No.

Date 61.2.6

水波問題と制御理論
(その1 非最少位相推移系)

別所正利

"Water Wave Problem and Controll Theory"

(First Report Non-minimum phase shift System)

By Masatoshi Bessho

内容 頁

以上

概要

近年船および浮遊構造物の波浪中運動性能の研究は格段の進歩を遂げ，その予測精度は目覚ましい。

このような成果を踏まえて，工学としての必然性からこれらの現象を支配（制御）して，工学的価値を創出しようと言う研究も多数現われている。

このような研究では当然の事ながら自動制御理論の援けを借りる事になるが，それは成立ちから水波理論と少し勝手が異なり，細かい事で何かと とまどう。

例えば制御理論（電気回路）では殆どの場合集中定数回路（R, C, L）を扱かい，分布定数回路は（同軸）線路などの特殊な場合のみ解析されているのに対し，水波問題における水の反力は常に分布定数回路であって，伝達関数のラプラス変換で考えると前者では（正）実係数の多項式であるのに対し後者では大変複雑な解析関数であるので制御理論を直接援用してよいのかどうか，あるいはどう援用すればよいのか とまどう事が多い。

本報告はこの点に関し筆者の最近考えた道筋

1. 波上側の波高から波下側のそれを推定する事

先ず浅海波について考えよう。

xの正方向から負方向に入射して来る波を考えると，波高のスペクトル密度を$A(\omega)$とすれば波高は次式で与えられる。

$$\eta(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\, e^{ikx+i\omega t}\, d\omega, \quad k=\frac{\omega}{c},\ c\text{ 波速}, \quad (1.1)$$

この値から原点の波高を推定するには

$$\eta(0,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(A(\omega)\, e^{\frac{i\omega}{c}x}\right) e^{-\frac{i\omega}{c}x+i\omega t}\, d\omega$$

と書け，$e^{-\frac{i\omega}{c}x}$はラプラス変換では$e^{-\frac{x}{c}s}$となってよく知られているように無駄時間要素であり，直ちに

$$\eta(0,t) = \eta\left(x, t-\frac{x}{c}\right) \quad , \quad \text{- - - -} \quad (1.2)$$

と書けるが，これはフーリエ変換をするまでもない。

さて深海波では *

$$\eta(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\, e^{ikx+i\omega t}\, d\omega, \quad k=\frac{\omega|\omega|}{g}, \quad (1.3)$$

と表わされるとすると

$$\eta(0,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[A(\omega)\, e^{ikx}\right] e^{-ikx+i\omega t}\, d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x,\tau)\, W(x, t-\tau)\, d\tau, \quad (1.4)$$

*) 中村彰一，内藤林，海洋構造物研究会報告，昭和57，58年度

の2,3を紹介し，大方の批判を仰ぎたいと記すものである。

本報では具体的に中村，内藤が研究した波上側の波高から波下側の波高を推定する問題をとりあげ，深海波では理想的Filterが構成不可能と同じ理由で理論的不可能であり，その原因はその伝達関数が制御理論で言う非最小位相推移系(Non-Minimum Phase Shift System)であって事前過渡現象が存在(この事は水波理論ではよく知られている)する事に起因する事を述べ，さらにこの性質はKochin関数にも存在する事をの述べる。

そうすると流体力全般についても心配になって来るのでそれについて調査をした。

これらの調査から最小位相推移系であるためのBodeの関係は水波理論で知られているKramers-Kronigの関係と同じである事がわかった。

ここに

$$W(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx+i\omega t}\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos(kx-\omega t)\,d\omega$$

$$=\sqrt{\frac{g}{2\pi x}}\Big[\cos\Big(\frac{gt^2}{4x}\Big)\Big\{\frac{1}{2}+C\Big(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2\pi x}}t\Big)\Big\}$$

$$+\sin\Big(\frac{gt^2}{4x}\Big)\Big\{\frac{1}{2}+S\Big(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{2\pi x}}t\Big)\Big\}\Big],\qquad(1.5)$$

で C, S はフレネル積分である。

そして

$$\left.\begin{aligned}W(x,t)&\xrightarrow[\frac{\sqrt{g}t}{\sqrt{2\pi x}}\to 0]{}\sqrt{\frac{g}{2\pi x}}\Big[\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{g}{2\pi x}}\,t\Big],\\&\xrightarrow[\sqrt{\frac{g}{2\pi x}}t\gg 1]{}\sqrt{\frac{g}{\pi x}}\cos\Big(\frac{gt^2}{4x}-\frac{\pi}{4}\Big),\end{aligned}\right\}\quad(1.6)$$

