

47.10.21.

"任意に振動する複数個の物体に働く
流体力について"

別所正利

1. 序

縦波の浮遊構造物がシステムにおいてそれがビーン等と連結されているとすると、周りに結合されている場合においてその各々の振動力は複雑になる。本文はこのような場合にはおける力、モーメント等を極波の場合につき逐次問題といたす場合の基礎式について述べるものである。

実際には逐次所与の斜波の場合を考えた場合、あるいはビーン結合から考えれば斜波を縦波と横波に分解して考えるとビーンから力は縦波には関係ないと考えられるから横波を受ける場合のみ考えればよい。この場合の分解された横波は真横波から横波と斜波を多少異なるけれども、今は考えないことにする。

さて実際の模型は大部分が没水に水中に浮くものは解が同位部から出ているのみであるが、実際の計算には同位部を無理に没水体として行う方がよからう。(しかし同位部の静的揺動は運動学的揺動と共に採り入れなければならぬ)という。

2. 速度ポテンシャルと速度増分
 第一周期下の物体運動が所与したとき
 速度ポテンシャルを

$$\operatorname{Re} \{ \varphi(x, y) e^{i\omega t} \}, \quad \omega = 2\pi/T \quad (2.1)$$

圧力を $\operatorname{Re} \{ p(x, y) e^{i\omega t} \}$,
 とおくと 線型理論では

$$p(x, y) = \rho i \omega \varphi(x, y) \quad (2.2)$$

水面条件は

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + K \right) \varphi(x, 0) = 0, \quad (2.3)$$

$$K = \omega^2/g = 2\pi/\lambda, \quad \lambda: \text{周期下の波の長さ}$$

今図のように N 個の
 物体があつて、
 かつ平均位置
 の周りに 任意に
 左右、上下および 回転運動
 をしているものとする。

その境界条件は

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = i\omega \sum_{j=1}^N X_R^{(j)} \frac{\partial z^{(j)}}{\partial n} \quad \text{on } (R), \quad (2.4)$$

ここで (R) は物体のモードを並べたとき

$j=1$ は左右運動

$j=2$ は上下運動

$j=3$ は回転を代表するものとし

$X_R^{(j)}$ は j 物体 (R の運動) の振幅

$$X^{(1)} \equiv x, \quad X^{(2)} \equiv y,$$

$$\frac{\partial z^{(3)}}{\partial n} = (x - x_R) \frac{\partial x}{\partial n} - y \frac{\partial y}{\partial n}$$

ここで x_R は O 点の座標である。

1. (2) の問題のノイマン函数 $N(P, Q)$, $P \equiv (x, y)$, $Q \equiv (x', y')$ が知られているとすると, つまり 1) が外へは発散し, $P=Q$ で対数特異点をもつ, 境界の上では,

$$\left. \frac{\partial}{\partial n_P} N(P, Q) \right|_{\text{on } C_k} = 0, \quad \text{for } k=1 \sim N$$

なる条件を満たすとするとポテンシヤルは次のように書ける。

$$\varphi(P) = \sum_{k=1}^N \int_{C_k} \frac{\partial \varphi}{\partial n} N(P, Q) ds(Q),$$

(2.4) を代入すると

$$\varphi(P) = -i\omega \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^N X_k^{(j)} \int_{C_k} \frac{\partial}{\partial n} X_k^{(j)} N(P, Q) ds(Q), \quad (2.5)$$

となる。

又 X の R (下側の sign は正) の方向に進む振幅 a の正弦波は

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, y) &= -\frac{ig_a}{\omega} \quad \phi_0(x, y) = -i\omega k a \phi_0(x, y), \\ \phi_0(x, y) &= e^{-ky \pm iKx} \end{aligned} \quad (2.6)$$

従って 散乱ポテンシヤルを φ_d とすると, その境界条件は

$$\frac{\partial}{\partial n} \varphi_d = -\frac{\partial}{\partial n} \varphi_0 \quad \text{on } C_1 \sim C_N, \quad (2.7)$$

よって

$$\varphi_d(P) = - \sum_k \int_{C_k} \frac{\partial}{\partial n} \varphi_0 N(P, Q) ds(Q). \quad (2.8)$$

$n=2$ の今

$$\phi_k^{(j)}(P) = - \int_{C_k} \frac{\partial X_k^{(j)}}{\partial n} N(P, Q) ds, \quad \left(\begin{matrix} j=1 \sim 3 \\ k=1 \sim N \end{matrix} \right) \quad (2.9)$$

とおくと 全ポテンシヤルは

$$\phi(p) = -i\omega ka \left\{ \phi_0(x, y) + \phi_d(x, y) \right\} + i\omega \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^3 X_k^{(j)} \phi_k^{(j)}(p), \quad (2.10)$$

