

M-52

於水季(I)

昭和51年10月26日

粘性流体力学の境界値問題に関する覚書

(I. ストークス流れ)

別所正利

内容

	頁
1. 概要 (参考文献)	1
2. 変分原理	2
3. 相反定理と Lorentz の表現	4
4. 吹出し式表現	9
5. 調和関数論の応用	11
6. 三次元流れについて	13-13

附録A. 二次元定常ストークス流れの
基本特性

A-1-3

B. 三次元 " "

B-1~4

1. 概要

解析的流体力学の問題は数学的には偏微分方程式の境界値問題である。

それ故最終的には解を境界値の関数として表現出来れば良い。^{（この）}
（分られた）

しかしそれに至る途の中間段階としてここでは理想流体の理論では速度ポテンシャルが境界上の法線速度とポテンシャルの値で表現出来るように解が未だ知らななり量も含めて境界値で表現出来れば便利である。

本書では粘性流体でも最も簡単な2次元ストークス流れを中心にそのような表現を求めて見ようとするものである。

この問題は弾性理論と殆ど同じになる。^{（5）}
又オセーン流れについても略々同様な式が成立つかこれは次の機会に譲ろう。

このような方法は Lorentz^{（1）}, Oseen^{（2）} に始まると言われるが^{（4）} 筆者は未だ原書を見る機会を得ないし、又成書にはあまり見当らないので敢えて記述を試みるに努めてある。

参考文献

- 1) Lorentz, H.A.; Collected Papers, 4, pp. 7-14, Martinus Nijhoff, The Hague (1937)
- 2) Oseen, C.W.; Hydrodynamik, Akad. Verlag, Leipzig (1927).
- 3) Lamb, Hydrodynamics, 6th ed. Cambridge, 1932.
- 4) "Laminar Boundary Layers", Oxford, 1963.
- 5) 別所 "平面応力理論における境界値問題" 昭51年9月
- 6) Bergman + Schiffer; Kernel function and Elliptic Diff. Equation in Math. Physics" Academic Press, 1953

昭和 年 月 日

2. 変分原理

粘性による

単位時間当りの ^{散逸} エネルギーは

$$E = \mu \iint_D \left\{ u_x^2 + v_y^2 + \frac{1}{2} (u_y + v_x)^2 \right\} dx dy, \quad \dots (2.1)^*$$

最小仕事の原理によれば、運動は E の変分が 0 となるように進むべきである。

副条件としては ~~連続~~ の式

$$u_x + v_y = 0, \quad \dots (2.2)$$

E とし ラグランジュの未定係数を $\lambda(x, y)$ とおき

$$I = E - \iint_D \lambda (u_x + v_y) dx dy, \quad \dots (2.3)$$

の変分をとると

$$\delta E = \mu \iint_D \left[\delta u (\nabla^2 u + u_{xx} + v_{yy}) + \delta v (\nabla^2 v + v_{yy} + u_{xx}) \right] dx dy$$

$$+ \mu \int_C \left[\delta u \{ 2u_x dy + (u_y + v_x) dx \} + \delta v \{ 2v_y dx + (u_y + v_x) dy \} \right],$$

$$\delta \iint_D \lambda (u_x + v_y) dx dy = - \iint_D (\delta u \lambda_x + \delta v \lambda_y) dx dy + \int_C \lambda (\delta u dy + \delta v dx),$$

なるが (2.2) を考慮して

$$\delta I = \iint_D \left[\delta u \{ \lambda_x - \mu \nabla^2 u \} + \delta v \{ \lambda_y - \mu \nabla^2 v \} \right] dx dy$$

$$+ \int_C \left[\delta u \{ (2u_x - \lambda) dy + (u_y + v_x) dx \} + \delta v \{ (2v_y - \lambda) dx + (u_y + v_x) dy \} \right], \quad (2.4)$$

* Lamb 6ed. p.580; 618.

昭和 年 月 日

を得る。

そこで 若し (2.5) で

$$\delta u = \delta v = 0$$

即ち u, v が 所望の境界条件を満たすならば
 $\delta I = 0$ の必要には

$$\lambda_x = \mu \nabla^2 u, \quad \lambda_y = \mu \nabla^2 v, \quad \dots (2.5)$$

でなければならぬ。

よって λ は 圧力 p のようにある数以下 p と
 等しくなるように。

一方 D 内で (2.5) を満たしているならば δI
 が 0 となるには

$$\delta u = \delta v = 0, \quad (2.6)$$

でなければならぬ。

つまり u, v が 境界条件を満たさなければならぬ。

この事は ストークス流れを解くにあたり、 u, v を
 境界条件を満たす適当な関数を選んで I
 を最小にするようにするとそれは (2.5) を満たし
 従って 解である事、逆に (2.5) を満たす適当
 な u, v を選んで $\delta I = 0$ とする事が出来れば
 それは 境界条件を満たしている事を意味する。

