

浅水波の一次元理論

別紙2和

浅水で平面波のみ存在するような場合 波は
一次元的に伝播して行くので大変簡単である。

浅水の仮定では 速度は深さ方向に不変であるから
物体としては 水平平板と垂直で底まで達する平板
しか考えないけれど 見通しが楽である。

内容

頁

1. 解と力およびモーメント

1

2. 平板 (水平)

4

- i) ~ vi) 解
- vi) 進波は前進
- vii) 反射と透過
- viii) は消

3. 壁と平板

13

- i) 壁と水平な平板
- ii) 動く壁

4. 端部上下可動平板

17

5. 前進速度のある場合

19

- i) 上下動 ($V > c$)
- ii) 横ゆれ (")
- iii) 散乱 (")
- i) 上下ゆれ ($V < c$)
- ii) 広てゆれ (")
- iii) 散乱 (")

21

22

23

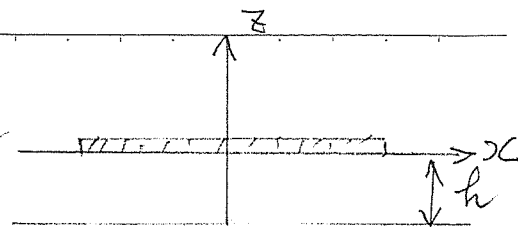
24

26

28 etc

1. 解と力 および モーメント *

$e^{i\omega t}$ なる因子を除いて 速度ポテンシャル
の満たすべき条件は.



$$\varphi_{xx}(x) + K^2 \varphi(x) = 0, \quad (1.1) \quad (K^2 = \frac{\omega^2}{gh})$$

又平板の 垂直変位を $z(x)$ とすると.

$$\varphi_{xx}(x) + \frac{i\omega}{gh} \zeta(x) = 0, \quad (1.2)$$

圧力 $p(x)$ は 静水圧を除いて

$$p(x)/\rho = -i\omega \varphi(x), \quad (1.3) \quad \frac{i\omega}{gh} \zeta = \frac{K^2}{gh} \varphi$$

$$\text{今 } \varphi(x) = -i\omega X \phi(x) \quad (1.4) \quad \zeta = -\frac{i\omega}{g} \varphi$$

$$\zeta(x) = X \zeta(x), \quad \zeta = -\frac{i\omega}{g} \varphi = -\frac{\omega^2}{g} X \phi(x)$$

X は 運動振幅

又 λ 対しては (振幅を a として) x の正方向から来る波に

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= i\frac{ga}{\omega} \phi_0(x), \quad \phi_0(x) = e^{ikx} \\ \zeta_0 &= a e^{ikx}, \quad \zeta_0(x) = \frac{\omega^2}{g} e^{ikx} \end{aligned} \quad (1.5)$$

散乱ポテンシャルは

$$\varphi_a(x) = \frac{i ga}{\omega} \phi_a(x), \quad (1.6)$$

ゆえに 規格化しておこう。
そうすると (1.1), (1.2), (1.3) は

$$\phi_{xx} + K^2 \phi = 0, \quad \text{for free surface} \quad (1.1')$$

$$\phi_{xx} = \frac{\zeta}{h}, \quad \text{on flat plate} \quad (1.2')$$

$$P/P = -\omega^2 X \phi, \quad (P_0 + P_1)/\rho = g a (\phi_0 + \phi_a), \quad (1.3')$$

* 浅い水面に浮ぶ平板の問題, 10.48.10.28.

力とモーメントは

$$\left. \begin{aligned} Z &= \int p dx = -\rho \omega^2 X \int \phi dx, \\ M &= \int p x dx = -\rho \omega^2 X \int \phi x dx, \end{aligned} \right\} (1.7)$$

又 左右方向には 右方向に速度 ($u = \phi_x$) は

一定と考えているので 垂直平板として は 底まで達しているものが考えられます" それについて 水平力は

$$S = p h = -\rho \omega^2 h X \phi(x) \quad (1.8)$$

又 モーメントは 0 である。

水平平板の上下動について 下添字 2 を附すると

$$Z_2(x) = 1 \quad \text{for } |x| < h \quad (1.9)$$

右方向に速度について 下添字 3 を附すると

$$Z_3(x) = x \quad \text{for } |x| < h, \quad (1.10)$$

$$\int_{-h}^h \phi_2 dx = f_{2,2}, \quad \int_{-h}^h \phi_3 x dx = f_{3,3}, \quad (1.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{よかくと} \quad Z &= -\rho \omega^2 X_2 f_{2,2} \\ M &= -\rho \omega^2 X_3 f_{3,3} \end{aligned} \right\} (1.12)$$

又 垂直平板については 左右動が考えられなくなり 添字 1 で示すと

$$S = -\rho \omega^2 X_1 f_{1,1}, \quad f_{1,1} = h \phi_1(x), \quad (1.13)$$

水の強制力は 垂直平板では完全反射であるから
 平板から $x=3$ の点にあると.

$$\phi_d(x) = e^{-iKx+2iK3}, \quad \phi_0(x) = e^{iKx}, \quad (1.14)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} (\phi_0 + \phi_d) \right) \Big|_{x=3} = 0$$

故 $S_w = 2\rho g a h e^{iK3}, \quad (1.15)$

水平な板に対しては 後にも求めるから

$$\begin{pmatrix} Z_w \\ M_w \end{pmatrix} = \rho g a \int (\phi_0 + \phi_d) \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} dx, \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b \phi_d z_j dx &= h \int_{-b}^b \phi_d \phi_{jxx} dx = h \int_{-b}^b \phi_d \phi_{jxx} dx \\ &= - \int_{-b}^b \phi_d z_0 dx = - \int_{-b}^b \phi_d e^{iKx} dx, \quad (1.17) \end{aligned}$$

ただし今

$$H_j(K) = \int_{-b}^b e^{iKx} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} - \phi_j \right) dx, \quad (1.18)$$

とすると

$$\begin{pmatrix} Z_w \\ M_w \end{pmatrix} = \rho g a \begin{pmatrix} H_2 \\ H_3 \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

2. 平板 (水平)

i) 上下動

 $z=1$ において.

$$\phi(x) = \frac{1}{h} \left(\frac{x^2}{2} + C \right) \quad \text{for } |x| < b,$$

$$\phi(x) = A^\pm e^{\mp i k x} \quad \text{for } x \gtrless \frac{b}{h}$$

$$\phi(b) = \frac{1}{h} \left(\frac{b^2}{2} + C \right) = A^+ e^{-i k b} = A^- e^{-i k b}$$

$$\phi_x(b) = \frac{1}{h} (b) = -i k A^+ e^{-i k b}$$

$$\therefore A^+ = A^- = \frac{i b}{k h} e^{i k b},$$

$$C = -\frac{b^2}{2} + \frac{i b}{k},$$

$$f_{22} = \frac{1}{h} \int_{-b}^b \left[\frac{x^2 b^2}{2} + \frac{i b}{k h} \right] dx = -\frac{2 b^3}{3 h} + \frac{2 i b^2}{k h},$$

ii) 揺りね

 $z=x$ において.

