

47.6.26.

「水面の圧力分布で表わした初期値, 境界値問題」

別添付

1. 問題の定式化 (フーリエ変換による)

2. Impulse potential と初期値問題

3. 物体の運動

4. Cauchy - Poisson 問題 (1)

5. " (2)

6. Energy, Lagrangian & Reciprocity

7. 境界値問題の変分原理

A. 核函数について.

B. Wave-Free Potential

C. 境界条件の変形

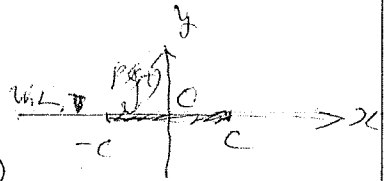
D. Wagner の問題

E. 同期運動の場合

1. フーリエ変換による1次元の定式化

線型化された水面の条件は

$$\frac{1}{\rho} p(x, t) = \phi_t(x, 0, t) - g\eta(x, t), \quad \dots (1.1)$$



p は水面における圧力で静水圧 $g\eta$ を含む。

もう一つは

$$v(x, t) = \eta_t(x, t) = -\phi_y(x, 0, t), \quad \dots (1.2)$$

(1.1) と (1.2) から

$$\phi_{tt}(x, 0, t) + g\phi_y(x, 0, t) = \frac{1}{\rho} p_t(x, t), \quad \dots (1.3)$$

今 $t > 0$ 運動方程式とし、
 $\mathcal{L} \equiv \int_0^\infty e^{-i\omega t} dt$, $\mathcal{L}^{-1} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i\omega t} d\omega$, $\dots (1.4)$

なるフーリエ変換子を $\mathcal{L}$ と $\mathcal{L}^{-1}$ とする。

$$\mathcal{L} \phi(x, y, t) = \bar{\Phi}(x, y, \omega)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \bar{\Phi}(x, y, \omega) = \phi(x, y, t)$$

$$\mathcal{L} p(x, t) = P(x, \omega)$$

$$\mathcal{L} \eta(x, t) = H(x, \omega)$$

(1.5)

とあらう。

~~$$\mathcal{L} \phi_t = i\omega \bar{\Phi}(x, y, \omega) - \phi(x, y, 0)$$~~

したがって

$$\mathcal{L} \phi_t = i\omega \bar{\Phi}(x, y, \omega) - \phi(x, y, 0)$$

$$\mathcal{L} p_t = i\omega P(x, \omega) - p(x, 0)$$

$$\mathcal{L} \eta_t = i\omega H(x, \omega) - \eta(x, 0)$$

(1.6)

$$\mathcal{L} \phi_{tt} = -\omega^2 \bar{\Phi}(x, y, \omega) - \phi_t(x, y, 0) - i\omega \phi(x, y, 0) \quad \dots (1.7)$$

となる。

従って (1.3) は

$$-\omega^2 \bar{\Phi}(x, 0, \omega) + g\bar{\Phi}_y(x, 0, \omega) = \frac{i\omega}{\rho} P(x, \omega) + i\omega \phi(x, 0, 0) + g\eta(x, 0),$$

$$\therefore \phi_t(x, 0, t) - \frac{1}{\rho} p(x, t) = g\eta(x, t) \quad \dots (1.8)$$

これは simple harmonic motion を与える水面条件であるから、

$$S(x, y, \omega) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega} \frac{e^{i\omega k x}}{gk - \omega^2 - \mu i \omega} dk, \quad (1.9)$$

とすると直ちに解は次のように求まる。

$$\bar{\Phi}(x, y, \omega) = \bar{\Phi}_1 + \bar{\Phi}_2 + \bar{\Phi}_3 \quad (1.10)$$

$$\bar{\Phi}_1(x, y, \omega) = \frac{i\omega}{P} \int_{-\infty}^{\infty} P(x', \omega) S(x-x', y, \omega) dx', \quad (1.11)$$

$$\bar{\Phi}_2(x, y, \omega) = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x', 0, 0) S(x-x', y, \omega) dx', \quad (1.12)$$

$$\bar{\Phi}_3(x, y, \omega) = g \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x', 0) S(x-x', y, \omega) dx', \quad (1.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \bar{\Phi}_1 &= \phi_1, \quad \mathcal{L}^{-1} \bar{\Phi}_2 = \phi_2, \quad \mathcal{L}^{-1} \bar{\Phi}_3 = \phi_3 \\ \phi &= \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

とすると

$$\left. \begin{aligned} G(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(x, y, \omega) e^{i\omega t} d\omega \\ G_+(x, y, t) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(x, y, \omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

とすると

$$\phi_1(x, y, t) = \frac{1}{P} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} P(x', \tau) G_+(x-x', y, t-\tau) dx', \quad (1.16)$$

$$\phi_2(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x', 0, 0) G_+(x-x', y, t) dx', \quad (1.17)$$

$$\phi_3(x, y, t) = g \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x', 0) G_-(x-x', y, t) dx', \quad (1.18)$$

を得る。

ϕ_1 は forced motion であるから、 ϕ_2 は initial impulse、 ϕ_3 は initial elevation である。

なお ϕ_2 については ϕ の初期値を与える替りに 2 次のように ϕ_y の初期値を与える問題に置きかえる事が出来る。

$$\phi(x, 0, c) = 0 \quad \text{for } |x| > c, \quad (1.19)$$

とおき $|x| < c$ の間で ϕ が与えられるものとする。

そうすると

$$\phi(x, y, 0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{\phi(x', 0, 0) y}{(x-x')^2 + y^2} dx', \quad (1.20)$$

と書けるから

$$\phi_y(x, 0, 0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{\phi(x', 0, 0) dx'}{(x-x')^2}, \quad (1.21)$$

となり, 与えられた ϕ_y について ϕ は

$$\phi(x, 0, 0) = \frac{A+Bx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \int_{-c}^c \frac{\sqrt{1-x'^2} \int_0^x \phi_y dx}{x-x'} dx', \quad (1.22) \quad (?)$$

のように与えられるのでこれを 使って (1.18) を計算すればいい。
 A, B は任意定数で $x = \pm 1$ における条件から定まる。

なお $\phi_y = 0$ for $|x| > c$ とおくと $\phi \neq 0$ for $|x| > c$ となり水面上全体に impulse が加えられる問題となる。

次に ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 に対する surface elevation は (1.1) より

$$\eta_1(x, t) = -\frac{1}{P} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} p(x', \tau) G_{T_y}(x-x', 0, t-\tau) dx', \quad (1.23)$$

$$\eta_2(x, t) = -\frac{1}{P} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x', 0, 0) G_{T_y}(x-x', 0, t) dx', \quad (1.24)$$

$$\eta_3(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x', 0) G_t(x-x', 0, t) dx', \quad (1.25)$$

となる。

最後に

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} G_t(x-x', y, t) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-ky} \cos k(x-x') \cos \sqrt{gk} t dk \\ &= \frac{2}{\pi} \lim_{X \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-ky} \cos kx' \cos \sqrt{gk} t + \frac{\sin kX}{k} dk, \end{aligned}$$

等々であるから，上の各 surface elevations ポテンシャル により，次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_{1,2}(x,t) dx &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \eta_3(x,t) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x,0) dx, \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(x,y,t) dx &= \frac{1}{F} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} p(x,\tau) dx, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(x,y,t) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,0,0) dx, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi_3(x,y,t) dx &= g t \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x,0) dx, \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{jy}(x,y,t) dx = 0, \quad \text{for } j=1, 2, 3. \quad (1.28)$$

(1.26) は水量が不変であることを示し，(1.28) はその時間微分であるが， y に関係なく成立することを示して置く必要がある。

(1.27) 上の式は impulse 不変の原理とでも云えようが，その式はよくわからない。又 y に無関係であるのは注目すべきであろう。

さて (1.17), (1.18) の初期値問題の解は次のように考えれば
すべて (1.16) の 1 階微分 forced motion の T.P.T. を与えておける。
 ϕ_2 については

$$\phi(x, 0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t p(x, \tau) d\tau, \quad (1.29)$$

のようにおいて 互力として δ 面を越えておける場合も含めることに
すれば 図 1 に (1.16) に相当するものは明らかである。

次に ϕ_3 については

$$p(x, t) = \begin{cases} -F g \psi(x, 0) & \text{for } t < 0 \\ 0 & \text{for } t > 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

とおけば (1.18) は

$$\phi_3(x, y, t) = \frac{1}{F} \int_{-\infty}^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} p(x, \tau) G_{1t}(x-x', y; t-\tau) dx', \quad (1.31)$$