昭和 年 月 日

3. 相反定理と Lorentz の表現

(2.3) に対して次の双一次形式を導入する。

$$I(u, v; u', v') = \iint_D \left[\mu \{ u_x u'_x + v_y v'_y + \frac{1}{2} (u_y + v_x)(u'_y + v'_x) \} - p(u'_y + v'_x) - p'(u_y + v_x) \right] dx dy \quad (3.1)$$

ここに $(u, v, p), (u', v', p')$ は夫々 Stokes 流れの速度場と圧力とする。

つまり (2.5) を満足するとすれば "部分積分" により

$$I \Rightarrow \int_C [u' X + v' Y] ds = \int_C [u X' + v Y'] ds, \quad (3.2)$$

$$\text{つまり } I(u, v; u', v') = I(u', v'; u, v),$$

ここに

$$\begin{aligned} X &= (\mu u_x - p) \frac{\partial x}{\partial s} + \mu (u_y + v_x) \frac{\partial y}{\partial s} \\ Y &= \mu (u_y + v_x) \frac{\partial x}{\partial s} + (\mu v_y - p) \frac{\partial y}{\partial s} \end{aligned} \quad (3.3)$$

(3.2) は 弾性論における Maxwell-Betti の相反定理に対応している。

又特に 無限流体中の一様流れでは C 上で $(u = V, v = 0)$ となるので $I(u, v; u, v)$ は

$$I(u, v; u, v) = V \int_C X ds = R V, \quad (3.4)$$

ここに R は排抗であり (2.1) を見れば "この R は単位時間当たりの散逸エネルギーは排抗のなす仕事に等しい" を示している。

昭和 年 月 日

さて、(3.2)において、 u', v', p' として (A.10) に示す
 ような点 (x', y') に特異点を持つものを除いて、
 積分経路を境界 C と (x', y') の周りの小円 c に
 としてこの円の径を無限に小さくすると、

$$u(x', y') = \int_C [u(x, y) X^{(1)}(x, y; x', y') - v(x, y) Y^{(1)}(x, y; x', y') \\ - U^{(1)}(x, y; x', y') X(x, y) - V^{(1)}(x, y; x', y') Y(x, y)] ds, \quad (3.4)$$

$$v(x', y') = \int_C [u X^{(2)} + v Y^{(2)} - X U^{(2)} - Y V^{(2)}] ds, \quad (3.5)$$

を得るがこれは 弾性論における Betti の表現
 と相似である。

これらの式で (A.15), (A.16) の関係式を代入すると、

$$u(x', y') = \int_C \left[2u \frac{\partial}{\partial s} U^{(3)} + 2v \frac{\partial}{\partial s} U^{(4)} - X U^{(4)} - Y U^{(2)} \right] ds, \quad (3.6)$$

$$v = \int_C \left[2u \frac{\partial}{\partial s} V^{(3)} + 2v \frac{\partial}{\partial s} V^{(4)} - X V^{(4)} - Y V^{(2)} \right] ds, \quad (3.6)$$

を得る。

したがって

$$\psi(x', y') = \int_C \left[2u \frac{\partial}{\partial s} S^{(3)} + 2v \frac{\partial}{\partial s} S^{(4)} - X S^{(4)} - Y S^{(2)} \right] ds, \quad (3.7)$$

又 (A.7) の関係式から

昭和 年 月 日

$$f(x', y') = \int_C \left[2u \frac{\partial}{\partial s} Q^{(3)} + 2v \frac{\partial}{\partial s} Q^{(4)} - X Q^{(1)} - Y Q^{(2)} \right] ds,$$

これから λ の変数 s に対して P は

$$P(x', y') = \int_C \left[2u \frac{\partial}{\partial s} P^{(3)} + 2v \frac{\partial}{\partial s} P^{(4)} - X P^{(1)} - Y P^{(2)} \right] ds, \quad (3.8)$$

と仮定。

まず (A.14) により

$$\left. \begin{aligned} P^{(1)} &= P^{(4)} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \log R, \\ P^{(2)} &= -P^{(3)} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \log R, \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

これから (3.8) の右辺を、2項を部分積分して上式を代入すると

$$P(x', y') = \frac{1}{2\pi} \int_C \left[-2u_s \frac{\partial}{\partial y} \log R + 2v_s \frac{\partial}{\partial x} \log R + X \frac{\partial}{\partial x} \log R + Y \frac{\partial}{\partial y} \log R \right] ds.$$

また (A.9) により

$$\begin{aligned} X + 2v_s &= -p\ell + 2(v_x m + v_y \ell) + 2u_x \ell + (u_y + v_x)m \\ &= -p\ell + (u_y - v_x)m = -p\ell + qm, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y - 2u_s &= -pm + 2(-u_x m + u_y \ell) + (u_y + v_x)\ell + 2v_y m \\ &= -pm + (v_x - u_y)\ell = -pm - q\ell, \end{aligned} \quad (3.10)$$