$$\phi(x) = \frac{1}{h} \left(\frac{x^3}{6} + C x \right)$$

$$\phi(b) = \frac{1}{h} \left(\frac{b^3}{6} + C \right) = A^+ e^{-i k b} = -A^- e^{-i k b}$$

$$\phi_x(b) = \frac{1}{h} \left(\frac{b^2}{2} + C \right) = -i k A^+ e^{-i k b},$$

$$A^+ = -A^- = -\frac{b^3 e^{i k b}}{3 h (1 + i k b)},$$

$$C = -\frac{b^2}{6} - \frac{b^2}{3(1 + i k b)},$$

$$\frac{1}{15} - \frac{1}{9} = \frac{3-5}{45}$$

$$f_{33} = \frac{1}{15 h} b^5 + \frac{1}{h} \frac{2 b^3}{3} C = -\frac{2 b^5}{45 h} - \frac{2 b^5}{9 h (1 + i k b)}$$

$$= -\frac{b^5}{h} \left\{ \frac{2}{45} + \frac{2}{9(1 + k^2 b^2)} \right\} + \frac{2 i k b^6}{9 h (1 + k^2 b^2)},$$

$$\frac{b^6}{9 h} \cdot 2 i k$$

iii) 散乱 $\phi_0 = e^{ikx}$ と $Z_0 = -\frac{\omega^2}{2} e^{ikx}$
 以下 ϕ_a を ϕ と $\frac{1}{2}\epsilon$ と

$$\phi = -e^{ikx} + C + Dx, \quad \text{for } |x| < b$$

$$= A^\pm e^{\mp ikx}, \quad \text{for } |x| > b$$

$$C + Db - e^{ikb} = A^+ e^{-ikb}$$

$$C - Db - e^{-ikb} = A^- e^{-ikb}$$

$$D - ik e^{ikb} = -ik A^+ e^{-ikb}$$

$$D - ik e^{-ikb} = ik A^- e^{-ikb}$$

$$ik(C + Db) + D = 2ik e^{ikb} = ikC + (1 + ikb)D$$

$$ik(C - Db) - D = 0 = ikC - (1 + ikb)D$$

$$C = e^{ikb}, \quad D = \frac{ik e^{ikb}}{1 + ikb}$$

$$A^+ = e^{2ikb} - \frac{D}{ik} e^{ikb} = \left(1 - \frac{1}{1 + ikb}\right) e^{2ikb}$$

$$= \frac{ikb}{1 + ikb} e^{2ikb}$$

$$(A^- + A^+) ik e^{-ikb} = ik(e^{ikb} - e^{-ikb})$$

$$\therefore A^- + A^+ = e^{2ikb} - 1$$

$$A^- = \frac{e^{2ikb}}{1 + ikb} - 1$$

$$\int_{-b}^b (\phi_0 + \phi_a) dx = 2bC = 2b e^{ikb} = 2ikb A_2^+$$

$$\int_{-b}^b (\phi_0 + \phi_a) x dx = \frac{2}{3} b^3 D = \frac{2ikb^3 e^{ikb}}{3(1 + ikb)} = 2ikb A_3^-$$

次に $\phi_0 = e^{-ikx}$ つまり x の正方向に向う入射波の場合
は同様にして.

$$C = e^{ikb}, \quad D = \frac{-ik}{1+ikb} e^{ikb},$$

$$A^+ = \frac{e^{2ikb}}{1+ikb} - 1, \quad A^- = \frac{ikb}{1+ikb} e^{2ikb} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} C \\ D \end{matrix}} \right\}$$

となり力の方向も上下方向は同じでモーメントのみ符号異なる。

したがって原点に垂直壁がある場合は両者を加えて

$$\phi_0 = e^{ikx} + e^{-ikx}$$

$$\phi_0 + \phi_d = 2C \quad \text{for } |x| > b.$$

$$= e^{2ikb} + e^{ikx}, \quad \text{for } x > b.$$

$$e^{2ikb+ikx} + e^{-ikx}, \quad \text{for } x < b \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \phi_0 + \phi_d \end{matrix}} \right\}$$

この強制力は

$$Z_w = \rho g a \int_0^h (\phi_0 + \phi_d) dx = \sqrt{\frac{\rho g a}{2b}} C = \sqrt{\frac{\rho g a}{2b}} e^{ikb}.$$

$$M_w = \frac{h}{2} Z_w$$

又 壁に働く力は

$$S_w = (p_0 + p_d)_{x=0} h = 2\rho g a h e^{ikb} = \frac{h}{b} Z_w //$$

iv) 同等関係

$$\begin{aligned} \Sigma_w &= 2\rho g a b e^{ikb} = 2\rho g a i k h A_2^- \\ M_w &= 2\rho g a i k h A_3^- \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Sigma_w &= 2\rho g a b e^{ikb} \\ M_w &= 2\rho g a i k h A_3^- \end{aligned}} \right\}$$

$$\begin{aligned} f_{22} &= -\frac{2b^3}{3h} + i \frac{2kh}{1+K^2b^2} |A_2^+|^2 \\ f_{33} &= -\frac{2b^5}{45h} \left(1 + \frac{5}{1+K^2b^2}\right) + 2i k h |A_3^+|^2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} f_{22} &= -\frac{2b^3}{3h} + i \frac{2kh}{1+K^2b^2} |A_2^+|^2 \\ f_{33} &= -\frac{2b^5}{45h} \left(1 + \frac{5}{1+K^2b^2}\right) + 2i k h |A_3^+|^2 \end{aligned}} \right\}$$

$$\begin{aligned} A_d^+ + A_d^- + 1 &= e^{2ikb} = -A_2^+ / \bar{A}_2^+ \\ -A_d^+ + A_d^- + 1 &= \frac{1-ikb}{1+ikb} e^{2ikb} = A_3^+ / \bar{A}_3^+ \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} A_d^+ + A_d^- + 1 &= e^{2ikb} \\ -A_d^+ + A_d^- + 1 &= \frac{1-ikb}{1+ikb} e^{2ikb} \end{aligned}} \right\}$$

$$A_2^+ = |A_2| e^{i\alpha_2}, \quad A_3^+ = |A_3| e^{i\alpha_3}$$

$$\alpha_2 = kb + \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_3 = \pi + kb - \tan^{-1}(kb)$$

$$|A_2| = \frac{b}{kh}, \quad |A_3| = \frac{b^3}{3h\sqrt{1+K^2b^2}}$$

V) 運動方程式

空位入射波中の運動は、

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{X}_2 + \rho g(2h) X_2 &= Z + Z_w \\ I \ddot{X}_3 + \rho g M \cdot \overline{GM} X_3 &= M + M_w \end{aligned} \right\}$$

