M-30

昭和48年9月30日

"浮遊構造物の規則波中動揺の計算について"

別所正利

内容

	頁
序	1
1. モデルと静水力学	2
2. 速度ポテンシャルと流体力の表現	4
3 運動方程式	10
4. ストリップ法による力の計算	20
5. ストリップ法の3次元修正	24
6. 3次元計算について	29
7. 波浪中動揺性能特性と形状	34
8. 繋留の効果	38
附録A. 3次元問題の近似解	A1〜13
〃 〃 B 種々の積分	B0〜15
〃 〃 C. 水面に近い水平板	C0〜17

1

昭和　　年　　月　　日

序にかえて　"開発研究について"

浮遊式海洋構造物の開発研究においては普通の研究と違って大きい特徴がある。

それは　1. 目的が画期的に新しいこと、従って
2. 合目的々で合理的な形状が確定しておらず、研究の過程で変動して行く事。

と言う点であろう。

と言うのは例えば船の抵抗、推進、機関、艤装などの研究を考えて見ればよくわかるように、目的は従来品の改良改善であって、形状、機能を全く一変すると言う事はなく大型化もしくは小型化すると言う場合が多い。

このように考えて見れば上記2点がそれらのものと著るしく異なる面がよく理解出来よう。

つまり問題は全く新しい用途をもった新製品の開発と言う事にあるので改良もしくは大(小)型化研究とは異なり、研究の当初には目的だけがあって形状は暫定的なものしか与えられていない。

そして研究の進度につれて各部の形状が定まって行くかあるいは trial and error によって望ましい形状の輪画が定まって行く事になる。

従って当然研究投資額は多くかつ後から考えれば無駄が多く又投機的要素が多分に含まれる事になる。

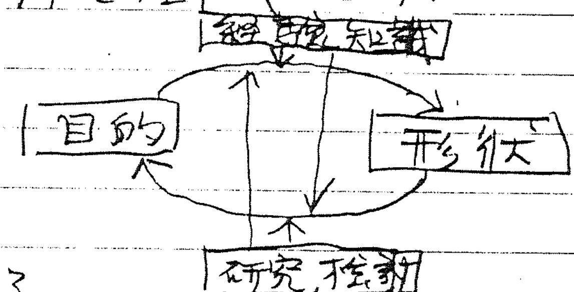
このような観点に立てば今の場合研究上の無駄を省く事が問題の焦点となる。

そしてその無駄は専ら形状の不確定さから来るのであるから研究の焦点はそこにあてられ

ねばならない。

さて形状を定めるのはまず目的であり、経験であり、かつ学問的知識であり、又研究の検討である。

この間の関係を図式化すれば次のようなループ



を描く事になる。

このような過程を早く収束させるには明らかにこの経験知識を既存のものに頼り、この部分に不明のこれから研究すべき要素を最小限に止める事である。

又下端の研究の部分は出来るだけ期間を縮少し、経費のかからない方法を採用する事である。つまりは理論的研究（現在では最も安価？）を充分活用する事である。

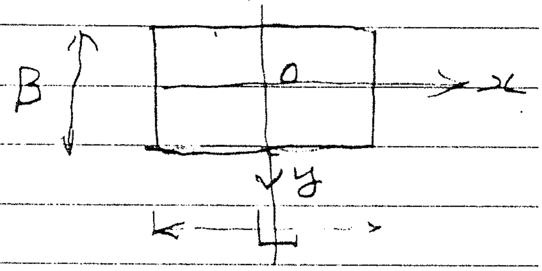
このようにして基本的形状の骨組が決定すれば後は普通の改良研究と同じ過程で研究は進展させられるであろう。

以上まとめて見ると今の場合合目的々な形状の決定に全力を注ぐべきであり、その為には出来るだけ既存の知識を活用し未知のものはさける事、と言う事になろうか。

又上の図式は明らかに設計における思考の図式でもあるから、これらの事を一言で言えば初期設計を重視すべきであるという事になる。

1. モデルと静水力学

モデルとして次のものを考える。

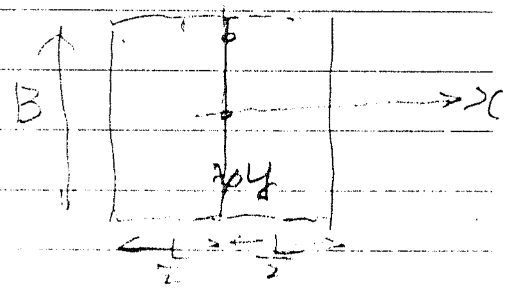


B型

浅喫水バージ型

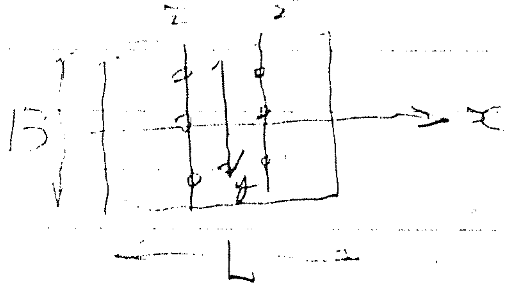
S型

B型に柱をつけて半没型とするがやはり没水部の深さ d は L, B, T に比し充分小さいとする。



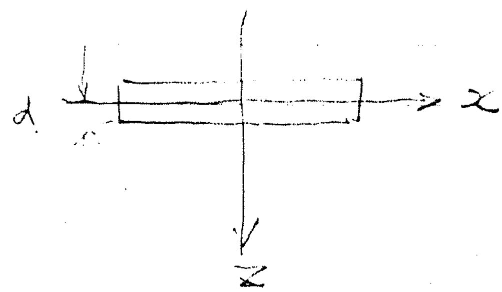
B-2型　B-3型, B-N

B型を y-z 面に平行に切り, 2 or 3, N等分したもの



S-2型, S-3型, S-N型

S型を 2, 3, N等分したもの。

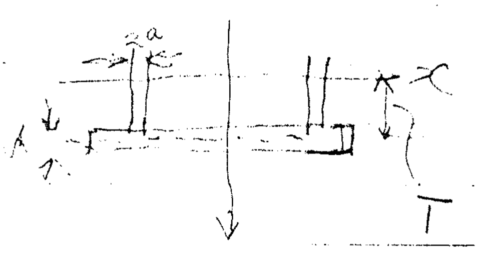


排水量 ∇

B-Type　$\nabla = \rho g L B d$.

S-Type　$\nabla = \rho g (L B d + \pi a^2 T' N)$

N: 柱の数　　$(T - \frac{1}{2})$



水線面積　A_w

B-Type　$A_w = LB$

S-Type　$A_w = \pi a^2 N$

昭和　　年　　月　　日

$\overline{BM}_x = I_x/V$, $\overline{BM}_y = I_y/V$

B 型　　$\overline{BM}_y = \frac{L^3}{12} / LBd = \frac{L^2}{12d}$

$$\overline{BM}_x = \frac{B^2}{12d}$$

B－2 型 の 夫々について

$$\overline{BM}_y = \frac{L^2}{4\times 12d} , \quad \overline{BM}_x = \frac{B^2}{12d}$$

B－3 型 の 夫々について

$$\overline{BM}_y = \frac{L^2}{4\times 12d} , \quad \overline{BM}_x = \frac{B^2}{4\times 12d}$$

S 型　　円柱1ケの2次モーメントは $\frac{\pi}{4}a^4$

よって その円柱が支えている軸から l の距離にあれば

$$i = \frac{\pi}{4}a^4 + \pi a^2 l^2 = \pi a^2 l^2\left(1 + \frac{a^2}{4l^2}\right)$$

である。

2. 速度ポテンシャルと流体力の表現

速度ポテンシャル, 圧力, 水面変位は夫々

$$\left.\begin{array}{l} Re\{\varphi(p)e^{i\omega t}\} \\ Re\{P(p)e^{i\omega t}\} \\ Re\{\zeta(x,y)e^{i\omega t}\} \end{array}\right\} \quad p=(x,y,z)$$

と表わされるものとすると. φに対する水面条件は

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial z}+K\right)\varphi(x,y,0)=0 \\ K=\omega^2/g, \end{array}\right\} \quad (1)$$

又

$$p(x,y,z)=\rho i\omega\varphi(x,y,z), \quad -\,-\,(2)$$

$$\zeta(x,y)=\frac{\omega}{ig}\varphi(x,y,0), \quad -\,-\,(3)$$

となる。

φは夫々独立な運動のそれの線型重ね合せで与えられる。

B, S型では6つの自由度があるからそれぞれ添字で区別する事にし　次のように定義する。

i)	x軸に平行な運動	(前後ゆれ)	添字 1
ii)	y 〃 〃	(左右 〃)	〃 2
iii)	z 〃 〃	(上下 〃)	〃 3
iv)	x軸まわりの回転運動	(横 〃)	〃 4
v)	y 〃	(縦 〃)	〃 5
vi)	z 〃 〃	(船首 〃)	〃 6

この内船が薄いと仮定するので i) と v), ii) と iv) と vi) との連成は小さいとして考えない。

特にB型では i), ii), vi) は考えない。

S型では脚柱部に働く力のみが i), ii), vi) の運動に関係するものと考える。

さらに2分割, 3分割してゆくとそれに応じて運動の自由度もふえるので添字7, 8…をそれぞれにつける事にする。

最後に入射波に添字0、散乱波に添字dをつける事にしよう。

又後の便利の為に単位変位速度のポテンシャルを導入して

$$\varphi_j(P) = i\omega X_j \phi_j(P), \qquad (4)$$

X_jは夫々の振幅で特に$X_0 = a/K$, a:波振幅

そうすると

$$\phi_0(P,\alpha) = e^{-Kz + iK(x\cos\alpha + y\sin\alpha)} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(\phi_0 + \phi_d) = 0, \quad \text{on } S, \qquad (6)$$

