

船体運動のインパルス応答理論
に関する覚書

別紙正付)

序言

1. 速度ポテンシャル等のフーリエ変換
 2. インパルス応答による表現
 3. 入射波と波の力
 4. 上下運動
 5. ローリング
 6. 変分原理と運動
 7. 変分原理と境界値問題
 8. 波の分散
- 結言

昭和46年 1月

防衛大学校
機械科

序言

波を伴う船体運動は水面変形の線型性の仮定の下に簡単に算出可能である事はわかってゐる。しかし定常運動、つまり一定の速度で前進する場合とか、一定の円周は数で振動する場合を除けば問題は複雑で解くのは難しい。

一方カニゴの言うように自動制御理論から考えれば線型系を考える限りは同は数応答もしくはインパルス応答がわかればすべての運動は推定出来るはずである。実際それは実証された。^{1) 3) 4)}

一方又アーセルは純理論的に半没円筒の上下動を求めようとした。²⁾

本文ではアーセルの方法を従つて又次運動で前進速度のない場合の上下動およびローリングをとりあげ波浪中の運動との関係においてインパルス応答理論を組立てる。

この際ハスキントンの関係を導入する事によつて放射波の応答と波浪中の運動との間に簡単な関係がある事が推定出来る。つまり原理的には青銅水中で船を少し動かしてその運動と放射波を測定すれば波浪中の応答まで求まる事になる。

さらに関係問題として竹沢の言う transient wave の性質その分散についても少し検討し又ハミルトンの変分原理による運動方程式等の誘導についても言及した。

1. 速度ポテンシアルおよび力のフーリエ変換

圧力は

$$\frac{1}{\rho} p(x, y, t) = \phi_t(x, y, t) + g\eta, \quad \dots (1)$$

水面条件は

$$\phi_t = -g\eta \quad \dots (2)$$

$$\eta_t = -\phi_y \quad \dots (3)$$

ηを消去すれば

$$\phi_{tt} - g\phi_y = 0 \quad \dots (4)$$

物体の下面条件は

$$\phi_n = - \sum_{j=1}^3 u_j(t) x_{jn} \quad \text{on } S \quad (5)$$

すなわち

$$u_j(t) = \dot{a}_j = \frac{d}{dt} a_j, \quad \dots (6)$$

 $a_1 \equiv a_x$ (後には x) ; x 方向の変位 $a_2 \equiv a_y$ (後には y) ; y " " $a_3 \equiv a_\theta$ (後には θ) ; 角変位

(重心周りの運動力としては suffix を省いてゐる)

船に働く力のつりあは

$$f_j = - \int_S p x_{jn} dS = - \rho \int_S \phi_t x_{jn} dS, \quad \dots (7)$$

 $t=0$ まで $\phi = \phi_t = 0$ として、これをフーリエ変換すると

$$\int_0^\infty \phi(x, y, t) e^{-i\omega t} dt = \bar{\Phi}(x, y; \omega) = \overline{\Phi(x, y; -\omega)}$$

$$\text{すなわち } \phi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Phi}(x, y; \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (8)$$

$$\text{つまり } \int_0^\infty \phi_t e^{-i\omega t} dt = i\omega \bar{\Phi}$$

$$\int_0^\infty \phi_{tt} e^{-i\omega t} dt = -\omega^2 \bar{\Phi}$$

$$H(x, \omega) = \int_0^\infty \eta(x, t) e^{-i\omega t} dt = -\frac{i\omega}{g} \bar{\Phi} \quad (9)$$

$$P(x, y, \omega) = \rho \int_0^\infty \phi_t e^{-i\omega t} dt = \rho i\omega \bar{\Phi}$$

かえらるから水面条件は

$$H = -\frac{i\omega}{\gamma} \bar{\Phi}$$

$$i\omega H = -\bar{\Phi}_y \quad \left. \begin{array}{l} y=0, \dots (10) \end{array} \right\}$$

$$\frac{\omega^2}{\gamma} \bar{\Phi} + \bar{\Phi}_y = 0$$

固体表面条件は

$$\int_0^\infty U_j(t) e^{-i\omega t} dt = U_j(\omega), \quad (11)$$

とおく

$$\bar{\Phi}_y(x, y; \omega) \Big|_{\text{on } S} = \int_0^\infty \Phi_j \Big|_{\text{on } S} e^{-i\omega t} dt = -\sum_{j=1}^3 U_j \chi_{jy}, \quad (12)$$

となる。

今

$$\bar{\Phi} = \sum_{j=1}^3 U_j \bar{\Phi}_j, \quad (13)$$

とすれば

$$\bar{\Phi}_{jy} = -\chi_{jy} \quad \text{on } S, \quad (14)$$

とすれば、(12)式は満足される、さらに仮定して

$$\phi(x, y; t) = \sum_{j=1}^3 \Phi_j, \quad \Phi_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_j \bar{\Phi}_j e^{i\omega t} d\omega, \quad (15)$$

となる。

これは

$$\begin{aligned} F_j(\omega) &= \int_0^\infty f_j e^{-i\omega t} dt = -\pi i \omega \int_S \bar{\Phi} \chi_{jy} ds \\ &= -\pi i \omega \sum_{k=1}^3 U_k \int_S \bar{\Phi}_k \chi_{jy} ds \\ &= -\pi i \omega \sum_{k=1}^3 U_k C_{jk} \end{aligned} \quad (16)$$

とすれば

$$C_{jk} = C_{kj} = \int_S \bar{\Phi}_k \chi_{jy} ds = \int_S \bar{\Phi}_j \chi_{ky} ds, \quad (17)$$