今 $i\omega X_2 = U_2$, $i\omega X_3 = U_3$ とおき、上式を、

$$\left. \begin{aligned} U_2 Z_2 &= Z_w \\ U_3 Z_3 &= M_w \end{aligned} \right\}$$

と書くと

$$Z_2 = -i\rho\omega f_{22} + i\left[\omega M - \frac{2\rho g h}{\omega}\right]$$

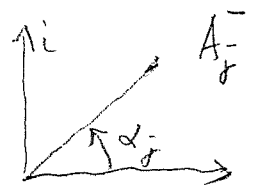
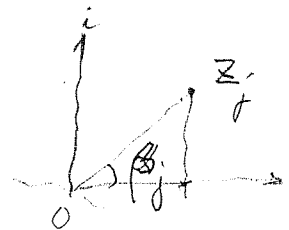
$$= 2\rho\omega kh |A_2|^2 + i\left[\omega M + \frac{2\rho h^3\omega}{3h} - \frac{2\rho g h}{\omega}\right],$$

$$Z_3 = i\left[\omega I - \frac{\rho g M \overline{GM}}{\omega}\right] - i\rho\omega f_{33}$$

$$= 2\rho\omega kh |A_3|^2 + i\left[\omega I + \frac{2h^5}{45h}\left(\frac{6+k^2h^2}{1+k^2h^2}\right) - \frac{\rho\omega M \overline{GM}}{\omega}\right]$$

$$Z_j = 2\rho\omega kh |A_j|^2 \frac{e^{i\beta_j}}{\cos\beta_j}, \quad \text{と書く}$$

$$\begin{aligned} U_j &= \frac{2\rho g i k h A_j^-}{2\rho\omega kh |A_j|^2} e^{+i(k_j - \beta_j)} \cos\beta_j \\ &= \frac{i g}{\omega |A_j|} e^{+i(k_j - \beta_j)} \cos\beta_j \end{aligned}$$

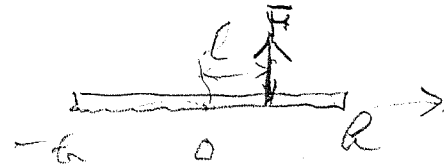


は以外 Damping がある場合も次のようにかくことにしよう。

$$Z_j = (1+\gamma) \cdot 2\rho\omega kh |A_j|^2 \frac{e^{i\beta_j}}{\cos\beta_j},$$

vi) 透波推進

図の点 \$l\$ に \$F\$ なる運動力を加えると運動は、



$$X_2 = \frac{F}{i\omega Z_2}, \quad X_3 = \frac{lF}{i\omega Z_3},$$

出て行く波は

$$A^+ = -\frac{\omega^2}{g} (X_2 A_2^+ + X_3 A_3^+) \quad \text{for } x > 0$$

$$A^- = -\frac{\omega^2}{g} (X_2 A_2^- + X_3 A_3^-) = -\frac{\omega^2}{g} (X_2 A_2^+ - X_3 A_3^+), \quad x < 0$$

今 $A^+ = 0$ とするから、

$$X_2/X_3 = -A_3^+/A_2^+ = \frac{Z_3}{lZ_2}$$

よって

$$\frac{|A_3|^2 \cos \beta_2}{l |A_2|^2 \cos \beta_3} e^{i(\beta_3 - \beta_2)} = -\frac{A_3^+}{A_2^+} = + \frac{|A_3| e^{i\beta_3}}{|A_2| e^{i\beta_2}}$$

$$l = + \frac{|A_3| \cos \beta_2}{|A_2| \cos \beta_3} //$$

$$\frac{|A_3|}{|A_2|} = \frac{l^3}{3h\sqrt{1+K^2 l^2}} \times \frac{Kh}{l} = \frac{Kl^2}{3\sqrt{1+K^2 l^2}}$$

この時

$$\begin{aligned} A^- &= -2\frac{\omega^2}{g} X_2 A_2^+ = +2i\frac{\omega}{g} \frac{A_2^+}{Z_2} F \\ &= i \frac{(\cos \beta_2) F}{\rho g k h |A_2|} e^{i(\beta_2 - \beta_2)} = i \frac{\cos \beta_2}{\rho g l} F e^{i(\alpha_2 - \beta_2)} \end{aligned}$$

推力は

$$T = \frac{\rho g D}{2} |A^-|^2, \quad (\beta_2 \text{ は 変位})$$

明らかに $\beta_2 = 0$ つまり上下同調時に T は最大となる。

A^- を得るために回転円板上の偏心重量⁽¹⁴⁾ (w) を考えると

$$F = \frac{w}{g} r \omega^2 / B, \quad [B \text{ は } y \text{ 方向の幅}]$$

$$\therefore A^- = \frac{w r \omega^2}{\rho g^2 b B} = \frac{w}{\rho g B b} \cdot \frac{r \omega^2}{g}$$

一方上下同調時の

$$\omega^2 = \frac{2 \rho g b B}{M + \frac{2 \rho B b^3}{3h}}$$

$$\therefore A^- = \frac{2 w r}{g \left[M + \frac{2 \rho B b^3}{3h} \right]},$$

平板は抵抗 R に釣合うよう動き出すからその速度を

V とすると

$$R = \frac{\rho}{2} B b V^2 C_R$$

$$= T = \frac{\rho g B}{2} |A^-|^2$$

$$\therefore V = |A^-| \sqrt{\frac{g}{\rho C_R}}$$

効率 η は

$$\eta = \frac{RV}{TV_w} = \frac{V}{\sqrt{\theta h}} = \frac{|A^-|}{\sqrt{\theta h C_R}}$$

vii) 反射波と透過波

この正方向からの単位入射波に対し、反射波、透過波の振幅は

$$\left. \begin{aligned} A_R &= A_d^+ - \frac{\omega^2}{g} (X_2 A_2^+ + X_3 A_3^+) \\ A_T &= 1 + A_d^- - \frac{\omega^2}{g} (X_2 A_2^- + X_3 A_3^-) \end{aligned} \right\}$$

ここで

$$\frac{\omega^2}{g} X_j A_j^\pm = e^{2i(\alpha_j - \beta_j)} \cos \beta_j, \quad A$$

$$\left. \begin{aligned} 1 + A_d^- + A_d^+ &= e^{2i\alpha_2} \\ 1 + A_d^- - A_d^+ &= e^{2i\alpha_3} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} A_R + A_T &= e^{2i\alpha_2} (1 - 2e^{-i\beta_2} \cos \beta_2) = -e^{2i(\alpha_2 - \beta_2)} \\ A_T - A_R &= e^{2i\alpha_3} (1 - 2e^{-i\beta_3} \cos \beta_3) = -e^{2i(\alpha_3 - \beta_3)} \end{aligned} \right\}$$

