

$$S'_1(0) \pm \hat{S}_1^{\psi'}(0) = \left\{ -2i, -\frac{4i}{k} \right\}$$

$$S'_2(0) \pm \hat{S}_2^{\psi'}(0) = \left\{ -2, -\frac{6}{k} \right\}$$

(A.16')

$$S_0(0) = g_0(0) - \frac{i}{k} S_0'(0) = -\frac{i}{k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$S_1(0) = g_1(0) - \frac{i}{k} S_1'(0) = -i - \frac{i}{k} \left(1 + \frac{2}{k}\right)$$

$$S_2(0) = g_2(0) - \frac{i}{k} S_2'(0) = -\frac{1}{2} + \frac{i}{k} \left(1 + \frac{3}{k}\right)$$

$$\hat{S}_0^*(0) = \hat{g}_0(0) + \frac{i}{k} \hat{S}_0^{*'}(0) = \frac{i}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right),$$

$$\hat{S}_1^*(0) = \hat{g}_1(0) + \frac{i}{k} \hat{S}_1^{*'}(0) = i + \frac{i}{k} \left(1 - \frac{2}{k}\right),$$

$$\hat{S}_2^*(0) = \hat{g}_2(0) + \frac{i}{k} \hat{S}_2^{*'}(0) = -\frac{1}{2} - \frac{i}{k} \left(1 - \frac{3}{k}\right),$$

$$S_0(0) \pm \hat{S}_0^*(0) = \begin{cases} -\frac{2i}{k} \\ -\frac{2i}{k} \end{cases}$$

$$S_1(0) \pm \hat{S}_1^*(0) = \begin{cases} -\frac{4}{k} \\ -2i - \frac{2}{k} \end{cases}$$

$$S_2(0) \pm \hat{S}_2^*(0) = \begin{cases} -1 + \frac{6i}{k} \\ \frac{2i}{k} \end{cases}$$

(A.17)

(A.17')

以上をまとめると

$$\begin{aligned}
 \psi_0'(1) &\doteq 1 + \frac{i}{2}\sqrt{\pi k}, & \psi_0(1) &= -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}, \\
 \phi_0'(1) &\doteq \frac{i}{2}\sqrt{\pi k}, & \phi_0(1) &= -\frac{\pi}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}} + \frac{1}{k}, \quad *) \\
 \psi_1'(1) &= 2 + \frac{i}{2}\sqrt{\pi k}, & \psi_1(1) &= 1 - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}} - \frac{2}{k^2}, \\
 \phi_1'(1) &= \frac{2}{k} + \frac{i}{2}\sqrt{\pi k}, & \phi_1(1) &= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}} + \frac{2}{k}, \\
 \psi_2'(1) &= 3 + \frac{i}{2}\sqrt{\pi k}, & \psi_2(1) &= \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}} - \frac{8}{k^2}, \\
 \phi_2'(1) &= \frac{8}{k} + \frac{i}{2}\sqrt{\pi k}, & \phi_2(1) &= \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}} + \frac{3}{k},
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_0'(0) &= 1, & \psi_0(0) &= -\frac{i}{k^2}, \\
 \phi_0'(0) &= \frac{i}{k}, & \phi_0(0) &= \frac{1}{k}, \\
 \psi_1'(0) &= -i, & \psi_1(0) &= -\frac{2}{k^2}, \\
 \phi_1'(0) &= \frac{2}{k}, & \phi_1(0) &= 1 - \frac{i}{k}, \\
 \psi_2'(0) &= -1, & \psi_2(0) &= -\frac{1}{2} + \frac{3i}{k^2}, \\
 \phi_2'(0) &= -\frac{3i}{k}, & \phi_2(0) &= -\frac{1}{k},
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

次に 次の積分を求めよう。

$$\begin{aligned}
 \text{まず } \int_0^\infty \phi_1(x, 0) dx &= \frac{i}{2} \int_1^\infty (\hat{q}_1 - \hat{q}_1^*) dx + \frac{1}{2k} [S_1 + S_1^*]_1^\infty \\
 &= -\frac{1}{2k} [S_1(1, 0) + S_1^*(1, 0)] = -\frac{\psi_1(1, 0)}{k} = - \\
 &= -\frac{1}{k} \left[1 - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}} \right],
 \end{aligned}$$

$$*) \quad \phi_0(\infty, 0) = -\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^1 \phi_1 dx = \frac{i}{2} \int_0^1 \left(\hat{g}_1 - \frac{\hat{g}}{\hat{r}_1} \right) dx + \frac{1}{k} [\psi_1(1) - \psi_1(0)]$$

$$\frac{i}{2} \int_0^1 \left(\hat{g}_1 - \frac{\hat{g}}{\hat{r}_1} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = \frac{\pi}{4}$$