以上の式は満たす必要がある

$$\bar{\Phi}(x, y, \omega) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \left. \begin{array}{l} i D^+(K) e^{-Ky - iKx} \quad \text{for } x > 0 \\ i D^-(K) e^{-Ky + iKx} \quad \text{for } x < 0 \end{array} \right\} \quad (18)$$

$$K = \omega^2/\gamma, \quad \omega > 0 \text{ とする } \omega < 0 \text{ に対しては}$$

$$\bar{\Phi}(-\omega) = \overline{\bar{\Phi}(\omega)} \text{ である。以下同様}$$

$$D^{\pm}(k) = \int_S \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \bar{\Phi} - \bar{\Phi} \frac{\partial}{\partial \nu} \right) e^{-k y \pm i k x} dS$$

$$= \sum_{j=1}^3 U_j D_j^{\pm}(k) \quad (19)$$

$$H(x, \omega) = -\frac{i\omega}{g} \bar{\Phi}(x, 0, \omega)$$

$$\xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \left. \begin{aligned} &\frac{\omega}{g} D^+ e^{-ikx} \quad \text{for } x > 0 \\ &\frac{\omega}{g} D^- e^{ikx} \quad \text{for } x < 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [H(x, \omega) e^{i\omega t} + \overline{H(x, \omega)} e^{-i\omega t}] d\omega \\ &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi g} \int_0^{\infty} [D^+(k) e^{-ikx+i\omega t} + \overline{D^+(k)} e^{ikx-i\omega t}] \omega d\omega \\ &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2\pi g} \int_0^{\infty} [D^-(k) e^{ikx+i\omega t} + \overline{D^-(k)} e^{-ikx-i\omega t}] \omega d\omega \end{aligned} \quad (21)$$

これらの積分の計算に代るは次のようにする。

— 例 12

$$I = \int_0^{\infty} f(\omega) e^{-i\frac{\omega^2}{g}x + i\omega t} d\omega = \int_0^{\infty} f(\omega) e^{-i\zeta^2 + i\frac{gt^2}{4x}} d\omega$$

$$\frac{\omega^2}{g}x - \omega t = \zeta^2 - \frac{gt^2}{4x}$$

$$\zeta = \omega \sqrt{\frac{x}{g}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{x}} t$$

$$(22)$$

$$I = \sqrt{\frac{g}{x}} e^{i\frac{gt^2}{4x}} \int_{-\frac{t\sqrt{g}}{2\sqrt{x}}}^{\infty} f(\omega) e^{-i\zeta^2} d\zeta$$

$$\xrightarrow{\frac{gt^2}{4x} \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{g}{x}} e^{i\frac{gt^2}{4x}} f\left(\frac{gt}{2x}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\zeta^2} d\zeta = \sqrt{\frac{g}{x}} e^{i\frac{gt^2}{4x}} f\left(\frac{gt}{2x}\right),$$

$$(23)$$

なお

$$\int_0^{\zeta} \cos u^2 du \xrightarrow{\zeta \gg 1} \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}} \sin \zeta^2 \right),$$

$$\int_0^{\zeta} \sin u^2 du \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}} \cos \zeta^2 \right), \quad (24)$$

2. イムパルス応答による表現^{1), 3) Equivalence}

前節の表現は又イムパルス応答によって表す事が出来る。

§1 (8)式より

$$\begin{aligned}\phi(x, y; t) &= \frac{1}{2\pi} \int \bar{\Phi} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_j \int U_j \bar{\Phi}_j e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^3 \int_0^\infty U_j(\tau) d\tau \int_{-\infty}^\infty \bar{\Phi}_j e^{i\omega(t-\tau)} d\omega \\ &= \sum_{j=1}^3 \int_0^t U_j(\tau) \varphi_j(x, y; t-\tau) d\tau, \quad \dots (1)\end{aligned}$$

2 = 12

$$\varphi_j(x, y; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \bar{\Phi}_j(x, y, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \dots (2)$$

§1 (12) によつて

$$\varphi_{j\gamma} \big|_S = -\frac{x_{j\gamma}}{2\pi} \int e^{i\omega t} d\omega = -x_{j\gamma} \delta(t). \quad (3)$$

2" 83。

12) 48 12 12

$$\begin{aligned}f_j &= -\rho \sum_{k=1}^3 \int_S x_{jk} ds \int_0^t U_k(\tau) \varphi_j(x, y; t-\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=1}^3 \int_0^t U_k(\tau) f_{jk}^\delta(t-\tau) d\tau, \quad \dots (4)\end{aligned}$$

2 = 12

$$\begin{aligned}f_{jk}^\delta(t) &= -\rho \int_S \varphi_{kt} x_{jk} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \omega e^{i\omega t} d\omega \int_S \bar{\Phi}_k x_{jk} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty C_{jk}(\omega) e^{i\omega t} \omega d\omega, \quad \dots (5)\end{aligned}$$

2

$$\psi(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^3 \int_0^t U_j(\tau) R_j(x, t-\tau) d\tau, \quad \dots (6)$$

$$R_j(x, t) = \frac{1}{2\pi g} \int_0^\infty \left(D_j^+ e^{-ikx + i\omega t} + \bar{D}_j^+ e^{ikx - i\omega t} \right) \omega d\omega, \quad (7)$$

3. 入射波とは何か

入射波は次式によって与えられる x の正方向から
負方向に向う波であるという。

$$\eta_I(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i(kx + \omega t)} d\omega \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{--- (1)} \end{array} \right.$$

$$k = \frac{\omega|\omega|}{g}, \quad A(-\omega) = A(\omega)$$

ω が t の t 変数と代表するとして、

$$\omega \equiv \int_0^{\omega} e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\mathcal{L} \eta_I = H_I(x, \omega) = A(\omega) e^{i\frac{\omega|\omega|}{g}x} \quad \text{--- (2)}$$

(1) に対する境界条件は、

$$\phi_I(x, y, t) = \frac{ig}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\omega)}{\omega} e^{i(kx + \omega t - |k|y)} d\omega$$

であるから

$$\phi_I = \bar{\Phi}_I(x, y, \omega) = \frac{ig}{\omega} A(\omega) \bar{\Phi}_0(x, y; \omega) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{--- (3)} \end{array} \right.$$

$$\bar{\Phi}_0(x, y; \omega) = e^{-\frac{\omega^2}{g}y + i\frac{\omega|\omega|}{g}x}$$

入射波 ϕ_I に対する反射波のポテンシャルを ϕ_D と
おけば

$$\phi_{D\nu} + \phi_{I\nu} = 0$$

$$\text{同法数値では } \bar{\Phi}_{D\nu} + \bar{\Phi}_{I\nu} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{on } S, \quad \text{--- (4)} \end{array} \right.$$

$$\text{よって } \bar{\Phi}_D(x, y, \omega) = \frac{ig}{\omega} A(\omega) \bar{\Phi}_d(x, y, \omega), \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{--- (5)} \end{array} \right.$$

$$\text{したがって (4) は } \bar{\Phi}_{d\nu} + \bar{\Phi}_{0\nu} = 0$$

この法による力は

$$f_{w_j} = -P \int_S (\phi_{I,t} + \phi_{D,t}) x_{j\nu} dS, \quad \text{--- (6)}$$