と (1.16) の形になる。

この場合は又次のようにおける事になる。

具体的に 初期境界条件を考えると

$$\phi_y(x, 0, t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ -v(t) & \text{for } t > 0, |x| < c(t) \end{cases} \quad (1.32)$$

$$\psi(x, t) = \psi_0(x) \quad \text{for } t \leq 0, |x| < c \quad (1.33)$$

であるが、これを 2 つに分けて

$$\phi = \phi_1 + \phi_3 \quad \text{とし}$$

$$\phi_{1y}(x, 0, t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ -v(t) & \text{for } t > 0, |x| < c(t) \end{cases} \quad (1.34)$$

$$\psi_1(x, t) = 0 \quad \text{for } t \leq 0$$

$$\phi_{3y}(x, 0, t) = 0 \quad \text{for all } t \text{ \& } x \quad (1.35)$$

$$\psi_3(x, t) = \psi_0(x) \quad \text{for all } t, |x| < c$$

とする事が出来る。

この時 ϕ_3 は (1.35) の条件を満たすには

$$\phi_3(x, y, t) = \text{Const} \rightarrow 0$$

$$p_3(x, t) = -\rho g \zeta_0(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} \phi_3(x, y, t) = \text{Const} \rightarrow 0 \\ p_3(x, t) = -\rho g \zeta_0(x) \end{array} \right\} \quad (1.36)$$

となるから 解は

$$\phi(x, y, t) = \phi_1(x, y, t)$$

$$\zeta(x, t) = \zeta_1(x, t) + \zeta_0(x)$$

$$p(x, t) = p_1(x, t) - \rho g \zeta_0(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} \phi(x, y, t) = \phi_1(x, y, t) \\ \zeta(x, t) = \zeta_1(x, t) + \zeta_0(x) \\ p(x, t) = p_1(x, t) - \rho g \zeta_0(x) \end{array} \right\} \quad (1.37)$$

のようになつて、初期の水面変位だけ別添へに加之せればよい。

しかしこの式からわかるように、水面が変化する時はこの圧力を受ける方がなくなるのでこの方法は具合が悪い。前の方法の方が適当である。

2. Impulse potential & Initial Value problem

反力分布 (面) の幅が不変で $\gamma(x)$ もこの幅に限定され、
定数である場合について考えよう。

初期, 境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \phi_y &= \begin{cases} -v(t) & \text{for } t > 0 \\ 0 & \text{for } t < 0 \end{cases} \quad \text{for } |x| < c \\ \gamma(x, 0) &= \begin{cases} \gamma_0(x), \text{ constant} & \text{for } |x| < c \\ 0 & \text{for } |x| > c \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

となるが、これは、^(前節で見たように) 2つの問題の解を加えておめられる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_y &= \begin{cases} -v(t) & \text{for } t > 0 \\ 0 & \text{for } t < 0 \end{cases} \quad \text{for } |x| < c, \\ \gamma(x, 0) &= 0 \quad \text{for all } x \text{ and } t < 0, \end{aligned} \right\} \quad \begin{matrix} (2.2) \\ \text{解 } P_1 \end{matrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_y &= 0 \quad |x| < c, t > 0, \text{ all } x \text{ for } t < 0, \\ \gamma(x, 0) &= \begin{cases} 0 & \text{for all } x, t < 0 \\ \gamma_0(x), t > 0, |x| < c \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad \begin{matrix} (2.3) \\ \text{解 } P_2 \end{matrix}$$

まず (2.2) の解は

$$\bar{\Phi}_y(x, y, \omega) = - \int_0^\infty v(t) e^{-i\omega t} dt = -V(\omega), \quad \text{for } |x| < c, \quad (2.4)$$

とすると、今 ω -plane で

$$\bar{\Phi}_y(x, y, \omega) = -1, \quad \text{for } |x| < c, \quad (2.5)$$

に対する解を

$$\bar{\Phi}(x, y, \omega) = \frac{i\omega}{\rho} \int_{-c}^c P(x', \omega) \int_0^\infty \gamma(x-x', y, \omega) dx', \quad (2.6)$$

と記すことにすると

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty V(\omega) \bar{\Phi}(x, y, \omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty v(\tau) d\tau \int_{-\infty}^\infty \bar{\Phi}(x, y, \omega) e^{i\omega(t-\tau)} d\omega, \end{aligned}$$

よなから、今

$$\phi^{\delta}(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Phi}^{\delta}(x, y, \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.7)$$

よから

$$\phi_1(x, y, t) = \int_0^t v(\tau) \phi^{\delta}(x, y, t-\tau) d\tau, \quad (2.8)$$

よかた。

この ϕ^{δ} を以後 impulse potential と呼ぶことにしよう。

そのとき境界条件は

$$\phi_1^{\delta}(x, 0, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = -\delta(t) \quad \text{for } |x| < c. \quad (2.9)$$

ただし $\delta(t)$ は Dirac の δ function である。

またこの方程式の解は前節で見たように

$$\left. \begin{aligned} \phi_3(x, y, t) &= 0, \quad \phi_{3y}(x, 0, t) = 0 \\ p_3(x, t) &= -pg \eta_0(x) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

で与えられるから、求める (2.1) にあてはまる解は

$$\phi = \phi_1 \quad \dots (2.8) \text{ で与えられる。}$$

$$\eta(x, t) = \eta_1(x, t) + \eta_0(x), \quad p(x, t) = p_1(x, t) - pg \eta_0(x). \quad (2.11)$$

で与えられる。

p_1 も η_1 も (2.8) の形式に書ける事は明らかである。

左かにはつての式を代入すれば

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) P^{\delta}(x, \omega) e^{i\omega t} d\omega - pg \eta_0(x) \\ &= \int_0^t v(\tau) p^{\delta}(x, t-\tau) d\tau - pg \eta_0(x), \end{aligned} \quad (2.12)$$

よから

$$p^{\delta}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P^{\delta}(x, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.13)$$

p と Φ の関係は 1 節 1.5 節に示す。

3. 物体の運動力

質量 M の箱船に上下運動をさせる場合を考へよう。
つまり浸水面は変化しないものとする。

外力を $f(t)$ とすると

$$M \ddot{y}(t) = \int_{-c}^c p'(x, t) dx + Mg + f(t), \quad (3.1)$$

$$\text{但し } p'(x, t) = p(x, t) - \rho g \eta_0(x), \quad (3.2)$$

$$\text{よって } Mg = -\rho g \int_{-c}^c \eta_0(x) dx, \quad (3.3)$$

であるから

$$M \ddot{y}(t) = \int_{-c}^c p(x, t) dx + f(t), \quad (3.4)$$

と書いて $p(x, t)$ は 静止した時 水圧を含まないように注意が必要である。

従って p に対する境界条件は 水面の境界条件は

$$\begin{aligned} \phi_y(x, 0, t) &= -v(t) = -\dot{y}(t) \\ \eta(x, t) &= 0 \quad \text{for } x \leq 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

とする本から生ずる。

±2

$$\mathcal{L} y(t) = Y(\omega)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \ddot{y}(t) &= -\omega^2 Y(\omega) - \dot{y}_0 - i\omega y_0 \\ \dot{y}_0 &\equiv \dot{y}(0), \quad y_0 \equiv y(0) \end{aligned} \quad (3.6)$$

よって $\omega = \rho L$ ならば (3.4) は

$$-\omega^2 M Y(\omega) = \int_{-c}^c P(x, \omega) dx + F(\omega) + M(\dot{y}_0 + i\omega y_0), \quad (3.7)$$

$$\text{但し } V(\omega) = \int_0^\infty \dot{y}(t) e^{-i\omega t} dt = i\omega Y(\omega) - y_0, \quad (3.8)$$

又 (2.12) によって (3.5) を 表2.2.2

$$P(x, \omega) = i\omega Y(\omega) P^S(x, \omega), \quad (3.9)$$

(3.8) に代入して

$$[-\omega^2 M - i\omega \int_{-c}^c P^S(x, \omega) dx] Y(\omega) = F(\omega) + M(\dot{y}_0 + i\omega y_0), \quad (3.10)$$

3.2

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3, \quad (3.11)$$

$$Y_1(\omega) = \frac{F(\omega)}{\Delta}$$

$$\Delta = -\omega^2 M - i\omega \int_0^c P dx, \quad (3.12)$$

$$Y_2(\omega) = \frac{M}{\Delta} \dot{y}_0, \quad Y_3(\omega) = \frac{i\omega M}{\Delta} y_0, \quad (3.13)$$

2本を反転した。pl 777

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t), \quad (3.14)$$

となる。

(3.12) における Δ の中には静的後原力が implicit に含まれている。

即ち (1.8) から

$$\left. \begin{aligned} i\omega P^s(x, \omega) &= -\rho \omega^2 \bar{\Phi}(x, 0, \omega) + \rho g \bar{\Phi}_y(x, 0, \omega) \\ \bar{\Phi}_y(x, 0, \omega) &= -1 \quad \text{for } |x| < c \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

7" 03 から

$$\Delta = -\omega^2 M + 2\rho g c + \rho \omega^2 \int_{-c}^c \bar{\Phi}(x, 0, \omega) dx, \quad (3.16)$$

となり、右辺が 2 項だけ増えている。

Cauchy-Poisson Problem (1)