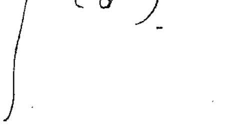
$$\frac{\partial}{\partial n}\varphi_j = -\frac{\partial}{\partial n}x_j \quad \text{on } S, \qquad (7)$$

$$x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv y, \quad x_3 = z$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial n}x_4 &= y\frac{\partial z}{\partial n} - z\frac{\partial y}{\partial n} \fallingdotseq y\frac{\partial z}{\partial n}\\
\frac{\partial}{\partial n}x_5 &= z\frac{\partial x}{\partial n} - x\frac{\partial z}{\partial n} \fallingdotseq -x\frac{\partial z}{\partial n}\\
\frac{\partial}{\partial n}x_6 &= x\frac{\partial y}{\partial n} - y\frac{\partial x}{\partial n} \fallingdotseq 0
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

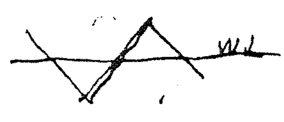
B-2, S-2型については

$$\frac{\partial}{\partial n}x_7 \fallingdotseq -\{|x| - \cancel{\tfrac{L}{4}}\}\frac{\partial z}{\partial n} \qquad (9)$$



B-3, S-3型については

$$\frac{\partial}{\partial n}x_7 = \left\{\begin{array}{ll} \frac{L}{4} - \frac{x}{2}, & \text{for } x > \frac{L}{6}\\ x, & \text{for } -\frac{L}{6} < x < \frac{L}{6},\\ -\frac{L}{4} - \frac{x}{2}, & \text{for } -\frac{L}{6} > x, \end{array}\right\} \quad (10)$$



$$\frac{\partial}{\partial n}x_8 = \left\{\begin{array}{ll} -\frac{3}{2}x + \frac{5}{12}L, & \text{for } x > \frac{L}{6},\\ \frac{L}{6}, & \text{for } -\frac{L}{6} < x < \frac{L}{6},\\ \frac{3}{2}x + \frac{5}{12}L, & \text{for } -\frac{L}{6} < x, \end{array}\right\} \quad (11)$$

なおこのϕ_jについては(2),(3)は

$$\left.\begin{aligned} p_j &= -\rho g K X_j \phi_j \\ \zeta_j &= K X_j \phi_j \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (12)$$

となる。

又B型の場合水面の圧力分布として表現するのが適当であるがその時は

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + K\right)\varphi(x,y,0) = \frac{-i\omega p'}{\rho g}(x,y,0) \quad , \cdots\cdots (13)$$

と書けるがこの右辺のp'は静水圧を含んでいて(2)(12)のpと異なる。そこで

$$p'_j(x,y,0) = \rho g X_j \Pi_j(x,y) \quad \cdots (14)$$

とおくと

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + K\right)\phi_j(x,y,0) = -\Pi_j(x,y), \quad \cdots (15)$$

とかける。

そて速度ポテンシャルは

$$\phi(p) = \iint_S \left\{\phi\frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial\phi}{\partial n}\right\} S(p,Q)\, dS(Q) \quad , \cdots (16)$$

$$4\pi S(p,Q) = \frac{1}{r(p,Q)} + \frac{1}{2\pi}\lim_{\mu\to+0}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{k+K}{k-K+\mu i} e^{-k(z+z')+ik(\varpi-\varpi')}\, dk\, d\theta \quad , \quad (17)$$

$$r(p,Q) = \overline{PQ}, \quad \varpi = x\cos\theta + y\sin\theta,$$
$$Q \equiv (x',y',z'), \quad \varpi' = x'\cos\theta + y'\sin\theta$$

$$\left(K + \frac{\partial}{\partial z'}\right) S(p,Q) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + K\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\right]$$

$$\to 0 \quad \text{for} \quad r_1 = \overline{PQ} = r_2 = \overline{P\bar{Q}} \quad , \quad (18)$$

昭和　年　月　日

応力分布では (15) と(18)により

$$\phi_j(P) = \iint_S \Pi_j(Q)\, S(P,Q)\, dS(Q), \quad z'=0, \quad \cdots (19)$$

doublet

$$\phi_j(P)\Big|_{S+} - \phi_j(P)\Big|_{S-} = \mu_j(P), \quad \cdots (20)$$

では

$$\phi_j(P) = \iint_{\bar{S}} \mu_j(Q)\frac{\partial}{\partial z} S(P,Q)\, dS(Q), \quad \cdots (21)$$

$\bar{S}$ は S のスケルトンを意味するものとする。

無限遠では ~~発~~ 発散円筒波が Dominant term で.

$$\phi_j(P) \longrightarrow \sqrt{\frac{K}{2\pi i \rho}}\, e^{-Kz - iK\rho} H_j(K,\varphi), \quad \cdots (22)$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$H_j(K,\varphi) = \iint_S \left(\phi_j \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n}\phi_j\right) e^{-Kz + iK\bar{\omega}(\varphi)} dS, \quad \cdots (23)$$

(19), (21) に対しては

$$\left.\begin{aligned} H_j(K,\varphi) &= \iint_S \Pi_j(Q)\, e^{iK\bar{\omega}(\varphi)} dS(Q) \\ H_j(K,\varphi) &= \iint_{\bar{S}} \mu_j \frac{\partial}{\partial n} e^{-Kz + iK\bar{\omega}(\varphi)} dS(Q) \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

i mode の運動による j mode の力あるいはモーメントは、

$$F_{ij} = -\iint_S p_i \frac{\partial x_j}{\partial n} dS$$

$$= \rho g K X_i \iint_S \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} dS = \rho g K X_i f_{ij} \text{ , } \cdots (25)$$

$$f_{ij} = -\iint_S \phi_i \frac{\partial}{\partial n}\phi_j dS = \iint_S \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} dS$$

$$= -\iint_S \phi_j \frac{\partial}{\partial n}\phi_i = f_{ji} \text{ , } \cdots (26)$$

次に波による力あるいはモーメントの j-mode 分は

$$E_j(\alpha) = -\iint_S (p_0+p_d) \frac{\partial x_j}{\partial n} dS = \rho g a \iint_S (\phi_0+\phi_d) \frac{\partial x_j}{\partial n} dS$$

$$= \rho g a\, e_j(\alpha) \text{ , } \cdots (27)$$

とおくと、

$$e_j(\alpha) = -\iint_S (\phi_0+\phi_d)\frac{\partial \phi_j}{\partial n} dS = \iint_S \left(\phi_j \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \phi_j}{\partial n}\right)\phi_0 dS$$

$$= H_j(K, \alpha) \text{ , } \cdots (28)$$

又 f_{ij} は圧力分布については

$$f_{ij} = \iint_S \left(\frac{\Pi_i}{K} + \phi_{iz}\right)\frac{\partial}{\partial z}\phi_j dS = \frac{1}{K}\iint_S \Pi_i \frac{\partial}{\partial z}\phi_j dS + \iint_S \phi_{iz}\phi_{jz} dS,$$

$$\iint_S \Pi_j \frac{\partial}{\partial z}\phi_i dS = \iint_S \Pi_i \frac{\partial}{\partial z}\phi_j dS \quad \cdots (29)$$

湧出

又 doublet に対し

$$f_{ij} = \iint_S \left(\phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} - x_j \frac{\partial}{\partial n}\phi_i\right) dS - \iint_S x_j \frac{\partial}{\partial n} x_i dS$$

$$= \iint_S \mu_i \frac{\partial x_j}{\partial n} dS - \iiint_D \nabla x_j \nabla x_i d\tau \text{ , } \quad (30)$$

昭和　　年　　月　　日

ここに x_j は D で正則で S 上で $\frac{\partial}{\partial n}x_j$ となるような調和関数である。

従って (8) にある通り

$$x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv y, \quad x_3 \equiv z$$

であるがそれ以外は簡単ではない。

しかし物体が非常に薄いとすると (8) から

$$x_4 \doteqdot (yz), \quad x_5 = \cancel{-xz}, \quad x_6 = 0, \quad \cdots \quad (31)$$

$j = 7, 8$ については よく判らないが上の考察からすれば

$$\left.\begin{aligned} x_j &= z\, f(x) \\ \frac{\partial}{\partial n}x_j &= \frac{\partial}{\partial z}x_j = f(x), \end{aligned}\right\} \; j = 7, 8 \cdots (32)$$

はとにかく近似値となろう。

3. 運動方程式

先ず一体型から始めよう。

~~surge~~ - sway は heave, pitch, roll と couple しないか又は小さいと考えられる model を採用してあるのでそれぞれ独立な運動と見なせるものとする。

surge, sway については

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{X}_1 &= -\iint_S p\frac{\partial x}{\partial n}ds = F_{1,1} + E_1, \quad X_1 \equiv x \\ M\ddot{X}_2 &= -\iint_S p\frac{\partial y}{\partial n}ds = F_{2,2} + E_2, \quad X_2 \equiv y \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

S型では $F_{1,1} = F_{2,2} = 0$ - - - . . . (2)

で波の力はフルード・クリロッフ力のみになり

$$E_j = \rho g a \iint_S \phi_0(\omega)\frac{\partial x_j}{\partial n}ds, \quad j=1,2, \quad (3)$$

となり又 $\partial x_j/\partial n = 0$ on S であるからこの積分は両端の部分のみとなる。

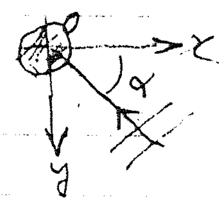
次にS型では没水部主体についてはそれが薄いものとするとS型の場合と同じく(2), (3)が成立つがこの場合は脚柱の力を考えねばならない。

しかし脚柱も主体に比して小さいし又 F_{ij} の部分についてはあまりわからないので無視しよう。

波の力については吃水無限の円柱では*（半径r）

$$E = \frac{4\rho g a}{K^2}\frac{1}{Y_1'(kr)+iJ_1'(kr)}, \quad (4)$$

である。



これは波の来る方向への力である。

そこで吃水をTとすると

$$\left.\begin{aligned} E_x \\ E_y \end{aligned}\right\} = \frac{4\rho g a\,(1-e^{-kT})}{k^2\,(Y_1'+iJ_1')}\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix}, \quad (5)$$