つまり

$$\begin{aligned} \mathcal{L} f_{w_j} &= F_{w_j} = P g A(\omega) \int (\bar{\Phi}_0 + \bar{\Phi}_d) x_{j\nu} dS \\ &= -P g A(\omega) D_j^+(k), \quad \text{--- (7)} \end{aligned}$$

この D_j^+ は $\delta / (19)$ と同じものである。(ハスキコトリ関係)
つまり

$$\begin{aligned} D_j^+(k) &= - \int_S (\Phi_0 + \bar{\Phi}_d) \chi_{j\gamma} dS = \int_S (\bar{\Phi}_c + \bar{\Phi}_d) \bar{\Phi}_{j\gamma} dS \\ &= \int (\bar{\Phi}_0 \bar{\Phi}_{j\gamma} - \bar{\Phi}_j \bar{\Phi}_{0\gamma}) dS \\ &= \int \left(\frac{\partial}{\partial y} \bar{\Phi}_j - \bar{\Phi}_j \frac{\partial}{\partial y} \right) e^{-ky + ikx} dS, \quad (18) \end{aligned}$$

(17) は 2 通りのようにも書ける。

$$f_{Wj} = - \frac{pg}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) D_j^+(k) + \bar{A}(\omega) \bar{D}_j^+(k)] e^{i\omega t} d\omega, \quad (19)$$

45 頁の研究は この入射波を船体近くで集中波を作って
船の応答を求めるものであるが、入射波は程々簡単な
特性をもつて、以下それを列挙しよう。

i) ある点 x における x に変化するフーリエ変換 $\omega(2)$ で
与えられるとすると

ii) 時間 t において x に変化するフーリエ変換は

$$\begin{aligned} H_I(k, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \eta_I(x, t) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \left(\int_{-\infty}^{\infty} A e^{ikx} d\omega \right) d\omega \\ &= \sqrt{\frac{g}{|k|}} A(\sqrt{gk}) e^{i\sqrt{gk}t} \quad \text{for } k > 0 \\ &= \sqrt{\frac{g}{|k|}} \bar{A}(\sqrt{gk}) e^{-i\sqrt{gk}t} \quad \text{for } k < 0 \end{aligned} \quad (9)$$

従って $k = \omega^2/g$ の時は

$$|H_I(x, \omega)|^2 = |A(\omega)|^2 = \frac{g}{\omega} |H_I(k, t)|^2, \quad (10)$$

つまりはるの空間分布は時間分布から導かれる。

iii) この事を 相同形形式で表現すれば

$$\begin{aligned} \eta_I(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi) + i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \eta_I(\xi, \tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \eta_I(\xi, \tau) W(x-\xi, t-\tau) d\tau, \quad (11) \end{aligned}$$

ただし

$$W(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(kx + \omega t) d\omega, \quad k = \omega^2/g \quad (12)$$

- 5 -

$$\eta_I(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(k, t) e^{ikx} dk$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \eta_I(z, \tau) W^*(x-z, t-\tau) dz, \quad (13)$$

$$W^*(x, t) = \frac{1}{\pi g} \int_0^{\infty} \omega \cos(kx + \omega t) d\omega, \quad (14)$$

例として $t = t_0$ について

$$\left. \begin{aligned} \eta_I(x, t_0) &= \delta(x - x_0) \\ \text{与えられた } \eta_I \text{ に対して} \\ A(\omega) &= \frac{\omega}{g} e^{-ikx_0 - i\omega t_0} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

であればよいことになる。

iV) このポテンシアルエネルギー V は

$$\begin{aligned} \frac{V}{P} &= \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_I^2 dx = \frac{g}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(k, t)|^2 dk \\ &= \frac{g^2}{\pi} \int_0^{\infty} |A(\omega)|^2 \frac{d\omega}{\omega}, \quad (16) \end{aligned}$$

- 5 (運動) エネルギー T は

$$\begin{aligned} \frac{T}{P} &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi \phi_y dx = \frac{g^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega, t)|^2 dk \\ &= \frac{g^2}{\pi} \int_0^{\infty} |A(\omega)|^2 \frac{d\omega}{\omega}, \quad (17) \end{aligned}$$

従って

$$T = V, \quad (18)$$

v) - 5 -

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta_I(x, \tau) \eta_I(x, t+\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 e^{-i\omega t} d\omega, \quad (19)$$

であるので η_I の自乗積分 (時間平均) はそのままポテンシアルエネルギーに一致しないので注意すべきである。
これは19) 等式として2つの積分がある。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_I(z, t) \eta_I(x+z, t) dz &= \frac{g^2}{\pi} \int_0^{\infty} |A(\omega)|^2 \omega kx \frac{dk}{k} \\ &= \frac{2g}{\pi} \int_0^{\infty} |A(\omega)|^2 \omega \left(\frac{\omega^2 x}{g} \right) \frac{d\omega}{\omega}, \quad (20) \end{aligned}$$

この式が transient wave test の基礎式である。

この時

$$\mathcal{L} \dot{y} = H(x, \omega) \longrightarrow i \frac{\omega^2}{g} A(\omega) M_2(\omega) D(\frac{\omega^2}{g}) e^{-i \frac{\omega^2}{g} x} \quad (6)$$

for $x > 0$.