Initial elevation について考えてみよう。

$$\phi(x, y, t) = g \int_{-c}^c \eta(x', 0) G(x-x', y, t) dx', \quad (4.1)$$

附録 12 より G の小さい y では

$$\phi(x, 0, t) = g t \eta(x, 0) + \frac{g t^3}{6\pi} \int_{-c}^c \frac{\eta(x', 0) dx'}{(x-x')^2} + \dots, \quad (4.2)$$

$$\phi_{yy}(x, 0, t) = -\frac{g t}{\pi} \int_{-c}^c \frac{\eta(x', 0) dx'}{(x-x')^2} + \dots, \quad (4.3)$$

$$\phi(x, y, t) = \frac{g}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_{-c}^c dx' \eta(x') e^{-k y} \cos k(x-x') \frac{e^{i \sqrt{gk} t}}{\sqrt{gk}},$$

故に、今 η : even として

$$F(k) = \int_{-c}^c \eta(x) \cos kx dx, \quad \dots (4.4)$$

と仮定して

$$\phi(x, y, t) = \frac{g}{2\pi} \int_0^{\infty} dk F(k) \left[e^{i(kx + \sqrt{gk} t)} - e^{i(kx - \sqrt{gk} t)} \right] \frac{dk}{\sqrt{gk}}, \quad (4.5)$$

と仮定して Stationary phase method に依り

$$\phi(x, y, t) \xrightarrow{x \gg 1} -\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\pi x}} e^{\frac{g t^2}{4x^2}} F\left(\frac{g t^2}{4x^2}\right) \cos\left(\frac{g t^2}{4x} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (4.6)$$

for $x, t > 0$,

例として

$$\eta(x) = -(c - |x|)\alpha \quad \text{for } |x| < c, \quad (4.7)$$



と仮定して

$$\int_0^c \frac{(c-x') dx'}{x'-x} = (c-x) \log\left(\frac{c-x}{-x}\right) - c$$

$$\int_{-c}^c \frac{(c+x') dx'}{x'-x} = -\int_0^c \frac{c-u}{x+u} du = -(c+x) \log\left(\frac{c+x}{x}\right) + c$$

$$\therefore \int_{-c}^c \frac{\eta(x', 0) dx'}{x'-x} = \alpha \left[(c+x) \log(c+x) - (c-x) \log(c-x) - 2x \log x \right], \quad \dots (4.8)$$

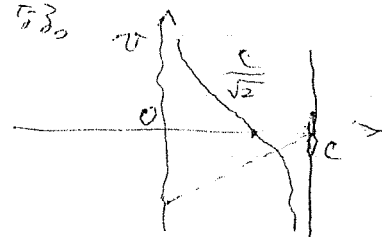
$$\therefore \int_{-c}^c \frac{\phi(x', 0)}{(x-x')^2} dx' = \alpha \log\left(\frac{c^2 - x^2}{x^2}\right), \quad (4.9)$$

と仮して $x=0$, $x=\pm c$ で対称的に無限大となる。

よってこのとき

$$F_1(k) = -\alpha \int_0^c (c-x) \cos kx dx$$

$$= -\frac{\alpha}{k^2} [1 - \cos kc], \quad (4.10)$$



5. Cauchy - Poisson Problem (2)

Initial Impulse $\delta(x)$ は Initial surface velocity による。

$$\phi(x, y, t) = \int_{-c}^c \phi(x', 0, 0) G_t(x-x', y, t) dx', \quad (5.1)$$

附録より $t \rightarrow 0$ による

$$\phi(x, 0, t) = \phi(x, 0, 0) + \frac{gt^2}{2\pi} \int_{-c}^c \frac{\phi(x', 0, 0)}{(x-x')^2} dx' + \dots, \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \phi_y(x, 0, t) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{\phi(x', 0, 0)}{(x-x')^2} dx' + \frac{gt^2}{2} \phi_{xx}(x, 0, 0) \\ &= \phi_y(x, 0, 0) + \frac{gt^2}{2} \phi_{xx}(x, 0, 0) + \dots, \quad (5.3) \end{aligned}$$

$$\text{又 } \phi(x, y, t) \xrightarrow[t, x > 0]{\frac{gt}{2\sqrt{x}} \gg 1} \frac{g^{\frac{3}{2}} t}{2\sqrt{\pi} x^{\frac{5}{2}}} e^{-\frac{g^2 t^2}{4x^2}} \Gamma\left(\frac{gt^2}{4x^2}\right) \sin\left(\frac{gt^2}{4x} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (5.4)$$

$$\text{よって} \quad F_1(k) = \int_{-c}^c \phi(x, 0, 0) \cos kx dx, \quad (5.5)$$

例えは

$$\phi_y(x, 0, 0) = -v \text{ i const for } |x| < c, \quad (5.6)$$

とあくと

$$v = \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{\phi(x', 0, 0) dx'}{(x-x')^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{\phi(x', 0, 0)}{x'-x} dx', \quad (5.7)$$

から

$$\phi(x, 0, 0) = v \sqrt{1-x^2}, \quad (5.8)$$

$$F(\ell) = \frac{v\pi}{\ell} J_0(\ell c), \quad (5.9)$$

を得る。

なお (5.6) の条件は ϕ が左右対称を意味しない。傾斜した平板が水平に移動する場合とみ考えられる。

この時は ϕ として、($x=c$ で Kutta の条件を満足する) とすると

$$\phi(x, 0, 0) = v \sqrt{\frac{c+x}{c-x}} \quad (5.10)$$

のようにとるべきである。

こうすると $c=-x$ では飛沫が出来る事になる。

6. Energy, Lagrangian and Reciprocity

時間 0 から t 迄の間になす仕事 W は、

$$W = \int_0^t dt \int_{-\infty}^{\infty} p \phi_y dx = p \int_0^t dt \int_{-\infty}^{\infty} (\phi_t - q\eta) \phi_y dx,$$

よって

$$\phi_y = -\eta_x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_t \phi_y dx = \iint_{-\infty}^{\infty} \nabla \phi_t \nabla \phi dx dy,$$

よって

$$W = p \int_0^t dt \left[\frac{q}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 dx + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iint (\nabla \phi)^2 dx dy \right] = [T + V]_{t=0}^t, \quad (6.1)$$

よって

$$T = \frac{p}{2} \iint (\nabla \phi)^2 dx dy, \quad (6.2)$$

$$V = \frac{p}{2} q \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 dx, \quad (6.3)$$

よって W は $t=0$ と t の間の全エネルギーの差に等しい。
(但し飛沫のある時は少し修正を要する)

次に、二次式の積分を考えよう。

$$I = \frac{1}{2} \int_0^t dt \int_{-\infty}^{\infty} p \eta dx = \frac{p}{2} \int_0^t dt \int_{-\infty}^{\infty} (\phi_t - q\eta) \eta dx, \quad (6.4)$$

$$\int_0^t \phi_t \eta dt = \phi \eta \Big|_0^t - \int_0^t \phi \eta_t dt = \phi \eta \Big|_0^t + \int_0^t \phi \phi_y dt,$$

よって

$$I = \frac{p}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi \eta \Big|_{t=0}^t dx + \int_0^t (T - V) dt, \quad (6.5)$$

よって

$$T - V = L, \quad (6.6)$$

故に Lagrangian であるから I は $\int_0^t L dt$ と定数だけ異なる量となる。

Hamilton の原理は、 I の変分が 0 であること。

$$\delta \int_0^t L dt = \delta \int_0^t W dt, \quad (6.7)$$

次に 相対性について考えよう。

$$G(x, y, t) = 0 \quad \text{for } t < 0$$

であるから 1 番と終りの端にある任意のポテンシャルは 2 のように書ける。

$$\begin{aligned} \phi(x, y, t) &= \frac{1}{f} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{c(\tau)}^{C(\tau)} p(\alpha', \tau) G_T(x-x', y, t-\tau) dx' \\ \eta(x, t) &= -\frac{1}{f} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-c(\tau)}^{C(\tau)} p(\alpha', \tau) G_T(x-x', 0, t-\tau) dx', \end{aligned} \quad (6.7)$$

今これに 相補的なポテンシャル $\tilde{\phi}(\beta, \eta)$ を考えて 2 の相対性が成立つかうとしよう。

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{c(\tau)}^{C(\tau)} \tilde{p}(x, \tau) \phi_y(x, 0, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-c(\tau)}^{C(\tau)} \tilde{p}(x, \tau) \tilde{\phi}_y(x, 0, t) dx, \quad (6.8)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{c(\tau)}^{C(\tau)} \tilde{p}(x, \tau) \eta(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-c(\tau)}^{C(\tau)} \tilde{p}(x, \tau) \tilde{\eta}(x, t) dx, \quad (6.9)$$

そのためには $\tilde{\phi}, \tilde{\eta}$ は次のように "付け加え" ならぬ。

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(x, y, t) &= \frac{1}{f} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{c(\tau)}^{C(\tau)} \tilde{p}(\alpha', \tau) G_T(x-x', y, t-\tau) dx', \\ \tilde{\eta}(x, t) &= -\frac{1}{f} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-c(\tau)}^{C(\tau)} \tilde{p}(\alpha', \tau) G_T(x-x', 0, t-\tau) dx', \end{aligned} \quad (6.10)$$