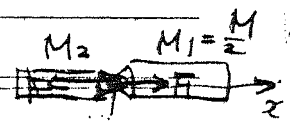
は一つの近似値を与えよう。

* Havelock

昭和　　年　　月　　日

これを各脚柱における位相をかけて加え合せたものが E_j となる。（Krは充分小さいので(4)は簡単な式になる）
以下分割型の時は surge - sway について考えない事にするが分割した時は例えば

$$\left.\begin{aligned}\frac{M}{2}\ddot{x}_1 &= F + E_{1,1}\\ \frac{M}{2}\ddot{x}_2 &= -F + E_{1,2}\end{aligned}\right\}\quad x_1 = x_2;\quad F = \frac{E_{11}-E_{12}}{2}\quad \cdots (6)$$



のように書けるのでピンに働らく力は何の surging force で表わされる。*

元に戻って

$$\left.\begin{aligned}M\ddot{X}_3 + \rho g A_w X_3 &= F_{33} + E_3,\\ I_y\ddot{X}_4 + W m_y X_4 &= F_{44} + E_4\\ I_x\ddot{X}_5 + W m_x X_5 &= F_{55} + E_5\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&X_3 : \text{heave}\\ &X_4 : \text{roll} \quad -(7)\\ &X_5 : \text{pitch}\end{aligned}$$

前節の記号を用いれば……

$$(-\omega^2 M + \rho g A_w - \rho g K f_{33}) X_3 = \rho g a H_3(K,\alpha)$$

つまり

$$\left.\begin{aligned}X_3/a &= H_3(K,\alpha)/D_3\\ D_3 &= A_w - K\{\nabla + f_{33}\},\end{aligned}\right\}\quad (8)$$

同様にして

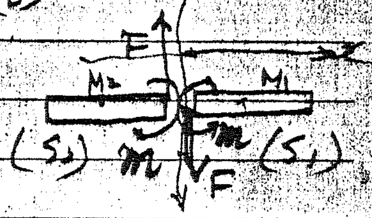
$$\left.\begin{aligned}X_4/Ka &= H_4(K,\alpha)/(KD_4)\\ D_4 &= \nabla m_y - K\{I_y/\rho g + f_{44}\}\\ X_5/Ka &= H_5(K,\alpha)/(KD_5)\\ D_5 &= \nabla m_x - K\{I_x/\rho g + f_{55}\}\end{aligned}\right\}\quad (9)$$

これらの力についてはストリップ法で求める事にするが、その事については次節で検討する。

* yawing についても同じ様な式が成立つ。

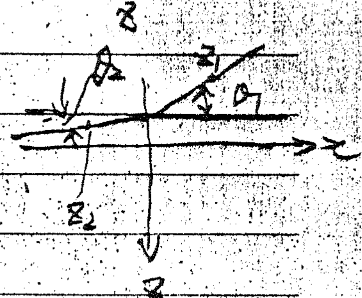
次は2分割してピン結合する場合について考えよう。
簡単の為に2等分する事とし、

$$
\left.\begin{aligned}
&M_1 = M_2 = \frac{M}{2} \\
&I_1 = I_2\ ,\quad I = I_1 + I_2 + \left(\frac{L}{4}\right)^2 M, \\
&A_{w1} = A_{w2} = A_w/2 \\
&m_1 = m_2,\quad m_x = m = m_1 + m_2 + \left(\frac{L}{4}\right)^2 A_w
\end{aligned}\right\} (10)
$$



としよう。

又動的圧力は上下面合せて $p(x)$ としよう。
重心が夫々各部の中心にあるものとし
夫々の上下変位、角変位を $z_1, z_2, \theta_1, \theta_2$
とすると運動方程式は



$$
\left.\begin{aligned}
&M_1 \ddot{z}_1 + \rho g A_{w1} z_1 = -\int_{S_1} p\,dx + F \\
&M_2 \ddot{z}_2 + \rho g A_{w2} z_2 = -\int_{S_2} p\,dx - F
\end{aligned}\right\} \cdots (11)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&I_1 \ddot{\theta}_1 + W_1 m_1 \theta_1 = -\int_{S_1} p(x)\left\{x - \frac{L}{4}\right\} dx + \frac{L}{4} F + \mathfrak{M}, \\
&I_2 \ddot{\theta}_2 + W_2 m_2 \theta_2 = \int_{S_2} p\left\{x + \frac{L}{4}\right\} dx + \frac{L}{4} F - \mathfrak{M},
\end{aligned}\right\} (12)
$$

ピン結合の条件は

$$
z_1 - z_2 = -\frac{L}{4}(\theta_1 + \theta_2). \quad \cdots\cdots (13)
$$

従って $z_1, z_2, \theta_1, \theta_2$ の内独立なものは3ケであり、(11), (12) からFを消去すれば3ケの方程式を得る。
又ピン結合のみであれば $\mathfrak{M} = 0$ である。
しかし今は結合部にバネとダムパーを装備するものとして考えて行く。

さて変数変換に

$$
\left.\begin{aligned}
&z_m = \frac{1}{2}(z_1+z_2),\ z_d = \frac{1}{2}(z_1-z_2),\\
&\theta_m = \frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2),\ \theta_d = \frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2),\\
&z_d = -\frac{L}{4}\theta_m
\end{aligned}\right\}\ (14)
$$

そうすると(13)は

先ず(11)の2式から

$$
\left.\begin{aligned}
&M\ddot{z}_m + \rho g A_w z_m = -\int_S p\,dx, \quad \cdots\\
&M\ddot{z}_d + \rho g A_w z_d = -\int_S p\{\mathrm{sgn}(x)\}dx + 2F,
\end{aligned}\right\}\ (15)
$$

(12)の2式から

$$
\left.\begin{aligned}
&2I_1\ddot{\theta}_m + 2W_1m_1\theta_m = \int_S p\left\{x - \frac{L}{4}\mathrm{sgn}(x)\right\}dx + \frac{L}{2}F,\\
&2I_1\ddot{\theta}_d + 2W_1m_1\theta_d = \int_S p\left\{|x| - \frac{L}{4}\right\}dx + 2\mathfrak{M},
\end{aligned}\right\}\ (16)
$$

を得る。

(13)によって $z_d = -\frac{L}{4}\theta_m$ であるから(15)の第2式と(16)の第1式からFを消去すると

$$
I\ddot{\theta}_m + Wm\,\theta_m = \int_S p\,x\,dx, \quad \cdots (17)
$$

又

$$
\mathfrak{M} = -k\theta_d - n\dot{\theta}_d, \quad \cdots (18)
$$

とおくと(16)の第2式は

$$
I_1\ddot{\theta}_d + n\dot{\theta}_d + (W_1m_1+k)\theta_d = \frac{1}{2}\int_S p\left\{|x| - \frac{L}{4}\right\}dx, \quad \cdots (19)
$$

となる。

従って解くべき方程式は(15)の第1式と(17)と(19)であって内力 **F** は(15)の第2式と(13)式で求められる。

さて圧力 p は各々独立な運動の線型重ね合せとして求められる。

昭和　年　月　日

そこで x 点の z 変位を z(x) とおいて見ると

$$z(x) = z_1 - \theta_1\left(x - \frac{L}{4}\right) \quad \text{for } x > 0$$
$$ z_2 - \theta_2\left(x + \frac{L}{4}\right) \quad \text{for } x < 0$$

となるが (14) を代入すると

$$z(x) = z_m - \theta_m x + \theta_d\left(\frac{L}{4} - |x|\right), \quad \cdots (20)$$

と書く事が出来るから

$$X_3 \equiv z_m, \quad X_5 \equiv \theta_m, \quad X_7 \equiv \theta_d, \quad \cdots (21)$$

とおいて前節の記号を使い、対称性を考えると

$$F_{35} = F_{53} = F_{57} = F_{75} = 0 \quad \cdots (22)$$

であって

$$+\int_S px\,dx = F_{55} + E_5 = \rho g K X_5 f_{55} + \rho g a H_5(K, \alpha)$$

$$-\int_S p\,dx = F_{33} + F_{73} + E_3 = \rho g K\{X_3 f_{33} + X_7 f_{73}\} + \rho g a H_3(K, \alpha)$$

$$\int_S \left(|x| - \frac{L}{4}\right) p\,dx = F_{37} + F_{77} + E_7 = \rho g K\{X_3 f_{37} + X_7 f_{77}\} + \rho g a H_7 \quad (23)$$

しかし普通のストリップ法を適用するときは $p(x) \propto z(x)$ であるので

$$f_{37} = f_{73} = 0, \quad \cdots (24)$$

となり、この coupling はゆるいものであろうが一般には θ_d と z_m は連成運動となる。

(23) を 夫々に代入してとくと 先ず (17) から

$$\theta_m / Ka \equiv X_5 / Ka = H_5(K, \alpha) / KD_5$$
$$D_5 = \nabla m - K\{I/\rho g + f_{55}\} \quad (25)$$

を得るがこれは (9) と全く同じであるから

2分割しても平均角変位は一体型と同じになる事がわかる。
次に(15)の第1式からストリップ法を使って(24)が成立つものとするとやはり(8)式と同じく、

$$\left.\begin{aligned} z_m/a &\fallingdotseq X_3/a = H_3(K,\alpha)/D_3 \\ D_3 &= A_w - K\{\nabla + f_{33}\} \end{aligned}\right\} \cdots (26)$$

となって平均上下動は同じである。
同じ仮定の下に(19)から

$$\left.\begin{aligned} \theta_d/Ka &\fallingdotseq X_7/Ka = H_7(K,\alpha)/KD_7 \\ D_7 &= \nabla m_1 - K\{2I_1/\rho g + f_{77}\} + \frac{2k_d + i\omega n}{\rho g} \end{aligned}\right\} (27)$$

