

薄い物体の大振幅と下動について

別所正利

内容

序

1. 速度ポテンシャル
2. カについて (Ⅰ)
3. " (Ⅱ)
4. 仕事

附録 A フーリエ展開の例
 B 核関数

序

水面で振動する物体の理論は一般に振幅が無限に小さいという仮定の下になてられている。

従って振幅が有限と考えると初めから理論を再構成して所謂 Second Order Theory を取扱わねばならない。

しかしながらこの行くまじにもう一つの立場として、振幅は小さいと考えられるが浸水面の変化は無視出来ないという場合が考えられる。

高速船の波浪中運動のような場合は正にこのような場合であらうが、まだその様な解についての文献は見当たらない。

ここではこのような問題の中で簡単に解ける場合として薄い物体が上下動をする場合について考えて見る。

この問題は定常振動の場合について Havelock の解いたものであつて、三次元の同様な問題に拡張出来るものである。

いづれにしてもこの種の問題の定性的特徴を捕える例題として有用であらう。

1. 速度ポテンシャル

圧力を $p(x, y, t)$, 速度ポテンシャルを $\phi(x, y, t)$ とすると 線型理論では

$$\frac{1}{\rho} p(x, y, t) = \phi_t(x, y, t) - g y, \quad (1)$$

特に水面では $\eta(x, t)$ を水面変位として

$$\frac{1}{\rho} p(x, 0, t) = \phi_t(x, 0, t) - g \eta(x, t), \quad (2)$$

一方 水面では

$$\eta_t(x, t) = - \phi_y(x, 0, t), \quad (3)$$

であるから η を消去すると

$$\phi_{tt}(x, 0, t) + g \phi_y(x, 0, t) = 0, \quad (4)$$

水面条件(4)を満たし, $t=0$ で対数的の特異点を持つ解は次のようになる。

$$G_g(x, y; x', y'; t) = \frac{\delta(t)}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} + g G(x-x', y+y'; t), \quad (5)$$

$$\text{但し } r_1 = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-x')^2 + (y+y')^2}$$

$$G(x, y; t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{k y} \cos k x \frac{\sin(\sqrt{g k} t)}{\sqrt{g k}} dk, \quad (6)$$

$$G_{tt}(x, y; t) + g G_y(x, y; t) = 0,$$

$$G(x, y; 0) = 0$$

$$G_t(x, y, 0) = \frac{-y'}{\pi(x^2 + y'^2)},$$

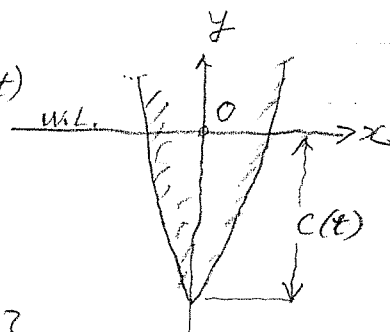
$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (7)$$

今

$$\phi(x, y, t) = \int_{-\infty}^t d\tau \int_{-C(\tau)}^0 \sigma(y'; \tau) G_g(x, y; 0, y'; t-\tau) dy', \quad (8)$$

なるポテンシャルを考えて見よう。

(5) によつて書きかえると



$$\phi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-c(t)}^0 \sigma(y'; t) \log \frac{r_2}{r_1} dy' + g \int_{-\infty}^t d\tau \int_{-c(\tau)}^0 \sigma(y'; \tau) G(x, y+y'; t-\tau) dy', \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \phi_t(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{dc}{dt} \sigma(-c, t) \log \frac{r_2}{r_1} \Big|_{y'=-c} + \frac{1}{2\pi} \int_{-c(t)}^0 \tilde{\sigma}_t(y'; t) \log \frac{r_2}{r_1} dy' \\ &\quad + g \int_{-\infty}^t d\tau \int_{-c(\tau)}^0 \tilde{\sigma}_t(y'; \tau) G_{tt}(x, y+y'; t-\tau) dy', \quad (10) \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} \phi_{tt}(x, y, t) + g \phi_y(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \sigma_{ctt} + g \sigma + 2 \sigma_t c_t \right\} \log \frac{r_2}{r_1} \Big|_{y'=-c} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-c(t)}^0 \left\{ \tilde{\sigma}_{tt}(y'; t) + g \tilde{\sigma}_y(y'; t) \right\} \log \frac{r_2}{r_1} dy', \quad (11) \end{aligned}$$