これから

$$\begin{aligned} P(x', y') &= \frac{-1}{2\pi} \int_C \left[p \frac{\partial}{\partial n} \log R + q \frac{\partial}{\partial s} \log R \right] ds \\ &= \frac{-1}{2\pi} \int_C \left[p \frac{\partial}{\partial n} \log R - \frac{\partial p}{\partial n} \log R \right] ds, \quad (3.11) \end{aligned}$$

昭和 年 月 日

となってこれはよく知られた表現である。

あるいは(3.6), (3.7)は調和関数における(3.11)の表現に対応する連調和関数の表現であつて境界値 $(u, v; X, Y)$ を与えれば領域内の値が計算出来る事を示している。

境界値としては我々の場合 u, v が指定されるのが普通であるので(3.6)は直ちに未知関数 X, Y に関してフレドホルムの第2種の積分方程式となる。

(A.9)により X, Y は

$$\left. \begin{aligned} X &= -p \frac{\partial X}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial v}{\partial s}, \\ Y &= -p \frac{\partial Y}{\partial n} + \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial s}, \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

と書け、 u, v がわかれば右辺が2, 3項はわかるから結局これから圧力 p が求められ問題は解ける事になる。

しかし境界値問題の解法については次節以降にしてここでは最後に領域が無限に大きい時の(3.7)の遠方における展開を考えておこう。(A.10), (A.11)において (x, y) を無限に大きくして行くと

$$\left. \begin{aligned} S^{(1)} &\rightarrow -\frac{y'}{4\pi} \log r', \quad r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}, \quad \theta' = \tan^{-1} \frac{y'}{x'} \\ S^{(2)} &\rightarrow +\frac{x'}{4\pi} \log r', \\ S^{(3)} &\rightarrow -\frac{y'}{4\pi} \theta' + \frac{y}{4\pi} \left(\theta' + \frac{x'y'}{r'^2} \right) - \frac{x}{4\pi} \frac{y'^2}{r'^2} \\ S^{(4)} &\rightarrow \frac{x'}{4\pi} \theta' - \frac{y}{4\pi} \frac{x'^2}{r'^2} - \frac{x}{4\pi} \left(\theta' - \frac{x'y'}{r'^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

昭和 年 月 日

$$\begin{aligned}
 \psi(x', y') \xrightarrow{x', y' \rightarrow \infty} & \frac{y' l y r'}{4\pi} \int_C x ds - \frac{x l y r'}{4\pi} \int_C y ds \\
 & + \frac{1}{2\pi} \left(\theta' + \frac{x' y'}{r'^2} \right) \int_C u \frac{\partial y}{\partial s} ds - \frac{y'^2}{2\pi r'^2} \int_C u \frac{\partial x}{\partial s} ds \\
 & - \frac{x'^2}{2\pi r'^2} \int_C v \frac{\partial y}{\partial s} ds - \frac{(\theta' - \frac{x' y'}{r'^2})}{2\pi} \int_C v \frac{\partial x}{\partial s} ds, \quad \dots (3.14)
 \end{aligned}$$

この式で一般流れの中の物体の問題を考えると。

$$\left. \begin{aligned} u &= -1, \quad v = 0, \quad \dots \\ \int_C x ds &= D, \quad \int_C y ds = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

とかくと

$$\psi(x', y') \xrightarrow{x', y' \rightarrow \infty} \frac{D}{4\pi} y' l y r' \quad \dots (3.16)$$

これは一般流れ y' より大きくなるので一般流れの中の物体の問題では無限遠方で一般流れになる条件からは $D=0$ とせざるを得ない事になりこれは矛盾である。

よく知られているようにこの場合はストークス流れは遠場では粗雑すぎるわけである。

4. 双対式表現 (Quellensmäßig Darstellung^{*})
(3.5) を導くにあつて点 (x', y') は領域内に
あるとしたが、もしそれが領域内になければ左辺
は 0 である。

それを流形値数 につけて (3.7) に対応して

$$0 = \int_C \left[2u' \frac{\partial S^{(3)}}{\partial s} + 2v' \frac{\partial S^{(4)}}{\partial s} - X' S^{(1)} - Y' S^{(2)} \right] ds, \quad (4.1)$$

となるが、 u', v' は考えている領域の補領域で正則
な関数である。

そしてその補領域での境界値問題を考えると
 u', v' は X', Y' が C 上で与えられ、は一意的に
解は決まる。

そこで仮定は

$$u' = u, \quad v' = v \quad \text{on } C, \quad (4.2)$$

となるように選んで (3.7) から (4.1) を差引くと

$$\psi(x', y') = \int_C [\sigma S^{(1)} + \tau S^{(2)}] ds, \quad (4.3)$$

$$\sigma = X' - X, \quad \tau = Y' - Y, \quad (4.4)$$

となるし、又

$$X' = X, \quad Y' = Y, \quad \dots \quad (4.5)$$

となるように選んで (3.7) から (4.1) を差引くと

$$\psi(x', y') = \int_C \left[\mu \frac{\partial S^{(3)}}{\partial s} + \nu \frac{\partial S^{(4)}}{\partial s} \right] ds, \quad (4.6)$$

$$\mu = 2(u - u'), \quad \nu = 2(v - v'), \quad (4.7)$$

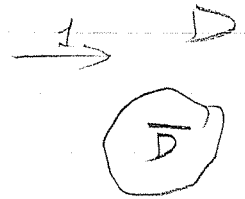
を得る。

* Courant, Hilbert, Methoden der Physik, Bd. I, S. 97.