を得る。
このようにして平均運動は一体型と変らないとするとそれ以外にどんな関係が出て来るであろうか。
今エネルギー収支を考えて見よう。
波が船に対してなす仕事は船のなす仕事に等しい。
船のなす仕事は波を作る仕事と結合部のダンパーのなす仕事である。
今は各運動が独立なのでこの関係が θ_m, z_m, θ_d について独立になりたつ。
そして θ_m, z_m は一体型の時と同じであるから結局波からの入力エネルギーは分割すると一体型の場合より多くなり、船は θ_d の運動だけ余計に動いてエネルギー収支が償なう事になる。
従って n, k_d をどのように選んでも θ_d を変える事が出来るだけであって平均運動は変らないから、例えば $\theta_m = \theta_d$ となるように(つまり $\theta_2 = 0$)えらぶとすると θ_1 は一体型の場合の2倍になる事になり、一般に運動振幅は一体型の場合より大きくなる事を免がれない。

昭和　　年　　月　　日

z_m については前述のように一般には θ_d と couple するので大分様子が異なって来ようがストリップ法が充分の精度であてはまる普通の船のような場合は上述の事が充分の精度でなり立つであろう。

最後に結合部に働らく力は(1)の第2式から

$$F = \frac{M}{2}\ddot{z}_d + \rho g A_W z_d + \int_S \rho\{\xi q_n x\}dx$$

$$z_d = -\frac{L}{4}\theta_m$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_S \rho\{\xi q_n x\}dx = F_{58} = \rho g K X_5 f_{58} \\ &f_{58} = \iint_S \phi_5 \frac{\partial x_8}{\partial n} ds, \quad \frac{\partial}{\partial n}x_8 = \frac{\partial z}{\partial n} x q_n(x) \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

とおくと

$$F = \rho g K X_5 f_{58} + \left(\frac{ML}{8}\omega^2 - \rho g \frac{A_W L}{4}\right)\theta_m \quad (\ )$$

$$= \rho g \theta_m \left[K\left\{f_{58} + \frac{\nabla L}{8}\nu\right\} - \frac{A_W L}{4}\right], \quad \cdots\cdots (29)$$

θ_m が一体型の場合と変らないので結局 F はピン結合としても同じになる。

同様にして一体型の場合の $\mathfrak{M}$ は(16)の第2式から $\zeta \equiv \theta_d = 0$ とおいて

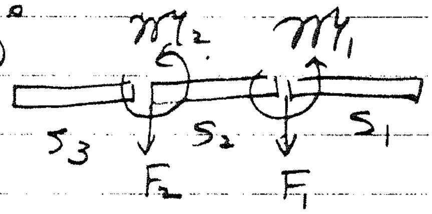
$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2}\int_S \rho\left\{|x| - \frac{L}{4}\right\}dx = \frac{\rho g a}{2} H_7 + \frac{\rho g K}{2} X_3 f_{37}$$

$$\doteqdot \frac{\rho g a}{2} H_7(K, \alpha), \quad \cdots\cdots (30)$$

のように簡単に与えられる。

直観的に考えても大きいものは運動が小さく小さいものは大きくなるのであるから一般的には分割型はあまり望ましくないけれど以下に3等分分割型の場合について基礎的な式を述べておく。

運動方程式は (pに静水圧を含ませて)



$$\left.\begin{aligned} M_1\ddot{z}_1 &= -\int_{S_1} p\,dx + F_1 \\ M_2\ddot{z}_2 &= -\int_{S_2} p\,dx + F_2 - F_1 \\ M_3\ddot{z}_3 &= -\int_{S_3} p\,dx - F_2 \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

$$\left.\begin{aligned} I_1\ddot{\theta}_1 &= \int_{S_1} p\left(x-\frac{L}{3}\right)dx + \frac{L}{6}F_1 + \mathfrak{M}_1 \\ I_2\ddot{\theta}_2 &= \int_{S_2} p\,x\,dx + \frac{L}{6}F_1 + \frac{L}{6}F_2 - \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 \\ I_3\ddot{\theta}_3 &= \int_{S_3} p\left(x+\frac{L}{3}\right)dx + \frac{L}{6}F_2 - \mathfrak{M}_2 \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

$$\left.\begin{aligned} & M_1 = M_2 = M_3 = M/3, \quad I_1 = I_2 = I_3 \\ & I = 3I_1 + \frac{2}{27}ML^2 \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

今

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 &= 3\theta_m \\ \theta_1 - 2\theta_2 + \theta_3 &= 3X_7 \\ \theta_1 - \theta_3 &= 3X_8 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_m + \frac{1}{2}X_7 + \frac{3}{2}X_8 \\ \theta_2 &= \theta_m - X_7 \\ \theta_3 &= \theta_m + \frac{1}{2}X_7 - \frac{3}{2}X_8 \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

$$\left.\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= 3z_m \\ z_1 - 2z_2 + z_3 &= 3X_9 \\ z_1 - z_3 &= 3X_{10} \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

とおくと連続条件は、

$$\left.\begin{aligned} z_1 - z_2 &= -\frac{L}{6}(\theta_1+\theta_2) = -\frac{L}{6}\left(2\theta_m - \frac{X_7}{2} + \frac{3}{2}X_8\right), \\ z_2 - z_3 &= -\frac{L}{6}(\theta_2+\theta_3) = -\frac{L}{6}\left(2\theta_m - \frac{X_7}{2} - \frac{3}{2}X_8\right), \end{aligned}\right\} \quad (36).$$

これから

$$\left.\begin{aligned} z_1 - z_3 &= -\frac{L}{6}(4\theta_m - X_7) \\ z_1 &= z_m - \frac{L}{3}\theta_m + \frac{L}{12}X_7 - \frac{L}{12}X_8 \\ z_2 &= z_m + \frac{L}{6}X_8 \\ z_3 &= z_m + \frac{L}{3}\theta_m - \frac{L}{12}(X_7+X_8), \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

をうる。

従って x点の下向きの変位を $z(x)$ とすると

$$z(x) = \left\{\begin{aligned} & z_1 - \theta_1\left(x - \frac{L}{3}\right) && \text{for} \quad x > \frac{L}{6} \\ & z_2 - \theta_2 x && -\frac{L}{6} < x < \frac{L}{6} \\ & z_3 - \theta_3\left(x + \frac{L}{3}\right) && x < -\frac{L}{6} \end{aligned}\right.$$

$$= z_m - \theta_m x + X_7\left\{-\frac{x}{2}+\frac{L}{4},\ x,\ -\frac{x}{2}-\frac{L}{4}\right\}$$
$$+ X_8\left\{-\frac{3}{2}x + \frac{5}{12}L,\ \frac{L}{6},\ \frac{3}{2}x + \frac{5}{12}L\right\}, \quad (38)$$

{ }の中は S_1, S_2, S_3 上で夫々とる値を示す。

さて(31)を全部加え合せると、

$$M\ddot{z}_m = -\int_S p\,dx \quad \ldots\ldots (39)$$

(32)を全部加え合せると

$$3I_1\ddot{\theta}_m = \int_S p\left\{-\frac{L}{3},\ x,\ \frac{L}{3}\right\}dx + \frac{L}{3}F_1 + \frac{L}{3}F_2$$

(31)の第一式から第3式を引くと

$$M_1\ddot{z}_1 - M_3\ddot{z}_3 = -\frac{L}{6}M_i(4\theta_m - X_7) = \int_S p\{-1, 0, 1\}dx + F_1 + F_2$$

この2式から F_1+F_2 を消去すると

$$I\ddot{\theta}_m - \frac{ML}{54}\ddot{x}_7 = \int_S p\,x\,dx, \quad \cdots\cdots (40)$$

(32)の第1式から第3式を引いて

$$I_1(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_3) = \int_S p\left\{x-\frac{L}{3},\ 0,\ -x-\frac{L}{3}\right\}dx + \frac{L}{6}(F_1-F_2) + \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2,$$

又

$$M_1(\ddot{z}_1 - 2\ddot{z}_2 + \ddot{z}_3) = \frac{M_1L}{6}(\ddot{\theta}_3 - \ddot{\theta}_1) = \int_S p\{-1,\ 2,\ -1\}dx + 3(F_1-F_2),$$

であるから F_1-F_2 を消去すると．

$$3\left(I_1 + \frac{ML^2}{18^2}\right)\ddot{X}_8 = \int_S p\left\{x-\frac{5}{18}L,\ -\frac{L}{9},\ -x-\frac{5}{18}L\right\}dx$$
$$+\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2, \quad \cdots\cdots (41)$$

(32)の第1式と第3式を足して第2式を引くと．

$$I_1(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3) = I_1(\ddot{\theta}_m + 2\ddot{X}_7) = \int_S p\left\{x-\frac{L}{3},\ -x,\ x+\frac{L}{3}\right\}dx$$
$$+2\mathfrak{M}_1 - 2\mathfrak{M}_2, \quad \cdots (42)$$

こうして(39)～(42)が解くべき方程式である。

今の場合は(40)と(42)がつまり，θ_mとX_7がcoupleする。

又一般にはz_mとX_8がcoupleするがストリップ法を採用すると独立である。

又

$$\mathfrak{M}_1 \propto (\theta_1 - \theta_2), \quad \mathfrak{M}_2 \propto (\theta_2 - \theta_3).$$

とし，内にバネとダンパーを使う事にするとこれで調節出来るのは一つの条件だけになる(例えば $\theta_m = X_7,\ \theta_2 = 0$)。

昭和　年　月　日

4. ストリップ法による力の計算

surge, sway, yaw については前節に見たように波による

フルード・クリロッフ力のみ考えればよい。

従って考えるべきものは §2 の記号で

一体型の場合

$$\left.\begin{array}{l} f_{33},\ f_{44},\ f_{55} \\ H_3,\ H_4,\ H_5 \end{array}\right\}$$

であり

2連結型の場合

$$\left.\begin{array}{l} f_{33},\ f_{44},\ f_{55},\ f_{77};\ f_{37};\ f_{58} \\ H_3,\ H_4,\ H_5,\ H_7 \end{array}\right\}$$

である。

§2 によれば

$$f_{ij} = \iint_S \phi_i \frac{\partial}{\partial n} x_j \, ds \quad , \quad (1)$$

$$H_j(K,\alpha) = \iint_S \left(\phi_j \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n}\phi_j\right) e^{-Kz+iK(x\cos\alpha+y\sin\alpha)} ds . \quad (2)$$