$A_T = 0$ なる α_2 に 1 次

$$\alpha_2 - \beta_2 - (\alpha_3 - \beta_3) = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$A_R = 0$ なる α_2 に 1 次

$$\alpha_2 - \beta_2 - (\alpha_3 - \beta_3) = 4n\pi$$

n は $\mathbb{Z}$ の整数

したがって $A_T = 0$ に 1 次

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + k\ell, \quad \alpha_3 = \pi + k\ell - \tan^{-1} k\ell \quad \text{を代入すると}$$

$$\beta_3 - \beta_2 = (2n+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} k\ell = -\tan^{-1} k\ell \pmod{n\pi}$$

9.53 に 73.

viii) は消し.
前節で

$$\frac{\omega^2}{f} X_j A_j^- = \frac{e^{i(2\alpha_j - \beta_j)}}{1 + \gamma_j} \cos \beta_j$$

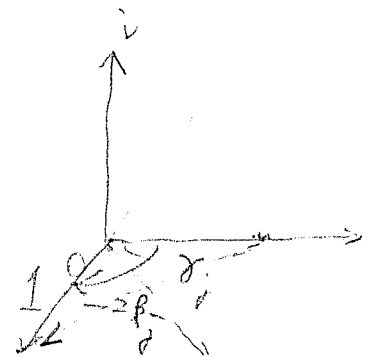
としは減衰の γ_j 倍の減衰を加えると.

$$A_R + A_T = \frac{e^{2i\alpha_2}}{1 + \gamma_2} (\gamma_2 - e^{-2i\beta_2}),$$

$$A_T - A_R = \frac{e^{2i\alpha_3}}{1 + \gamma_3} (\gamma_3 - e^{-2i\beta_3}).$$

これらの $\frac{10}{10}$ と $\frac{10}{10}$ の $\frac{10}{10}$ なる case は

$$A_T = A_R = 0 \quad \text{for} \quad (\gamma_2 = \gamma_3 = 1, \beta_2 = \beta_3 = 0)$$



$A_T = 0$ の $\frac{10}{10}$ には

$$\frac{e^{2i\alpha_2}}{1 + \gamma_2} (\gamma_2 - e^{-2i\beta_2}) = \frac{e^{2i\alpha_3}}{1 + \gamma_3} (\gamma_3 - e^{-2i\beta_3}).$$

これは 複雑な関係である。

3. 壁と平板

1) 壁と平板 (右図)

平板の上下動による力は

$$-\frac{\omega^2}{g} X_2 A_2^+$$

散逸力は (入射波を除いて)

$$e^{2ikl} - i k x$$

平板が静止 反射波が 0 になる場合には

$$e^{2ikl} = \frac{\omega^2}{g} X_2 A_2^+ = -\frac{i\omega}{g} \frac{Z_W A_2^+}{Z_2}$$

$$Z_W = -2\rho g \cdot i k h A_2^-$$

$$Z_2 = \frac{1}{2} Z_{20}, \quad (Z_{20} \text{ は 幅 } 2h \text{ の場合の impedance})$$

$$= \frac{1+\gamma}{2} \cdot 2\rho\omega k h |A_2|^2 e^{i\beta_2} \cos\beta_2$$

$$-\frac{i\omega}{g} \frac{Z_W A_2^+}{Z_2} = -\frac{2}{1+\gamma} e^{2i\alpha_2 - i\beta_2} \cos\beta_2$$

 $\therefore \gamma = 1, \beta_2 = 0$ の時反射波はなくなる。

= 0 になる板の上下動で 壁に 働く 水平力は

$$S = -\rho\omega^2 h X_2 \phi_2(0) = -\rho\omega^2 X_2 \left(\frac{ih}{K} - \frac{h^2}{2} \right)$$

時の水平力は

$$S_W = \frac{h}{h} Z_W = -\frac{2\rho g h}{h} i k h A_2^-$$

平板 $S + S_W = 0$ なる場合には

$$\frac{h}{L} Z_W = \rho \omega^2 X_2 \left(\frac{i h}{K} - \frac{h^2}{2} \right)$$

$$i \omega X_2 = \frac{Z_W}{Z_2}$$

$$\frac{h}{L} = \frac{\rho \omega}{Z_2} \left(\frac{h}{K} + \frac{i h^2}{2} \right)$$

$$Z_2 = (1+\gamma) \rho \omega K h |A_2|^2 e^{i\beta_2} / \cos \beta_2$$

$$= \frac{\rho \omega h^2}{K h} \left(1 + \frac{i K h}{2} \right)$$

$$|A_2|^2 = \left(\frac{2}{K h} \right)^2$$

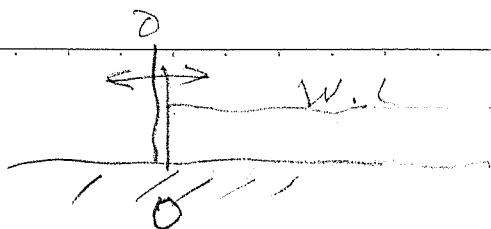
$$\frac{e^{i\beta_2}}{\cos \beta_2} = \frac{1 + \frac{i K h}{2}}{1+\gamma} = 1 + i \tan \beta_2$$

2.162 $\gamma=0$ 为 1.17"

$$\tan \beta_2 = \frac{K h}{2}$$

ii) 動く垂直壁

振中 X_1 で壁が左右に動くと



$$\varphi(x) = A_1^+ e^{-ikx}$$

$$i\omega X_1 = \varphi_x(0) = -ik A_1^+$$

$$A_1^+ = -\frac{\omega}{k} X_1$$

$$\begin{aligned} \text{左右力 } S_1 &= -i\omega \rho h \varphi(0) = -i\omega \rho h A_1^+ \\ &= -i\frac{\rho}{k} \omega^2 h X_1 = i\rho g h^3 k X_1 \end{aligned}$$

流体の力は

$$S = -\frac{k^2 h}{i\omega} \varphi = -\frac{i\omega}{g} \varphi$$

$$= \frac{i\omega^2}{gk} X_1 e^{-ikx} = i\frac{\omega^2}{gk} X_1 e^{-ikx}$$

一方散乱波 (入射波の反射波) は e^{-ikx} .