(A.20)

$$\int_0^1 \phi_1 dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{k} \left(1 - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \right),$$

$$\int_1^{\infty} x \phi_{1x} dx = [x \phi_1]_1^{\infty} - \int_1^{\infty} \phi_1 dx = - \left(\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}} + \frac{2}{k} \right) + \frac{1}{k} \left(1 - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \right)$$

$$\int_1^{\infty} x \phi_2 dx = \frac{1}{k} \int_1^{\infty} x \psi_2' dx = -\frac{1}{k} \psi_2(1) - \frac{1}{k} \int_1^{\infty} \psi_2 dx$$

$$\int \psi_2 dx = \frac{1}{2} \int \left(\hat{g}_2 + \frac{\hat{g}}{\hat{r}_2} \right) dx - \frac{i}{2k} [\hat{S}_2 - \hat{S}_2^*] = \frac{1}{2} \int \left(\hat{g}_2 + \frac{\hat{g}}{\hat{r}_2} \right) dx - \frac{1}{k} [\phi_2]$$

$$\frac{1}{2} \int_1^{\infty} \left(\hat{g}_2 + \frac{\hat{g}}{\hat{r}_2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-2u} \sinh u du = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} (e^{-u} - e^{-3u}) du = \frac{1}{6}$$

$$\int_1^{\infty} x \phi_2 dx = -\frac{1}{6k} - \frac{1}{k} \psi_2(1) - \frac{1}{k} \phi_2(1) = -\frac{2}{3k} + \frac{i\sqrt{\pi}}{2k} + \dots$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \phi_{1x} dx &= [x \phi_1]_0^1 - \int_0^1 \phi_1 dx = \phi_1(1) - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{k} \right) \\ &= -\frac{\pi}{4} + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}} + \frac{1}{k}, \end{aligned}$$

(A.21)

$$\int_0^1 x \phi_2 dx = \frac{i}{2} \int_0^1 x \left(\hat{g}_2 - \frac{\hat{g}}{\hat{r}_2} \right) dx - \frac{1}{2k} \int_0^1 \left(\hat{g}_2 + \frac{\hat{g}}{\hat{r}_2} \right) dx + \frac{1}{k} [x \psi_2]_0^1 + \frac{1}{k} [\phi_2]_0^1$$

$$\frac{i}{2} \int_0^1 x \left(\hat{g}_2 - \frac{\hat{g}}{\hat{r}_2} \right) dx = \frac{i}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin 2\theta d\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\hat{g}_2 + \frac{\hat{g}}{\hat{r}_2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^1 (2x^2 - 1) dx = -\frac{1}{6}$$

$$\int_0^1 x \phi_2 dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6k} + \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \right) + \dots$$

$$A_S = \frac{\int_1^{\infty} \phi_1 dx}{-[\phi_0]_1^{\infty}} = \frac{-\frac{1}{R}}{\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{R}}} = \frac{2i}{\sqrt{\pi R}},$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 \phi_1 dx + A_S \int_0^1 \phi_{0x} dx &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{R} + \frac{2i}{\sqrt{\pi R}} \left[-\frac{\pi}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{R}} \right] + R \\ &= \frac{\pi}{4} - i\sqrt{\frac{\pi}{R}} + O\left(\frac{1}{R}\right), \end{aligned} \right\} (A.22)$$

$$A_R = \frac{\int_1^{\infty} x \phi_2 dx}{-\int_1^{\infty} x \phi_{1x} dx} = \frac{1 - \frac{2}{3R}}{\frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{R}} + \frac{1}{R}} \doteq \frac{+i \cdot 4}{3\sqrt{\pi R}}$$

$$\int_0^1 x \phi_2 dx + A_R \int_0^1 x \phi_{1x} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{i}{3}\sqrt{\frac{\pi}{R}} + O\left(\frac{1}{R}\right),$$