となる。

ii) : $\alpha_2 = 0$ とし 静水中の自由運動を考えよう。

$$t=0 \text{ で } y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = 0 \quad \text{とあくと} \quad \dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} U_2(\omega) = \mathcal{L} \dot{y} &= -y_0 + i\omega Y \\ Y(\omega) = \mathcal{L} \ddot{y} &= -i\omega y_0 - \omega^2 Y \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(8)式は

$$[-\omega^2(M + \rho C_{22}) + \gamma B] Y(\omega) = i\omega y_0 (M + \rho C_{22})$$

となる

$$\begin{aligned} \frac{Y(\omega)}{y_0} &= \frac{i\omega (M + \rho C_{22})}{\gamma B - \omega^2 (M + \rho C_{22})} \quad (9) \\ &= \frac{1}{i\omega} - \frac{\gamma B}{i\omega [\gamma B - \omega^2 (M + \rho C_{22})]} \end{aligned}$$

又

$$U_2(\omega) = i\omega Y - y_0 = \frac{-\gamma B y_0}{\gamma B - \omega^2 (M + \rho C_{22})} \quad (10)$$

よって

$$H(x, \omega) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{\omega > 0} \frac{\omega}{g} B y_0 M_2(\omega) e^{-i \frac{\omega^2}{g} x} \quad (11)$$

となって、 $y(t)$ のフーリエ変換は伝達関数を与えて出て行く。このフーリエ変換から M_2 が求まり、計算によつて波の強制力 D_2 がわかる事になる。またこの計算の過程では造波理論はハスキットの関係だけ使っているので他の線型的減衰があつてもハスキットの関係が妥当なものならば(11)は成立つ。

(11)式を物理面に戻すと

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &\xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \frac{B y_0}{\pi g} \operatorname{Re} \int_0^\infty M_2(\omega) e^{-i \frac{\omega^2}{g} x + i \omega t} d\omega \\ &\xrightarrow[\frac{gt}{4x^2} \gg 1]{} \frac{B y_0 \sqrt{g}}{2\sqrt{\pi} x} \operatorname{Re} M_2\left(\frac{gt}{2x}\right) e^{i \frac{gt}{4x}} \quad (12) \end{aligned}$$

であるから波群の envelope が M_2 を与える事である。

V1) 以後に (1) と (9) から

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{z}_I(x, t) dt = A(c) \quad (21)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{z}_I(x, t) dx = \int \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{A(\omega)}{\omega} \quad (22)$$

となるが (20) は有限確定であると考えられるから

$A(c) = 0$ であつても $A(\omega) = 0(\omega)$ である。

従つて (19) 式の $\bar{z}$ の時間平均は 0 でなければならぬ。又 (20) 式によつて $\bar{z}$ の空間平均は時間によらず一定か又は 0 である。

4. 上下運動力²⁾

$x_2 = y(t)$ 又 $y(t) = Y$ を重心の上下運動力とすると運動方程式は

$$M \ddot{y} + \gamma B y = f_2 + \bar{z}_2 \quad (1)$$

$\gamma = \rho g$, M 船体質量, f_2 は外力とする。
同は教令艇¹⁾では

$$M \ddot{Y} + \gamma B Y = \bar{F}_2 + Q_2 \quad (2)$$

$$\therefore \ddot{Y} = \mathcal{L} \ddot{y}$$

$$\text{又 } \bar{F}_2 = -\rho i \omega U_2 C_{22} \quad \text{である。}$$

i) §3 (1) の方程式をうける $\mathcal{L}$ §3 (7) で与えられ、
 $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ として (2) 式は

$$[-\omega^2 (M + \rho C_{22}) + \gamma B] Y(\omega) = -\gamma A(\omega) D_2^+(\frac{\omega^2}{g}) \quad (3)$$

$$\therefore Y(\omega) = A(\omega) M_2(\omega) \quad (4)$$

$$\therefore M_2(\omega) = \frac{-\gamma D_2^+(\frac{\omega^2}{g})}{\gamma B - \omega^2 (M + \rho C_{22})} \quad (5)$$

つまり ~~伝達関数法~~ 規則法に對する Magnification factor である。

5. (2-1) = 9.7

運動方程式は前問同様にして

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x} &= f_1 + g_1 \\ I\ddot{\theta} + Wm\theta &= f_5 + g_5 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

これは x と θ を $x = \frac{1}{\sqrt{2}}z$ として
同様な変換を式(1)に施す

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{X} &= F_1 + Q_1 \\ I\ddot{\Theta} + Wm\Theta &= F_5 + Q_5 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

i) 自由振動の運動方程式は $x=0$ として $x=\dot{x}=\theta=\dot{\theta}=0$ とし

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X} &= -\omega^2 X, \quad \dot{X} = i\omega X \\ \ddot{\Theta} &= -\omega^2 \Theta, \quad \dot{\Theta} = i\omega \Theta \end{aligned} \right\} \quad x, \theta \neq 0$$

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2(M + pC_{11})X(\omega) - p\omega^2 C_{15}\Theta(\omega) &= -p g A(\omega) D_1^+(\frac{\omega^2}{g}) \\ -p\omega^2 C_{15}X + [-\omega^2(I + pC_{55}) + Wm]\Theta &= -p g A D_1^+ \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} X(\omega) &= -i A M_1(\omega) \\ \Theta(\omega) &= \Theta_w(\omega) M_5(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\therefore M_1(\omega) = \frac{p g}{\Delta} \left[\{ Wm - \omega^2(I + pC_{55}) \} D_1^+(\frac{\omega^2}{g}) + p\omega^2 C_{15} D_5^+ \right]$$

$$M_5(\omega) = \frac{i p g^2}{\Delta} \left[D_5^+(M + pC_{11}) - D_1^+ p C_{15} \right] \quad (5)$$

$$\Delta = -\omega^2(M + pC_{11})[Wm - \omega^2(I + pC_{55})] - (p\omega^2 C_{15})^2$$

又

$$\Theta_w(\omega) = \frac{\omega^2}{g} A(\omega) \quad (6)$$

これは次のようにして自由振動の $x = \frac{1}{\sqrt{2}}z$ として得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \eta_I(x, t) &= \frac{i}{2\pi g} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{\frac{i\omega^2}{g}x + i\omega t} \omega^2 d\omega \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\Theta_w(\omega) e^{\frac{i\omega^2}{g}x + i\omega t} - \overline{\Theta_w(\omega)} e^{-\frac{i\omega^2}{g}x - i\omega t} \right] d\omega \end{aligned} \quad (7)$$

$$\therefore D_5^+(\frac{\omega^2}{f}) / D_1^+(\frac{\omega^2}{f}) = l_\omega - l \quad (\text{定数}), \quad (8)$$