それ故

$$ik h X_1 = -1, \quad X_1 = \frac{i}{k h}, \quad A_1 = -\frac{i\omega}{k^2 h}$$

とおくと反射波は消える。

この時

$$\varphi(x) = A_1^+ e^{-ikx} = -\frac{\omega}{k^2 h} \frac{i}{h} e^{-ikx}$$

$$\varphi_x(x) = -\frac{\omega}{k h} e^{-ikx}$$

$$\varphi_{xx}(x) = -\frac{gk}{\omega} e^{ikx}, \quad \frac{\rho k}{\omega} = \frac{\rho h^3}{k \omega} = \frac{\omega}{k h}$$

それ故 壁の動きは入射波粒子のそれの動きに等しい。

運動方程式は

$$-\omega^2 M X_1 + R X_1 = -S_1 + S_w = -i \rho g h^2 K X_1 + 2 \rho g h$$

$$i \omega X_1 = \frac{S_w}{Z_2} = \frac{-2 \rho g h}{Z_2}$$

$$i \omega Z_2 = -\omega^2 M + R + i \rho g h^2 K$$

$$Z_2 = \frac{\rho g K h^2}{\omega} + i \left[\omega M - \frac{R}{\omega} \right]$$

同相時は $i \omega X_1 = - \frac{2 \rho g h \omega}{\rho g K h^2} = - \frac{2 \omega}{K h}$

$$\therefore X_1 = \frac{2i}{K h}$$

これは波の消える時の倍であるから結局

何時ものように波以外の減衰を波と同じだけ

附加すればよい。

又波に働く力が0になるときは

$$S_1 + S_w = 0, \quad i \rho g h^2 K X_1 = -2 \rho g h a$$

$$K X_1 = \frac{2 i a}{-h},$$

すなわち S_1 は X_1 と 90° 位相が異なる故 added mass term

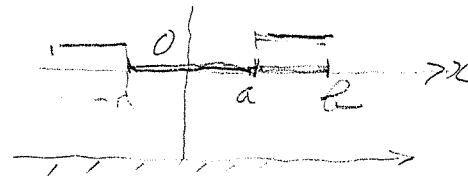
つまり reactance 成分はない！

4. 端部上下可動平板

1図の $a \sim b$ の部分が上下可動とする。

$x < a$ の部分は固定しているとする。

左右対称に上下するポテンシャルを ϕ_4 }
 " 反 " " " ϕ_5 }
 としよう。



$$\phi_4 = C \quad \text{for } |x| < a,$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_4 &= \frac{x^2}{2h} + Dx + E & \text{for } a < x < h \\ &= A^+ e^{-ikx} & \text{for } x > h \end{aligned} \right\} \text{ and } \phi_{4xx} = 1 \equiv \varepsilon$$

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{a^2}{2h} + aD + E \\ 0 &= \frac{a}{h} + D \end{aligned} \right\} \quad C = -\frac{a^2}{2h} + E,$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{h^2}{2h} + hD + E &= A^+ e^{-ikh} \\ \frac{h}{h} + D &= -iKA^+ e^{-ikh} \end{aligned} \right\} \quad \frac{h}{2}(1 + i\frac{kh}{2}) + D(1 + iKh) + iKE = 0$$

$$iKE = +\frac{a}{h}(1 + iKh) - \frac{h}{h}(1 + \frac{ikh}{2})$$

$$E = \frac{a-h}{ikh} + \frac{ah - \frac{h^2}{2}}{h}$$

$$\therefore C = -\frac{(a-h)^2}{2h} + \frac{a-h}{ikh} = \frac{i(h-a)}{Kh} \left[1 + \frac{iK(a-h)}{2} \right]$$

$$A_4^+ = \frac{h-a}{-ikh} e^{ikh} = A_4^- \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} \int_a^h \phi_4 dx &= \frac{1}{2h}(h^3 - a^3) + \frac{D}{2}(h^2 - a^2) + E(h-a) \\ &= (h-a) \left[+\frac{h^2 + a^2 + ah}{6h} = \frac{(h+a)}{2} \times \frac{a}{h} + \frac{ha - \frac{h^2}{2}}{h} + \frac{a-h}{ikh} \right] \\ &= \frac{(h-a)}{h} \left[-\frac{a^2}{3} + \frac{2}{3}ah - \frac{h^2}{3} + i \frac{h-a}{K} \right] // \\ &= \frac{(h-a)^2}{h} \left[\frac{i}{K} - \frac{(h-a)}{3} \right] // \end{aligned}$$

$$\phi_5 = Cx \quad \text{for } |x| < a.$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_5 &= \frac{x^2}{2h} + Dx + E \quad \text{for } b > x > a \\ &= A_5^+ e^{-iKx}, \quad \text{for } b < x \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} Ca &= \frac{a^2}{2h} + aD + E \\ C &= \frac{a}{h} + D \end{aligned} \right\} \quad E = \frac{a^2}{2h}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{a^2}{2h} + Db + \frac{a^2}{2h} &= A_5^+ e^{-iKb} \\ \frac{a}{h} + D &= -iKA e^{-iKb} \end{aligned} \right\} \quad \frac{a}{h} \left(1 + \frac{iKa}{2}\right) + D(1 + iKb) + \frac{iK}{2h} a^2 = 0.$$

$$D = \frac{-1}{1 + iKb} \left[\frac{a}{h} + \frac{iK}{2h} (a^2 + b^2) \right]$$

$$C = \frac{a}{h} + D = \frac{a(1 + iKa) - b - \frac{iK}{2}(a^2 + b^2)}{h(1 + iKb)}$$

$$= \frac{(a-b)}{h(1 + iKb)} \left[1 - \frac{iK}{2}(a-b) \right]$$

$$\begin{aligned} A_5^+ &= \frac{e^{iKa}}{-iKh(1 + iKb)} \left[b(1 + iKb) - b - \frac{iK}{2}(a^2 + b^2) \right] \\ &= \frac{-(b^2 - a^2)}{2h(1 + iKb)} e^{iKa}. \end{aligned}$$

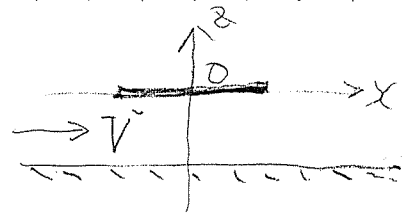
主部の波の振幅力をなくするには 端部振幅は $K(b-a)$ に

逆比例 1 なければならぬので $(b-a)$ が大きいほど K が
大きくないと うまくなり。

5. 前進速度のある場合

物体に固定した座標系
に対して 速度ポテンシャルは

$$\varphi(x) e^{i\omega_e t}$$



のように書けるとしよう。

ω_e : 出合円周波数

$$gh \varphi_{xx}(x) e^{i\omega_e t} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \varphi(x) e^{i\omega_e t} = 0$$

$$\varphi_{xx}(x) e^{i\omega_e t} + \frac{1}{gh} \left(\frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \varphi(x) e^{i\omega_e t} = 0$$