$G(x, y, t) = 0$ for $t < 0$ であるから これらの量は $t > 0$ であり来たる β によって決まると言う事になり、仮想的なものである。

(6.10) によって境界条件は

$$\tilde{\phi}_t(x, 0, t) = -\frac{1}{f} \tilde{p}(x, t) - g \tilde{\eta}(x, t), \quad (6.11)$$

$$\tilde{\eta}_t(x, t) = \tilde{\phi}_y(x, 0, t), \quad (6.12)$$

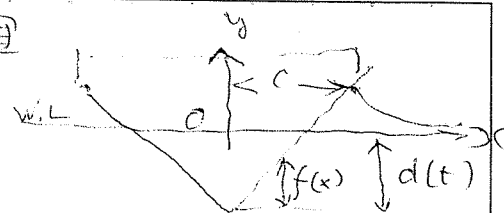
$$\tilde{\phi}_{tt}(x, 0, t) + g \tilde{\phi}_y(x, 0, t) = -\frac{1}{f} \tilde{p}(x, t), \quad (6.13)$$

となるが これは (1.1), (1.2), (1.3) と較べると t を $\bar{t}$ に置き換へた感じであるから、 $\tilde{\phi}$ とは ϕ の時間方向を逆にしたものと相違ない。

17. 境界値問題と変分原理

物体底面の off-set の

$$y = f(x), \quad -1 \leq x \leq 1$$



と与えられるかと、free の位置を $d(t)$ とすると境界条件は

$$\zeta(x, t) = d(t) + f(x) \equiv h(x, t) \quad \text{for } |x| \leq C(t), \quad (7.2)$$

となる。

あるいは速度に対する条件を求むと

$$-\phi_y(x, 0, t) = \zeta_t(x, t) = v(x, t) = \dot{d}(t) \quad \text{for } |x| < C(t) \quad (7.3)$$

となり $f(x)$ つまり底面形状に依存する項がなくなることからそれを与えられるものにする為には、端点において

$$\zeta(C, t) = d(t) + f(C) \quad (7.4)$$

のような条件を加えねばならない。

これを Wagner の条件 (または積分方程式) と呼ぶ。この条件は一面では C を決める条件でもある。

つまり (7.3) の条件では C は不定であって、勝手な値にとつてよいが物理的には Wagner の条件によって決まってくるという事になる。

しかし (7.2) については Wagner の条件はすでに入っているから $C(t)$ は決まってしまう。

実際問題としては (7.2) で同時に $C(t)$ を求めるのは複雑であるから (7.3) を任意の $C(t)$ について解いて後に (7.4) あるいは (7.2) によって $C(t)$ を決めるのが便利であろう。

これらの境界値問題は次のように変分問題に変換出来る。

27

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-C(t)}^{C(t)} \{ p(x,t) + \tilde{p}(x,t) \} h(x,t) dx - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-C}^C p(x,t) \tilde{\eta}(x,t) dx, \quad (7.5)$$

なる積分をとり、 $\tilde{p}$ について変分をとると (C は不変として)

$$\delta I = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-C}^C \delta \tilde{p}(x,t) \{ h(x,t) - \eta(x,t) \} dx, \quad (7.6)$$

同様に p について同様の式があるから、 $\delta I = 0$ は

$$\begin{aligned} \eta(x,t) &= h(x,t) \quad \text{for } |x| < C(t) \\ \text{or } \tilde{\eta}(x,t) &= h(x,t) \end{aligned} \quad (7.7)$$

と解を得る。

(7.6) では $\delta \tilde{p}$ は勝手な函数であるから、これを Galerkin 式解法の原理式と見なしてもよい。

次に C について変分をとれば (7.7) の $x = \pm C$ における条件が出て来る。

295ように開式的には (7.2) でも C は不定であるが、 C について変分をとった時に Wagner の条件を満たす事になる。この事は Wagner の条件は言いかえると船底とすぐ外の氷面との速度が等しい

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\eta(C(t) + \varepsilon, t) - \eta(C(t) - \varepsilon, t)] = 0, \quad (7.8)$$

という条件を仮定した事になるものと考えられ、 $C(t)$ を勝手に与えて解くと (7.8) は満足しない解が出て来るのであろう。

次に (7.3) に対応する汎函数は

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-C(t)}^{C(t)} \{ p(x,t) - \tilde{p}(x,t) \} v(x,t) dx - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-C}^C p(x,t) \tilde{\phi}_y(x,t) dx, \quad (7.9)$$

となり)

$$\delta J = - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-C(t)}^{C(t)} \delta \tilde{P} \left\{ v(x, t) + \phi_{\tilde{P}}(x, t) \right\} dx, \quad (7.10)$$

等となり $\delta J = 0$ は

$$\begin{aligned} \phi_{\tilde{P}}(x, 0, t) &= -v(x, t) \quad \text{for } |x| < C \\ \text{or } \phi_{\tilde{P}}(x, 0, t) &= v(x, t) \end{aligned} \quad (7.11)$$

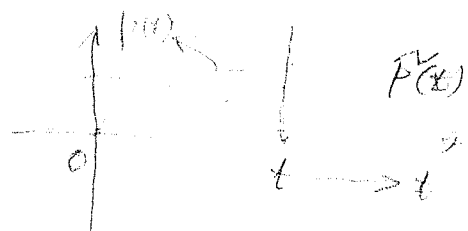
に等しい。

この場合は前述のように $C(t)$ は任意であり、 C に与える変分をとつても物理的には意味はなく、 C を決めるには Wagner の条件を用いるかもしくは (4.5) に代入して C に對して変分をとつて決めればよい。

なおこの積分で時間 t 上の積分範囲は $(-\infty, +\infty)$ であるが前節で述べたように ϕ は ϕ が時間軸に垂直な方向をとれば "スリカ"。

$$P(x, t) = 0 \quad \text{for } x > t$$

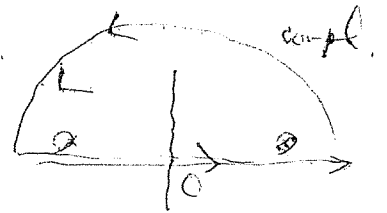
および $t > 0$ が出た、恒等式が $t=0$ から始まることを積分範囲は $(0, t)$ となる。



附録 A 核函数 $n=1, 2$

$$G(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} S(x, y, \omega) d\omega,$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{gk - \omega^2 + i\mu\omega} \int_0^{\infty} e^{ky} \cos kx dk, \quad (A.1)$$



$$\frac{1}{gk - \omega^2 + i\mu\omega} = \frac{1}{2\sqrt{gk}} \left(\frac{1}{\omega + \sqrt{gk} - \frac{i\mu}{2}} - \frac{1}{\omega - \sqrt{gk} - \frac{i\mu}{2}} \right),$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{gk - \omega^2 + i\mu\omega} = \begin{cases} \frac{2\pi}{\sqrt{gk}} e^{-\frac{\mu}{2}t} \sin(\sqrt{gk}t), & \text{for } t > 0, \\ 0 & \text{for } t < 0. \end{cases} \quad (A.2)$$

$$G(x, y, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{ky - \frac{\mu}{2}t} \cos kx \frac{\sin(\sqrt{gk}t)}{\sqrt{gk}} dk, \quad (A.3)$$

$$G_t(x, y, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{ky} \cos kx \cos(\sqrt{gk}t) dk, \quad (A.4)$$

$$G_{tt}(x, y, t) + g G_y(x, y, t) = 0; \quad (A.5)$$

$$G(x, y, 0) = G_y(x, y, 0) = G_{tt}(x, y, 0) = 0, \quad (A.6)$$

$$G_t(x, y, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{ky} \cos kx dk = \frac{1}{\pi} \frac{(-y)}{x^2 + y^2}, \quad (A.7)$$

$$G_{ty}(x, y, 0) = \frac{1}{\pi} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \xrightarrow{y \rightarrow 0} \frac{-1}{\pi x^2}, \quad (A.8)$$

$$t \rightarrow \infty$$

$$G(x, y, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n g^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{\infty} e^{ky} \cos kx k^n dk,$$

$$\therefore G(x, y, t) \rightarrow + \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n g^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^n \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right), \quad (A.9)$$

又

$$I = \int_0^{\infty} e^{ik y + i k x + i \sqrt{g} k t} \frac{dk}{\sqrt{g} k} = \frac{2}{g} \int_0^{\infty} e^{\frac{\sigma^2}{g}(y+ix) + i \sigma t} d\sigma$$

$$i \frac{\sigma^2}{g} (x - iy) + i \sigma t = i \left[\left(\frac{\sigma \sqrt{z}}{\sqrt{g}} + \frac{\sqrt{g} t}{2 \sqrt{z}} \right)^2 - \frac{g t^2}{4 z} \right], \quad \bar{z} = x - iy$$