なる関係があり、かつ $\omega \rightarrow 0$ とすると、

$$\begin{aligned} D_1^+ &\longrightarrow -i \frac{\omega^2}{f} \nabla (1 + k_1) \\ D_5^+ &\longrightarrow -i \frac{\omega^2}{f} \nabla [(M + k_1 l_1) - (1 + k_1) l] \end{aligned} \quad (9)$$

であるから

$$\begin{aligned} \Delta &\xrightarrow{\omega \rightarrow 0} -\omega^2 M (1 + k_1) W_m \\ M_1 &\xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 1 \\ M_5 &\xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 1 \end{aligned} \quad (10)$$

である。

ii) いはななく、 θ_0 だけ 船位を 変換して 置くと (座標系を だけか ける 変換する), $t=0$ で $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta} = \dot{0} = \dot{X} = \dot{X}$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\theta_0 + i\omega \quad (4) \\ \ddot{\theta} &= -i\omega \theta_0 - \omega^2 \quad (4) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = i\omega X \\ \ddot{X} = -\omega^2 X \end{array} \right\}$$

であるから

$$\begin{aligned} -\omega^2 (M + f C_{11}) X - f \omega^2 C_{15} \quad (4) &= i f \omega \theta_0 C_{15} \\ -f \omega^2 C_{15} X + [W_m - \omega^2 (I + f C_{55})] \quad (4) &= i \omega \theta_0 (I + f C_{55}) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \therefore X &= \frac{i \theta_0}{\Delta} f \omega W_m C_{15} \\ (4) &= \frac{\theta_0}{i \omega} \left[1 + \frac{\omega^2 W_m (M + f C_{11})}{\Delta} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\frac{\theta_0}{\Delta} f \omega^2 C_{15} W_m \\ \dot{(4)} &= \frac{\theta_0}{\Delta} \omega^2 W_m (M + f C_{11}) \end{aligned} \quad (13)$$

したがって

$$\begin{aligned} H(X, \omega) &\xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega}{f} (\dot{X} D_1^+ + \dot{(4)} D_5^+) e^{-i \frac{\omega^2}{f} x} \\ &= \frac{\theta_0 \omega^3}{i f g^3} W_m M_5(\omega) e^{-i \frac{\omega^2}{f} x} \quad (14) \end{aligned}$$

前同様に 12 頁と

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} - \frac{Wm \rho_0}{\pi \rho g^3} \int_0^{\infty} M_5(\omega) e^{-\frac{i\omega^2 x + i\omega t}{\omega^3}} d\omega \\ &\rightarrow - \frac{Wm \rho_0 \sqrt{g}}{\rho \sqrt{2\pi}} \frac{t^3}{x^{3.5}} \int_0^{\infty} M_5\left(\frac{gt}{2x}\right) e^{i\frac{gt^2}{2x}} d\left(\frac{gt}{2x}\right), \quad (15) \end{aligned}$$

(12) 式において $\omega \rightarrow 0$ とすると

$$\begin{aligned} X(\omega) &\xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{\rho_0}{i\omega} \left[\frac{k_1(l_1 - l)}{1 + k_1} \right] \\ \Theta(\omega) &\rightarrow \frac{\rho_0}{i\omega} \left[1 - \frac{\omega^2 Wm M(1 + k_1)}{\omega^2 Wm M(1 + k_1)} \right] \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (16)$$

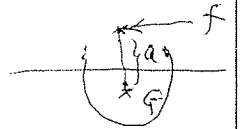
であるから
$$\begin{aligned} X(t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \rho_0 \left[\frac{k_1(l_1 - l)}{1 + k_1} \right] \\ \Theta(t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \end{aligned} \quad (16')$$

である。つまり最終的に船は上の量だけドリフトするようになる。

又 Θ については Ursell²⁾ と同じように議論を進めれば漸近値を求める事が出来るが大変複雑なもので、こゝではふたつが同値としてやはり $t^{-1/2}$ (これは恐らく t 以上) のように減衰するであろう。一方勿論共振する部分もあるから、この項は共振力から左右非対称になる事を意味する。この非対称性の為には上記のドリフトが生ずるのである。

iii) 最後に $t=0$ で $x=\dot{x}=\theta=\dot{\theta}=0$ で重心より a の点で x 方向に $f\delta(t)$ なる impulse を加えた場合を考えよう。

$$R(\omega) = \int f\delta = f; \text{const. であるから}$$



$$\begin{aligned} -\omega^2(M + \rho C_{11})X - \rho\omega^2 C_{15} \Theta &= f \\ -\rho\omega^2 C_{15}X + [Wm - \omega^2(I + \rho C_{55})]\Theta &= af \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{f}{\Delta} [-\omega^2(I + \rho C_{55}) + Wm + \rho a \omega^2 C_{15}] \\ \Theta &= \frac{f}{\Delta} [-a\omega^2(M + \rho C_{11}) + \rho\omega^2 C_{15}] \end{aligned} \quad (18)$$

$$|h(x, \omega) \xrightarrow[\omega > 0]{x \rightarrow +\infty} -\frac{\omega^2}{f g^2} f [M_1(\omega) + \frac{\omega^2 a}{g} M_5(\omega)], \quad (19)$$

よって 例へば $a=0$ とすると M_1 が求まる。

又 このとき

$$\begin{aligned} X(\omega) &\xrightarrow[\omega \rightarrow 0]{a=0} -\frac{f}{\omega^2(M+PC_{11})} \\ \hat{H}(\omega) &\longrightarrow -\frac{f PC_{15}}{W_M(M+PC_{11})} \end{aligned} \quad (20)$$

$$よって \quad X(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{f}{M(t+k_1)} t, \quad \dots (21)$$

これは (少し奇異に見えるが) 振動のない時と同じである。
 θ については前回同様計算は大変面倒である。

6. 変分原理 と エネルギー 原理

物体の運動は ハミルトンの変分原理から導かれるはずであるが、~~は~~ がある場合にこれを適用した例は見られない。しかし問題が複雑になると非常に有用な方法があるので 以下に検討する。

今 ~~物体~~ ラグランジアンを L 、運動エネルギー T 、ポテンシャルエネルギー V とし suffix S で 船 の、 W で 水 のそれらを表わすことにしよう。

$$\begin{aligned} L_S &= T_S - V_S \\ L_W &= T_W - V_W \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} L &= L_S + L_W \end{aligned} \right. \quad (1)$$