であり

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial n}x_3 = \frac{\partial}{\partial n}z \qquad \frac{\partial}{\partial n}x_4 \doteqdot y\frac{\partial z}{\partial n} \\ \frac{\partial}{\partial n}x_5 = z\frac{\partial x}{\partial n} - x\frac{\partial z}{\partial n} \doteqdot -x\frac{\partial z}{\partial n} \\ \frac{\partial}{\partial n}x_7 \doteqdot -\left\{|x| - \frac{L}{4}\right\}\frac{\partial z}{\partial n} \ , \ \frac{\partial}{\partial n}x_8 = \mathrm{sgn}(x)\frac{\partial z}{\partial n} \end{array}\right\}$$

である。

ストリップ法では物体が細長いとして ϕ_i の近似に2次元問題のポテンシャルを代入してこれらの量を求める。

今 x = 面内の2次元上下動のポテンシャルを ϕ_3^T とし

$$f_{33}^T(K) = \int_C \phi_3^T \frac{\partial z}{\partial n} ds \quad , \quad (3)$$

又

$$f_{44}^T(K) = \int_C \phi_4^T \left(y\frac{\partial z}{\partial n} - z\frac{\partial y}{\partial n}\right) ds , \quad (4)$$

ϕ_4^T は roll に対するポテンシャルとする。(wave number K)

昭和　　年　　月　　日

$$\left.\begin{aligned} \phi_3 &\doteqdot \phi_3^T \ , \quad \phi_4 \doteqdot \phi_4^T \\ \phi_5 &\doteqdot -x\phi_3^T \\ \phi_7 &\doteqdot -\left(|x|-\frac{L}{4}\right)\phi_3^T \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (5)$$

となるから

$$f_{33} \doteqdot f_3^T(K) \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx = L f_{33}^T(K) \qquad , \cdots (6)$$

$$f_{44} \doteqdot L f_{44}^T(K) \qquad , \cdots\cdots (7)$$

$$f_{55} = f_{33}^T(K) \times \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx = \frac{L^3}{12} f_{33}^T(K) \qquad (8)$$

$$f_{77} = f_{33}^T(K) \times \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(|x|-\frac{L}{4}\right)^2 dx = \frac{L^3}{48} f_{33}^T(K) \ , \quad (9)$$

$$f_{37} = f_{73} \doteqdot -\iint \left(|x|-\frac{L}{4}\right)\phi_3^T \cdot \frac{\partial z}{\partial n} ds = -f_{33}^T(K) \times \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(|x|-\frac{L}{4}\right) dx$$

$$\doteqdot 0 \ , \quad \cdots\cdots (10)$$

$$f_{58} = f_{85} \doteqdot -\iint \phi_3^T x \cdot \mathrm{sgn}(x) \frac{\partial z}{\partial n} ds = -\frac{L^2}{4} f_{33}^T(K) \ , \quad (11)$$

2 次に

$$H_j \doteqdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{iKx\cos\alpha} dx \int_C \left(\phi_j \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \phi_j}{\partial n}\right) e^{-Kz+iKy\sin\alpha} ds$$

吃水 T_m にて $, +K\int z \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds$

O.S.M では

$$\doteqdot \int dy \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{-KT_m + iKx\cos\alpha + iKy\sin\alpha} dx \times \left[-\int \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds - K\int \phi_j \frac{\partial z}{\partial n} ds\right],$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{K}{2}B\sin\alpha\right)}{K\sin\alpha} e^{-KT_m} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{iKx\cos\alpha} dx \left[B - K f_{33}^T(K)\right],$$

B; 幅

$$H_3(K,\alpha) = 4e^{-KT_m} \frac{\sin\left(\frac{K}{2}B\sin\alpha\right)}{K\sin\alpha} \times \frac{\sin\left(\frac{KL}{2}\cos\alpha\right)}{K\cos\alpha} \left[B - K f_{33}^T(K)\right],$$

(12)

没水体では B=0 ///

$$H_4(K,\alpha) \doteqdot 2\frac{\sin\left(\frac{K}{2}L\cos\alpha\right)}{K\cos\alpha}\cdot e^{-KT_m} H_4^T(K,\alpha), \quad --- (13)^{*}$$

$$H_4^T(K,\alpha) = \int_4 \left(\phi_4^T \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n}\phi_4\right) e^{-Kz + iKy\sin\alpha}\, ds, \quad --- (14)$$

$$H_5(K,\alpha)/H_3(K,\alpha) \doteqdot \frac{1}{iK\cos\alpha}\left[\frac{\sin\left(\frac{K}{2}L\cos\alpha\right) - \frac{K}{2}L\cos\alpha\cos\left(\frac{K}{2}L\cos\alpha\right)}{\sin\left(\frac{K}{2}L\cos\alpha\right)}\right]. \quad (15)$$

$$H_7(K,\alpha)/H_3(K,\alpha) \doteqdot -\frac{\frac{L}{4}\sin\left(\frac{KL}{2}\cos\alpha\right) + \frac{1}{K\cos\alpha}\left(1-\cos\frac{K}{2}L\cos\alpha\right)}{\sin\left(\frac{K}{2}L\cos\alpha\right)}, \quad (16)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{iux}\,dx = 2\frac{\sin\left(\frac{L}{2}u\right)}{u} \\
&-\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x\, e^{iux}\,dx = \frac{2}{iu^2}\left\{\sin\left(\frac{L}{2}u\right) - \frac{uL}{2}\cos\left(\frac{L}{2}u\right)\right\}, \\
&-\int\left(|x| - \frac{L}{4}\right) e^{iux}\,dx = -\frac{L}{2u}\sin\left(\frac{L}{2}u\right) + \frac{2}{u^2}\left(1-\cos\frac{L}{2}u\right),
\end{aligned}\right\}$$

以上は普通行われてる $y-z$ 面で横に切る方法であるが
これに対し $x-z$ 面つまり縦に切る方法が考えられる。
その時の式は(7),(13)等と同じ形になる。
そこで普通の方法を横ストリップ法，縦切面によるものを縦ストリップ法と名づけておこう。

* O.S.M. の式とは大分違っている。

f_{ij}, H_j の間にはエネルギー関係があり、上の式はそれを満たしていない。

それは、3次元では

$$\Im\{f_{ij}\} = -\frac{K}{4\pi}\int_0^{2\pi} H_i(K,\theta)\overline{H_j(K,\theta)}\,d\theta \qquad (17)$$

2次元では

$$\left.\begin{aligned} \Im\{f_{ij}^T(K)\} &= -\frac{1}{2}\{H_i^T(K)\overline{H_j^T(K)} + H_i^T(-K)\overline{H_j^T(-K)}\}, \\ H_j^T(K) &= \int_C \{\phi_j \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n}\phi_j\} e^{-|K|z + iKy}\,ds, \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

つまり2次元問題では(18)が成立っているが、ストリップ法ではその儘の解から上の近似値をもとめたので(17)は成立っていないわけである。

そして(18)の成立つ他で(17)が成立つのは長さが無限に続いている場合で(17)の積分が $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ の値のみによる場合である。

昭和　　年　　月　　日

5. ストリップ法の3次元修正

ストリップ法は2次元問題の解を使って3次元問題の解を近似するものであるが、この時直接力の計算に使うので、エネルギー関係等に具合が悪い。

そこで2次元問題の解を近似値として3次元問題の境界値問題に適するように修正して使えば具合がよいだろう。

このような方法には境界値問題を変分問題に変換しておくと具合がよい。

即ち変分法は

$$J = \iint_S \mu\left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - 2\frac{df}{dn}\right) dS \quad , \quad \cdots \quad (1)$$

の ϕ に関する極値 $[J]$ は

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{df}{dn} : \text{given}, \quad \cdots \quad (2)$$

の時に得られ

$$[J] = -\iint_S \mu \frac{\partial \phi}{\partial n} dS , \quad \cdots \quad (3)$$

となる。

今2次元問題の potential を ϕ^T として

$$\frac{\partial}{\partial n}\phi \doteqdot w(x,y)\frac{\partial}{\partial n}\phi^T \quad , \quad \cdots \quad (4)$$

となっているとしよう。

§4 (5) に見るように

横ストリップでは

$$\left.\begin{array}{l} w(x,y) = \begin{cases} 1 & \cdots \text{heave, roll} \\ -x & \cdots \text{pitch} \end{cases} \\ \dfrac{\partial}{\partial n}\phi^T = -\dfrac{\partial z}{\partial n} \end{array}\right\} \quad (5)$$

縦ストリップでは

$$\left.\begin{array}{l} w(x,y) = 1 \quad \cdots \text{heave, pitch, roll} \\ \dfrac{\partial}{\partial n}\phi^T = \begin{cases} -\dfrac{\partial z}{\partial n} & ; \text{heave} \\ z\dfrac{\partial x}{\partial n} - x\dfrac{\partial z}{\partial n} & ; \text{pitch} \\ -z\dfrac{\partial y}{\partial n} + y\dfrac{\partial z}{\partial n} & ; \text{roll} \end{cases} \end{array}\right\} \quad (6)$$

昭和　　年　　月　　日

となる。

μのS上での近似値を

$$C\mu(P)\Big|_S = Cw(x)\,\mu^T(P)\Big|_S, \quad \cdots (7)$$

としよう。（$w(x,y)$は上式に見るように今はy方向には一定な$w(x)$とおく）

Cは求める修正値で一般的には(x,y)の関数としてよいが、ここでは簡単の為に定数としておく。

S上で(7)となる二重層ポテンシャルは　p.7 (21)式により

$$\phi(P) = \iint_S \mu(Q)\,\frac{\partial}{\partial n_Q} S(P,Q)\,ds(Q), \quad \cdots (8)$$

そして

$$A = -\iint_S \mu \frac{df}{dn}\,dS = -\iint_S w^2(x)\,\mu^T \frac{\partial}{\partial n}\phi^T dS$$

$$= -\int w^2(x)\,dx \int_{C(y)} \mu^T \frac{\partial}{\partial n}\phi^T ds \qquad \text{for Tr. Strip}$$

$$= -\int dy \int_{C(x)} \mu^T \frac{\partial}{\partial n}\phi^T ds \qquad \text{for Lay. Strip}$$