これから (4) を満たす事は明らかである。

さて (9) を x で微分して $x=0$ とおくと, $G_x(0, y; t) = 0$ であるから

$$\phi_x(\pm 0, y; t) = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^0 \sigma(y'; t) \left\{ \frac{x}{r_2^2} - \frac{y}{r_1^2} \right\} dy' = \mp \frac{\sigma(y, t)}{2}, \quad (12)$$

従って 薄い物体では (左右対称と仮定) そのオフセットが静止時には

$$x = f(y), \quad (13)$$

で与えられるとし, それからの物体の変位を $Y(x)$ とすると, 時刻 t におけるそれは

$$\begin{aligned} x &= f(y - Y(x)), \\ \frac{dY}{dt} &= V(t) = - \frac{dc}{dt}, \end{aligned} \quad (14)$$

となるから境界条件は,

$$-\phi_x(\pm 0, y, t) = \mp V(t) f_y(y - Y(t)), \quad (15)$$

式(12)より

$$\sigma(y, t) = -2V(t) f_y(y - Y(t)), \quad \text{for } 0 > y > -C(t), \quad (16)$$

従って薄い物体の場合は問題が簡単になる。

さて実際に重要な周期運動の場合を考えておこう。

その周期を $T (= 2\pi/\omega)$ とするとすべての量はフーリエ展開出来る。次のようになる。

$$\sigma(y, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_n(y) e^{in\omega t}, \quad \sigma_n(y) = \overline{\sigma_{-n}(y)}, \quad (17)$$

$$\sigma_n(y) = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma(y, t) e^{-in\omega t} dt, \quad (18)$$

これを(14)に代入し

$$\int_{-\infty}^x \Phi(x, y; t - \tau) e^{in\omega \tau} d\tau = e^{in\omega t} S_n(x, y; \omega), \quad (19)$$

$$S_n(x, y; \omega) = \frac{1}{\pi} \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_0^{\omega \text{ by}} \frac{e^{-\mu \omega \tau} d\tau}{\sigma^2 - \omega^2 + \mu i n \omega}, \quad (20)$$

とき

$$S_n(x, y; x', y'; \omega) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1} + g S_n(x - x', y + y'; \omega), \quad (21)$$

なる核を導入すると

$$\phi(x, y, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega t} \phi_n(x, y; \omega), \quad (22)$$

$$\phi_n(x, y; \omega) = \int_{-\infty}^0 \sigma_n(y') S_n(x, y; 0, y'; \omega) dy', \quad (23)$$

浴水面積が変化する単弦運動ならば

$$\phi_n = 0 \quad \text{for } n \neq \pm 1$$

と

$$\phi_1 = \overline{\phi_1} \neq 0$$

となる。

2. カについて (I).

線型理論ではカは静水圧を除いて次式で与えられる

$$Z = \rho \int_S \phi dx, \quad \dots (1)$$

今は (1.14) のより

$$Z = 2\rho \int_c^0 \phi(0, y, t) f_y(y - \eta(t)) dy, \quad \dots (2)$$

同期運動をする場合は (6.2) と (A.2) から

$$Z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n e^{in\omega t}, \quad \dots (3)$$

$$Z_n = 2i\rho\omega \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mu \int_{-\infty}^0 \phi_m(0, y; \omega) f'_{n-\mu}(y) dy, \quad \dots (4)$$

$$\text{今 } \{n, m\} = \int_c^0 \phi_n(0, y; \omega) f'_m(y) dy, \quad \dots (5)$$