外力のなす仕事を W とすれば、ハミルトンの原理は

$$\delta \int_0^\infty L dt = \delta \int_0^\infty W dt, \quad (2)$$

である。船 については

$$T_S = \frac{1}{2} [M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + I \dot{\theta}^2], \quad (3)$$

$$V_S = \frac{f g}{2} B y^2 + \frac{W_M}{2} \theta^2, \quad (4)$$

；水のものは (radiation potential のみ)

$$\left. \begin{aligned} T_w &= \frac{\rho}{2} \iint_D (\phi_x^2 + \phi_y^2) dx dy \\ V_w &= \frac{\rho g}{2} \int_F \eta^2(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

よって $L_w = T_w - V_w = -\frac{\rho}{2} \int_F (\phi \phi_y + g \eta^2) dx - \frac{\rho}{2} \int_S \phi \phi_n dS$

水面条件によつて 上式は

$$L_w = -\frac{\rho}{2g} \frac{d}{dt} \int_F \phi \phi_t dx - \frac{\rho}{2} \int_S \phi \phi_n dS, \quad (6)$$

となる $t=0$ および ∞ で ϕ, ϕ_t のどちらかが 0 になるものとすれば

$$\int_0^\infty L_w dt = -\frac{\rho}{2} \int_0^\infty dt \int_S \phi \phi_n dS, \quad (7)$$

となつて S 上の境界値のみで この値は決まる。
 ϕ の正境界条件は

$$\phi_n = -\sum_j u_j x_{j,n}$$

であるから

$$\int_0^\infty L_w dt = \frac{\rho}{2} \int_0^\infty dt \sum_j u_j \int_S \phi x_{j,n} dS = \frac{1}{2} \sum_j x_j \int_0^\infty \dot{f}_j dt, \quad (8)$$

今 $W=0$ として y 方向の運動のみ考へて (2) 式を適用すれば

$$\int_0^\infty \left[-(M \ddot{y} + B y) \delta y + \frac{1}{2} (\delta y f_2 + y \delta f_2) \right] dt = 0, \quad (9)$$

を得る。

しかし

$$\int_S (\phi_1 \phi_{2,n} - \phi_2 \phi_{1,n}) dS = - \int_F (\phi_1 \phi_{2,y} - \phi_2 \phi_{1,y}) dx + \int_{x \rightarrow \pm \infty} [\quad] dy$$

で $x \rightarrow \pm \infty$ の検査面は常に y の外側にとることにすれば、外側条件 を入れると

$$= - \int_F (\phi_1 \phi_{2,tt} - \phi_2 \phi_{1,tt}) dx$$

よつて t で積分すれば

$$\int_0^\infty dt \int_S (\phi_1 \phi_{2,n} - \phi_2 \phi_{1,n}) dS = - \int_F \left[\phi_2 \phi_{1,t} - \phi_1 \phi_{2,t} \right]_{t=0}^\infty dx = 0, \quad (10)$$

この相反定理を利用すれば

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} y \delta f_2 dt &= - \int_0^{\infty} y \left[\frac{d}{dt} p \int_S \delta \phi_2 y_{\perp} ds \right] dt = p \int_0^{\infty} dt \left[\dot{y} \int_S \delta \phi_2 y_{\perp} ds \right] \\ &= - p \int_0^{\infty} dt \int_S \phi_2 \delta \phi_2 ds = p \int_0^{\infty} dt \delta \dot{y} \int_S \phi_2 y_{\perp} ds \\ &= \int_0^{\infty} f_2 \delta y dt, \quad \dots \dots (11)\end{aligned}$$

なる相反性がある。

よって (9) 式から

$$M \ddot{y} + \gamma B y = f_2, \quad \dots \dots (12)$$

なる運動方程式を得る。

これを周波数領域で考えれば

$$M \ddot{Y}(\omega) + \gamma B Y(\omega) = F_2(\omega), \quad (13)$$

であるからこれに δY をかけて ω について積分すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F_2 - (M \ddot{Y} + \gamma B Y)] \delta Y d\omega \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [f_2 - (M \ddot{y} + \gamma B y)] \delta y^* dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (M \dot{y} \delta \dot{y}^* - \gamma B y \delta y^* + f_2 \delta y^*) dt, \quad (14)\end{aligned}$$

を得る。ここに

$$y^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad \left. \vphantom{\int_{-\infty}^{\infty}} \right\} (15)$$

$$\text{つまり} \quad y^*(t) = y(-t)$$

となっているから y^* を time reversed motion と呼べる。

(13) 式から

$$\left. \begin{aligned}T_s^* &= \frac{M}{2} \dot{y} \dot{y}^* \\ V_s^* &= \frac{\gamma}{2} B y y^*\end{aligned} \right\} (16)$$

$$\int_0^{\infty} L^* dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} y^* f_2 dt, \quad (17)$$

$$L^* = L_S^* + L_W^* \quad (18)$$

とおき modified Lagrangean を用いることにすると

それらの周は数領域における表示は

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty T_S^* dt &= \frac{M}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \{\dot{Y}(\omega)\}^2 d\omega \\ \int_0^\infty V_S^* dt &= \frac{\gamma B}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty Y(\omega)^2 d\omega \\ \int_0^\infty L_W^* dt &= -\frac{\rho}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \{\dot{Y}(\omega)\}^2 C_{22}(\omega) d\omega \end{aligned} \right\} (19)$$

となるから L^* に就いて変分原理を適用すると (13) から直ちに得られる。 ($\delta Y = i\omega \delta Y$ である)

次に (12) の両辺に $\dot{y}$ をかけると、まず左辺は

$$M \dot{y} \ddot{y} + \gamma B \dot{y} \dot{y} = \frac{d}{dt} [T_S + V_S]$$

右辺は

$$\begin{aligned} f_2 \dot{y} &= -\rho \dot{y} \int \phi_z \dot{y}_z ds = \rho \int \phi_z \dot{\phi}_z ds = -\rho \iint_D \nabla \phi \cdot \nabla \phi dx dy \\ &\quad \text{よこ筋系が } S \text{ を入れると} \\ &= -\frac{d}{dt} [T_W + V_W] \end{aligned}$$