故、今

$$-\int_C \mu^T \frac{\partial}{\partial n}\phi^T ds = f^T(x) \text{ or } f^T(y), \quad \cdots (9)$$

とおくと

$$\left.\begin{aligned} A &= \int w^2(x)\,f^T(x)\,dx, && \text{for T.S.} \\ &= \int f^T(y)\,dy = B f^T(y) && \text{for L.S.} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

これはストリップ法による近似値そのものである。

ここに

$$B = -\iint_S \mu \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = -\iint_S w(x) \mu^T(P) \frac{\partial \phi}{\partial n_P} dS(P)$$

$$= -\iint_S \iint_S w(x) w(x') \mu^T(P) \mu^T(Q) \frac{\partial^2}{\partial n_P \partial n_Q} S(P, Q)\, dS(P) dS(Q), \quad \cdots (11)$$

ここで

$$4\pi S(P,Q) = \frac{1}{r(P,Q)} - \frac{1}{r(P,\bar{Q})} + \frac{K}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-k(z+z') + ik(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}')}}{k - K + \mu i} dk\, d\theta,$$

であるから　今

$$B_0 = -\frac{1}{4\pi} \iiiint w(x) w(x') \mu^T(P) \mu^T(Q) \frac{\partial^2}{\partial n_P \partial n_Q} \left\{ \frac{1}{r(P,Q)} - \frac{1}{r(P,\bar{Q})} \right\} ds\, ds,$$

$$\cdots (12)$$

$$\int_{C(x)} \mu^T(P) \frac{\partial}{\partial n} e^{-kz + iky \sin\theta} ds = H^T(x; k, \sin\theta), \quad \cdots (13)$$

$$\int_{C(y)} \mu^T(P) \frac{\partial}{\partial n} e^{-kz + ikx \cos\theta} ds = H^T(y; k, \cos\theta), \quad \cdots (14)$$

とおくと

$$-\iint_S \iint_S w\, w' \mu^T \mu^{T\prime} \frac{\partial^2}{\partial n \partial n} e^{-k(z+z') + ik(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}')} ds\, ds$$

$$= -\int dx \int dx'\, H^T(x; k, \sin\theta) H^T(x'; k; -\sin\theta) w(x) w(x'),$$

for T. S.

$$= -\int dy \int dy'\, H^T(y; k, \cos\theta) H^T(y'; k; -\cos\theta),$$

for L. S.

$$B = B_0 + \frac{K}{(2\pi)^2}\int dy\int dy' \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty} \frac{H^T(y;k,\cos\theta)\,H^T(y';k,-\cos\theta)\,e^{ik(y-y')\sin\theta}}{k-K+\mu i}\,dk\,d\theta, \quad (15)$$

for L.S.

$$B = B_0 + \frac{K}{(2\pi)^2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} w(x)\,w(x')\,e^{ik(x-x')\cos\theta}\,dx\,dx' \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty} \frac{H^T(x;k,\sin\theta)\,H^T(x';k,-\sin\theta)}{k-K+\mu i}\,dk\,d\theta$$

for T.S. (16)

A, B は H^T がわかっていればもとまるからこれらをもとめて (1) に代入すれば

$$J = +2CA - C^2 B, \quad \cdots\cdots (17)$$

となるからこれを C で微分して $\partial J/\partial C = 0$ とおくと

$$C = A/B, \quad \cdots\cdots (18)$$

$$[J] = \frac{A^2}{B}, \quad \cdots\cdots (19)$$

を得る。

所が (10) 式から判るように A はストリップ法による近似値そのものであるから C は 3次元修正係数と見なすことが出来る。

この時コッチン関数は

$$H(K,\theta) = \iint_S \mu(p)\frac{\partial}{\partial n} e^{-Kz + iK(x\cos\theta + y\sin\theta)}\,dS = C\,H^{ST}(K,\theta), \quad (20)$$

$$H^{ST} = \int w(x)\,dx\,e^{iKx\cos\theta} H^T(x;K,\sin\theta), \quad \text{for T.S.} \quad (21)$$

$$H^{ST} = \int dy\,e^{iKy\sin\theta} H^T(y;K,\cos\theta), \quad \text{for L.S.} \quad (22)$$

となる。H^{ST} はストリップ法でもとまる値である。

なお H そのものを変分的に求める方法もある。

これらの計算はしかし大変複雑であって又その基礎において2次元計算の結果を利用する。

しかもその計算過程は3次元計算であって、2節におけるものと全く相似である。

しかもストリップ法の精度は $K \to 0$ で悪くなるというのであるから少くとも $K \to 0$ では3次元計算を直接実行するのが簡単である。

一方 K の大きい所では元来運動が小さいのでこれらの係数の精度は運動計算の結果にはあまり関係ないものである。

6. 3次元計算について. $K \to 0$

一般にストリップ法は K の大きい所ではより精度があるが K の小さい所では具合が悪いようである。

一方その3次元修正は前節に見たようにかなり面倒な計算になる。

しかし K の小さい所では近似計算特に前節にのべた変分法はかなりよい近似値を与えると考えられる。

そこで少しそれについて考えて見よう。

ここではB型を想定し、圧力分布で考えて見よう。

変分原理は、

$$I = \iint_S \Pi (2w + \phi_z) dS, \quad --- (1)$$

の極値は $\phi_z = -w(x,y), \quad --- (2)$

で

$$[I] = \iint_S \Pi w \, dS, \quad --- (3)$$

となる事である。

この時のポテンシャルは

$$\phi(P) = \iint_S \Pi(Q) S(P,Q) dS(Q), \quad -- (4)$$

$$4\pi S(P,Q) = \frac{1}{r(P,Q)} - \frac{1}{r(P,\bar{Q})} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{kz + ik(\varpi - \varpi')} k \, dk}{k - K + \mu i} d\theta,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + K \right) \phi(P) \Big|_{z=0} = -\Pi(x,y), \quad \cdots (5)$$

である。

$K \to 0$ では(5)から判るように、

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi \Big|_{z=0} \fallingdotseq -\Pi(x,y), \quad --- (6)$$

であるから $\Pi(x,y) \fallingdotseq w(x,y), \quad -- (7)$

昭和　　年　　月　　日

よって．
$$\Pi(x,y) = \alpha w(x,y), \quad \cdots\cdots (8)$$
とおいて変分原理によって α を決めよう。

今
$$\left.\begin{aligned} \phi_0(P) &= \iint_S w\, S\, ds, \\ \iint_S w^2 ds &= A \\ \iint w \phi_0\, ds &= B \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (9).$$
とおくと
$$I = 2\alpha A - \{\alpha^2 A + K\alpha^2 B\}, \quad \cdots (10).$$
よって、
$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{A}{A+KB}, \\ [I] &= \frac{A^2}{A+KB} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (11)$$
によって近似値が与えられる。

このとき p.7 (24) によって
$$H(K,\varphi) = \alpha \iint w\, e^{iK\varpi(\varphi)}\, dS, \quad \cdots (12)$$
で[illegible]。

[illegible] B を計算すればよい。

[illegible]を含むので[illegible]異なり[illegible]のようになる。

$$[illegible] = [illegible] \iint [illegible] - w)\, dxdy$$

$$B = \frac{[illegible]}{A}$$

$A -$ [illegible]

昭和　年　月　日

没水体では前節と同様になるが今は物体が薄いので没水平板として近似出来よう。
そうすると変分原理は

$$J = \iint_S \mu\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + 2w\right) dx\,dy, \quad \cdots\cdots (14)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}\Big|_S = -w(x,y), \quad \cdots\cdots (15)$$

$$[J] = \iint_S \mu w\, dx\,dy, \quad \cdots\cdots (16)$$

p.8 (30)により

$$f_{jj} = \iint_S \mu_j w_j\, dx\,dy - \iiint_D (\nabla\chi_j)^2 d\tau, \quad \cdots (17)$$

となり例えば $\chi_j \equiv z$ では右辺才2項は排水容積となるから [J] は排水量と附加質量の分を含む事になる。
従って平板で近似する時 [J] から求めたものは（附加質量＋排水質量）＝見掛質量の近似値となっている事に注意すべきである。
同様の理由でコッチン関数はフルードクリロッフ力を含んでいるので後からこれを考慮に加える必要はない事になる。
さて p.7 (21) より

$$\phi(P) = \iint_S \mu(Q) \frac{\partial}{\partial z} S(P,Q)\, dS(Q), \quad \cdots (18)$$

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\left(KS + \frac{\partial}{\partial z}S\right) &= K\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + \left(\frac{z-z'}{r_1^3} - \frac{z+z'}{r_2^3}\right), \\ 4\pi\left(KS + \frac{\partial}{\partial z}S\right) &= K\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) - \left(\frac{z-z'}{r_1^3} + \frac{z+z'}{r_2^3}\right), \end{aligned}\right\} (19)$$

$$4\pi\frac{\partial^2}{\partial z\partial z'}S \;\; \cancel{4\pi} K^2 S + K\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z\partial z'}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

$$-K^2\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) - K\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

$$= K^2\left\{\cancel{4\pi}S - \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right\} - 2K\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r_2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z\partial z'}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

$$= 4\pi K^2\tilde{S}(P,Q) + 2K\frac{(z+z')}{r_2^3} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right), \quad (20)$$

$$4\pi\tilde{S} = 4\pi S - \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{k J_0(kR)\, e^{-k(z+z')}\,dk}{k-K+\mu i}, \quad (21)$$

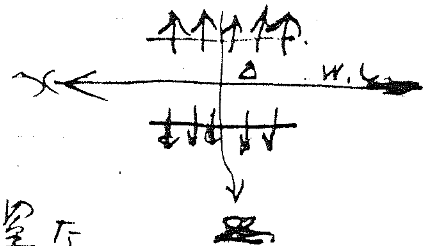
$$\therefore\ \phi_z\Big|_{z=T} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\iint_S \mu(Q)\left\{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right\}dS - \frac{KT}{\pi}\iint_S \frac{\mu(Q)}{r_2^3}dS$$

$$+ K^2\iint_S \mu\tilde{S}\,dS, \quad (22)$$

従って　$K\to 0$ の時の第1近似は

$$\left.\begin{aligned}&\phi_z\Big|_{z=T} = -w \doteqdot -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\iint_S \mu\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)dS,\\ &\text{つまり}\quad \phi_z\Big|_{z=0} = 0\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