なる記号を用うと明らか $\overline{\{n, m\}} = \{-n, -m\}$, (6)
である。

(4) をこの記号で書いて見ると。

$$Z_0 = 2i\rho\omega \sum \mu \{ \mu, -\mu \} = 2i\rho\omega [\{1, -1\} + \{ -1, 1 \} + 2\{2, -2\} + 2\{ -2, 2 \} + \dots]$$

$$Z_1 = \overline{Z_{-1}} = 2i\rho\omega \sum \mu \{ \mu, 1-\mu \} = 2i\rho\omega [\{1, 0\} + 2\{2, 1\} + \{ -1, 2 \} + 3\{3, -2\} - 2\{ -2, 3 \} - 3\{ -3, 4 \} + \dots]$$

$$Z_2 = \overline{Z_{-2}} = 2i\rho\omega \sum \mu \{ \mu, 2-\mu \} = 2i\rho\omega [\{1, 1\} + 2\{2, 0\} + 3\{3, -1\} - \{ -1, 3 \} - 2\{ -2, 0 \} - \dots]$$

$$Z_3 = 2i\rho\omega \sum \mu \{ \mu, 3-\mu \} = 2i\rho\omega [\{1, 2\} + 2\{2, 1\} + 3\{3, 0\} + \dots - \{ -1, 4 \} - 2\{ -2, 5 \} - \dots]$$

例 12 $y(t) = 0$ の第 2 近似を求めよ。

$$Z_0 = 0 \quad \text{for } 0 \leq t \leq 1$$

$$Z_1 = \bar{Z}_1 = 2ip\omega \{1, 0\} \quad (8)$$

71 = 11 は又 ω の 1 近似である。

次の 2 近似では

$$Z_0 = 2ip\omega \{1, -1\},$$

$$Z_1 = 2ip\omega \{1, 0\},$$

$$Z_2 = 2ip\omega \{1, 1\},$$

(9)

この近似では 定常成分と 倍周成分成分が出てそれらは同じオーダの値となる。

次の 3 近似では

$$Z_0 = 2ip\omega [\{1, -1\} - \{1, 1\}],$$

$$Z_1 = 2ip\omega [\{1, 0\} + 2\{2, -1\} - \{1, 2\}],$$

$$Z_2 = 2ip\omega [\{1, 1\} + 2\{2, 0\}],$$

$$Z_3 = 2ip\omega [\{1, 2\} + 2\{2, 1\} + 3\{3, 0\}],$$

(10)

3. カについて (II)

このように線型理論では問題は簡単であるが力については速度の自乗に比例する項が出て来るので、始めに乾いたように線型理論で押し通すには些かの疑念が残る。

そこでこの節では線型理論における力と一般論とを比べてみる力の式と対比してその対応性を調べてみる。

先ずもう一度線型理論の式を書き下し少し変形して見る。

肩符で線型理論によるものを代表すると力 $Z^{(1)}$ は

$$Z^{(1)} = Z_d^{(1)} + Z_s^{(1)}, \quad (1)$$

添字 d は動的な力で前節で求めたもの、 s は静電圧によるものとする。

$$\begin{aligned} Z_d^{(1)} &= -P \int_S \phi(x, y, t) \delta_{xx} ds \\ &= -2P \int_{-c}^0 \phi_c(0, y, t) f'(y-Y(t)) dy, \quad (2) \end{aligned}$$

$$Z_s^{(1)} = -F \theta \int y dx = -2P g \int_{-c}^0 f(y-Y(t)) dy, \quad (3)$$

(1.10) を代入すると (2) 式は 3 つに分かれて

$$Z_d^{(1)} = Z_{d0}^{(1)} + Z_{d1}^{(1)}, \quad (4)$$

$$Z_{d0}^{(1)} = \frac{P}{\pi} \int_{-c}^0 f'(y-Y) dy \left[\frac{dc}{dt} \theta f(t) \log \left| \frac{y+Y}{y-Y} \right| + \int_{-c}^0 \log \left| \frac{y+Y'}{y-Y'} \right| dy' \right],$$