つまり

$$gh \varphi_{xx}(x) + (i\omega_e + V \frac{\partial}{\partial x})^2 \varphi(x) = 0$$

$$\varphi_{xx}(x) + \frac{1}{gh} (i\omega_e + V \frac{\partial}{\partial x})^2 \varphi(x) = 0$$

$$\zeta(x) = -\frac{1}{gh} (i\omega_e + V \frac{\partial}{\partial x})^2 \varphi(x)$$

$$\text{圧力は } \frac{1}{\rho} p(x) = - (i\omega_e + V \frac{\partial}{\partial x})^2 \varphi(x),$$

$$\text{一般解を } \varphi = e^{ikx} \text{ とおくと } (k^2 = \omega^2/gh = (\frac{\omega}{c})^2)$$

$$k^2 gh = (\omega_e + kV)^2 = \omega^2$$

$$\omega_e = \omega \left(\frac{V}{c} \pm 1 \right), \quad c = \sqrt{gh} \\ \Rightarrow k(V \pm c)$$

今

$$k_1 = \frac{\omega_e}{V+c}, \quad \begin{cases} k_2 = \frac{\omega_e}{V-c} & \text{for } V > c \\ k_2 = \frac{\omega_e}{c-V} & \text{for } V < c \end{cases}$$

とおくと

$V > c$ の時は

$$\varphi = A e^{-ik_1 x} + B e^{-ik_2 x}$$

で第1項は $(V+c)$ の速さで右方向に進み、第2項は $(V-c)$ で右方向に進む。つまり、右側の座標系から見ると第2項は左方向に進んでいるものである。

 $V < c$ の時は

$$\varphi = A e^{-ik_1 x} + B e^{ik_2 x}$$

2の時第2項の速さは $c(>V)$ なので左方向に進む事が出来る。

$$\omega_e + k_1 V = \omega_1$$

$$\omega_1 = \omega_e \frac{c+V}{c+V}$$

$$\omega_e + k_2 V = \omega_2 \quad \text{for } V > c$$

$$\omega_2 = \omega_e \frac{c-V}{c-V}$$

$$\omega_e + k_2 V = \omega_2 \quad \text{for } V < c$$

$$\omega_2 = \omega_e \left(1 + \frac{V}{c-V}\right)$$

$$= \omega_e \frac{c}{c-V}$$

$$\zeta = -\frac{i q}{\hbar} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \varphi(x)$$

座標系中の入射波ポテンシャル

$$\varphi = \frac{i q}{\omega_1} e^{-ik_1 x}$$

(何故)

$$\left(\frac{i q}{\omega_2} e^{-ik_2 x} \right) \quad \text{for } V > c$$

$$\left(\frac{i q}{\omega_2} e^{ik_2 x} \right) \quad \text{for } V < c$$

(進む)

② $V > 0$ の場合

i) 上下力

$$\psi = X_2 \quad \text{for } |x| < l.$$

$$\varphi_{xx} + \frac{i\omega e}{h} X_2 = 0 \quad \text{for } |x| < l.$$

$$\varphi = -\frac{i\omega e}{h} X_2 \left(\frac{x^2}{2} + Cx + D \right) \quad \text{for } |x| < l$$

$$\varphi = 0 \quad \text{for } x < -l.$$

$$\varphi = A e^{-iK_1 x} + B e^{-iK_2 x} \quad \text{for } x > l.$$

$$\therefore \varphi = \frac{\omega e X_2}{h i} \left(\frac{(x+l)^2}{2} \right) \quad \text{for } |x| < l$$

$$\frac{\omega e X_2}{h i} 2l^2 = A e^{-iK_1 l} + B e^{-iK_2 l}$$

$$\frac{\omega e X_2}{h i} 2l = -i (K_1 A e^{-iK_1 l} + K_2 B e^{-iK_2 l})$$

$$\frac{\omega e X_2}{h i} 2l (iK_2 l + 1) = i(K_2 - K_1) A e^{-iK_1 l}$$

$$\frac{\omega e X_2}{h i} 2l (iK_1 l + 1) = i(K_1 - K_2) B e^{-iK_2 l}$$

$$\frac{p}{p} = - (i\omega e) \frac{\omega e X_2}{h i} \left(\frac{(x+l)^2}{2} \right) - V \frac{\omega e X_2}{h i} (x+l)$$

$$\int_{-l}^l \frac{p}{p} dx = -\frac{\omega e^2 X_2}{2h} \frac{8l^3}{3} + iV \frac{\omega e X_2}{2h} l^2 = \frac{2iV \omega e X_2}{h} l^2 \left(1 + \frac{2i \omega e l}{3V} \right)$$

$$\int_{-l}^l (x+l)^3 x dx = \int_{-l}^l [(x+l)^3 - l(x+l)^2] dx = \frac{(2l)^4}{4} - l \frac{(2l)^3}{3} = \frac{4}{3} l^4$$

$$\int_{-l}^l (x+l)x dx = \frac{2l^3}{3}$$

$$\frac{1}{h} \int p x dx = \frac{i^2 \omega e X_2}{3 h} l^3 V \left(1 + i \frac{l \omega e}{V} \right)$$

ii) 不変中核

$$S = X_3 x$$

$$\varphi_{xx} = - \frac{X_3}{h} (i\omega_e x + V)$$

?

$$\varphi = - \frac{iX_3\omega_e}{h} \cdot \frac{x^3}{6} + \frac{X_3V}{h} \frac{x^2}{2} + Cx + D$$

$$\left. \begin{aligned} + \frac{iX_3\omega_e}{h} \frac{h^3}{3} - \frac{X_3V}{2h} h^2 + C + D &= 0 \\ - \frac{iX_3\omega_e}{h} \frac{h^2}{2} + \frac{X_3V}{h} h + C &= 0 \end{aligned} \right\} h$$

$$- \frac{iX_3\omega_e}{6h} h^3 + \frac{X_3V}{2h} h^2 + D = 0$$

$$\varphi = - \frac{iX_3\omega_e}{h} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{h^3}{6} - \frac{h^2x}{2} \right) - \frac{X_3V}{2h} (x+h)^2$$

$$\varphi|_{x=b} = \frac{i\omega_e}{3-h} X_3 h^3 - \frac{2Vh^2}{h} X_3 = A e^{-iK_1 h} + B e^{-iK_2 h}$$

$$\varphi|_{x=h} = - \frac{i\omega_e}{2h} X_3 h^2 - \frac{2V}{h} h X_3 = -iK_1 A e^{-iK_1 h} - iK_2 B e^{-iK_2 h}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{i\omega_e}{h} X_3 h^2 \left(\frac{iK_2 h}{3} - \frac{1}{2} \right) - \frac{2Vh}{h} X_3 (iK_2 h + 1) &= i(K_2 - K_1) A e^{-iK_1 h} \\ \frac{i\omega_e}{h} X_3 h^2 \left(\frac{iK_1 h}{3} - \frac{1}{2} \right) - \frac{2Vh}{h} X_3 (iK_1 h + 1) &= i(K_1 - K_2) B e^{-iK_2 h} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{p}{pX_3} = - \frac{\omega_e^2}{h} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{h^2x}{2} - \frac{h^3}{6} \right) + \frac{iV\omega_e}{2h} (x+h)^2 + \frac{iV\omega_e}{h} \left(x^2 - \frac{h^2}{2} \right) + \frac{V^2}{h} (x+h)$$