よって

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} [T + V] &= 0 \\ T + V &= T_S + V_S + T_W + V_W = \text{const.} \end{aligned} \right\} (20)$$

外力がなければ全系のエネルギーは不変である。

周は数領域では

$$T_S(\omega) = \int_0^\infty T_S e^{-i\omega t} dt = \frac{M}{2} \int_0^\infty \dot{y}^2 e^{-i\omega t} dt = \frac{M}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \dot{Y}(\omega') \dot{Y}(\omega - \omega') d\omega' \quad (21)$$

$$V_S(\omega) = \frac{\gamma B}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty Y(\omega') Y(\omega - \omega') d\omega'$$

$$\begin{aligned} T_W(\omega) + V_W(\omega) &= -\int_0^\infty e^{-i\omega t} dt \int_0^t f_2 \dot{y} dt = \frac{i}{\omega} \int_0^\infty f_2 \dot{y} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{\rho}{2\pi\omega} \int_{-\infty}^\infty \dot{Y}(\omega - \omega') \dot{Y}(\omega') C_{22}(\omega') \omega' d\omega' \quad (22) \end{aligned}$$

よって

$$\mathcal{F}(\omega) = \mathcal{F}_S + 2\mathcal{F}_S' + \mathcal{F}_w + 2\mathcal{F}_w' = \frac{1}{2\pi i \omega} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{Y}(\omega - \omega') \left[MY'' + \delta BY' + \rho i \omega' C_{22} \dot{Y} \right] d\omega' \quad (23)$$

よって得るが右辺の $[\]$ の中は 0 であるので

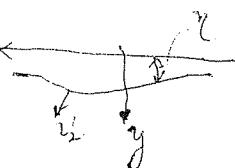
$$i\omega \mathcal{F}(\omega) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad (24)$$

$$\text{つまり} \quad \frac{d}{dt} T = 0$$

外力の働かない場合はエネルギー保存則によって運動力を決める事も出来るわけである。

7. 変分原理と境界値問題 by Whitham

ハミルトンの原理を水波の場の運動に適用すると境界値問題に帰する。変分原理になる。



この時は次の様な積分を考える方がより一般であり、又ハミルトンの原理による事が判っている。

$$P = \frac{1}{F} \iint_D p(x, y, t) dx dy \quad (1)$$

$$\text{よって} \quad \frac{P}{F} = \phi + \frac{1}{2} q^2 + qy \quad (2)$$

$$\text{これを別けて} \quad P = M - T - V + \text{Const} \quad (3)$$

$$\text{とすれば} \quad M = \iint_D \phi dx dy = \frac{d}{dt} \iint_D \phi dx dy + \int_F \phi \eta dx$$

$$= \int_F \phi \eta dx + \frac{d}{dt} \iint_D \phi dx dy \quad (4)$$

$$v_x = \eta + y_v$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} \iint_D (\nabla \phi)^2 dx dy = -\frac{1}{2} \int_F \phi \eta dx \quad (5)$$

$$V = \frac{g}{2} \int_F \eta^2 dx \quad (6)$$

となるから

変分をとると, $\delta \int P dt = 0$ (7)

は $\int_F \delta \phi (v_L + \phi_L) ds - \int_F \delta \eta (\phi_L - \frac{g^2}{2} + \eta \eta) ds = 0$ (8)

を得る。

従ってこれは

$$\begin{cases} \phi_L + v_L = 0 \\ \frac{p}{\rho} = 0 \end{cases} \text{ on } F, \quad (9)$$

と等価になる。

これは簡単でしかた非線型問題も取扱えるので便利であり, Whitham 等は波の分散の問題に応用しているが, 実際上の計算は複雑であって又更に簡化が要求される。次節には別の方法でこの問題を取り扱う。

尚この方法は物体があっても成立する。

8. 波の分散⁴⁾⁸⁾

竹沢の transient wave の実験によれば波の集中前後で著しいスペクトルの変化があるという。

又 Benjamin 等は規則的なストークス波に波長の異なる成分を合成すると不安定になり、崩れてしまうという。

一般に有限波高の波では波速 c は

$$c^2 = \frac{g}{k} (1 + k^2 a^2), \quad a \text{ は 振幅}$$

で与えられる。つまり線型理論よりも少し大きくなるが、これは波長の短い ($k = 2\pi/\lambda$) もので著しい。

従って相対的に短波長の波が早く伝わるので、~~波の~~ 時間的スペクトルは、高周波成分がなくなっていくことになる。 伝わるにつれて

一方全エネルギーは一定であるはずだからこのポテンシャルエネルギーの減少分は運動エネルギーに転換するはずである。これは表面近くで行われるであろうから表面近くの水を加速

して、遂には、波の崩れ、散乱などとなって一層スペクトルの変化を増すであろう。又さらには電磁波の力等も考えねばならないであろうか。ここでは考えないことにしよう。

この問題は複雑であるが、波の崩れ等はないものとして以下定性的に具体的な例について考察しよう。

前節の式から境界条件を2次の項までとると

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= -\phi_y(x, 0, t) + C(x, t) \\ \eta(x, t) &= -\frac{1}{g}\phi_t(x, 0, t) + d(x, t) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} C(x, t) &= \eta_x(x, t)\phi_x(x, 0, t) + \eta(x, t)\phi_{xx}(x, 0, t), \\ d(x, t) &= \frac{1}{2g}\{\phi_x^2 + \phi_y^2\} - \frac{1}{g}\eta\phi_{ty} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで η, ϕ は次のように表現出来るものとして、

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{ikx + i\omega t} d\omega \\ \phi(x, y, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) e^{-k|y| + i kx + i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (3)$$

次の近似では

$$k \doteq \frac{\omega|\omega|}{g}, \quad (4)$$

であるが、今は

$$k = k(\omega, x), \quad (5)$$

となるものと考えて、次に図12 (1) をフーリエ変換すれば

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\eta &= A e^{ikx}, \quad \mathcal{L}\eta_x = ikA e^{ikx}, \\ \mathcal{L}\phi &= B e^{ikx} \doteq \frac{ig}{\omega} A e^{-k|y| + i kx} \\ \mathcal{L}\phi_y|_{y=0} &\doteq -|\omega| A e^{ikx} \\ \mathcal{L}\phi_x|_{y=0} &\doteq -i\omega A e^{ikx} \\ \mathcal{L}\phi_{xx} &\doteq -\frac{i\omega^3}{g} A e^{ikx} \\ \mathcal{L}\phi_{ty} &\doteq \omega^2 A e^{ikx} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\therefore \mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega$$