であるから

$$u = \sigma \sqrt{\frac{z}{g}} + \frac{\sqrt{g} t}{2 \sqrt{z}}, \quad d\sigma = \sqrt{\frac{g}{z}} du,$$

とおくと

$$I = \frac{2}{\sqrt{g z}} e^{-\frac{g t^2}{4 z}} \int_{\frac{\sqrt{g} t}{2 \sqrt{z}}}^{\infty} e^{i u^2} du, \quad \dots (A.10)$$

$$\begin{aligned} \therefore G(x, y, t) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2i} \{ I(x, y, t) - I(x, y, -t) \} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{i e^{-i a^2}}{\sqrt{g z}} \int_{-a}^a e^{i u^2} du \right], \quad (A.11) \end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{g}}{2 \sqrt{z}} t,$$

$$\text{よって} \quad G(x, y, t) \xrightarrow{a \gg 1} \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{i e^{-i a^2}}{2 \sqrt{g z}} \right], \quad (A.12)$$

Fresnel 積分は

$$\begin{cases} C(x) \\ S(x) \end{cases} = \int_0^x \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} t^2) \\ \sin(\frac{\pi}{2} t^2) \end{cases} dt, \quad (A.13)$$

$$C(x) + i S(x) = \frac{1-i}{2} + i e^{-\frac{i\pi}{2} x^2} \{ f(x) + i g(x) \}, \quad (A.14)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 + .926x}{2 + 1.792x + 3.104x^2} + \varepsilon(x) \\ g(x) &= \frac{1}{2 + 4.142x + 3.492x^2 + 6.670x^3} + \varepsilon(x) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq \infty \\ |\varepsilon| \leq 2 \times 10^{-3} \end{array} \right\} \quad (A.15)$$

9.5.312 f, g は 2 に $0 \leq x < \infty$ の間で 9.9.2 に 述べたとす。

更に

$$f(x) \rightarrow \frac{1}{\pi x}, \quad g(x) \rightarrow \frac{1}{\pi^2 x^3}, \quad (A.16)$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = -\pi x g(x), \quad \frac{d}{dx} g(x) = \pi x f(x) - 1, \quad (A.17)$$

(A.13), (A.14) と (1).

$$\begin{aligned} \int_0^a \sin(a^2 - u^2) du &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin(a^2 - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{\frac{2}{\pi}} a) \\ \int_0^a \cos(a^2 - u^2) du &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos(a^2 - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} g(\sqrt{\frac{2}{\pi}} a) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (A.18)$$

$$*2. \quad G(x, 0, t) = \frac{2}{\pi \sqrt{gx}} \int_0^a \sin(a^2 - u^2) du = \frac{\sin(a^2 - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{\pi gx}} + \sqrt{\frac{2}{\pi gx}} f(\sqrt{\frac{2}{\pi}} a)$$

$$\begin{aligned} G_+(x, 0, t) &= \frac{\sqrt{g} t}{\pi x^{\frac{3}{2}}} \int_0^a \cos(a^2 - u^2) du, \\ &= \frac{\sqrt{g} t}{2\sqrt{\pi} x^{\frac{3}{2}}} \cos(a^2 - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{g} t}{\sqrt{2\pi} x^{\frac{3}{2}}} g(\sqrt{\frac{2}{\pi}} a), \end{aligned} \quad (A.19)$$

$$G_{++}(x, 0, t) = -g G_y(x, 0, t) = \frac{g t}{2\pi x^2} + \frac{1}{t} G_+(x, 0, t) - \frac{g^2 t^2}{4x^2} G(x, 0, t)$$

$$G_{+++} = -g G_{yt}(x, 0, t) = \frac{g}{\pi x^2} - \frac{3g^2 t}{4x^2} G(x, 0, t) - \frac{g^2 t^2}{4x^2} G_t(x, 0, t)$$

$x \rightarrow 0$ で $a \ll 1$ ならばこれらの他は (A.9) によつて求められるが、
 $a \gg 1$ の場合は $x \gg \sqrt{t}$ ならば次のようになる。

$$G(x, 0, t) \xrightarrow{a = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{x}}t \gg 1} \frac{\sin(a^2 - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{\pi g x}} + \frac{2}{\pi g t} + \dots$$

$$G_t(x, 0, t) \xrightarrow{a \gg 1} \frac{\sqrt{g} t}{2\sqrt{\pi} x^{\frac{3}{2}}} \cos(a^2 - \frac{\pi}{4}) - \frac{2}{\pi g t^2} + \dots \quad (A-20)$$

$$-g G_y = G_{ttt}(x, 0, t) \longrightarrow -\frac{2}{\pi g t^3} + \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{\pi} x^{\frac{3}{2}}} \left[\cos(a^2 - \frac{\pi}{4}) - \frac{g t^2}{2x} \sin(a^2 - \frac{\pi}{4}) \right] + \dots$$

$$-g G_{yt} = G_{ttt}(x, 0, t) \longrightarrow -\frac{g^{\frac{3}{2}} t}{4\sqrt{\pi} x^{\frac{5}{2}}} \left[3 \sin(a^2 - \frac{\pi}{4}) - \frac{g t^2}{2x} \cos(a^2 - \frac{\pi}{4}) \right] + \dots$$

$$\text{したがって} \quad \int_0^x G(x, 0, t) dx, \quad \int_0^x G_t(x, 0, t) dx$$

は積分が存在するから $\int_0^x G_y dx, \int_0^x G_{yt} dx$ は無限大となるので (1) の方法によらねばならない。

そこで後にも後々の便利のため G の一般化 F を導入しておく。

$$F(x, y, t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-ky} \sin kx \frac{\sin(\sqrt{g}kt)}{\sqrt{gk}} dk, \quad (A-21)$$

$$F_{xx} = -G_{yy}, \quad F_{yy} = G_{xx}, \quad (A-22)$$

$$F_{ttt}(x, y, t) + g F_{yy}(x, y, t) = 0, \quad (A-23)$$

$$F_{tttt}(x, y, t) + g^2 F_{xx}(x, y, t) = 0, \quad (A-24)$$

この関係は G についても同じく成立つ。

又 (24) の関係がある。

$$F(x, 0, t) = -\frac{2}{\pi\sqrt{g}} \int_0^a \cos(a^2 - u^2) du = \frac{-2x}{g} G_t(x, 0, t),$$

$$\begin{aligned} F_t(x, 0, t) &= -\frac{1}{\pi x} - \frac{\sqrt{g} t}{\pi x^{\frac{3}{2}}} \int_0^a \sin(a^2 - u^2) du \\ &= \frac{1}{\pi x} - \frac{g t}{2x} G(x, 0, t), \end{aligned} \quad (A-25)$$

なお (A-24) の解は $y=0$ に与えて

$$\frac{1}{\sqrt{x}} e^{i a^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{i \frac{g t^2}{4x}} \quad (A-26)$$

である。

附録 B Wave-free potential

外に波を出て行かない disturbance について考えよう。

与え" Cauchy - Poisson problem によりは 4, 5 節 (4.6) (5.4) から

$$\bar{F}(k) = \int_{-c}^c \mu(x') \cos kx' dx' = 0 \quad \text{for } k = \frac{g^2 t^2}{4x^2}, \quad (B.1)$$

でなければよい。

$k = \frac{g^2 t^2}{4x^2}$ は $[0, \infty]$ の区間に変化すると考えられるから上式を満たすには フーリエ積分の定理から

$$\mu(x) = 0, \quad (B.2)$$

でなければならぬ。

つまり 初期値問題では波を出て行かない disturbance はない。
一般的にはしかし次のように考えられる。

今上下反対符号な函数によって座標変換をミックスする
ように表わされるとしよう。

$$\phi(x, y, t) = w_{++}(x, y, t) - g w_{-}(x, y, t), \quad (B.3)$$

$$w(x, y, t) = -w(x, -y, t), \quad (B.4)$$

そうすると

$$\begin{aligned} p_t(x, 0, t) &= \phi_{++} + g \phi_{-} = w_{++++} - g^2 w_{yy} \\ &= w_{++++} + g^2 w_{xx}, \end{aligned} \quad (B.5)$$

であるから (B.4) により (B.3) で定義された ϕ は水面条件を満たす。

一方 (B.4) のような函数は

$$w(x, y, t) = -\frac{y}{\pi} \int_{-c}^c \frac{\mu_t(x', t) dx'}{(x-x')^2 + y^2}, \quad (B.6)$$

のように表わされるから (B.5) により, p は

$$p(x, t) = \mu_{++++}(x, t) + g^2 \mu_{xx}(x, t), \quad (B.7)$$

と表わせる。

これを今 μ に関する微分方程式と見なすと 与えられた p に対して 初期, 境界条件を除いて μ は一義的に決まる。

例へば

$$\begin{aligned} \mu(x, 0) = \mu_t(x, 0) = \mu_{tt}(x, 0) = \mu_{ttt}(x, 0) = 0, \\ \mu(\pm c, t) = 0 \end{aligned} \quad (B.8)$$