$$\int \frac{p}{pX_3} dx = + \frac{\omega_e^2}{3h} h^4 + \frac{iV\omega_e}{h} V h^3 + \frac{2V^2}{h} h^2 //$$

$$\int \frac{p x dx}{pX_3} = - \frac{\omega_e^2}{5h} h^5 + \frac{iV\omega_e}{h} h^4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{V^2}{3h} h^3 //$$

$$\frac{2}{15} - \frac{2Vh}{2V3} = \frac{2-5}{15}$$

iii) 散乱

$$\varphi_0 = \frac{ig}{\omega_1} e^{-ik_1 x}$$

$$\varphi_d = 0 \quad \text{for } x < -a$$

$$\varphi_d = -\varphi_0 + Cx + D \quad \text{for } |x| < a$$

$$\varphi_d = A e^{-ik_1 x} + B e^{-ik_2 x} \quad \text{for } x > a$$

$$\varphi_0(-a) = -bC + D = \frac{ig}{\omega_1} e^{ik_1 a} \quad \left\{ \begin{array}{l} D = \left(\frac{ig}{\omega_1} + \frac{gk_1 b}{\omega_1} \right) e^{ik_1 a} \\ C = \frac{gk_1}{\omega_1} e^{ik_1 a} \end{array} \right.$$

$$\varphi_0(-a) = C = \frac{gk_1}{\omega_1} e^{ik_1 a}$$

$$bC + D - \frac{ig}{\omega_1} e^{-ik_1 a} = A e^{-ik_1 a} + B e^{-ik_2 a}$$

$$C - \frac{gk_1}{\omega_1} e^{-ik_1 a} = -ik_1 A e^{-ik_1 a} - ik_2 B e^{-ik_2 a}$$

$$C(1 + ik_2 b) + ik_2 D + \frac{g}{\omega_1} (k_2 - k_1) e^{-ik_1 a} = i(k_2 - k_1) A e^{-ik_1 a}$$

$$C(1 + ik_1 b) + ik_1 D = i(k_1 - k_2) B e^{-ik_2 a}$$

$$\frac{p}{p} = -(i\omega_e + V \frac{\partial}{\partial x})(\varphi_0 + \varphi_d) = -i\omega_e(Cx + D) - VC$$

$$\int \frac{p}{p} dx = -2i\omega_e b D - 2VCb = -\frac{2gVb k_1}{\omega_1} e^{ik_1 a}$$

$$= -\frac{2i\omega_e b g}{\omega_1} (i + b k_1) e^{ik_1 a} - \frac{2g b V k_1}{\omega_1} e^{ik_1 a}$$

$$= \frac{2g b}{\omega_1} e^{ik_1 a} \left[-\overbrace{V k_1}^{\omega_1} + \omega_e - i k_1 b \omega_e \right]$$

$$\int \frac{p}{p} x dx = -i\omega_e C \cdot \frac{2}{3} b^3 = -\frac{2ig\omega_e b^3 k_1}{3\omega_1} e^{ik_1 a}$$

② $V < C$ の場合

i) 上下重力 (単位振幅)

$$\varphi = B^- e^{ik_2 x} \quad \text{for } x < -b$$

$$\varphi = -\frac{i\omega_2}{\hbar} \left(\frac{x^2}{2} + Cx + D \right) \quad \text{for } -b < x < b$$

$$\varphi = A^+ e^{-ik_1 x} \quad \text{for } x > b$$

$$B^- e^{-ik_2 b} = \frac{\omega_2}{\hbar i} \left(\frac{b^2}{2} - bC + D \right)$$

$$ik_2 B^- e^{-ik_2 b} = \frac{\omega_2}{\hbar i} (-b + C)$$

$$\frac{i\omega_2}{\hbar i} \left(\frac{b^2}{2} + bC + D \right) = A^+ e^{-ik_1 b}$$

$$\frac{\omega_2}{\hbar i} (b + C) = -ik_1 A^+ e^{-ik_1 b}$$

$$\begin{cases} (1 + ik_2 b)C - ik_2 D = -b + \frac{ik_2}{2} b^2 & K_1 \quad (1 + ik_1 b) \\ (1 + ik_1 b)C + ik_1 D = -b - \frac{ik_1}{2} b^2 & K_2 \quad (1 + ik_2 b) \end{cases}$$

$$C = \frac{b(K_1 - K_2)}{K_1 + K_2 + 2iK_1 K_2 b}$$

$$D = \frac{-b(2 + ik_2 b + ik_1 b) - \frac{i}{2} b^2 [K_1(1 + ik_2 b) + K_2(1 + ik_1 b)]}{i[K_1(1 + ik_2 b) + K_2(1 + ik_1 b)]}$$

$$B^- = \frac{i\omega_2}{\hbar i} e^{ik_2 b} \frac{[-b^2(K_1 - K_2) + ib(2 + ik_1 b + ik_2 b)]}{K_1 + K_2 + 2iK_1 K_2 b}$$

$$= \frac{2\omega_2}{\hbar} e^{ik_2 b} \times \frac{b(1 + ik_1 b)}{K_1 + K_2 + 2iK_1 K_2 b}$$

$$A^+ = \frac{2b\omega_2}{K_1 \hbar} e^{ik_1 b} \times \frac{K_2(1 + ik_2 b)}{K_1 + K_2 + 2iK_1 K_2 b}$$

$$\int \frac{p}{P} dx = -i\omega_e \int \varphi dx - V [\varphi]_{-l}^l$$

$$\int \frac{p}{P} x dx = -i\omega_e \int \varphi x dx - V [x\varphi]_{-l}^l - \int \varphi dx$$

$$\int \varphi dx = \frac{\omega_e}{i\hbar} \left(\frac{l^3}{3} + 2BD \right), \quad [\varphi]_{-l}^l = \frac{\omega_e}{i\hbar} (2l) C$$

$$\int \varphi x dx = \frac{\omega_e}{i\hbar} C \frac{2}{3} l^3, \quad \int x \varphi dx = \frac{\omega_e}{i\hbar} \cdot \frac{2}{3} l^3$$

$$\int \frac{p}{P} dx = -\frac{\omega_e^2}{\hbar} \left(\frac{l^3}{3} + 2BD \right) + i \frac{2l}{\hbar} \omega_e V C$$

$$\int \frac{p}{P} x dx = -\frac{2\omega_e^2}{3\hbar} C l^3 + i \frac{2V}{3\hbar} l^3 \omega_e$$

ii) 縦印れ $\xi = x$.

