

補遺 非最小位相推移系

付録Aのような問題が現われるのは、(A.3)の周波数特性で位相を持つ、つまり遅延系では車前過渡現象 (Anticipatory transients) が存在するためである。

この車は過渡水圧の理論と実験からよく知られている。車で、 $x=0, t=0$ でインパルス波を発生させるには、 $t < 0$ から水面を動いていなければならぬ車を示しており、特に因果律に反するという訳ではない。

電気回路論的に考えれば、 $x(0, t)$ [(A.1)] から $x(x, t)$ を推定する車は ω -面で $A(\omega)$ に $e^{\frac{j\omega x}{v}}$ なる Filter をかける車である。

所で $|e^{\frac{j\omega x}{v}}| = 1$ であるからゲインは不変で位相がどんどん遅れる Filter である。

一般に位相遅れは時間領域での遅れを生むが、入力に見えては $x(0, t)$ に対し出力 $x(x, t)$ は時間遅れを持つ。

(A.3) 式で $W(x, t) \equiv 0$ for $t < -t_d$,
とすれば (A.4) は

$$\gamma(x, t) \doteq \int_{-\infty}^{t+td} \gamma(\tau) W(x, t-\tau) d\tau, \quad (C'')$$

となり、ただだけ時間遅れがあると見てよい。

ここで $\frac{\omega + i\omega_d}{\sigma}$ のように ω -面の下半面で正則でなような系は非最小位相系と呼ばれている。

我々の場合はユツタニ関数も例えど (2.4) に見ると一般には $e^{\frac{\omega + i\omega_d}{\sigma} \pm i\omega_d x}$ なる因子を含み、またこの場合は常に

正、つまり σ は変るけれど位相が変化しないので、
非最小位相推移系である。

それ故 (2.16) のような表現は (2.20) のようにしても尚且つ理論的には時間遅れを含む。

このような位相遅れは進相回路 (微分回路) を入れ補償すればよいわけで (A.9), (A.10) はそれに相当して、

さてこのような系では Kramers-Kronig の関係は成立しない、それ故ユツタニ関数については一般に成立しない。

所で集中定数系では非最小位相推移系は一般に次のように最小位相推移系 P と移相分 Q

この Cascade 系結合で表わされる。

$$F(\omega) = P(\omega)Q(\omega), \quad |Q(\omega)| = 1, \quad (C-2)$$

しかし今ここで現われる関数にこれは不可能のように見える。(無限遠点および虚軸に特異性があるため、)

そのかわりにこの分離は可能である。

今

$$\left. \begin{aligned} G(\omega) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(u) du}{\omega - u - \mu i} \\ G^*(\omega) &= + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(u) du}{\omega - u + \mu i} \end{aligned} \right\} \mu \rightarrow +0 \quad (C-3)$$

とみると $G(\omega)$ は ω の下半面で G^* は上半面で正則である。

$$\text{これから} \quad \bar{F}(\omega) = G(\omega) - G^*(\omega), \quad (C-4)$$

が得られるから、 $\bar{F}$ は ω の上半面で正則な部分と下半面で正則な部分の差で表わされ、従って

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = g(t) - g^*(t), \quad (C-5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ g^*(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (C-6)$$

$$\left. \begin{aligned} g(t) &= 0 & \text{for } t < 0 \\ g^*(t) &= 0 & \text{for } t > 0 \end{aligned} \right\}$$

つまり

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= f(t) & \text{for } t > 0 \\ &= -f^*(t) & \text{for } t < 0 \end{aligned} \right\} \text{(C.7)}$$

このようにして、 $f(t)$ を決めて、 $f(t)$ は板の運動を制御する方法
では、^{さらに} $f(t)$ のスペクトル分布 $A(\omega)$ がわかっても (2.13) のようにエッチ
関数が Filter とには入って来るので、時間遅れ を生じ
具合がわるい。 ^{この事は} 動後制御についても同じである。

それでは力を決めればこのような心配はないだろうか。

簡単の爲に (2.30) で $\dot{z}$ を省略、あるいは造り板に強くくっ

付のみ考える、とすると

$$P = -Z_W \dot{z}$$

を反転し

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau) K_W(t-\tau) d\tau, \\ K_W(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{Z_W} d\omega \end{aligned} \right\} \text{(C.8)}$$

つまり

$$K_W(t) = 0 \quad \text{for } t < 0$$

は成立ただろうか。

まずこの逆 (2.24) は

$$\left. \begin{aligned} P &= Z_W \dot{z} \\ \dot{z}(t) &= \int_{-\infty}^t \dot{z}(\tau) L_W(t-\tau) d\tau, \end{aligned} \right\} \text{(C.9)}$$

$$L_w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{Z_w(\omega)} d\omega \quad (C.9)$$

$$L_w(t) = 0 \quad \text{for } t < 0$$

は典型的な初期値問題であるから成立つと考えてよい。

ここに幾分不安があるのは Z_w の抵抗分 R_w はコッチン関数の

の絶対値の自乗であるから上述のように非最小位相推移系

になるおそれがあるが、高周波ではコッチン関数の

漸近展開は一般に $\omega^{-2n} \exp(-i\omega^2 B)$ の形であるので

その絶対値の自乗をとると移相成分が打消し合う結果

そういう事がなくなるのであろう。

実際 Kotel'nikov によつて数値計算的にも Kramers-Kronig

の関係が成立する事が確かめられているのでその心配

はないと考えてよい。

さて $L_w(t)$ は実数であるから又次のように書き換える

$$L_w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{Z_w(\omega)} d\omega$$

それ故

$$K_w(t) = -L_w(-t) \quad , \quad (C.10)$$

$$(C.11) \quad K_w(t) = 0 \quad \text{for } t > 0$$

となつて (C.8) は成立しない事になる。

これは (C.8) の関係は抵抗が負となっているから当然と
言えは当然である。

それ故 (2.30) のように (述は極にダンパーをつけて

$$\operatorname{Re}(\lambda - \bar{z}_w) > 0$$

とするか、(2.28) の制御系にダンピングをつけておけば
発散する事はないと考えられる。

この制御系では結局 λ ($\lambda = P$) を測定して (2.31) で
 V を決める事でこれは問題ないだろう。

その結果として (2.30) の関係が得られるわけであるが
(C.8) に問題があるとするならば P を測定して制御する
よりはるの方が良いのであろうか。