昭和 年 月 日

特に一様流れ中の物体の運動の場合は
この境界条件は

$$u = -1, v = 0, \dots (4.8)$$



となるが 物体内部で

$$u' = -1, v' = 0, \dots (4.9)$$

なる流れでは

$$\psi' = \psi, \quad \nabla^2 \psi' = \tau = 0.$$

それ故

$$p = C; \text{const.}$$

$$x' = -C\ell, \quad y' = -Cm,$$

} (4.10)

それ故、(4.3) より

$$\psi = - \int_C \left[(C\ell + x) S^{(1)} + (Cm + y) S^{(2)} \right] ds, \quad (4.11)$$

となる。

昭和 年 月 日

5. 調和関数論の利用

p, q は 互に共役な調和関数であるから
 $z = x + iy$ なる複素変数の関数として表現
 出来るが、今その本質分を考えて

$$\begin{aligned} p(x, y) + i q(x, y) &= \frac{d}{dz} F(z) \\ F(z) &= A(x, y) + i B(x, y), \end{aligned} \quad (5.1)$$

と表わされるものとしてしよう。

$$\text{さて} \quad \nabla^2 \psi = 0 = B_x = -A_y \quad (5.2)$$

であるから ψ は一般に上式の ^{一般解} 特解と 斉次解
 つまり 調和関数の和として表現される。

さらに

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2} A(x, y) + D(x, y), \quad (5.3)$$

D は調和関数で $G(z)$ なる複素関数の虚部
 として置く。

$$G(z) = C(x, y) + i D(x, y), \quad (5.4)$$

与えられる境界条件は C 上での ψ と $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ の値
 と考えてよいので、この2つの条件から A および D
 が定められて問題は解ける事になる。

今無限領域内の物体の周りの流れについて
 考えると、 $D(x, y)$ が無限遠で正則ならば、物体
 境界が単位円に写像されるとして

$$z = \zeta + i\eta = f(z) = re^{i\theta}, \quad (5.5)$$

ポアソンの公式より

$$D(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r^2-1) D(e^{i\theta'})}{r^2+1-2r\cos(\theta-\theta')} d\theta', \quad \dots$$

昭和 年 月 日

であるから (5.3) より

$$D(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r=1) \left\{ \psi + \frac{y}{2} A \right\}}{r^2 + 1 - 2r \cos(\theta - \theta')} d\theta', \quad (5.6)$$

と ψ_D に対する条件は

$$\frac{\partial}{\partial r} \psi = -\frac{y_r}{2} A - \frac{y}{2} A_r + D_r, \quad (5.7)$$

と (2) より (5.6) より

$$D_r(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left\{ \psi + \frac{y}{2} A \right\}}{[1 - \cos(\theta - \theta')]} d\theta' \quad (5.8)$$

となるので (5.7) は

$$\left. \psi_r + \frac{y_r}{2} A + \frac{y}{2} A_r \right|_{r=1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left\{ \psi + \frac{y}{2} A \right\}}{[1 - \cos(\theta - \theta')]} d\theta',$$

となるが、 A_r について (5.8) と同様の式を適用すれば

$$\begin{aligned} \left. \psi_r + \frac{y_r}{2} A \right|_{r=1} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\psi d\theta'}{[1 - \cos(\theta - \theta')]} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\{y(\theta') - y(\theta)\}}{[1 - \cos(\theta - \theta')]} A(\theta') d\theta', \quad (5.9) \end{aligned}$$

なる積分方程式を得るがこれは弾性理論における*
 実際には超数層) 市による方が簡単である
 って、~~例えは~~、一様流れの円柱について
 考えて見ると A, D が無限遠で正則な
 流れは存在しない事がわかる。

* Muskhelishvili, "Some basic Problems of the Mathematical theory of Elasticity", Transl., Noordhoff, 1963.