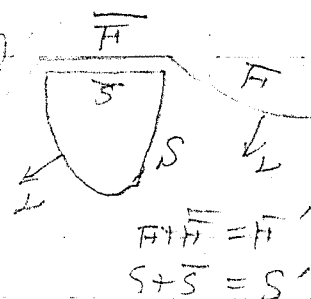
(1.16) を代入して部分積分すると

$$Z_{d0}^{(1)} = -m_0 \dot{V}(t) - \frac{V(t)}{2} \dot{m}_0, \quad (5)$$

$$Z_{d1}^{(1)} = \frac{2P}{\pi} \int_{-c}^0 \int_{-c}^0 f'(y-Y) f'(y'-Y) \log \left| \frac{y+Y'}{y-Y'} \right| dy dy', \quad (6)$$

$$\dot{m}_0 = \frac{d}{dt} m_0 = \frac{4P}{\pi} V(t) \int_{-c}^0 \int_{-c}^0 f'(y-Y) f''(y'-Y) \left\{ \frac{1}{y+Y'} + \frac{1}{y-Y'} \right\} dy dy', \quad (7)$$

を得る。



$$\begin{aligned}
 \vec{Z}_{d1} &= 2Pq \int_{-\infty}^0 f'(y-Y) dy \int_{-\infty}^t dt \int_{-\infty}^0 \sigma(y,T) G_T(0, y+Y'; t-T) dy' \\
 &= \frac{2Pq}{\pi} \int_{-\infty}^t dt \int_0^{\infty} F(k,t) M(k,T) \cos \sqrt{k} (t-T) dk \\
 &= -\frac{4Pq}{\pi} \int_{-\infty}^t V(t) dt \int_0^{\infty} F(k,t) F(k,T) \cos \sqrt{k} (t-T) dk, \quad \dots (8)
 \end{aligned}$$

さて一般に力は運動量の時間微分として得られるから
 (線型性の仮定を1通りで) 是のように得られる*

y方向の運動量は(前図参照)

$$M = -P \iint_D \phi_y dx dy = P \int_{S'+H'} \phi y_n ds, \quad \dots (9)$$

$$\begin{aligned}
 -\dot{Z} = \dot{M} &= -P \iint_D \phi_{yt} dx dy - P \int_{S'+H'} \phi_y \phi_n ds \\
 &= P \int_{S'+H'} (\phi_t y_n - \phi_y \phi_n) ds, \quad \dots (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{以上} \quad P &= P \left\{ \phi_t - \frac{1}{2} q^2 - q y \right\}, \\
 &= 0 \quad \text{on } H
 \end{aligned} \quad (11)$$

であるから (10) 式は $\int_{S'+H'} \phi_t y_n ds$ と.

$$M = \int_{S'+H'} P y_n ds + Pq \int_{S'+H'} y y_n ds + P \int_{S'+H'} \left(\frac{q^2}{2} y_n - \phi_y \phi_n \right) ds$$

$$\text{とあるが} \quad \int_{S'+H'} y y_n ds = 0, \quad \int_{S'+H'} \left(\frac{q^2}{2} y_n - \phi_y \phi_n \right) ds = 0$$

であるから H 上で $P=0$ を考慮すると結局

$$M = \int_S P y_n ds = -Z, \quad \dots (12)$$

* 凡例; 60周年記念双書 Vol. 2; Wehausen H. d. Physik

となり Z は静水圧を含む力となっている。
これを少し分けて考えるために (19) 式を

$$M = M_1 + M_2$$

$$M_1 = \rho \int_{S'} p y_{\perp} ds, \quad \left\{ \begin{array}{l} \dots (13) \end{array} \right.$$

$$M_2 = \rho \int_{F'} \phi y_{\perp} ds.$$

とおくと、

$$\dot{M}_2 = \rho \int_{F'} (\phi_t + i \phi_y) dx = \rho g \int_{F'} \eta dx + \rho \int_{F'} \left(\frac{g}{2} y_{\perp}^2 - \phi_y \phi \right) ds,$$

$$\therefore \phi_{\perp} = -i \eta y_{\perp} \text{ on } F$$

$$\text{又} \quad \int_{S'+F'} \eta dx = 0, \quad \phi_{\perp} \Big|_{S_+-S_-} = -\sigma$$