となる。

この時 $\phi_k^{(j)}$ に対する境界条件は

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi_k^{(j)}(p) = \begin{cases} -\frac{\partial \chi^{(j)}}{\partial n} & \text{on } C_k \\ 0 & \text{on } C_l, k \neq l \end{cases} \quad (2.11)$$

となる。

一般にノイズ函数を求めるよりこの境界値問題を解く方がより簡単であろう。

この時 source-sink を使うとすると

$$\phi_k^{(j)}(p) = \sum_{l=1}^N \int_{C_l} \widetilde{\phi}_{k,l}^{(j)}(Q) S(p, Q) ds(Q), \quad (2.12)$$

ただし

$$S(p, Q) = \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-k(y+y')}}{-k - K + \mu i} dk,$$

$$r_1 = \overline{PQ}, \quad r_2 = \overline{P\bar{Q}}, \quad \bar{Q} = (x', -y'),$$

となる。

3. カとモーメント

圧力 p (2.2) で与えられるからこれを (2.1) にて積分するより求められる。

C_k にかゝる j の方向又は C_k まわりの力又はモーメントは

$$F_k^{(j)} = \rho i \omega \int_{C_k} \phi \frac{\partial \chi^{(j)}}{\partial n} dS, \quad (3.1)$$

であるから (2.10) を代入し

$$\int_{C_k} \phi_l^{(i)} \frac{\partial \chi^{(j)}}{\partial n} dS = f_{l,k}^{(i,j)} \quad (3.2)$$

なる記法を χ に代入すると

$$F_k^{(j)} = -\rho \omega^2 \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^N X_l^{(i)} f_{l,k}^{(i,j)} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \text{但し} \int_{C_k} \phi_l^{(i)} \frac{\partial \chi^{(j)}}{\partial n} dS &= - \int_{\sum C_k} \phi_l^{(i)} \frac{\partial}{\partial n} \phi_k^{(j)} dS = - \int_{\sum C_k} \phi_k^{(j)} \frac{\partial}{\partial n} \phi_l^{(i)} dS \\ &= + \int_{C_l} \phi_k^{(j)} \frac{\partial \chi^{(i)}}{\partial n} dS \end{aligned}$$

$$\text{故に} \quad f_{l,k}^{(i,j)} = f_{k,l}^{(j,i)} \quad (3.4)$$

よって C_k には外力 $\vec{F}$ の力とモーメントは

$$\begin{aligned} E_k^{(j)} &= \rho i \omega \int_{C_k} (\phi_0 + \phi_d) \frac{\partial \chi^{(j)}}{\partial n} dS \\ &= \rho g a \int_{C_k} (\phi_0 + \phi_d) \frac{\partial \chi^{(j)}}{\partial n} dS \end{aligned} \quad (3.5)$$

より

$$\begin{aligned} \int_{C_R} \phi_d \frac{\partial \chi^{(j)}}{\partial n} dS &= - \int_{\Sigma C_R} \phi_d \frac{\partial \phi^{(j)}}{\partial n} dS = - \int_{\Sigma C_R} \phi_R^{(j)} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \\ &= \int_{\Sigma C_R} \phi_R^{(j)} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \int_{\Sigma C_R} \phi_R^{(j)} \frac{\partial}{\partial n} e^{-Ky \pm iKx} dS \end{aligned}$$

$$\times \int_{C_R} \phi_0 \frac{\partial \chi^{(j)}}{\partial n} dS = - \int_{\Sigma C_R} \phi_0 \frac{\partial \phi^{(j)}}{\partial n} dS$$

よって

$$\int_{\Sigma C_R} \left\{ \phi_R^{(j)} \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \phi_R^{(j)} \right\} e^{-Ky \pm iKx} dS = H_R^{(j)}(K), \quad (3.6)$$

とあわせて

$$E_R^{(j)} = P g a \Gamma_R^{(j)}(K), \quad (3.7)$$

又 $\phi_R^{(j)}$ から (2.12) のように表わされる時は

$$H_R^{(j)}(K) = \sum_{l=1}^N \int_{C_l} \phi_{R,l}^{(j)} e^{-Ky \pm iKx} dS, \quad (3.8)$$

物体の形がすべて相似で間隔も等しいとすると、実際には対称性からもう少し計算が簡単になる。

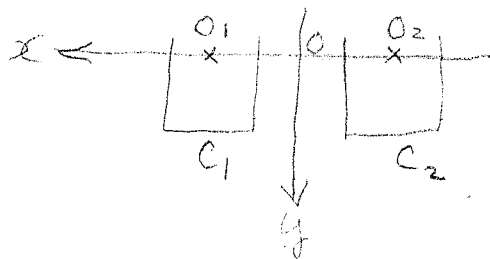
今物体が2つあるとしても、さういふように多くの力を考えねばならない。

C_1 の左右動に對し

$$\begin{pmatrix} f_{11}^{(11)} & f_{11}^{(12)} & f_{11}^{(13)} \\ f_{12}^{(11)} & f_{12}^{(12)} & f_{12}^{(13)} \end{pmatrix}$$