さて $x = \pm 1$ の近傍以外では (A.10) は充分に近似である。
 $(|x| \gg 1 \text{ として})$
 $x = \pm 1$ を含む領域での表現を求めてみよう。
 (座標上)

(A.17) より まず $-0 < x < 1$, $x = \cos \theta_0 \doteq 1 - 2\sin^2 \frac{\theta_0}{2}$

$$S'_{m-1}(x) = (-1)^m i k l \int_0^{\theta_0} e^{-i k \cos \theta v - m v} dv - k l \int_{\theta_0}^{\pi} e^{i k \cos \theta - i m \theta} d\theta$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{S}'_{m-1}(x) &= + k l \int_{\theta_0}^{\infty} e^{-i k x} e^{+i k \cos \theta v - m v} dv + k l \int_0^{\theta_0} e^{-i k x} e^{i k \cos \theta + i m \theta} d\theta \end{aligned} \right\}$$

$$S'_{m-1}(x) = e^{i k x (x+1)} S'_{m-1}(-1) - k l \int_{\theta_0}^{\pi} e^{-2 i k \sin^2 \frac{\theta_0}{2}} e^{+2 i k \sin^2 \frac{\theta}{2} - i m \theta} d\theta$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{S}'_{m-1}(x) &= e^{i k (1-x)} \hat{S}'_{m-1}(1) + k l \int_0^{\theta_0} e^{-2 i k \sin^2 \frac{\theta_0}{2}} e^{-2 i k \sin^2 \frac{\theta}{2} + i m \theta} d\theta \end{aligned} \right\} \quad (A.23) \quad |x| < 1$$

$x > 1$ に対する場合は $x = \cosh v_0 = 1 + 2\sinh^2 \frac{v_0}{2}$

$$S'_{m-1}(x) = e^{i k (x-1)} S'_{m-1}(1) + i k l \int_0^{v_0} e^{-i k \cosh v - m v} dv$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{S}'_{m-1}(x) &= i k l \int_{v_0}^{\infty} e^{-i k x} e^{i k \cosh v - m v} dv \end{aligned} \right\} \quad (A.24)$$

これらの式中 $e^{-i k x}$ 等にかいた項は exponential に小さく

なるので $x=1$ の点を除いて無視してよい。

これらの積分は Fresnel 積分で近似出来るが

次にその定義式等を記す。

対称の虚数も定義する

$$G(z) = e^{-\frac{\pi i}{2} z^2} \int_0^{\infty} e^{\frac{\pi i}{2} t^2} dt, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}, \quad (A.25)$$

$$G^*(z) = e^{\frac{\pi i}{2} z^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\pi i}{2} t^2} dt, \quad \left. \begin{array}{l} \end{array} \right\}$$

これを積分と 虚の補助虚数

$$C(z) + iS(z) = \int_0^{\infty} e^{\frac{\pi i}{2} t^2} dt, \quad C(\infty) = S(\infty) = \frac{1}{2}, \quad \left. \begin{array}{l} \end{array} \right\}$$

$$f(z) = \left\{ \frac{1}{2} - S(z) \right\} \cos \frac{\pi}{2} z^2 - \left(\frac{1}{2} - C(z) \right) \sin \frac{\pi}{2} z^2, \quad (A.26)$$

$$g(z) = \left\{ \frac{1}{2} - C(z) \right\} \cos \frac{\pi}{2} z^2 + \left(\frac{1}{2} - S(z) \right) \sin \frac{\pi}{2} z^2,$$

と書く

$$G(z) = f + if = \frac{1+i}{2} e^{-\frac{\pi i}{2} z^2} - \{A(z) - iB(z)\},$$

$$G^*(z) = e^{\frac{\pi i}{2} z^2} (C - iS) = \frac{1-i}{2} e^{\frac{\pi i}{2} z^2} - g + if = A(z) + iB(z), \quad (A.27)$$