昭和 年 月 日

6. 三次元流れについて

3次元問題でも略々平行に議論が出来よう。
 (3.2)の相反定理は、表面 S に於て

$$\iint_S [u'X + v'Y + w'Z] dS = \iint_S [uX' + vY' + wZ'] dS, \quad (6.1)$$

u, v, w の一般的表現 (3.5)(3.6)は、附録Bによつて

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \iint_S [uX^{(1)} + vX^{(2)} + wX^{(3)} - XU^{(1)} - YU^{(2)} - ZU^{(3)}] dS, \\ v &= \iint_S \left[\sum_{j=1}^3 u_j Y^{(j)} - \sum_{j=1}^3 X_j V^{(j)} \right] dS, \\ w &= \iint_S \left[\sum_{j=1}^3 u_j Z^{(j)} - \sum_{j=1}^3 X_j W^{(j)} \right] dS, \end{aligned} \quad (6.2)$$

そこで $u_1 \equiv u, u_2 \equiv v, u_3 \equiv w, X_1 \equiv X, X_2 \equiv Y, X_3 \equiv Z$,
 一様流れの中の運動力に対する吹出し表現は
 (4.10)において $C=0$ とおいて (4.11)に於て

$$u_i(x, y, z) = - \iint_S \sum_{j=1}^3 X_j U_i^{(j)} dS, \quad i=1, 2, 3, \quad (6.3)$$

そこで $U_1^{(j)} \equiv U^{(j)}, U_2^{(j)} \equiv V^{(j)}, U_3^{(j)} \equiv W^{(j)}$
 圧力は

$$p(x, y, z) = - \iint_S \sum_{j=1}^3 X_j P^{(j)} dS, \quad (6.4)$$

温度は

$$\theta_i(x, y, z) = - \iint_S \left[\sum_{j=1}^3 X_j \theta_i^{(j)} \right] dS, \quad (6.5)$$

そこで $\theta_1 \equiv \theta, \theta_2 \equiv \eta, \theta_3 \equiv \zeta, \theta_1^{(j)} \equiv \theta^{(j)}, \theta_2^{(j)} \equiv \eta^{(j)}, \theta_3^{(j)} \equiv \zeta^{(j)}$

昭和 年 月 日

定常
 附録 A 2次元 ストークス流れの基本特異性 ^{4) 3) 5)}
 $\mu=1$ とおくと ストークスの運動方程式は

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \nabla^2 u, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \nabla^2 v, \quad \dots \quad (A.1)$$

非圧縮性流体とすれば

$$u_x + v_y = 0, \quad \dots \quad (A.2)$$

以下の suffix は 偏微分を意味するものとする。

このことから次の流れ関数 ψ の存在が明らかである。

$$u = \psi_y, \quad v = -\psi_x, \quad \dots \quad (A.3)$$

ψ は二次の微分方程式を満足する。

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad \dots \quad (A.4)$$

よって圧力は (A.1) より

$$\nabla^2 p = 0, \quad \dots \quad (A.5)$$

故に 調和関数である。

そこで p に共役な 調和関数 q を考えると

$$p_x = q_y, \quad p_y = -q_x, \quad \dots \quad (A.6)$$

なるが (A.1), (A.3) より

$$\nabla^2 \psi = q, \quad \dots \quad (A.7)$$

流体中の応力は

$$\left. \begin{aligned} X_x &= p - 2u_x, & X_y &= -(u_y + v_x), \\ Y_x &= X_y, & Y_y &= p - 2v_y, \end{aligned} \right\} \quad (A.8)$$

なる故に右図の左側の流体が右側の流体の押す力が

$$X = (2u_x - p)l + (u_y + v_x)m, \quad \dots \quad (A.9)$$

$$Y = (u_y + v_x)l + (2v_y - p)m,$$

$$l = \frac{\partial x}{\partial s} = \psi_s, \quad m = \frac{\partial y}{\partial s} = -\psi_s,$$

昭和 年 月 日

(A.4)を満たす簡単な特異性を以下列挙して
その速度、圧力等を示そう。

$$\left. \begin{aligned} S^{(1)}(x, y; x', y') &= \frac{1}{4\pi} (y-y') \log R, \quad R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \\ S^{(2)}(x, y; x', y') &= -\frac{1}{4\pi} (x-x') \log R, \end{aligned} \right\} (A.10)$$

$$\left. \begin{aligned} S^{(3)}(x, y; x', y') &= \frac{(y-y')}{4\pi} \textcircled{H}, \quad \textcircled{H} = \tan^{-1} \frac{y-y'}{x-x'} \\ S^{(4)}(x, y; x', y') &= -\frac{(x-x')}{4\pi} \textcircled{H}, \end{aligned} \right\} (A.11)$$

よめらば (x', y') における特異点による流れ関数である
とみなした時の速度 U, V , 圧力 P , その後戻度数 Q
(A.9)で定義される X, Y は次のようになる。

なお点 (x, y) に特異点があると考えられる場合は、

$$\left. \begin{aligned} S^{(1)}(x', y'; x, y) &= -S^{(1)}(x, y; x', y') \\ U^{(1)}(x', y'; x, y) &= U^{(1)}(x, y; x', y') \\ V^{(1)}(x', y'; x, y) &= V^{(1)}(x, y; x', y') \\ P^{(1)}(x', y'; x, y) &= -P^{(1)}(x, y; x', y') \\ Q^{(1)}(x', y'; x, y) &= Q^{(1)}(x, y; x', y'), \end{aligned} \right\} (A.12)$$