C_1 の上下動に對し

$$\begin{pmatrix} f_{11}^{(21)} & f_{11}^{(22)} & f_{11}^{(23)} \\ f_{12}^{(21)} & f_{12}^{(22)} & f_{12}^{(23)} \end{pmatrix}$$



C_1 の回転重なり因子

$$\begin{cases} f_{11}^{(3,1)} & f_{11}^{(3,2)} & f_{11}^{(3,3)} \\ f_{12}^{(3,1)} & f_{12}^{(3,2)} & f_{12}^{(3,3)} \end{cases}$$

C_2 に対しては同数あり，更に位の力は次の6種類ある。

$$\begin{cases} H_1^{(1)} & H_1^{(2)} & H_1^{(3)} \\ H_2^{(1)} & H_2^{(2)} & H_2^{(3)} \end{cases}$$

この中から (3.4) によつて

$$f_{1,2}^{(i,j)} = f_{2,1}^{(j,i)}, \quad f_{1,1}^{(i,j)} = f_{1,1}^{(j,i)}, \quad f_{2,2}^{(i,j)} = f_{2,2}^{(j,i)} \quad (3.9)$$

又対称性から

$$\begin{cases} f_{1,2}^{(i,j)} = (-1)^{i+j} f_{2,1}^{(i,j)} \\ f_{1,1}^{(i,j)} = (-1)^{i+j} f_{2,2}^{(i,j)} \end{cases} \quad (3.10)$$

$$H_2^{(j)} = \int_{C_1+C_2} \left\{ \phi_1^{(j)} \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \phi_1^{(j)} \right\} e^{-ky - iKx} dS,$$

$$H_1^{(j)} = \int_{C_1+C_2} \left\{ \phi_1^{(j)} \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \phi_1^{(j)} \right\} e^{-ky + iKx} dS, \quad (3.11)$$

よるから，結局 C_1 の運動による力を計算すればすべて求まることになる。

最後に f の大きさについて $K \rightarrow 0$ の場合のような性質がある。

$$f^{(1,1)} \doteq k_1 \nabla + i \nabla^2 K^2 (1+k_1)^2,$$

$$f^{(2,2)} \doteq k_2 \nabla + i \nabla^2 \left\{ \frac{B}{\nabla} - K(1+k_2) \right\}^2,$$

∇ : 排水量, B : 氷系幅, $k_1, k_2 = O(1)$ で K の附加値係数

$$H^{(1)} \doteq iK \nabla (H - k_1)$$

$$H^{(2)} \doteq B - K \nabla (H - k_2)$$

$$H^{(3)} \doteq iK (\overline{O_M} - l_1 k_1)$$

} これらに位相分がある。

l_1 は横方向の見掛け位置中心, M はメタセニター。

4. 計算について.

計算には流函数 ψ を使うのが便利であろう。
この時は (2.12) に対応して

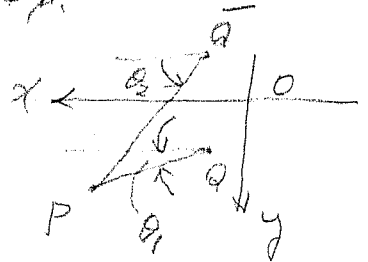
$$\psi_k^{(i)}(P) = \sum_{l=1}^N \int_{C_l} \psi_{k,l}^{(i)}(Q) T(P, Q) dS(Q), \quad (4.1)$$

ただし

$$T(P, Q) = \frac{1}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\theta_2 - \theta_1} \frac{e^{i\alpha} \sin k(x-x')}{k - K + \mu i} d\alpha,$$

境界条件は

$$\psi_k^{(1)}(P) = \begin{cases} -\psi & \text{on } C_k \\ 0 & \text{on } C_l, l \neq k \end{cases} \quad (4.2)$$



$$\psi_k^{(2)}(P) = \begin{cases} x & \text{on } C_k \\ 0 & \text{on } C_l, l \neq k \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\psi_k^{(3)}(P) = \begin{cases} \frac{1}{2} [(x-x_k)^2 + y^2] & \text{on } C_k \\ 0 & \text{on } C_l, l \neq k \end{cases} \quad (4.4)$$

又 流体体の場合はこれに

$$\int_{C_k} \psi_{k,l}^{(i)} dS = 0, \quad (4.5)$$

なる条件を最初から入れておく方がよいようである。

これで ψ が求まれば もう一章 (2.12) によって ϕ を計算し C_k 上で積分して f が求められる。

なお H は直接 ψ から (3.8) によって求めるのが便利であろう。

以上