とすると

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{F} \int_0^t \int_{-c}^c p(x', \tau) G_{tt}(x-x', y, t-\tau) dx' d\tau \\ &= -\frac{1}{\pi\rho} \int_{-c}^c \frac{\mu_{ttt}(x', t) y}{(x-x')^2 + y^2} dx' - \frac{g}{\pi\rho} \int_{-c}^c \frac{\mu_t'(x', t) \{y^2 - x-x'^2\}}{y(x-x')^2 + y^2} dx' \\ &\quad + \frac{g^2}{F} \int_0^t \left[\mu_x(x', \tau) G_{tt}(x-x', y, t-\tau) \right]_{-x \leq -c}^c d\tau, \quad (B.9) \end{aligned}$$

を得るから (B.8) の他に更に

$$\mu_x(\pm c, t) = 0, \quad (B.10)$$

とみると 波は出て行かない。

C. 境界条件の変形

境界条件は次のように変形出来る。

速度条件は次のように変形出来る。

$$\phi(x, y, t) = \frac{1}{P} \int_0^t \int_{-c}^c p(x', \tau) G_{\tau}(x-x', y, t-\tau) dx' d\tau, \quad \dots (C.1)$$

このように流函数は領域 A の F により、

$$\psi(x, y, t) = \frac{1}{P} \int_0^t \int_{-c}^c p(x', \tau) \bar{F}_{\tau}(x-x', y, t-\tau) dx' d\tau, \quad (C.2)$$

と表わされる。

従って

$$\psi_t(x, y, t) = \frac{1}{P} g(x, y, t) - \frac{2}{P} \int_0^t \int_{-c}^c p \bar{F}_y dx' d\tau, \quad (C.3)$$

$$\text{従って} \quad g(x, y, t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{p(x', t)(x-x')}{(x-x')^2 + y^2} dx', \quad (C.4)$$

$\bar{F}_y = G_x$ である。

$$\int_0^x \psi_{ttt} dx = \frac{1}{P} \int_0^x g_{tt} dx - g \left[\phi(x, y, t) - \phi(0, y, t) \right], \quad (C.5)$$

$$\int_0^x \psi_{ttt} \Big|_{y=0} dx = \frac{1}{P} \int_0^x g_{tt} \Big|_{y=0} dx - g \left[g \left\{ \psi(x, t) - \psi(0, t) \right\} + \frac{1}{P} \{ p(x, t) - p(0, t) \} \right], \quad (C.6)$$

$$\text{従って} \quad \phi_t - g \Big|_{y=0} = \frac{1}{P} p$$

$$\text{従って} \quad \psi_t = -\phi_y = \psi_x, \quad (C.7)$$

従って

$$\psi(x, 0, t) = \psi(0, 0, t) + \int_0^x \psi_t(x, t) dx,$$

$$\int_0^x \psi(x, 0, t) dx = x \psi(0, 0, t) + \int_0^x dx \int_0^x \psi_t(x, t) dx.$$

$$\int_0^x \psi_{ttt} dx = x \psi_{ttt}(0, 0, t) + \int_0^x dx \int_0^x \psi_{ttt}(x, t) dx,$$

(C.8)

(C.6)より整理すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{P} \left[g p(x, t) + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{p(x', t) dx'}{|x-x'|} \right] \\ &= \frac{1}{P} \left[g p(0, t) + \frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-c}^c p(x', t) g(|x'|) dx' \right] - x \cdot \psi_{ttt}(0, 0, t) \\ & \quad - g^2 \{ \eta(x, t) - \eta(0, t) \} - \iint_0^x \eta_{tttt}(x, t) dx^2, \quad \dots (C.9) \end{aligned}$$

を得る。

$$\begin{aligned} \text{よお} \quad \psi_{ttt}(0, 0, t) &= \frac{1}{P} g_{ttt}(0, t) - g \phi_{xt}(0, 0, t) \\ &= \frac{1}{P} g_{tt}(0, t) - g \left[g \eta_x(0, t) + \frac{1}{P} p_x(0, t) \right] \quad (C.10) \end{aligned}$$

D. Wagner の問題

 $g \rightarrow 0$ とすると

$$\phi(x, 0, t) = \begin{cases} 0 & \text{for } |x| > c(t) \\ \frac{1}{f} p(x, t), & \text{for } |x| < c(t) \end{cases} \quad (1)$$

$$v(t) = \eta_t(x, t) = -\phi_y(x, 0, t), \quad \text{for } |x| < c(t), \quad (2)$$

となり, η は直接与えられる (2) 式を積分して $\eta(x, t)$ となる。

(1), (2) の満たす解は直ちに求まる。

$$\phi + i\eta = f(z) = \frac{ic}{s} v(t) = i v(t) (z + \sqrt{z^2 - c^2}), \quad (3)$$

$$\text{但し } x + iy = z = \frac{c}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right), \quad s = \frac{z}{c} + \sqrt{\frac{z^2}{c^2} - 1},$$

従って

$$\phi(x, 0, t) = -v(t) \sqrt{c^2 - x^2} \quad \text{for } |x| > c \quad (4)$$

又 η は $|x| < c$ では (2) で与えられるから η の外では

$$\eta(x, t) = -\phi_y(x, 0, t) = v(t) \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - c^2}} \right), \quad \text{for } |x| > c \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \therefore \dot{\phi}(x, t) &= \int_0^t \left(v - \frac{vxc}{\sqrt{x^2 - c^2}} \right) dt, \quad \text{for } |x| > c, \\ &= \eta_0(t) - \int_0^t \frac{vxc}{\sqrt{x^2 - c^2}} dt, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{但し } \eta_0(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau,$$

物体表面が

$$y(x, t) = f(x) + \eta_0(t) - d_0, \quad (7)$$

と与えられるから "C を IR ぬる Wagner 条件は (6) と (7) から

$$f(c) - d_0 = - \int_0^t \frac{v(\tau) c}{\sqrt{c^2(\tau) - c^2(\tau)}} d\tau, \quad (8)$$

すなわち (1) と (4) から

$$\frac{1}{f} p(x, t) = -\dot{v}(t) \sqrt{c^2 - x^2} - \frac{v(c)}{\sqrt{c^2 - x^2}}, \quad (9)$$

$$\therefore \frac{1}{f} \int_{-c}^c p(x, t) dx = -\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{f} v \right) \quad (10)$$

$$\text{但し } m = \frac{\pi}{2} f c^2, \quad (11)$$

のなした仕事は

$$W = - \int_0^t dt \int_C p v dt = - \int_0^t v dt \int_C p dt = + \int_0^t v \frac{d}{dt} (m v) dt$$

$$= \int_0^t \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} v^2 \right) + \frac{m}{2} v^2 \right\} dt = T + \int_0^t \frac{m}{2} v^2 dt, \quad (12)$$

$$T = \frac{m}{2} v^2(t) - \frac{m}{2} v^2(0), \quad (13)$$

T は流体の運動エネルギーの差でこれは(3),(4)のポテンシャルによるものであるから結局 W は(12)の右辺の2項だけ余計に仕事をしてそれは流体の中にはない。

これは飛沫となって系外に出て行く($m > 0$)エネルギーである。もし $m < 0$ ならば系内にはいつまでも残る事になるがこれは一寸物理からいっては不可能であろう。

さて(8)式の解はよく知られたように

$$d_0 = 0, \quad f(x) = \alpha |x| \quad \text{ならば}$$

$$\frac{dc}{dt} = - \frac{\pi}{2\alpha} v(t)$$

(14)

で与えられる。

$$\text{又} \quad d_0 = \alpha c_0, \quad f(x) = \alpha |x|$$

とし $x - c_0 = y \ll c_0$ とすると近似すると

$$\frac{dc}{dt} = - \frac{\pi v(t)}{2\alpha\sqrt{2}} \sqrt{\frac{c_0}{c - c_0}}$$

(15)

となる。

この場合浸入する間接であるが浮上の過程はこの逆ではない。この時は(3)のポテンシャルは右図のように

 物体底面の速度は与えられたものに等しくて流体は底と共に上向きに与えられる速度をもつので流体は離れない。従って重力的作用を考慮しなければ圧力としては(9)式右辺の1項のみ考えればよい。