とすればよい。

さて

$$\left. \begin{aligned} 4\pi U^{(1)}(x, y; x', y') &= 4\pi S_y = \log R + \frac{(y-y')^2}{R^2}, \\ 4\pi V^{(1)}(x, y; x', y') &= 4\pi S_x = -\frac{(x-x')(y-y')}{R^2}, \\ 4\pi U^{(2)} &= \frac{(x-x')(y-y')}{R^2}, \quad 4\pi V^{(2)} = \log R + \frac{(x-x')^2}{R^2}, \\ 4\pi U^{(3)} &= \textcircled{H} + \frac{(x-x')(y-y')}{R^2}, \quad 4\pi V^{(3)} = \frac{(y-y')^2}{R^2}, \\ 4\pi U^{(4)} &= -\frac{(x-x')^2}{R^2}, \quad 4\pi V^{(4)} = \textcircled{H} - \frac{(x-x')(y-y')}{R^2}, \end{aligned} \right\} (A.13)$$

昭和 年 月 日

$$\begin{aligned}
 P^{(1)}(x, y; x', y') &= -\frac{(x-x')}{2\pi R^2}, & Q^{(1)}(x, y; x', y') &= \frac{(y-y')}{2\pi R^2}, \\
 P^{(2)} &= -\frac{(y-y')}{2\pi R^2}, & Q^{(2)} &= -\frac{(x-x')}{2\pi R^2}, \\
 P^{(3)} &= \frac{y-y'}{2\pi R^2}, & Q^{(3)} &= \frac{x-x'}{2\pi R^2}, \\
 P^{(4)} &= -\frac{x-x'}{2\pi R^2}, & Q^{(4)} &= \frac{y-y'}{2\pi R^2},
 \end{aligned} \quad (A.14)$$

$$X^{(1)} = \frac{(x-x')^2}{\pi R^4} \{ (x-x')l + (y-y')m \} = 2 \frac{\partial}{\partial s} U^{(3)},$$

$$Y^{(4)} = \frac{(x-x')(y-y')}{\pi R^4} \quad \text{''} \quad Z = 2 \frac{\partial}{\partial s} V^{(8)}$$

$$X^{(2)} = 2 \frac{\partial}{\partial s} U^{(4)}, \quad Y^{(2)} = 2 \frac{\partial}{\partial s} V^{(4)},$$

$$X^{(3)} = -2 \frac{\partial}{\partial s} U^{(1)}, \quad Y^{(3)} = -2 \frac{\partial}{\partial s} V^{(1)},$$

$$X^{(4)} = -2 \frac{\partial}{\partial s} U^{(2)}, \quad Y^{(4)} = -2 \frac{\partial}{\partial s} V^{(2)},$$

(A.15)

$$V^{(1)} = U^{(2)}, \quad V^{(3)} - U^{(4)} = \frac{1}{4\pi},$$

$$U^{(1)} + V^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \log R + \frac{1}{4\pi}, \quad U^{(3)} + V^{(4)} = \frac{1}{2\pi} \textcircled{H},$$

(A.16)

$$Y^{(1)} = X^{(2)}, \quad Y^{(3)} = X^{(4)}, \quad (A.17)$$

4. 第 2 章の [2] の結果から

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon} X^{(1)} ds = \int Y^{(2)} ds = 1,$$

(A.18)

$$\begin{aligned}
 \int Y^{(1)} ds &= \int X^{(2)} ds = \int X^{(3)} ds = \int Y^{(3)} ds = \int X^{(4)} ds = \int Y^{(4)} ds \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

昭和 年 月 日

附録 B 3次元ストークス流れの基本特異性^{(B.4) 6}
運動方程式は $\mu=1$ とおいて

$$\nabla^2 u = p_x, \quad \nabla^2 v = p_y, \quad \nabla^2 w = p_z, \quad \dots \quad (B.1)$$

$$u_x + v_y + w_z = 0, \quad (B.2)$$

$$\text{今 } p = \nabla^2 \phi, \quad (\nabla^2 p = 0), \quad \dots \quad (B.3)$$

なる函数 ϕ を導入すると u, v, w なる新変数にあらわす

$$u = \phi_x + u', \quad v = \phi_y + v', \quad w = \phi_z + w', \quad \dots \quad (B.4)$$