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n} z^{4n+1}}{1 \cdot 3 \cdots (4n+1)}, \quad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1} z^{4n+3}}{1 \cdot 3 \cdots (4n+3)}$$

z の小さい 7/4 z^1/2

$$G(z) \doteq \frac{1+i}{2} - z, \quad G^*(z) \doteq z, \quad (A.28)$$

z の大なる 7/4 z^1/2

$$f(z) \doteq \frac{1}{\pi z}, \quad g(z) \doteq \frac{1}{\pi^2 z^3}, \quad \text{for}$$

$$G(z) \doteq \frac{i}{\pi z}, \quad G^*(z) \doteq \frac{i}{\pi z} + \frac{1-i}{2} e^{\frac{\pi i}{2} z^2}, \quad (A.29)$$

$$\left. \begin{aligned} S'_{m-1}(x) &\doteq e^{ik(H \cos \theta_0)} S'_{m-1}(-1) - \frac{\sqrt{\pi k}}{\cos \frac{\theta_0}{2}} e^{-im\theta_0} G\left(2\sqrt{\frac{k}{\pi}} \sin \frac{\theta_0}{2}\right), \\ \hat{S}_{m-1}^{\Psi'}(x) &= e^{ik(H \cos \theta_0)} \hat{S}_{m-1}^{\Psi'}(1) + \frac{\sqrt{\pi k}}{\cos \frac{\theta_0}{2}} e^{im\theta_0} G^*\left(2\sqrt{\frac{k}{\pi}} \sin \frac{\theta_0}{2}\right), \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &(A.30) \\ &|x| < 1 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} S'_{m-1}(x) &= e^{ik(x-1)} S_{m-1}(1) - \frac{i\sqrt{\pi k} e^{-mv_0}}{\operatorname{ch} \frac{v_0}{2}} G^*\left(2\sqrt{\frac{k}{\pi}} \operatorname{ch} \frac{v_0}{2}\right), \\ \hat{S}_{m-1}^{\Psi'}(x) &= \frac{i\sqrt{\pi k}}{\operatorname{ch} \frac{v_0}{2}} e^{-mv_0} G\left(2\sqrt{\frac{k}{\pi}} \operatorname{ch} \frac{v_0}{2}\right), \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &x > 1 \\ &(A.31) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} 2\sqrt{\frac{k}{\pi}} \sin \frac{\theta_0}{2} &= \sqrt{\frac{2k}{\pi}} 2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} = \sqrt{\frac{2k}{\pi}} (x-1) \doteq \sqrt{\frac{k}{\pi}} (x-1), \\ 2\sqrt{\frac{k}{\pi}} \sin \frac{\theta_0}{2} &\doteq \sqrt{\frac{2k}{\pi}} (1-x) \doteq \sqrt{\frac{k}{\pi}} (1-x^2), \end{aligned} \right\}$$

前節の漸近値によつて $x=1$ の近傍の値も求められる。

特に $\sqrt{\frac{k}{\pi}} |x-1| \gg 1$ では

$$\left. \begin{aligned} |x| < 1, \quad \sqrt{\frac{k}{\pi}} |x-1| \gg 1, \\ S'_{m-1}(x) &\doteq e^{ik(x+x)} S'_{m-1}(1) - \frac{ie^{-im\theta_0}}{\sin \theta_0}, \quad ik(1-\cos \theta_0) \\ \hat{S}_{m-1}^{\Psi'}(x) &\doteq e^{ik(1-x)} \hat{S}_{m-1}^{\Psi'}(1) + \frac{\sqrt{\pi k}}{\sqrt{2}} \frac{e^{im\theta_0 - \frac{\pi}{2}i + 2ik \sin^2 \frac{\theta_0}{2}}}{\cos \frac{\theta_0}{2}} + \frac{ie^{+im\theta_0}}{\sin \theta_0}, \end{aligned} \right\} (A.32)$$

$$\left. \begin{aligned} x > 1, \quad \sqrt{\frac{k}{\pi}} |x-1| \gg 1, \\ S'_{m-1}(x) &\doteq e^{ik(x-1)} S_{m-1}(1) + \frac{\sqrt{\pi k}}{2} \frac{e^{-mv_0 + \frac{\pi}{2}i + ik(x-1)}}{\operatorname{ch} \frac{v_0}{2}} + \frac{e^{-mv_0}}{\operatorname{sh} v_0}, \\ \hat{S}_{m-1}^{\Psi'}(x) &\doteq \frac{e^{-mv_0}}{\operatorname{sh} v_0} \end{aligned} \right\} (A.33)$$