であるから、$t<0$ でも W は 0 にならず、つまり事前過渡現象があって、$\eta(x,t)$ の現在までの値から、$\eta(0,t)$ を推定する事は理論的に不可能である。

このようになるのは W のフーリエ変換 $e^{-i\omega|\omega|x/g}$ が ω の下半面で正則でない事に起因し、制御理論等ではそのような系を非最小位相推移系と呼んでいる。

理想フィルターが不可能であるのも同様な理由*によるものであり、制御理論ではこれを近似的に実現する為に補償(compensate)回路を工夫する。

* 高橋利衛, 自動制御の数学, オーム社, 1961

中村，内藤（前々頁註）はそのような補償についての考案を提示している。

所で $e^{-i\frac{\omega|\omega|}{g}x}$ なる関数はゲインが1で位相がどんどん遅れるのであるから，最も簡単に考えれば進相回路を入れてやればよいわけである。

それを

$$F(\omega)=\frac{R}{R-\frac{i}{\omega C}}\quad ,\ R,\ C\ 定数\ , \qquad (1.7)$$

とおくと

$$\eta(0,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\eta_F(x,\tau)\,W_F(x,t-\tau)\,d\tau\ , \qquad (1.8)$$

$$\eta_F(x,t)=\eta(x,t)+\frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t}\eta(x,\tau)\,d\tau\ , \qquad (1.9)$$

$$W_F(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\,e^{-ikx+i\omega t}\,d\omega\ , \qquad (1.10)$$

となって，確かに事前遡流現象は少し小さくなりそうである。いずれにしろ (1.10) で $F(\omega)$ を適当に選ぶ事により実用上有用なものを得る事は出来るであろう。

この時フィルター設計の理論も大いに参考になろう。

所で特に2次元問題では $\eta(x,t)$ には一般に反射波が含まれているのでその影響も考慮しなければならないし，また物体の前方の点に波高計

を設置しなければならず，さらに波高の信号には多くの雑音がある事も予想しなければならない。

従って直接浮体の運動なり，圧力なりから波高を求める方法（波高計）がよりよいと考えられる。

2. ブイの運動から波高を推定する事

簡単の為に対称浮体の平面波による上下ゆれを考えると，動揺振巾 $y(t)$ の周波数応答 $Y(\omega)$ は

$$Y(\omega) = \rho g \frac{A(\omega)\, H_2(K)}{Z_2(\omega)} \quad , \quad \cdots \quad (2.1)$$

$A(\omega)$ は波のスペクトル密度，H_2 は波強制力つまりコッチン関数，Z_2 は上下ゆれの流力インピーダンス。

と与えられる故，波高は

$$A(\omega) = \frac{Y(\omega)\, Z_2(\omega)}{\rho g\, H_2(K)} \quad , \quad \cdots \quad (2.2)$$

つまり

$$\eta(0,t) = \frac{1}{2\pi\rho g}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y(\omega)\, Z_2(\omega)}{H_2(K)}\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\, N_2(t-\tau)\, d\tau \, , \quad (2.3)$$

$$N_2(t) = \frac{1}{2\pi\rho g}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Z_2(\omega)}{H_2(K)}\, e^{i\omega t}\, d\omega \,, \qquad (2.4)$$

となるが，例えば充分吃水の浅い浮体では近似的に

$$\frac{\rho g H_2(K)}{Z_2(\omega)} \doteqdot 1 \quad \text{for } |\omega| < \omega_0 \text{：同調周波数}$$
$$\propto \frac{e^{i\frac{\omega|\omega|}{g}\alpha}}{\omega^4} \quad \text{for } |\omega| \gg \omega_0 ,\ \alpha \text{：定数} \qquad (2.5)$$

となるから，やはり $e^{i\frac{\omega|\omega|}{g}\alpha}$ なる成分を有しているので N_2は事前過渡現象を持ち，従って運動から波高を推定する事は不可能である。

（なおこの際観測時間を充分とれば $A(\omega)$を得る事は出来るわけである事に注意）

それ故浮子式波高計の性能は同調周波数の選定次第であるのは論をまたない。

さて N_2 の周波数応答で $e^{i\frac{\omega|\omega|}{g}\alpha}$ なる成分が出て来るのは Z_2 ではなく H_2 つまりコッチン関数である。

従って流体力についてこの性質を調べてみる必要がある。

3. 最小位相推移系

制御理論によれば（前田 高橋）最小位相推移系のBode線図についてそのゲインと位相は互にHilbert変換出来ると言う。

即ち ω−面の下半面で正則な関数（その対数または指数関数でもよい）の実部および虚部を

$$F(\omega)=R(\omega)-iS(\omega), \qquad (3.1)$$

とおくと コーシーの定理により下半面で

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(u)}{\omega-u}\,du', \qquad (3.2)$$