であるから

$$\dot{M}_2 = -\rho g \int_{S'} \eta dx - \rho \int_{S'} \sigma \phi_y ds, \quad \dots (14)$$

よって、力は

$$Z = Z_A + Z_L + Z_S, \quad \dots (15)$$

と書け

$$Z_A = -\rho \frac{d}{dt} \int_{S'} \phi y_{\perp} ds, \quad \dots (16)$$

$$Z_L = \rho \int_{S'} \sigma \phi_y ds, \quad \dots (17)$$

$$Z_S = \rho g \int_{S'} \eta dx, \quad \dots (18)$$

となり、 Z_A は附加質量に由来するもの、 Z_L は Lagally の
 Z_S は静水圧によるものとなる。

これを今の場合について計算すると、

$$\begin{aligned}
 -\int_S \phi y_r ds &= 2g \int_{-c}^0 \phi f' dy \\
 &= \frac{P}{\pi} \int f' dy \int_0^t l_y \frac{r_2}{r_1} dy' + \frac{2gP}{\pi} \int f' dy \int_0^t d\tau \int_0^\infty \sigma(y', \tau) d\theta' \int_0^\infty \frac{R(y', \tau)}{\sqrt{gk}} \frac{R(y', \tau)}{\sqrt{gk}} dk \\
 &= -m_0 V(t) - \frac{4gP}{\pi} \int_{-\infty}^t V(\tau) d\tau \int_0^\infty \bar{H}(k, t) \bar{H}(k, \tau) \frac{R(\sqrt{gk}(t-\tau))}{\sqrt{gk}} dk,
 \end{aligned}$$

2" 5.3 から

$$\begin{aligned}
 \Sigma_A &= -\frac{d}{dt}(m_0 V) - \frac{4gP}{\pi} \int_{-\infty}^t V(\tau) d\tau \int_0^\infty \bar{H}(k, t) \bar{H}(k, \tau) \frac{R(\sqrt{gk}(t-\tau))}{\sqrt{gk}} dk \\
 &\quad - \frac{4gP}{\pi} \int_{-\infty}^t V(\tau) d\tau \int_0^\infty \bar{H}(k, t) \bar{H}(k, \tau) \cos \sqrt{gk}(t-\tau) dk
 \end{aligned}$$

2.2" 2

$$\begin{aligned}
 \bar{H}(-k, t) &= \frac{1}{2t} \int_{-c}^0 f(y-Y) e^{ky} dy \\
 &= R V(t) \bar{H}(k, t) - V(t) f'(-Y(t)), \quad \dots (19)
 \end{aligned}$$

2.2" 3 から (8) を代入して

$$\begin{aligned}
 \Sigma_A &= -\frac{d}{dt}(m_0 V) + \Sigma_A^{(1)} + \\
 &\quad + \frac{4gP}{\pi} V(t) f'(-Y(t)) \int_{-\infty}^t V(\tau) d\tau \int_0^\infty \bar{H}(k, \tau) \frac{R(\sqrt{gk}(t-\tau))}{\sqrt{gk}} dk \\
 &\quad - \frac{4gP}{\pi} V(t) \int_{-\infty}^t V(\tau) d\tau \int_0^\infty \bar{H}(k, t) \bar{H}(k, \tau) \frac{R(\sqrt{gk}(t-\tau))}{\sqrt{gk}} dk, \quad \dots (20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - \text{3} \quad \Sigma_L &= \frac{2P V(t)}{\pi} \int_{-c}^0 \int_{-c}^0 f(y-Y) f(y'-Y) \left\{ \frac{1}{y-Y} - \frac{1}{y+Y'} \right\} dy dy' \\
 &\quad + \frac{4gP}{\pi} V(t) \int_{-\infty}^t V(\tau) d\tau \int_0^\infty \bar{H}(k, t) \bar{H}(k, \tau) \frac{R(\sqrt{gk}(t-\tau))}{\sqrt{gk}} dk, \quad \dots (21)
 \end{aligned}$$