のように書ける。

法線の方向余弦が (l, m, n) な平面に働く
単位面積当たりの各軸方向の力は

$$\left. \begin{aligned} X &= X_x l + X_y m + X_z n, \\ Y &= Y_x l + Y_y m + Y_z n, \\ Z &= Z_x l + Z_y m + Z_z n, \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (B.5)$$

$$\left. \begin{aligned} X_x &= 2u_x - p, \quad X_y = Y_x = (u_y + v_x), \quad X_z = Z_x = (u_z + w_x), \\ Y_y &= 2v_y - p, \quad Y_z = Z_y = (v_z + w_y), \quad Z_z = 2w_z - p, \end{aligned} \right\} \quad (B.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{今 } 4\pi U^{(1)}(x, y, z; x', y', z') &= \left(\frac{R}{2}\right)_{xx} - \frac{1}{R}, \\ 4\pi V^{(1)} &= \left(\frac{R}{2}\right)_{xy}, \\ 4\pi W^{(1)} &= \left(\frac{R}{2}\right)_{xz} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} R &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (B.6)$$

$$\left. \begin{aligned} 4\pi U^{(2)} &= \left(\frac{R}{2}\right)_{yx}, \\ 4\pi V^{(2)} &= \left(\frac{R}{2}\right)_{yy} - \frac{1}{R}, \\ 4\pi W^{(2)} &= \left(\frac{R}{2}\right)_{yz} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (B.6')$$

昭和 年 月 日

$$\left. \begin{aligned} 4\pi U^{(3)}(x, y, z; x', y', z') &= \left(\frac{R}{2}\right)_{zx} , \\ 4\pi V^{(3)} &= \left(\frac{R}{2}\right)_{zy} , \\ 4\pi W^{(3)} &= \left(\frac{R}{2}\right)_{zz} - \frac{1}{R} , \end{aligned} \right\} (B.6'')$$

$$\left. \begin{aligned} 4\pi P^{(1)}(x, y, z; x', y', z') &= \left(\frac{1}{R}\right)_x , \\ 4\pi P^{(2)} &= \left(\frac{1}{R}\right)_y , \\ 4\pi P^{(3)} &= \left(\frac{1}{R}\right)_z , \end{aligned} \right\} \dots (B.7)$$

$$\left. \begin{aligned} X^{(1)}(x, y, z; x', y', z') &= -\left(\frac{1}{2\pi R}\right)_x l + 2U^{(1)} - \left(\frac{1}{4\pi R}\right)_y , \\ Y^{(1)} &= -\left(\frac{1}{4\pi R}\right)_x m - \left(\frac{1}{4\pi R}\right)_y l + 2V^{(1)} , \\ Z^{(1)} &= -\left(\frac{1}{4\pi R}\right)_x n - \left(\frac{1}{4\pi R}\right)_z l + 2W^{(1)} , \end{aligned} \right\} (B.8)$$

$$\Delta \Delta \Delta \quad \frac{\partial}{\partial z} = l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} + n \frac{\partial}{\partial z}$$

$$X^{(2)} = -P^{(2)} l + 2U^{(2)} - \left(\frac{1}{4\pi R}\right)_x m ,$$

$$Y^{(2)} = -P^{(2)} m + 2V^{(2)} - \left(\frac{1}{4\pi R}\right)_y m - \left(\frac{1}{4\pi R}\right)_y , \left\{ (B.8') \right.$$

$$Z^{(2)} = -P^{(2)} n + 2W^{(2)} - \left(\frac{1}{4\pi R}\right)_z m ,$$

$$X^{(3)} = -P^{(3)} l + 2U^{(3)} - \left(\frac{1}{4\pi R}\right)_x n ,$$

$$Y^{(3)} = -P^{(3)} m + 2V^{(3)} - \left(\frac{1}{4\pi R}\right)_y n , \left\{ (B.8'') \right.$$

$$Z^{(3)} = -P^{(3)} n + 2W^{(3)} - \left(\frac{1}{4\pi R}\right)_z n - \left(\frac{1}{4\pi R}\right)_y ,$$

昭和 年 月 日

$$\int X^{(1)} dS = \iint Y^{(2)} dS = \iint Z^{(3)} dS = 1, \quad (B.9)$$

$$dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \quad x-x' = R \sin \theta, \quad y-y' = R \sin \theta \cos \varphi, \\ (z-z') = R \cos \theta \sin \varphi, \\ \text{その他は } 0 \text{ である。}$$

$$\text{さて} \quad \left. \begin{aligned} V^{(1)} &= U^{(2)}, & W^{(1)} &= U^{(3)} \\ W^{(2)} &= V^{(3)} \end{aligned} \right\} (B.10)$$

$$Y^{(1)} = X^{(2)}, \quad Z^{(1)} = X^{(3)}, \quad Z^{(2)} = Y^{(3)}, \quad (B.11)$$

$$\zeta^{(1)} = W_y^{(1)} - V_z^{(1)} = U_y^{(3)} - U_z^{(2)} = 0$$

$$\eta^{(1)} = U_z^{(1)} - W_x^{(1)} = -\left(\frac{1}{4\pi R}\right)_z = U_z^{(1)} - U_x^{(3)} \quad (B.12)$$