E. 同期運動の場合

同期丁を有する運動について考えよう。

速度ポテンシャルは

$$\phi(x, y, t) = \frac{1}{P} \int_{-\infty}^t d\tau \int_{-C(\tau)}^{C(\tau)} p(x', \tau) G_{T\tau}(x-x', y, t-\tau) dx', \quad (1)$$

$$\tilde{\phi}(x, y, t) = \frac{1}{P} \int_t^{\infty} d\tau \int_{-C(\tau)}^{C(\tau)} \tilde{p}(x', \tau) G_{T\tau}(x-x', y, \tau-t) dx', \quad (2)$$

$$(2) \quad G_{T\tau}(x, y, t) = \lim_{\mu \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ky - \mu t} \cos kx \cos \sigma t dk, \quad (3)$$

$$\sigma = \sqrt{gk}$$

ここで

$$p(x, t) = \tilde{p}(x, t-nT), \quad n: \text{integer} \quad (4)$$

とすると

$$\begin{aligned} \phi(x, y, t) &= \frac{1}{P} \int_t^t d\tau \int_{-C(\tau)}^{C(\tau)} p(x', \tau) dx' \sum_{n=0}^{\infty} G_{T\tau}(x-x', y, t-\tau+nT), \\ \tilde{\phi} &= \frac{1}{P} \int_t^{t+T} d\tau \int_{-C(\tau)}^{C(\tau)} \tilde{p}(x', \tau) dx' \sum_{n=0}^{\infty} G_{T\tau}(x-x', y, \tau+nT-t), \end{aligned} \quad (5)$$

したがって

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\mu \pm i\sigma)(u+nT)} = \frac{e^{-(\mu \pm i\sigma)u}}{1 - e^{-(\mu \pm i\sigma)T}}, \quad (6)$$

で(5)から

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu(u+nT)} \cos \sigma(u+nT) = \frac{1}{4} \left[\frac{e^{-i\sigma^+(u-\frac{T}{2})}}{\lambda' \frac{\sigma^-}{2} T} + \frac{e^{-i\sigma^-(u-\frac{T}{2})}}{\lambda' \frac{\sigma^+}{2} T} \right] \quad (7)$$

$$(1) \quad \sigma^{\pm} = \sigma \pm \mu i$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu(u+nT)} \cos \sigma(u+nT) = \frac{1}{4i} \left[\frac{e^{-i\sigma^+(u-\frac{T}{2})}}{\lambda' \frac{\sigma^-}{2} T} - \frac{e^{-i\sigma^-(u-\frac{T}{2})}}{\lambda' \frac{\sigma^+}{2} T} \right] \quad (7')$$

従って

$$\begin{aligned} G'_{T\tau}(x, y, u) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} G_{T\tau}(x, y, u+nT) \\ &= \frac{1}{4\pi i} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ky} \cos kx \left[\frac{e^{-i\sigma^+(u-\frac{T}{2})}}{\lambda' \frac{\sigma^-}{2} T} - \frac{e^{-i\sigma^-(u-\frac{T}{2})}}{\lambda' \frac{\sigma^+}{2} T} \right] dk, \end{aligned} \quad (8)$$

と(8)から

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{1}{P} \int_{t-T}^t d\tau \int_{-c}^c P(x', \tau) G'_t(x-x', y, t-\tau) dx' \\ \phi^* &= \frac{1}{P} \int_t^{t+T} d\tau \int_{-c}^c P(x', \tau) G'_{T-t}(x-x', y, T-\tau) dx' \end{aligned} \right\} (9)$$

と書ける。

特に $\bar{t} = \bar{y}$ に

$$\int_{t-T}^t d\tau = \int_0^t d\tau + \int_{t-T}^0 d\tau, \quad \int_t^{t+T} d\tau = \int_t^T d\tau + \int_T^{T+t} d\tau$$

$$\text{for } 0 < t < T.$$

であるから 新しく

$$G_t^*(x, y, u) = \begin{cases} G'_t(x, y, u) & \text{for } u > 0 \\ G'_t(x, y, T+u) & \text{for } u < 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$\tilde{G}_T^*(x, y, u) = \begin{cases} G'_T(x, y, -u) & \text{for } u > 0 \\ G'_T(x, y, T-u) & \text{for } u < 0 \end{cases} \quad (11)$$

と定義すると

$$\phi(x, y, t) = \frac{1}{P} \int_0^T d\tau \int_{-c(t)}^{c(t)} P(x', \tau) G_t^*(x-x', y, t-\tau) dx', \quad (12)$$

$$\tilde{\phi}(x, y, t) = \frac{1}{P} \int_0^T d\tau \int_{-c(\tau)}^{c(\tau)} \tilde{P}(x', \tau) \tilde{G}_T^*(x-x', y, t-\tau) dx', \quad (13)$$

のように書ける。

また (10), (11) のように定義すると, $u=0$ の jump が 0 である。

$$\begin{aligned} G_t^*(x, y, +\varepsilon) - G_t^*(x, y, -\varepsilon) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} G'_t(x, y, 0) - G'_t(x, y, T) \\ &= 2G_t(x, y, 0), \\ G_T^*(x, y, +\varepsilon) - G_T^*(x, y, -\varepsilon) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -2G_T(x, y, 0). \end{aligned} \quad (14)$$

次にこれをフーリエ展開して見よう。

$$\left. \begin{aligned} \hat{G}_+^*(x, y, t-\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{in\omega t} \\ \hat{G}_-^*(x, y, t-\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_n e^{in\omega t} \end{aligned} \right\}$$

よって

$$A_n = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{G}_+^*(x, y, t-\tau) e^{-in\omega t} dt = \frac{i n \omega^2}{2\pi} e^{-in\omega T} S(x, y, n\omega)$$

$$\tilde{A}_n = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{G}_-^*(x, y, t-\tau) e^{-in\omega t} dt = \frac{n \omega^2}{2\pi i} e^{-in\omega T} S(x, y, -n\omega)$$

を得る。但し

$$S(x, y, n\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-k y} \cos k x dk}{\sigma^2 + \mu^2 + 2\mu n i \omega - n^2 \omega^2}, \quad (15)$$

$$\text{従って, } \hat{G}_+^*(x, y, t) = \frac{i \omega^2}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n S(x, y; n\omega) e^{in\omega t}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \hat{G}_-^*(x, y, t) &= \frac{\omega^2}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n S(x, y; -n\omega) e^{in\omega t} \\ &= \frac{i \omega^2}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n S(x, y; n\omega) e^{in\omega t}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{よって } S(x, y, -n\omega) = \tilde{S}(x, y, n\omega)$$

と証明するにすぎない

$$\tilde{S}(x, y, n\omega) = \overline{S(x, y, n\omega)}$$

である。

さて以上を(14)に入れて置くと

$$\left. \begin{aligned} p(x, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n(x) e^{in\omega t} \\ \tilde{p}(x, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{P}_n(x) e^{in\omega t} \end{aligned} \right\} \text{ for } |x| < \max e = b, \quad (18)$$

と展開出来ることとなる。

$$\left. \begin{aligned} \phi(x, y, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega t} \Phi_n(x, y) \\ \tilde{\phi}(x, y, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega t} \tilde{\Phi}_n(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Phi}_n(x, y) &= \frac{i n \omega}{\rho} \int_{-b}^b P_n(x') S(x-x', y; n \omega) dx' \\ \tilde{\Phi}_n(x, y) &= \frac{n \omega}{\rho i} \int_{-b}^b \tilde{P}_n(x') \tilde{S}(x-x', y; n \omega) dx' \end{aligned} \right\} (20)$$

同様にして (20) の $\tilde{\Phi}_n$ に対しては

$$\psi(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i n \omega t} H_n(x)$$

$$\tilde{\psi}(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i n \omega t} \tilde{H}_n(x) \quad (21)$$

と表わすことができるから、これらの間に

$$\left. \begin{aligned} g \bar{\Phi}_{ny}(x, 0) - (n \omega)^2 \bar{\Phi}_n(x, 0) &= \frac{i n \omega}{\rho} P_n(x) \\ \frac{1}{\rho} P_n(x) &= i n \omega \bar{\Phi}_n(x, 0) - g H_n(x) \\ i n \omega H_n(x) &= -\bar{\Phi}_{ny}(x, 0) \end{aligned} \right\} (22)$$

$$\left. \begin{aligned} g \tilde{\Phi}_{ny}(x, 0) - (n \omega)^2 \tilde{\Phi}_n(x, 0) &= \frac{n \omega}{\rho i} \tilde{P}_n(x) \\ \frac{1}{\rho} \tilde{P}_n(x, 0) &= -i n \omega \tilde{\Phi}_n(x, 0) - g \tilde{H}_n(x) \\ i n \omega \tilde{H}_n(x) &= \tilde{\Phi}_{ny}(x, 0) \end{aligned} \right\} (23)$$

右の関係を表わす事は、自明である。

これから、両方の式の相対性も出て来る。

$$\int_0^T dt \int_{-c(t)}^{c(t)} \bar{p}(x, t) \bar{\psi}_y(x, 0, t) dx = \int_0^T dt \int_{-c(t)}^{c(t)} p(x, t) \tilde{\psi}_y(x, 0, t) dx, \quad (24)$$

$$\int_0^T dt \int_{-c(t)}^{c(t)} \bar{p}(x, t) \psi(x, t) dx = \int_0^T dt \int_{-c(t)}^{c(t)} p(x, t) \tilde{\psi}(x, t) dx, \quad (25)$$