であるから、 c, d (2) を 1 近似を代入して計算することにして、

$$\begin{cases} i\omega A(\omega) = ik[B(\omega) + C(\omega, x)e^{-ikx}] \\ A(\omega) = -\frac{i\omega}{g}B(\omega) + D(\omega, x)e^{-ikx} \end{cases} \quad (7)$$

を得る。これから B を消去すれば (以下 $k > 0$ とする)

$$k - \frac{\omega^2}{g} = E(\omega, x), \quad (8)$$

$$E = \frac{1}{A} \left(\frac{i\omega}{g} C + kD \right) e^{-ikx}, \quad (9)$$

(8) 式によって k の x に関する変化量がおまの式である。これは明らかに複素値をとるからその虚数部分は x に関する減衰、発散を示す事になる。

さてこの E を 1 近似値によって以下に計算しよう。

$$\begin{cases} C(\omega, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(x, t) e^{-i\omega t} dt \\ D(\omega, x) = \mathcal{L}d \end{cases} \quad (10)$$

であるからこれを $\omega > 0$ として計算すれば、

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{ C e^{-ikx} \} &= \int_0^{\infty} A(\omega') A(\omega - \omega') \{ \omega'^2 + (\omega - \omega')^2 \} e^{i\Omega_1 x} \\ &\quad + \omega \int_0^{\infty} A(\omega + \omega') A(-\omega') (\omega + 2\omega')^2 e^{i\Omega_2 x} d\omega', \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \mathcal{F} \Omega_1 = \omega'^2 + (\omega - \omega')^2 - \omega^2, \\ \mathcal{F} \Omega_2 = (\omega + \omega')^2 - \omega'^2 - \omega^2, \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} D e^{-ikx} &= - \int_0^{\infty} A(\omega') A(\omega - \omega') \omega'^2 e^{i\Omega_1 x} \\ &\quad - \omega^2 \int_0^{\infty} A(\omega + \omega') A(-\omega') e^{i\Omega_2 x} d\omega', \quad (13) \end{aligned}$$

ここで具体的に $t = 0$ で

$$\psi(x, 0) = \frac{\Sigma a}{\pi(x^2 + a^2)}, \quad (14)$$

のような集中波について計算を進めて見よう。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta(x,0) e^{-ikx} dx = e e^{-\frac{\omega^2}{g}a}$$

であるから $k = \omega/g$ とする。

$$\eta(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{ikx + i\omega t} d\omega \quad (15)$$

とすると $A(\omega) = \frac{e}{\pi g} e^{-\frac{\omega^2}{g}a}$, (16)

である。これを代入すると計算の後には

$$\begin{aligned} E(\omega, x) = \frac{e}{\pi} \frac{\omega^6}{g^3} & \left[\int_0^1 e^{\frac{2u(1-u)\omega^2}{g^2} [a - ix]} \frac{1}{u(1-u) \{ (1-u)^3 - u^3 \}} du \right. \\ & \left. + 4 \int_0^{\infty} e^{-\frac{2\omega^2}{g^2} u} \frac{1}{u^2(1+u^2)} du \right], \quad (17) \end{aligned}$$

をうる。

$x \rightarrow 0$ とすると

$$E(\omega, 0) = \frac{E}{\pi a^3} \quad (18)$$

となるが、これはオ2近似では集中点のスペクトルは $\omega=0$ で(14)で与えられるものがこれだけ異なっていることを示すものである。

x が大きくなると近似的に

$$E(\omega, x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{3iEg^2x}{2\pi(x^2+a^2)} e^{\frac{\omega^2}{2g}(a-ix)} \quad (19)$$

となるから

$$i(g - \frac{\omega^2}{g})x = -\frac{3E}{2\pi} \left(\frac{x^2}{x^2+a^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{g} \right)^2 e^{\frac{\omega^2}{2g}(a+ix)}, \quad (20)$$

となり、 x が大きくなると(集中点から離れると)急激に高周波成分が小さくなる事がわかる。
(しかし x が a に比べて充分大きくなるとさらに

$$i(g - \frac{\omega^2}{g})x \rightarrow -\frac{3E}{2\pi} \left(\frac{\omega^2}{g} \right)^2 e^{\frac{\omega^2}{2g}(a+ix)}, \quad (21)$$

となるから、その絶対値は殆ど一定となる。つまり集中前、あるいは集中後はスペクトルの絶対値はあまり変わらないことを示していると言えよう。

これは殆ど全ての観測を説明しているように見える。

これが正しいとするとスペクトル変化(瞬時的)は集中点の隠し、消える時に起るものと言える。

結言

この様にして 2次元の船体運動について 自動制御理論を適用し、又 ハミルトンの関係式を利用することにより、船を平衡位置から少しずらして離すことによって、波浪中の応答を求める事が出来る事がわかった。この関係は又 3次元運動に適用するのに何等障害はないので、容易に拡張出来るよう。

又 ハミルトンの原理が 波のある場合にも適用出来る事が示されたので、運動の近似計算を変分法を用いて解く事が出来る事になった。

最後に transient wave について 著者の知見を総減衰に因する定性的な計算を行って 集中時の近傍でそれが起ると言う事を確かめた。

以上

参考文献

- 1) W. E. Cummins ; Schiffstechnik, Bd. 9 (1962)
- 2) F. Ursell ; J. F. M. vol. 19 (1964) & vol. 44 (1970)
- 3) Proc. of 5th O.N.R. Symp. (1964)
- 4) 竹沢 ; 造船学会論文集 3篇 (1968, 70)
- 5) 耐航性シムポジウム Text (1969)
- 6) 水の波の分散に関する討論集, P. R. S. A vol. 299 (1967)
- 7) 別冊 ; 防大理工学研究報告 vol. 3 No. 143 (1965-6)