5.7.2

$$Z_A + Z_L = Z_d^{(1)} + E \quad (22)$$

$$E = -\frac{4P}{\pi} V(t) \int_{-c}^0 \int_{-c}^0 f'(y-Y) f''(y-Y) \frac{dy dy'}{y-y'} \\ + \frac{4Pg}{\pi} V(t) f'(-Y(t)) \int_{-\infty}^t V(\tau) d\tau \int_0^{\infty} \frac{\sin \sqrt{gk}(t-\tau)}{\sqrt{gk}} F(k, \tau) dk \quad (23)$$

これが両方の式による差であるが、この中で第2項は $f' = 0$ とすれば1消え、又第1項もあまり大きい項ではない。

線型理論としての統一性を保つために力としては(2)式を採用するか正確な理論によるものとの差にあまり重要な項は含まれていないと考えられる。

$g \rightarrow 0$ (Wagnerの5章論)の極限では

$$\left. \begin{aligned} Z_A &= -\frac{d}{dt} (m_0 V) \\ Z_L &= \frac{m_0}{2} V + E_0 \\ E_0 &= -\frac{4PV}{\pi} = \int_{-c}^0 \int_{-c}^0 f' f'' \frac{dy dy'}{y-y'} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

とから E_0 を無視すると

$$Z_A + Z_L \doteq Z_d^{(1)} = -m_0 \dot{V}(t) - \frac{V}{2} \dot{m}_0 \quad (25)$$

となる。^{400倍の}1つになす仕方は

$$-\int_0^t Z_d^{(1)} V dt = \frac{m_0 V^2(t)}{2} \quad (26)$$

となってエネルギー保存則が成立つ。

なお圧力分布(表面)の場合 Wagner 理論では力は

$$Z = -\frac{d}{dt} (m_0 V) \quad (27)$$

と与えられる(25)式と異なるがこれは飛沫のエネルギーが系外に出て行く数である。

4. 仕事

物体のなす仕事を計算しよう。

$$W = - \int_0^t \int_D V dt = \int_0^t V(t) dt \cdot \int_S p y_\nu ds, \quad (1)$$

また $T_R = \frac{\rho}{2} \iint_D (\nabla \phi)^2 dx dy, \quad (2)$

とおく。

$$\frac{d}{dt} T_R = \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \iint_D (\nabla \phi)^2 dx dy = \rho \iint_D \nabla \phi \nabla \phi_t dx dy + \frac{\rho}{2} \int_{S+F} (\nabla \phi)^2 \phi ds$$

$$= \rho \int_{S+F} \left(-\phi_t + \frac{g^2}{2} \right) \phi_\nu ds.$$

$$= - \int_S p \phi_\nu ds - \rho g \int_{S+F} y \phi_\nu ds, \quad (3)$$

また $\phi_\nu = -\dot{y} y_\nu$

$$- \rho g \int_{S+F} y \dot{y} y_\nu ds = \frac{\rho g}{2} \frac{d}{dt} \int_{S+F} y^2 dx = \frac{d}{dt} V_p, \quad (4)$$

とおく。

$$\int_S p \phi_\nu ds = \frac{d}{dt} (T_R + V_p), \quad (5)$$

$$\therefore W = [T_R + V_p]_{t=0}^t, \quad (6)$$

線型近似では $T_R|_{t=0} = V_p|_{t=0} = 0$ とすると

$$T_R = \frac{m_0}{2} V^2 + \frac{4\rho g}{\pi} \int_0^t V(t) dt \int_0^t V(\tau) d\tau \int_0^\infty \overline{H}(\rho, t) \overline{H}(\rho, \tau) \cos \sqrt{g\rho}(t-\tau) d\rho$$

$$V_p = \frac{\rho g}{2} \int y^2 dx = \rho g \nabla(t) \overline{OB}(t), \quad (7)$$

$$(8) \quad \nabla(t) = - \int_S y dx, \quad \nabla \cdot \overline{OB} = \frac{1}{2} \int y^2 dx, \quad (8)$$