であるから，実部と虚部にわけてかき，$F(-\omega)=\overline{F(\omega)}$ を考慮すると

$$\left.\begin{aligned} R(\omega)&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{S(u)\,u}{u^2-\omega^2}\,du \\ S(\omega)&=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{R(u)\,\omega}{u^2-\omega^2}\,du, \end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

これはBodeの関係式と呼ばれているが，見る通りこれは伝達関数がωの下半面で正則であるならば常に成立つ関係であり，同じ理由からJ.Kotikは上式と全く等しい式をKramers-Kronigの関係として引用し，附加質量と

減衰の間に成立つ事を数値的に示している。

それ故一般に流体力学的インピーダンスも最小位相推移系と考えてよい。

そうでないものとしては入射波 $e^{i\frac{\omega^2}{g}x}$ が考えられ、従ってそれに関係するコッチン関数が考えられる。

実際コッチン関数は

$$H_j(K) = -\int_C (\phi_0 + \phi_d)\frac{\partial \phi_j}{\partial n}ds \quad , \quad \cdots\cdots \quad (3.4)$$

$\phi_0 = e^{-Ky+iKx}$ ；入射波，ϕ_d：散乱ポテンシャル

と表わされ、入射波に関する部分を含むので

少くとも　所謂 Froude-Kriloff 力の部分が非最小位相推移系である。

従って制御系の伝達関数にコッチン関数が含まれる場合は事前過渡現象を防ぐ為の位相補償を考えておく必要がある。

蛇足ながら，その自乗に比例する減衰について問題がないのは何か奇妙な気もする事である。

4. 流体力の正則性の確認

Bode あるいは Kramers-Kronig の関係が成立ち，系が最小位相推移系である為には伝達関数が ω の下半面で正則であればよい。

後者の関係に関する原論文は筆者も未見なのでよくわからないが，線型系の物理現象としてそうあるべきだと言う所論のように推測される。

以下では具体的に(2次元問題で)速度ポテンシャル，流体力の表現からそれを確認しておこう。

i) 2次元(深水)波動問題 (前進速度なし)

速度ポテンシャルは次のように書ける。*

$$\phi(x,y) = \int_C \left[\phi \frac{\partial}{\partial n} S - \frac{\partial \phi}{\partial n} S(x,y;x',y') \right] ds, \tag{4.1}$$

$$S(x,y;x',y') = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-k(y+y')} \cos k(x-x')}{k - K + \mu i} dk, \tag{4.2}$$

$K = \omega^2/g$

この S を $K(=\omega^2/g)$ の関数として見ると上式右辺の積分で K の極は $K = k + \mu i$ つまり K-面の実軸の上側にあり，従って K の下半面では正則

---

* Bessho, M. "On boundary value Problem of an oscillating body floating on water", M.D.A. vol. 8, 1968

であり，$k=\omega^2/g$ であるから ω の下半面でも正則である。

それ故 それを積分した速度ポテンシャルも流体力も正則であって最小位相推移系である。

しかし散乱ポテンシャルは境界条件の為に非最小位相推移系である。
この場合はまた特に (3.3) と同じ表現が直接えられる。

例えば (4.2) で簡単の為に特に $y=y'=x'=0$ とすると

$$S(x,0;0,0)=\frac{P.V.}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos kx}{k-K}\,dk-i\cos Kx, \qquad (4.3)$$

となって，全く (3.3) と同型である。

この式から虚部が $\cos\left(\frac{\omega^2 x}{g}\right)$ である最小位相推移系の実部は正，余弦積分右辺第1項で与えられる事がわかる。

ie^{iKx}

また上式から

$$\frac{\partial}{\partial x}S=-\frac{P.V.}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin kx\,k\,dk}{k-K}+iK\sin Kx,$$

となるから

$$S-\frac{i}{K}\frac{\partial}{\partial x}S=\frac{P.V.}{\pi}\int_0^\infty \frac{dk}{k-K}\left(\cos kx+\frac{ik}{K}\sin kx\right)-ie^{-iKx}, \qquad (4.4)$$

となる。　つまり $[e^{ikx}]$ を最小位相推移系とするとこの右辺第1項の積分が必要である。

(4.1)は吃水が充分小さい時は圧力分布pによって

$$\phi(x,y) = -\frac{1}{\rho g}\int_{-1}^{1} p(x')\, S(x,y;x',0)\,dx', \qquad (4.5)$$