$$\varphi = B^- e^{ik_2 x} \quad \text{for } x < -b.$$

$$\varphi = -\frac{1}{\hbar} \left(i\omega_e \frac{x^3}{6} + \frac{V}{2} x^2 + Cx + D \right),$$

$$\varphi = A^+ e^{-ik_1 x} \quad \text{for } x > b$$

$$B^- e^{-ik_2 b} = -\frac{1}{\hbar} \left(-i\frac{\omega_e}{6} b^3 + \frac{V}{2} b^2 + bC + D \right),$$

$$ik_2 B^- e^{-ik_2 b} = -\frac{1}{\hbar} \left(i\frac{\omega_e}{2} b^2 - Vb + C \right),$$

$$A^+ e^{-ik_1 b} = -\frac{1}{\hbar} \left(i\frac{\omega_e}{6} b^3 + \frac{V}{2} b^2 + bC + D \right),$$

$$-ik_1 A^+ e^{-ik_1 b} = -\frac{1}{\hbar} \left(i\frac{\omega_e}{2} b^2 + Vb + C \right)$$

$$C(1 + ik_2 b) - ik_2 D = -i\frac{\omega_e}{2} b^2 \left(\frac{ik_2 b}{3} + 1 \right) + Vb \left(1 + \frac{ik_2 b}{2} \right),$$

$$C(1 + ik_1 b) + ik_1 D = -i\frac{\omega_e}{2} b^2 \left(1 + \frac{ik_1 b}{3} \right) + Vb \left(1 + \frac{ik_1 b}{2} \right),$$

$$C = \frac{\frac{\omega_e}{2i} b^2 (k_1 + k_2 + \frac{3}{2} i k_1 k_2 b) + Vb (k_1 - k_2)}{k_1 + k_2 + 2i k_1 k_2 b}$$

$$D = \frac{\frac{\omega_e}{2i} b^2 \left[\left(1 + \frac{ik_1 b}{3} \right) (1 + ik_2 b) - \left(1 + \frac{ik_2 b}{3} \right) (1 + ik_1 b) \right] - Vb \left[\left(1 + \frac{ik_1 b}{2} \right) (1 + ik_2 b) - \left(1 + \frac{ik_2 b}{2} \right) (1 + ik_1 b) \right]}{i [k_1 + k_2 + 2i k_1 k_2 b]}$$

$$= \frac{\frac{\omega_e}{3} b^3 (k_2 - k_1) - Vb \left[2 + \frac{3}{2} i k_1 b + \frac{3}{2} i k_2 b - k_1 k_2 b^2 \right]}{i [k_1 + k_2 + 2i k_1 k_2 b]}$$

$$B^- = \frac{i e^{ik_2 b}}{k_2 b} \left[\frac{\frac{\omega_e}{2i} b^2 \left(-\frac{4}{3} i k_1 k_2 b \right) + Vb (k_1 - k_2)}{k_1 + k_2 + 2i k_1 k_2 b} - Vb \right]$$

$$= \frac{i e^{ik_2 b}}{k_2 b} \frac{-\frac{2}{3} \omega_e b^3 k_1 k_2 + 2Vb k_2 (1 + ik_1 b)}{k_1 + k_2 + 2i k_1 k_2 b}$$

$$A^+ = \frac{e^{ik_1 b}}{i \hbar} \frac{\left[-\frac{2}{3} \omega_e b^3 k_2 + 2Vb (1 + ik_2 b) \right]}{k_1 + k_2 + 2i k_1 k_2 b}$$

$$\int \varphi dx = -\frac{1}{\hbar} \left[\frac{V}{3} h^3 + 2Dh \right]$$

$$\int \varphi_x dx = -\frac{1}{\hbar} \left[\frac{i\omega_e}{15} h^5 + \frac{2}{3} Ch^3 \right]$$

$$\int \varphi_x dx = -\frac{1}{\hbar} \left[\frac{i\omega_e}{3} h^3 + 2hC \right]$$

$$\int x \varphi_x dx = -\frac{1}{\hbar} \left[\frac{2}{3} hV \right]$$

$$\int \frac{p}{\rho} dx = -i\omega_e \int \varphi dx - V \int \varphi_x dx$$

$$= \frac{i\omega_e}{\hbar} \left[\frac{V}{3} h^3 + 2Dh \right] + \frac{2Vh}{\hbar} \left[\frac{i\omega_e}{3} h^3 + Ch \right]$$

$$= \frac{2i\omega_e V}{\hbar} h \left[\frac{h^2}{3} + \frac{D}{V} \right] + \frac{2Vh}{\hbar} C$$

$$\int \frac{p}{\rho} x dx = +i\frac{\omega_e}{\hbar} \left[\frac{i\omega_e}{15} h^5 + \frac{2}{3} Ch^3 \right] + \frac{V^2}{\hbar} \times \frac{2h}{3}$$

iii) 散光 L 同例 $\varphi_0 = \frac{ig}{\omega_1} e^{-ik_1 x}$

$$\varphi_d = B^- e^{ik_2 x} \quad \text{for } x < -b$$

$$\varphi_d = -\varphi_0 + Cx + D$$

$$\varphi_d = A^+ e^{-ik_1 x}$$

$$B^- e^{-ik_2 b} = -\frac{ig}{\omega_1} e^{ik_1 b} - Cb + D \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad ik_2$$

$$ik_2 B^- e^{-ik_2 b} = -\frac{gk_1}{\omega_1} e^{ik_1 b} + C$$

$$A e^{-ik_1 b} = -\frac{ig}{\omega_1} e^{-ik_1 b} + bC + D \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad ik_1$$

$$-ik_1 A e^{-ik_1 b} = -\frac{gk_2}{\omega_1} e^{-ik_1 b} + C$$

$$C(1 + ik_2 b) - ik_2 D = \frac{g}{\omega_1} (k_1 + k_2) e^{ik_1 b} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad k_1$$

$$C(1 + ik_1 b) + ik_1 D = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad k_2$$

$$C = \frac{\frac{g}{\omega_1} (k_1 + k_2) e^{ik_1 b}}{k_1 + k_2 + 2ik_1 k_2 b}$$

$$D = -\frac{(1 + ik_1 b)}{ik_1} C$$

$$\int (\varphi_0 + \varphi_d) dx = 2bD, \quad \int (\varphi_0 + \varphi_d) x dx = \frac{2}{3} b^3 C$$

$$\int (\varphi_0 + \varphi_d)_x dx = 2bC, \quad \int (\varphi_0 + \varphi_d)_x x dx = 0$$

$$\int \frac{(p_0 + p_d)}{F} dx = -2i\omega_e b D - 2bCV$$

$$\int \frac{(p_0 + p_d) x dx}{F} = -\frac{2i}{3} \omega_e b^3 C$$