以上の議論では飛沫によるエネルギー損失は入っていない。
次に運動が無限の過去から解は周期的に繰り返している
場合は上式は無意味になる。

しかし平均値は存在して

$$\overline{W} = \frac{-1}{T} \int_0^T \sum_d V dt = \frac{\rho}{T} \int_0^T \phi_z V dt \int_0^T y_2 ds.$$

$$= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n V_{-n} = -2ip\omega \sum_n \mu V_{-n} \int_{-\infty}^0 \phi_{\mu} f'_{n-\mu} dy$$

$$= -2ip\omega \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \mu \int_{-\infty}^0 \phi_{\mu} \sigma_{-\mu} dy, \quad \dots (9)$$

となる。

$$\int_{-\infty}^0 \phi_{\mu} \sigma_{-\mu} dy = \int_{-\infty}^0 \phi_{-\mu} \sigma_{\mu} dy, \quad \dots (10)$$

$$\int_{-\infty}^0 \phi_{\mu} \sigma_{\mu} dy = M_{\mu} \left(\frac{n^2 \omega^2}{g} \right) M_{-\mu} \left(\frac{n^2 \omega^2}{g} \right), \quad \dots (11)$$

となるが

$$\overline{W} = 4p\omega \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu \left| M_{\mu} \left(\frac{n^2 \omega^2}{g} \right) \right|^2, \quad \dots (12)$$

となつてエネルギーはすべて散逸はにより失われている。

以上

附録 A フーリエ展開の導き

$$\sigma(y, t) = -2V(t) \frac{f}{y} \{y - Y(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_n(y) e^{in\omega t}, \quad (1)$$

$$f_y \equiv f'(y - Y(t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f'_n(y) e^{in\omega t}, \quad (2)$$

$$V(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n e^{in\omega t}, \quad V_0 = 0, \quad (3)$$

とすると $\sigma_n(y) = -2 \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} V_{\mu} f'_{n-\mu}(y) \quad (4)$

特に $V(t) = v_1 \cos \omega t$
とすると $V_1 = \frac{v_1}{2} = V_{-1}$ $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad (5)$

とすると $\sigma_n(y) = -v_1 \{f'_{n-1}(y) + f'_{n+1}(y)\} \quad (6)$

である。

従って f'_n を求めればよい事になるが、それには次の方法が判り易い。

とす

$$\left. \begin{aligned} M(k, t) &= \int_{-c(t)}^0 \sigma(y, t) e^{ky} dy = -2V(t) F(k, t), \\ F(k, t) &= \int_{-c(t)}^0 f'(y - Y(t)) e^{ky} dy, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

とすると 逆変換により

$$\left. \begin{aligned} f'(y - Y(t)) &= \frac{1}{2\pi i} \oint F(k, t) e^{-ky} dk, \\ \sigma(y, t) &= \frac{1}{2\pi i} \oint M(k, t) e^{-ky} dk, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

となるから

(7) に よつて F, M を求め、それを フーリエ変換し

$$\left. \begin{aligned} F(k, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(k) e^{i n \omega t}, \\ M(k, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n(k) e^{i n \omega t} \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

となつておくと (8) より

$$\left. \begin{aligned} f'_n(y) &= \frac{1}{2\pi i} \oint F_n(k) e^{-k y} dk, \\ g_n(y) &= \frac{1}{2\pi i} \oint M_n(k) e^{-k y} dk, \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

が得られる。

例として

$$f' = \alpha; \text{ const for } 0 > y > -C(t), \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} C(t) &= C_0 + C_1 \sin \omega t, \quad C_0 \geq C_1, \\ V(t) &= \frac{dY}{dt} = -\frac{dC}{dt} = -\omega C_1 \cos \omega t, \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

なる 状態 物体の場合を考えて見よう。

まず (7) に より

$$F(k, t) = \alpha \int_{-C}^0 e^{k y} dy = \frac{\alpha}{k} \{ 1 - e^{-k C(t)} \}, \quad (13)$$

すなわち

$$e^{-k C_1 \sin \omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n I_n(k C_1) e^{i n \omega t}, \quad (I_n = (-1)^n I_{-n}), \quad (14)$$