附 B. 前後動の解

$$\left. \begin{aligned} Q_0(x, 0) &= -\frac{i}{\pi} \log \frac{x-1}{x+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{ipx} \frac{\sin p}{p} dp \\ Q_1(x, 0) &= \frac{2ix}{\pi(x^2-1)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{ipx} \cos p dp \end{aligned} \right\} \text{for } |x| > 1 \quad (A.21)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_0(x, 0) &= +\frac{\pi x^2}{2x\pi}, 1=1, \\ Q_1(x, 0) &= \frac{-ix}{1-x^2} \frac{\pi}{\pi}, \end{aligned} \right\} \text{for } |x| < 1,$$

$$T_0(x, 0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{ipx}}{1 - \frac{p}{k}} \frac{\sin p}{p} dp,$$

$$T_0^* = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-ipx}}{1 - \frac{p}{k}} \frac{\sin p}{p} dp,$$

$$T_1(x, 0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{ipx} \cos p}{1 - \frac{p}{k}} dp,$$

$$T_1^* = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-ipx} \cos p}{1 - \frac{p}{k}} dp,$$

$$T_0(x, 0) + \frac{i}{k} \frac{d}{dx} T_0 = Q_0(x, 0),$$

$$T_0^* - \frac{i}{k} \frac{d}{dx} T_0^* = \hat{Q}_0(x, 0) = -Q_0(x, 0)$$

$$T_1(x, 0) + \frac{i}{k} \frac{d}{dx} T_1 = Q_1(x, 0)$$

$$T_1^* - \frac{i}{k} \frac{d}{dx} T_1^* = \hat{Q}_1 = -Q_1(x, 0)$$

$$(T_0(x, 0) + T_0^*) + \frac{i}{k} \frac{d}{dx} (T_0 - T_0^*) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ x>1 \end{array} \right.$$

$$(T_1 + T_1^*) + \frac{i}{k} \frac{d}{dx} (T_1 - T_1^*) = 0$$

$$J_0(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos px \cdot e^{-py}}{1 - \frac{k}{k_0}} \frac{1}{p} dp = \frac{1}{2} (T_0 + T_0^*) \quad (A.24)$$

$$J_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos px \cdot e^{-py}}{1 - \frac{k}{k_1}} \cos p \cdot dp = \frac{1}{2} (T_1 + T_1^*)$$

$$J_0(x, y) + \frac{d}{k dy} J_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-py} \cos px \frac{1}{p} dp = \frac{1}{2} (Q_0 + Q_0^*)$$

$$J_1(x, y) + \frac{1}{k_1} \frac{d}{dy} J_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-py} \cos px \cos p \cdot dp = \frac{1}{2} (Q_1 + Q_1^*) \quad (A.25)$$

$$\frac{1}{2} [Q_0(x, y) + Q_0^*(x, y)] = -\frac{i}{2\pi} \left[\log \frac{z-1}{z+1} - \log \left(\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} \right) \right]$$

$$= -\frac{i}{2\pi} \log \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} \quad \begin{matrix} |x| < 1, y=0 \\ |x| > 1, y=0 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{2} (Q_1 + Q_1^*) = \frac{i}{\pi} \left(\frac{x}{z-1} - \frac{\bar{z}}{\bar{z}-1} \right) \quad \begin{matrix} |x| < 1, y=0 \\ |x| > 1, y=0 \end{matrix} \quad (A.26)$$

$$T_0(x, 0) = -ik \cdot e^{ikx} \int_0^x Q_0 \cdot e^{-ikx} dx = Q_0(x, 0) - e^{ikx} \int_0^x k Q_0 dx,$$

$$T_0^* = ik \cdot e^{-ikx} \int_0^x Q_0^* \cdot e^{ikx} dx = Q_0^* - e^{-ikx} \int_0^x k Q_0^* dx,$$

$$T_1(x, 0) = -ik \cdot e^{ikx} \int_0^x Q_1 \cdot e^{-ikx} dx,$$

$$T_1^*(x, 0) = ik \cdot e^{-ikx} \int_0^x Q_1^* \cdot e^{ikx} dx,$$

$$\psi_g(x, y) = \frac{1}{K} (J_0 + A_g J_1), \quad \dots \quad (A.27)$$

$$\psi = \dots$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 (T_0 + T_0^*) dx &= -\frac{i}{2k} [T_0 - T_0^*] + \int_0^1 dx \\ \frac{1}{2} \int_0^1 (T_1 + T_1^*) dx &= -\frac{i}{2k} [T_1 - T_1^*] \end{aligned} \right\} \quad (A.28)$$