の解である。



この解 μ は T の大きい時は無限流体中の平板のそれになるが、T が今のように小さいと全く異なって来て簡単な近似値は得られない。

今それが(23)から求められたとしそれを μ_0 とおくと

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\iint_S \mu_0\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)dS\Big|_{z=T} = w(x,y), \quad (24)$$

$$\phi_z\Big|_{z=T} = -w - \frac{KT}{\pi}\iint_S \frac{\mu_0\,dS}{r_2^3} + K^2\iint_S \mu_0\tilde{S}\,dS, \quad (25)$$

故

$$A=\iint_S \mu_0 w\,dxdy, \quad \cdots\cdots \quad (26)$$

$$A+KB=-\iint \mu_0 \Phi_{02}\,dxdy=A+\frac{KT}{\pi}\iint_S\iint_S \frac{\mu_0(P)\mu_0(Q)}{r_2^3}dS(P)dS(Q)$$

$$+K^2\iint_S\iint_S dS(P)dS(Q)\,\mu_0(P)\mu_0(Q)\,\tilde{S}(P,Q), \quad \cdots (27)$$

とおくと前同様

$$\alpha=\frac{A}{A+KB}, \quad \cdots\cdots \quad (28)$$

とすると

$$\mu(x,y)=\alpha\mu_0(x,y), \quad \cdots\cdots \quad (29)$$

が才1近似となる。
(24)の積分方程式を解く時もこの変分原理を応用する事が出来る。

又 $T\to 0$, $KT\to 0$ の極限では (22) と (4), (5) を較べて見ればわかるように (22) の右辺才1,2項は消えて形式的に

$$K\mu \xrightarrow[T\to 0]{} -\Pi \xrightarrow[K\to 0]{} -w, \quad \cdots (30)$$

となる。
(24)の解がこの極限に近づくかどうかはよくわからないが、物体の遠方では $T\to 0$ とした場合この極限値によるポテンシャルに近づくであろう事は言えよう。

7. 波浪中動揺性能の特性と物体形状

波浪中で物体が動揺している時のエネルギー収支を考えて見よう。

物体は波からエネルギーを奪い、一方運動する事によって波を作って波の形でエネルギーを失なう。

従って波以外のダムピングがなければこの両者は等しくなければならない。

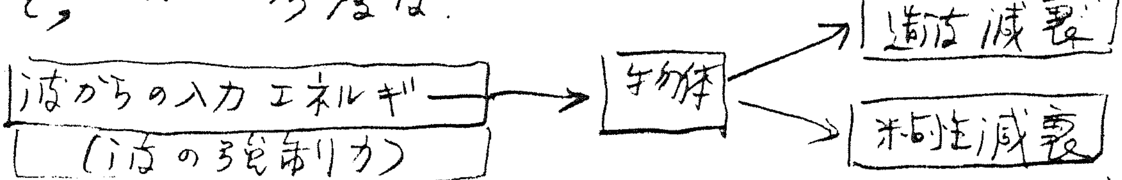
物体には入って来る波からの入力エネルギーは波の強制力に比例するから、この事から波の強制力が大きければ波によるダムピングも大きい事がわかる。

この事はハスキンドの関係を物理的に理解するのに役立つだろう。

さて一般に振動を軽減するには強制力を小さくするか、ダムピングを大きくするかすればよい事は自明である。

しかし今の場合は上述の関係から強制力を小さくすればダムピングも小さくなるのでこのような一般的方針は役に立たない。

そこで例えば粘性に基づくダムピングを導入してみると、今度は



となって来るので一般的な振動軽減法によって波の強制力を小さくし、粘性ダムピングを増加させれば動揺を小さくおさえる事が出来る。

構造その他の面から考えても波の強制力が小さい事は望ましい性能であると考えられる。

そこで今このような意味で望ましい形状について考えて見よう。

方針として 動揺面では

1. 波の強制力が小さい事
2. 粘性減衰の大きい事

の２つであり、機能的面から

3. 所要の甲板面積を持つ事
4. 所要の排水量を持つ事

又 静的安全性の見地から

5. 充分な静的復原性を持つ事

等が水面下形状を決める要素となる。

今 3, 4 は与えられるものであるから結局 1, 2, 5 項を満たす事を考えればよい。

さて 1項を満たすには 波なし船型を用いればよく、2項を満たすには 渦などの出やすい角張った水面下形状を採用すればよい。

そしてこの２つの原則から出て来た形状について復原性を検討して見ればよいわけになる。

以下具体的に検討して見よう。

a) 所要甲板面積

$200^{m} \times 300^{m} = 60{,}000^{m^2}$

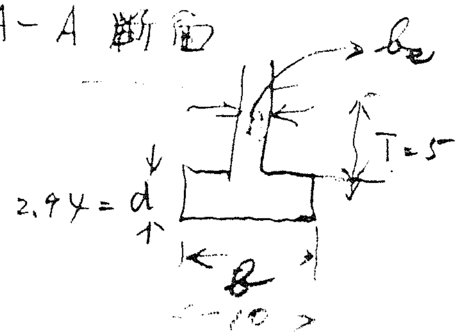
b) 所要排水容積

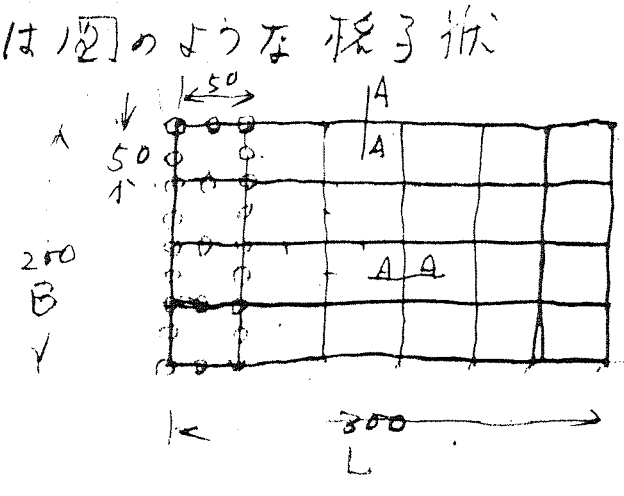
$200^{m} \times 300^{m} \times 2^{m} = 120{,}000^{m^3}$

とおいて見よう。

c) 半没型とし 没水部は図のような格子状に組む事とする。

A−A 断面





d) 断面の固有周期を全体の共振周期に等しくとらう。

断面の大きさは問題になる波長にくらべて充分小さいから次式が略成立つ。

$$KA_s^* = b_e \quad , \quad K = \omega^2/g = 2\pi/\lambda \quad (1)$$

$$A_s^* = Tb_e + bd(1+k) \; , \quad A_s = Tb_e + bd \; ,$$

k：附加質量係数

従って今周期が $\lambda \fallingdotseq L$ の附近とすれば大体

$$\frac{A_s^*}{b_e L} \fallingdotseq \frac{1}{6} = \frac{T + 2db/b_e}{L} \quad (2)$$

となる。

e) C図によれば、

$$\nabla = (5L + 7B)A_s = 2{,}900 A_s = 120{,}000$$

$$A_s = 1200/29 \fallingdotseq 41.4\ m^2$$

今 $b = 10m$, $T = 5m$ とおき、附加質量として $\frac{\pi}{4}b^2$ を加えると $A_s^* = 41.4 + \frac{\pi}{4} \times 10^2 = 119.9\ m^2$

よって(2)より $b_e = 6A_s^*/L = 720/300 = 2.4\ m$

よって $d = (A_s - Tb_e)/b = 2.94\ m$

f) C図の断面形では surge force が大きいと考えられるのでこれを直径 D の円柱に置きかえよう。

この時水線面積が同じになるようにしなければならない。

今格子点とその真中に柱を置くとするとその總数 $N = 9 \times 7 + 5 \times 6 = 93$

一方水線面積 $A_w = (5L+7B)be = 6960\ m^2$.

よって
$$\frac{\pi}{4}D^2 = 6960/93 = 74.8\ m^2$$
つまり $D = 9.76\ m$

をうる。

8) 静的復原力

横方向のBMを求めて見よう。

1本の脚の2次モーメントは $\frac{\pi}{64}D^4$ であるから

$$I = 93(本)\times\frac{\pi}{64}D^4 + 2\times\frac{\pi}{4}D^2\times100^2\times13$$
$$+\frac{\pi}{4}D^2\times75^2\times2\times7 + \frac{\pi}{4}D^2\times50^2\times13\times2$$
$$+\frac{\pi}{4}D^2\times25^2\times2\times7 = 8{,}157{,}234\ m^4$$

$$BM = I/\nabla = 67.98\ m$$

従ってこの形状では充分の復原力を有すると言え、又一方この値はRollingの固有周期を決定する。もしRolling同調時にはなしにしたいならば、この値によって同調は数を計算し(1)に代入して計算をもう一度くり返し、try and errorで所望の形状を求める。

このような形状では又構造重量がふえるであろうから それを考慮して排水量を修正して行き try & error で形状を求める。

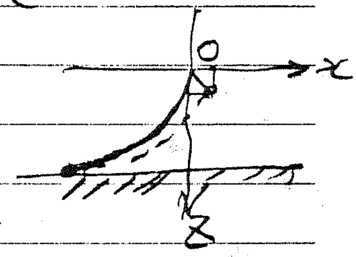
昭和　年　月　日

8. 繋留の効果

chain 又は rope で繋留する事の動揺におよぼす効果は復元力の増加として見積もられる。

さて chain 又は rope の全エネルギーを

$$T = K + V + S, \quad \cdots\cdots (1)$$



とおこう。

ここに K；運動エネルギー，V；位置エネルギー

S；歪エネルギー

今 O点が Δx, Δz だけ変位して T が ΔT だけ増加したとすると（粘性等による損失はないとして）

$$\Delta T = X\Delta x + Z\Delta z, \quad \cdots\cdots (2)$$

のようにかけるだろう。

この X, Z が バネ定数となる。

一般に chain 又は rope は浮体の大きさに較べると無視出来る程小さいから (1), (2) からわかるように X, Z も殆ど無視しうる程の大きさであろうと想像出来る。