よ

$$\left. \begin{aligned} F_0(k) &= \frac{\alpha}{k} \{ 1 - e^{-k C_0} I_0(k C_1) \}, \\ F_n(k) &= -\frac{\alpha}{k} e^{-k C_0} i^n I_n(k C_1), \quad \text{for } |n| \geq 1 \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

27

$$A_n = \frac{i^n}{2\pi i} \oint \frac{e^{-k(y+c_0)}}{k} I_n(kc_1) dk, \quad (16)$$

48 考え 312

$$I_n(kc_1) \propto \frac{\cosh(kc_1)}{k^n c_1}$$

27 ありから 312

$$A_n = \begin{cases} 0, & \text{for } y > c_1 - c_0 \\ \delta_n, & \text{for } y < -c_0 = c_1 \end{cases} \quad (17)$$

27 あり

$$-c_0 + c_1 > y > -c_0 - c_1, \text{ の間 27 あり}$$

$$y = -c_0 + c_1 \sin \theta, \quad dy = c_1 \cos \theta d\theta,$$

27 あり

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} A_n &= \frac{-i^n}{2\pi i} \oint e^{-k(y+c_0)} I_n(kc_1) dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i u(y+c_0)} J_n(uc_1) du \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(u y + c_0) J_n(uc_1) du \\ &= -\frac{1}{\pi \cos \theta} \begin{cases} \cos n\theta, & \text{for } n: \text{even} \\ i \sin n\theta, & \text{for } n: \text{odd} \end{cases} \end{aligned}$$

27 あり

$$A_n = -\frac{1}{\pi} \begin{cases} \frac{\sin n\theta}{n}, & n: \text{even} \\ -i \frac{\cos n\theta}{n}, & n: \text{odd} \end{cases} \quad (18)$$

312 あり

$$f'_0(y) = \begin{cases} \alpha & \text{for } 0 > y > -c_0 + c_1, \\ \alpha \left(\frac{1}{2} + \frac{\theta}{\pi} \right) & \text{for } -c_0 + c_1 > y > -c_0 - c_1, \\ 0 & \text{for } y < -c_0 - c_1 \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} f'_{2n+1}(y) &= -\frac{i \alpha}{\pi} \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1} \\ f'_{2n}(y) &= \frac{\alpha}{\pi} \times \frac{\sin 2n\theta}{2n}, \quad \text{for } n \neq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

附録B 核関数について

$$G(0, y, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2 k^2}{4t}} \frac{\sin(\sqrt{gk}t)}{\sqrt{gk}} dk = \frac{2}{\pi\sqrt{g}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2 u^2}{4t}} \sin(\sqrt{g}t + u) du$$

$$= \frac{2g}{\pi\sqrt{g|y|}} e^{-\frac{gt^2}{4y}} \int_0^{\frac{t}{2\sqrt{g|y|}}} e^{-u^2} du = \frac{2}{\pi\sqrt{g|y|}} F_D\left(\frac{gt}{2\sqrt{g|y|}}\right), \quad (1)$$

$$F_D(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt, \quad (2)$$

これは Dawson's Integral * である。

$$G_t(0, y, t) = \frac{1}{\pi\sqrt{g|y|}} F_D'\left(\frac{gt}{2\sqrt{g|y|}}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{g|y|}} \left[1 - \frac{gt}{\sqrt{g|y|}} F_D\left(\frac{gt}{2\sqrt{g|y|}}\right) \right], \quad (3)$$

$$F_D'(x) = \frac{d}{dx} F_D(x) = 1 - 2x F_D(x), \quad (4)$$

である。

$$\operatorname{erf}(ix) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ix} e^{-t^2} dt = \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du,$$

$$F_D(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2x} e^{-x^2} \operatorname{erf}(ix), \quad (5)$$

$$F_D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^{2n+1}}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} x - \frac{2x^3}{1 \cdot 3} + \cdots, \quad (6)$$

より、

$$F_D(x) \doteq \frac{1}{2x} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{(2x^2)^n} \right],$$

$$\doteq \frac{1}{2x}, \quad (7)$$

$$F_D'(x) \longrightarrow -\frac{1}{2x^2} + \cdots \quad (8)$$