$$\begin{aligned} \int_1^\infty J_0 dx &= +\frac{i}{2k} [T_0(1,0) - T_0^*(0,1)] + \\ &= -\frac{1}{\pi k} (\log 2\alpha + \gamma) + \frac{1.5i}{2k} \end{aligned}$$

$$\int_1^\infty J_1 dx = -\frac{i}{2k} \left(\frac{i}{\pi} - k i \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi k}$$

$$\int_0^1 J_0 dx = \frac{1}{2ki} [T_0(1,0) - T_0^*(0,1) - T_0(0,0) + T_0^*(0)] + 1$$

$$\int_0^1 J_1 dx = \frac{1}{2ki} [T_1(1) - T_1^*(0) - T_1(0) + T_1^*(0)]$$

$$\int_0^1 (J_0 + A J_1) dx = 1 + \frac{i}{2k} [T_0(0) - T_0^*(0) + A (T_1(0) - T_1^*(0))]$$

$$= 1 + \frac{i}{2k} \left[2 - \frac{2}{\pi k} \log(2\alpha) \left(-ik + \frac{i}{\pi} \right) \right]$$

$$= 1 + \frac{i}{k} - \frac{\log(2\alpha)}{\pi k} = \frac{i}{-k} \left(1 + \frac{i}{\pi} \log(2\alpha) \right)$$

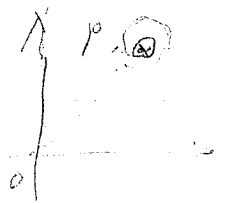
(1+)

$$\frac{1}{p(p-k)} = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{k-p} \right)$$

$$T_0 = \frac{-i\beta}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{ipx} (e^{ip} - e^{-ip})}{(k-p)p} dp = \frac{-i}{\pi} \int_0^\infty e^{ipx} (e^{ip} - e^{-ip}) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{k-p} \right) dp$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{ipx} \frac{ip}{p} dp + \frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{ipx} (e^{ip} - e^{-ip})}{p-k} dp$$

$$\oplus Q_0(x, 0)$$



$$\int_0^\infty \frac{e^{ip(x+1)}}{p-k} dp = \int_0^\infty \frac{e^{-m(x+1)}}{m+ik} dm + 2\pi i e^{ik(x+1)}, \text{ for } x > 1$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{ip(x+1)}}{p-k} dp = \int_0^\infty \frac{e^{-m(x+1)}}{m+ik} dm + 2\pi i e^{ik(x+1)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{for } 1 > x > 0 \end{array} \right.$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{ip(x-1)}}{p-k} dp = \int_0^\infty \frac{e^{-m(x-1)}}{m-ik} dm$$

$$ik = i\alpha e^{\frac{\pi}{4}i} = \alpha e^{\frac{3\pi}{4}i} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(i-1)$$

$$-i-k = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(1-i)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-m\zeta}}{m+ik\zeta} dm = e^{ik\zeta} E_1(ik\zeta) \equiv E(ik\zeta), \quad \zeta > 0$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-m\zeta}}{m-ik\zeta} dm = e^{-ik\zeta} E_1(-ik\zeta) = E(-ik\zeta)$$

$$E(ik\zeta) \doteq \frac{1}{ik\zeta} \left(1 - \frac{1}{ik\zeta} + \dots \right)$$

$$E(ik\zeta) \doteq e^{ik\zeta} \left[-\gamma - \log(ik\zeta) - \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n (k\zeta)^n}{n \cdot n!} \right]$$

$$\xrightarrow{\zeta \rightarrow 0} [-\gamma - \log(\zeta) - \log k + i\frac{\pi}{2}]$$

$$T_0(x, 0) \xrightarrow{x > 1} = \frac{1}{\pi i} \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{i}{\pi} \left[E(ikx+1) - E(ikx-1) + 2\pi i (e^{ik(x+1)} - e^{ik(x-1)}) - 4\pi i e^{ikx} \sin k \right]$$