これより

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-b}^b \tilde{P}_n(x) \bar{\Phi}_{ny}(x, 0) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-b}^b P_n(x) \tilde{\Phi}_{ny} dx, \quad (26)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-b}^b \tilde{P}_n(x) H_n(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-b}^b P_n(x) \tilde{H}_n(x) dx, \quad (27)$$

(20) を用いてこの各 $\tilde{P}_n$ について

$$\int_{-b}^b \tilde{P}_n(x) \tilde{\Phi}_{ny}(x, 0) dx = \int_{-b}^b P_n(x) \tilde{\Phi}_{ny}(x, 0) dx, \quad (28)$$

$$\int_{-b}^b \tilde{P}_n(x) H_n(x) dx = \int_{-b}^b P_n(x) H_n(x) dx, \quad (29)$$

が成り立つことは明らかである。

上の相互性を用いて境界値問題は二つの異なる変分問題に変換することが出来る。

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\tau} \int_0^T dt \int_{-c(t)}^{c(t)} \{ p(x, t) + \tilde{p}(x, t) \} h(x, t) dx \\ &\quad - \frac{1}{\tau} \int_0^T dt \int_{-c(t)}^{c(t)} p(x, t) \tilde{h}(x, t) dx, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{\tau} \int_0^T dt \int_{-c(t)}^{c(t)} \{ p(x, t) - \tilde{p}(x, t) \} v(x, t) dt \\ &\quad - \frac{1}{\tau} \int_0^T dt \int_{-c}^c p(x, t) \tilde{p}_y(x, 0, t) dt, \end{aligned} \quad (31)$$

次に進む前に次のような函数群を定義してを(30)と(31)で表す。

$$w(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{for } |x| < c(t) \\ 0 & \text{for } |x| > c(t) \end{cases} \quad (32)$$

すなわち

$$w(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n(x) e^{in\omega t}, \quad (33)$$

と展開出来る。

例えば

$$c(t) = c_0 + c_1 \cos \omega t, \quad (34)$$

とすると

$$\begin{aligned} w_n(x) &= 0 & \text{for } |x| > c_0 + c_1 \\ w_0(x) &= 1 \\ w_n(x) &= 0 & \text{for } n \geq 1 \end{aligned} \quad \begin{cases} |x| < c_0 - c_1 \end{cases} \quad (35)$$

$$w_{-1}(x) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} p(x, t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\tau} \int_{-\pi}^{\pi} p(x, t) e^{-i\omega t} dt = \frac{\text{Ainh}\omega\tau}{\pi\tau}, \quad (36)$$

$$x = c_0 + c_1 \cos \omega t, \quad 0 < \omega\tau < \pi$$

のより与えられ、その $C_0 - C_1 < |x| < C_0 + C_1$ における平均値は

$$\frac{1}{2C_1} \int_{C_0-C_1}^{C_0+C_1} w_0(x) dx = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2C_1} \int_{C_0-C_1}^{C_0+C_1} w_n(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{for } n=0, \\ 0 & \text{for } |n| \neq 0, \end{cases} \quad (37)$$

となる。

さてまた $p(x, t)$ は

$$p(x, t) = p(x, t) w(x, t), \quad (38)$$

は自明であるから $w = p$ のみで

$$P_n(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_m(x) w_{n-m}(x), \quad (39)$$

を満足しなければならぬ。つまり $P_n(x)$ は夫に $w_n(x)$ なく
上式を満足しなければならぬ。

境界条件からは

$$v(t) w(x, t) = \begin{cases} v_1 e^{i\omega t} + v_{-1} e^{-i\omega t}, & \text{for } |x| < C \\ 0 & \text{for } |x| > C \end{cases} \quad (40)$$

$$w(x, t) h(x, t) = \begin{cases} [f(x) + h_1 e^{i\omega t} + h_{-1} e^{-i\omega t}] & \text{for } |x| < C \\ 0 & \text{for } |x| > C \end{cases} \quad (41)$$

$$\text{但し } v_1 = i\omega h_1, \quad v_{-1} = -i\omega h_{-1},$$

のより与えらるから、

$$v(t) w(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{ v_1 w_{m-1}(x) + v_{-1} w_{m+1}(x) \} e^{im\omega t},$$

$$h(t) w(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{ h_1 w_{m-1}(x) + f(x) w_m(x) + h_{-1} w_{m+1}(x) \} e^{im\omega t} \quad (42)$$

これから従って (30) (31) は $\omega = \mu \cdot \tau$

$$I = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \int_{-b}^b \left[\{ h_1 w_{h-1}(x) + f(x) w_h(x) + h_{-1} w_{h+1}(x) \} \{ P_h(x) + \bar{P}_h(x) \} - P_h \bar{H}_{-h}(x) \right] dx, \quad (43)$$

$$J = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \int_{-b}^b \left[\{ v_1 w_{h-1}(x) + v_{-1} w_{h+1}(x) \} \{ P_h(x) - \bar{P}_h(x) \} - P_h(x) \bar{\Phi}_{-1,1}^{\gamma}(x, 0) \right] dx, \quad (44)$$

と有り, 且 P_h が独立なうし

$$\left. \begin{aligned} h_1 w_{h-1}(x) + f(x) w_h(x) + h_{-1} w_{h+1}(x) &= H_h(x) \\ v_1 w_{h-1}(x) + v_{-1} w_{h+1}(x) &= \bar{\Phi}_{h,1}^{\gamma}(x, 0) \\ \text{or } i\omega \{ h_1 w_{h-1}(x) - h_{-1} w_{h+1}(x) \} &= i\omega H_h(x) \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

を得るが P_h は有限でなく (39) の方程式を満足しなければならぬので, これは誤りであつて, (39) の条件の下で変分をとる

$$h_1 w_{h-1}(x) + f(x) w_h(x) + h_{-1} w_{h+1}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_{h-m}(x) w_m(x), \quad (46)$$

$$v_1 w_{h-1}(x) + v_{-1} w_{h+1}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_m(x) \bar{\Phi}_{h-m,1}^{\gamma}(x, 0),$$

$$\text{or } h_1 w_{h-1}(x) - h_{-1} w_{h+1}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (h-m) w_m(x) H_{h-m}(x), \quad (47)$$

となる。

「水面の変化を僅かに」 w_0 以上 w_n ($n \geq 1$) を無視出来るとすると 1 近似解は

$$h_1 = H_1(x), \quad h_{-1} = H_{-1}(x), \quad f(x) = H_0(x), \quad (48)$$

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \bar{\Phi}_{1,1}^{\gamma}, \quad v_{-1} = \bar{\Phi}_{-1,1}^{\gamma}, \\ \text{or } h_1 &= H_1, \quad h_{-1} = H_{-1} \end{aligned} \right\} \quad |x| \leq b \quad (49)$$

である。

この式1近似から水面変位(有防波堤を計算して物体底面との
交点として $C(t)$ を決める事が出来る。詳細は

しかし一般に端部における波紋は無視する
とできるので 図15の図のような場合 $C(t)$ を決める事が
出来る。出てくるよう。

いづれにしても 図15の図からこの水面変位を
無視して 水面からこれを決める

(水面衝撃理論から) (Kasman の仮定) として

$$C(t) = C_0 + \frac{1}{\alpha} d(t) \quad (50)$$

とすると、これを Kasman 近似と呼ぶ事になる。

次に圧力は (39) を満たさなければならない。

そこで右辺の P_n に (48), (49) の解 $P_0, P_{\pm 1}$ を代入すると次の
近似の P_n' として 式を得る。

$$P_n'(x) = P_1(x)u_{n1}(x) + P_0(x)u_{n0}(x) + P_{-1}(x)u_{n-1}(x), \quad (51)$$

$C(t)$ で (39) で表わされるような場合を考えると $u_n(x, z)$
は平均値は 0 であるのでこれを無視し、又 u_{n1}, u_{n0} の
平均値 (37) を用いて 近似すると

$$P_n'(x) = 0 \quad \text{for } |n| \geq 3 \quad (52)$$

$$P_{\pm 2}'(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } |x| < c_0 - c_1 \\ \frac{1}{4} P_{\pm 1}(\frac{3}{4}) & \text{for } c_0 - c_1 < |x| < c_0 + c_1 \end{cases} \quad (53)$$

$$P_{\pm 1}'(x) = \begin{cases} P_{\pm 1}(x) & \text{for } |x| < c_0 - c_1 \\ \frac{1}{4} P_0(\frac{3}{4}) + \frac{1}{2} P_{\pm 1}(\frac{3}{4}), & c_0 - c_1 < |x| < c_0 + c_1 \end{cases} \quad (54)$$

$$P_0'(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} P_1(\frac{3}{4}) + \frac{1}{2} P_0(\frac{3}{4}) - \frac{1}{4} P_{-1}(\frac{3}{4}) & \text{for } |x| < c_0 - c_1 \\ P_0(x) & \text{for } |x| < c_0 - c_1 \end{cases} \quad (55)$$