のように表わされ，コッチン関数を

$$H^{\pm}(k;K) = \int_{-1}^{1} p(x)\, e^{\pm ikx}\, dx, \qquad (4.6)$$

のように導入すると（左辺の意味は波数Kの時の解pに$e^{\pm ikx}$を乗じて積分すること）

$$K\phi(x,0) + \frac{\partial}{\partial y}\phi(x,0) = \frac{1}{\rho g}\, p(x), \qquad (4.7)$$

であるから流体力は

$$\int_{-1}^{1} \bar{p}\,\frac{\partial\phi}{\partial y}\,dx = \frac{1}{2\pi\rho g}\int_{0}^{\infty} \{|H^{+}(k)|^2 + |H^{-}(k)|^2\}\,\frac{k\,dk}{k-K-\mu i}, \qquad (4.8)$$

[∵ $\displaystyle\int_{-1}^{1} p\,\bar{p}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \{|H^{+}(k)|^2 + |H^{-}(k)|^2\}\,dk$ （プランシュレルの定理）]

と表わされ，(3.3)に等しいように見えるがこの被積分関数の$H^{\pm}(k)$は(4.6)の定義によるもので(3.3)に全く等しくなるためには

$$H^{\pm}(k;K) \overset{?}{=} H^{\pm}(k;k) \qquad (4.9)$$

が成立たねばならない。

この関係はまだに証明出来ないし，またこれは成立たないけれども積分した時に等しくなると考える方が良さそうである。

iii) 振動翼（2次元平板翼）

この場合も殆ど直接的に (3.3) の関係がわかる場合である。

速度ポテンシャルは圧力分布 $p(x)$ によって *

$$\phi(x,y) = \frac{1}{\rho U}\int_{-1}^{1} p(x')\, S(x-x', y)\, dx' , \qquad (4.10)$$

$$S(x,y) = \frac{e^{i\alpha x}}{2\pi}\int_{\infty}^{x} \frac{e^{-i\alpha\xi}\, y}{\xi^2+y^2}\, d\xi , \qquad (4.11)$$

$$〃 = \frac{\mathrm{sgn}(y)}{4\pi i}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{e^{ikx}}{k-\alpha+\mu i} - \frac{e^{-ikx}}{k+\alpha}\right) e^{-k|y|}\, dk , \qquad (4.12)$$

$$(\alpha = \omega/U)$$

と表わされ，(4.11) から S が ω の下半面で正則である事はよくわかる。

(4.12) から (4.4) に似た関係が直ちに得られる。即ち

$$S(x,+0) = -\frac{e^{i\alpha x}}{2} + \frac{P.}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}\left[\frac{\alpha\cos kx + k\sin kx}{k^2-\alpha^2}\right] dk , \qquad (4.13)$$

流体力についても前項と同じような式が導びけるが，やはり直接証明する事は困難で，ω の下半面で正則であるから Bode の関係が成立つとするしかないように見える。

* 別所，2次元振動翼理論について，関西造協誌，189号，昭和58年

iii) 2次元波動問題（前進速度のある場合）

吃水が浅いとして圧力分布で表現出来るとすると速度ポテンシャルは*

$$\phi(x,y)=\frac{1}{\rho U}\int_{-1}^{1}p(x')S(x-x',y)\,dx', \quad \cdots \qquad (4.14)$$

$$S(x,y)=\frac{i}{2\pi}\int_0^\infty\left[\frac{u-k}{A(u)}e^{iux}-\frac{u+k}{B(u)}e^{iux}\right]e^{uy}\,du, \qquad (4.15)$$

$$\left.\begin{array}{l} A(u)=(u-\alpha)^2-\nu u+i\mu(u-\alpha) \\ B(u)=(u+\alpha)^2-\nu u-i\mu(u+\alpha) \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \alpha=\omega/U, \\ \nu=g/U^2, \end{array}\right\} \qquad (4.16)$$

で与えられるから，S を α の関数と見るとその特異点は $A(u)$, $B(u)$ の零点で即ち

$$\left.\begin{array}{l} A=\left(\alpha-u-\frac{i\mu}{2}\right)^2+\frac{\mu^2}{4}-\nu u \\ B=\left(\alpha+u-\frac{i\mu}{2}\right)^2+\frac{\mu^2}{4}-\nu u \end{array}\right\}$$

であるから，極は $\quad \alpha=\mp u+\frac{i\mu}{2}\pm\sqrt{\nu u-\frac{\mu^2}{4}}$, $\qquad (4.17)$

となって常に ω の上半面にあり，従って下半面では正則である。

この場合は前2項と違い直接これらの式から Bode の関係に似た式すら導けないが正則性からそれが成立つ事は自明である。

＊別所，動揺する2次元浅吃水船に働く流体力の理論について，関西造協誌，165号 昭和52年6月