$$T_0(x, 0) \xrightarrow{x \rightarrow 1} = \frac{1}{\pi i} \log 2 + \frac{i}{\pi} (\gamma + \log k) + \frac{i}{\pi} E(2ik) - 4i e^{ik} \sin k, \text{ for } x > 1$$

$$= \frac{1}{\pi i} \log 2 + \frac{i}{\pi} (\gamma + \log k) + \frac{i}{\pi} \left[\frac{1}{2\pi i k} (1 - \frac{1}{2\pi i}) - 2(\frac{1}{2\pi i} - 1) \right]$$

$$T_0^{\pm} = \frac{i}{\pi} \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{i}{\pi} \int_{\gamma}^{\infty} \frac{e^{-ipx} (e^{-ip} - e^{-ip'})}{p - i0} dp$$

$x > 1$ $p = i0$

$$= \frac{i}{\pi} \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-m(x-1)} - e^{-m(x+1)}}{m - ik} dm$$

for $x > 1$

$$= \frac{i}{\pi} \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{i}{\pi} \left[\mathcal{E}(-ik\overline{x+1}) - \mathcal{E}(-ik\overline{x-1}) \right]$$

$$T_0^{\pm}(1,0) = \frac{1}{\pi i} \log 2 + \frac{1}{\pi i} \left[\gamma + \log(-ik) \right] - \frac{i}{\pi} \mathcal{E}(-2ik)$$

$\gamma = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{z} dz$

$$T_0(1,0) - T_0^{\pm}(1,0) = 1.5 + \frac{2i}{\pi} (\gamma + \log 2)$$

$0 < x < 1$

$$T_0(x,0) = 1 + \frac{1}{\pi i} \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \frac{i}{\pi} \left[\mathcal{E}(ik\overline{x+1}) - \mathcal{E}(ik\overline{1-x}) + 2\pi i e^{ik(x+1)} \right]$$

$$T_0^{\pm}(x,0) = -1 + \frac{1}{\pi i} \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \frac{i}{\pi} \left[\mathcal{E}(ik\overline{1-x}) - \mathcal{E}(ik\overline{x+1}) + 2\pi i e^{ik(1-x)} \right]$$

$$T_0(0,0) - T_0^{\pm}(0,0) = 2 //$$

$$T_1(x, 0) = -\frac{k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{ipx} (e^{ip} + e^{-ip})}{p-k} dp$$

$$T_1^*(x, 0) = -\frac{k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ipx} (e^{ip} + e^{-ip})}{p-k} dp$$

$$x > 1, \quad T_1(x, 0) = -\frac{k}{\pi} \left[\mathcal{E}(ik\overline{x+1}) + \mathcal{E}(ik\overline{x-1}) + \pi i e^{ikx} \right]$$

$$T_1^*(x, 0) = -\frac{k}{\pi} \left[\mathcal{E}(-ik\overline{x-1}) + \mathcal{E}(-ik\overline{x+1}) \right]$$

$$T_1(1, 0) \doteq -\frac{k}{\pi} \left[2\pi i (1 + e^{2ik}) + \underbrace{\left[-\frac{\pi}{2} - \log\{ik(x-1)\} \right]}_{-\frac{\pi}{2} + (-\frac{\pi}{2})} + \frac{1}{2ik} \right]$$

$$T_1^*(1, 0) \doteq -\frac{k}{\pi} \left[-\frac{\pi}{2} - \log(-ik\overline{x-1}) + \frac{1}{2ik} \right]$$

$$T_1(1, 0) - T_1^*(1, 0) = -\pi k i + \frac{i}{\pi}$$

0 < x < 1

$$T_1(x, 0) = -\frac{k}{\pi} \left[\mathcal{E}(ik\overline{1+x}) + \mathcal{E}(-ik\overline{1-x}) + 2\pi i e^{ik(1+x)} \right]$$

$$T_1^*(x, 0) = -\frac{k}{\pi} \left[\mathcal{E}(ik\overline{1-x}) + \mathcal{E}(-ik\overline{1+x}) + 2\pi i e^{ik(1-x)} \right]$$

$$T_1(0, 0) = -ik + \frac{i}{\pi} //$$

$$(-T_1^*(0, 0))$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\mathcal{E}(ik3) - \mathcal{E}(-ik3) \right] = -\log i + \log(-i) = -\frac{\pi i}{2} - \frac{\pi i}{2} = -\pi i //$$