$$\xi^{(1)} = V_x^{(1)} - U_y^{(1)} = +\left(\frac{1}{4\pi R}\right)_y = U_x^{(2)} - U_y^{(1)},$$

$$\zeta^{(2)} = W_y^{(2)} - V_z^{(2)} = V_y^{(3)} - V_z^{(2)} = \left(\frac{1}{4\pi R}\right)_z$$

$$\eta^{(2)} = U_z^{(2)} - W_x^{(2)} = V_z^{(1)} - V_x^{(3)} = 0$$

$$\xi^{(2)} = V_x^{(2)} - U_y^{(2)} = V_x^{(2)} - V_y^{(1)} = -\left(\frac{1}{4\pi R}\right)_x$$

$$\zeta^{(3)} = W_y^{(3)} - V_z^{(3)} = W_y^{(3)} - W_z^{(2)} = -\left(\frac{1}{4\pi R}\right)_y$$

$$\eta^{(3)} = U_z^{(3)} - W_x^{(3)} = W_z^{(1)} - W_x^{(3)} = \left(\frac{1}{4\pi R}\right)_x \quad (B.12'')$$

$$\xi^{(3)} = V_x^{(3)} - U_y^{(3)} = W_x^{(2)} - W_y^{(1)} = 0$$

昭和 年 月 日

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \quad \text{etc}$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 X^{(1)} &= 2 \left[\nabla^2 U^{(1)} \right]_v = \left(\frac{1}{2\pi R} \right)_{xxv} \\ \nabla^2 Y^{(1)} &= \left(\frac{1}{2\pi R} \right)_{xyv}, \\ \nabla^2 Z^{(1)} &= \left(\frac{1}{2\pi R} \right)_{xzv} \end{aligned} \right\} \quad (B.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 X^{(2)} &= \left(\frac{1}{2\pi R} \right)_{yxv}, \quad \nabla^2 Y^{(2)} = \left(\frac{1}{2\pi R} \right)_{yyv} \\ \nabla^2 Z^{(2)} &= \left(\frac{1}{2\pi R} \right)_{yzv} \end{aligned} \right\} \quad (B.13')$$

$$\nabla^2 X^{(3)} = \left(\frac{1}{2\pi R} \right)_{zxv}, \quad \nabla^2 Y^{(3)} = \left(\frac{1}{2\pi R} \right)_{zyv}, \quad \nabla^2 Z^{(3)} = \left(\frac{1}{2\pi R} \right)_{zzv} \quad (B.13'')$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y'} X^{(3)} - \frac{\partial}{\partial z'} X^{(2)} &= Z_{y'}^{(1)} - Y_{z'}^{(1)} = n \left(\frac{1}{4\pi R} \right)_{xy} - \left(\frac{1}{4\pi R} \right)_{xz} m, \\ X_{z'}^{(1)} - X_{x'}^{(3)} &= X_{z'}^{(1)} - Z_{x'}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \left[\left(\frac{1}{R} \right)_{xz} \ell - \left(\frac{1}{R} \right)_{xx} n + \left(\frac{1}{R} \right)_{zz} \right], \\ X_{x'}^{(2)} - X_{y'}^{(1)} &= Y_{x'}^{(1)} - X_{y'}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \left[\left(\frac{1}{R} \right)_{xx} m - \left(\frac{1}{R} \right)_{xy} \ell + \left(\frac{1}{R} \right)_{yy} \right], \\ Y_{y'}^{(3)} - Y_{z'}^{(2)} &= Z_{y'}^{(2)} - Y_{z'}^{(2)} = P_y^{(2)} n - P_z^{(2)} m + \left(\frac{1}{4\pi R} \right)_{zy}, \\ Y_{z'}^{(1)} - Y_{x'}^{(3)} &= X_{z'}^{(2)} - Z_{x'}^{(2)} = P_z^{(2)} \ell - P_x^{(2)} n, \\ Y_{x'}^{(2)} - Y_{y'}^{(1)} &= Y_{x'}^{(2)} - X_{y'}^{(2)} = m P_x^{(2)} - \ell P_y^{(2)} - \left(\frac{1}{4\pi R} \right)_{xy}, \\ Z_{y'}^{(3)} - Z_{z'}^{(2)} &= Z_{y'}^{(3)} - Y_{z'}^{(3)} = n P_y^{(3)} - m P_z^{(3)} - \left(\frac{1}{4\pi R} \right)_{yz}, \\ Z_{z'}^{(1)} - Z_{x'}^{(3)} &= X_{z'}^{(3)} - Z_{x'}^{(3)} = \ell P_z^{(3)} - n P_x^{(3)} + \left(\frac{1}{4\pi R} \right)_{xz}, \\ Z_{x'}^{(2)} - Z_{y'}^{(1)} &= Y_{x'}^{(3)} - X_{y'}^{(3)} = m P_x^{(3)} - \ell P_y^{(3)}, \end{aligned} \right\} \quad (B.14)$$