実験結果を見てもその効果は僅かなものであって浮体の運動は定性的には変らない。

そしてその効果は復元力の増大であるから同調周期のずれとして現われる。

i) heaving は復元力が大きいので最も効果が少ない。

ii) pitching, rolling には heaving よりは大きいが僅かな影響がある。

iii) surge, sway は元来復元力のない動揺であるので復元力がつくと同調周期が出来ると言う意味では大きい

変化をもたらすが一般にはこの力が弱いのでその周期は極めて大きく結局あまり大きい影響はない。

そう言う訳で僅かなchain, ropeでは動揺を制止する効果は殆ど期待出来ない。
もしそのような効果を期待するならば排水量のかなりの割合になるようなものを用意すべきである。
いづれにしてもこの効果は同調点をずらす効果であるから積極的な動揺制止装置でない点に留意すべきである。
この考えを極端におし進めて今浮体を固縛する事を考えて見るとこの時chain又はropeにかゝる力は波の強制力のみである。
従ってこの面から考えれば波の強制力の少ない形状つまり半没船型は都合のよい形状と言えよう。
なお普通程度の繋留装置では動揺には殆ど影響はないとしても前節で考察したようにchain又はropeに減衰能を持たせる事が出来れば動揺大きいを軽減する機能を与える事が出来る事は明らかであろう。

昭和　　年　　月　　日

附録　3次元問題の近似解

§6で述べた方法により円板、長方形板の heave, pitch, hinged osc. の問題を圧力分布として近似的に解いて見る。

なお没水板でも吃水が浅いと§6(30)のように圧力分布と見なす事が出来るがその際実用的には波の強制力には e^{-KT} を減衰には e^{-2KT} をかけておいた方がよかろう。

又板の厚みが有限の場合は従来の計算結果を参照して、更に(30)式を参照すると、波の強制力にはフルード クリロッフ力が含まれている事、又附加質量は

$$m(\text{平板}) > m(\text{有限厚み}) > m(\text{平板}) - \rho V(\text{排水容積})$$

の関係があるようであるので注意すべきである。
(2次元平板で $K \to \infty$ では $m(\text{有限厚み}) = m(\text{平板})$,(楕円柱))

i) 円板の上下動
ii) 円板の縦ゆれ
iii) 円板の折曲りゆれ
iv) 長方形板の上下動
v) 〃　　〃　縦ゆれ
vi) 〃　　〃　折曲りゆれ

昭和　　年　　月　　日

i) 円板の上下動

以下半径を1としよう。

$$w = 1, \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

とおくと §6 により

$$A = \iint w^2 r dr d\theta = \pi, \quad \cdots (2)$$

$$\phi_0(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint r' dr' d\theta' \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty} \frac{k e^{ik(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}')} dk\, du}{k - K + \mu i}$$

$$H_3^{(0)}(k,\varphi) = \int_0^1 r dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, e^{ikr\cos(\theta - u)} = 2\pi \int_0^1 J_0(kr) r dr = \frac{2\pi}{k^2} \int_0^k J_0(t) t dt$$

$$= \frac{2\pi}{k} J_1(k), \quad \cdots\cdots (3)$$

$$\therefore \quad \phi_0(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty} \frac{J_1(k) e^{ikr\cos(\theta - u)} dk\, du}{k - K + \mu i} = \int_0^{\infty} \frac{J_0(kr) J_1(k) dk}{k - K + \mu i}, \quad (4)$$

$$\therefore \quad B = \iint w \phi_0 dS = 2\pi \int_0^r \phi_0 r dr = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(k)\, dk/k}{k - K + \mu i}, \quad (5)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{J_1^2(k) dk}{k} = \frac{1}{2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(k) dk}{k^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{3! \sqrt{\pi} \times \frac{\pi}{4} \times 4} = \frac{4}{3\pi}$$

なるに

$$\left. \begin{aligned} A + KB &= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(k) dk}{k - K + \mu i} \xrightarrow[K \to 0]{} \pi \\ B &\xrightarrow[K \to 0]{} \frac{8}{3} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$C_{n,m}(K) = \mathrm{P.V.} \int_0^{\infty} \frac{J_n(k) J_m(k)}{k - K} dk, \quad \cdots \quad (7)$$

なる関数を導入すると、

$$A + KB = 2\pi C_{1,1}(K) - 2\pi^2 i J_1^2(K), \quad \cdots (8)$$

昭和　　年　　月　　日

よって

$$\alpha = \frac{A}{A+KB} \xrightarrow[K\to 0]{} \frac{1}{1+\frac{8}{3\pi}K - \frac{\pi}{2}K^2 i}, \quad (9)$$

$$f_{3,3} = \frac{AB}{A+KB} \xrightarrow[K\to 0]{} \frac{\frac{8}{3} - \frac{\pi^2}{2}K i}{1+\frac{8}{3\pi}K - \frac{\pi}{2}K^2 i}, \quad (10)$$

$$H_3(K,\varphi) = 2\pi\alpha J_1(K)/K, \quad (11)$$

(9) は $K = 1\sim 2$ までかなりよい近似値である*

K	0	0.1	0.2	0.5	1	2
C_{11} **	0.5	.5489	.6026	.7450	.7701	−.0426
πJ_1^2	0	.0078	.0311	.1844	.6085	1.0448
$R_e(f_{3,3})$	2.667	2.805	2.710	2.310	1.886	1.601
$-I(f_{3,3})$	0	.407	.671	.984	.992	.751

なおこの種の積分の数値計算には次のような変形が便利である。

$$I_{n,m} = \int_0^\infty \frac{J_n(k)J_m(k)\,dk}{k-K+\mu i} = C_{n,m}(K) - \pi i J_n(K)J_m(K), \quad (12)$$

$$n \geq m$$

$$I_{n,m} = -\pi i J_n(K)H_m^{(2)}(K) + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{J_n(ik)H_m^{(1)}(ik)}{k+iK}\,dk + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{J_n(-ik)H_m^{(2)}(-ik)}{k-iK}\,dk$$

$$= -\pi i J_n(K)H_m^{(2)}(K) + \int_0^\infty I_n(k)K_m(k)\,dk\left[\frac{1}{\pi i}\frac{1}{k+iK} + \frac{i}{\pi(k-iK)}\right]$$

$$= -\pi i J_n(K)H_m^{(2)}(K) - \frac{2K}{\pi}\int_0^\infty \frac{I_n(k)K_m(k)}{k^2+K^2}\,dk, \quad (13)$$

なお

$$\left.\begin{aligned} I_n(k)K_m(k) &\xrightarrow[k\to 0]{} \left(\frac{k}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} \times (n-1)!\left(\frac{2}{k}\right)^n = \frac{(n-1)!}{2}, \\ I_0(k)K_0(k) &\xrightarrow[k\to 0]{} -\log\left(\frac{\gamma k}{2}\right), \end{aligned}\right\}$$

* W. D. Kim

** [illegible]

ii) 円板の縦ゆれ

$$w = x = r\cos\theta, \quad \cdots\cdots \quad (14)$$

$$A = \iint w^2 r\,dr\,d\theta = \int_0^1 r^3 dr \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4}, \quad \cdots\cdots (15)$$

$$H_5^0(K,u) = \int_0^1 r^2 dr \int_{-\pi}^{\pi} \cos\theta\, e^{ikr\cos(\theta-u)} d\theta = 2\pi i \left(\int_0^1 r^2 J_1(kr)\,dr\right)\cos u$$

$$= \frac{2\pi i}{k} J_2(k)\cos u, \quad \cdots\cdots (16)$$

であるから

$$\phi_0(p) = \frac{-i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^\infty \frac{J_2(k)e^{ikr(\cos\theta-u)}dk}{k-K+\mu i}\cos u\,du$$

$$= \int_0^\infty \frac{J_2(k)J_1(kr)}{k-K+\mu i}dk \times \cos\theta, \quad \cdots\cdots (17)$$

$$\therefore\ B = \iint w\phi_0\,dS = \pi\int_0^\infty \frac{J_2^2(k)\,dk}{(k-K+\mu i)k}, \quad \cdots\cdots (18)$$

$$\int_0^\infty \frac{J_2^2(k)}{k}dk = \frac{1}{4}, \quad \int_0^\infty \frac{J_2^2(k)}{k^2}dk = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2)\Gamma(-\frac{3}{2})}{2\Gamma^2(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{7}{2})} = \frac{1}{4\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$= \frac{4}{15\pi}$$

$$\therefore\ A+KB = \pi\int_0^\infty \frac{J_2^2(k)\,dk}{k-K+\mu i} = \pi\left[C_{2,2}(K) - \pi i J_2^2(K)\right], \quad \cdots (19)$$

$$\left.\begin{aligned} A+KB &\xrightarrow[K\to 0]{} \frac{\pi}{4} + \frac{4}{15}K - \frac{\pi^2 i}{64}K^3 \\ B &\xrightarrow[K\to 0]{} \frac{4}{15} - \frac{\pi^2 i}{64}K^2 \end{aligned}\right\} \cdots (20)$$

$$\alpha = \frac{A}{A+KB} \xrightarrow[K\to 0]{} \frac{1}{1+\frac{16}{15\pi}K - \frac{\pi}{16}iK^3}, \quad \cdots\cdots (21)$$

$$f_{55} = \frac{AB}{A+KB} \xrightarrow[K\to 0]{} \frac{\frac{4}{15} - \frac{\pi^2}{64}iK^2}{1+\frac{16}{15\pi}K - \frac{\pi}{16}iK^3}, \quad (22)$$

$$H_5(K,u)=\frac{2\pi i}{K}\alpha J_2(K)\cos u, \quad \cdots \tag{23}$$

なお

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{I}\{f_{ii}\} &= \mathcal{I}\frac{AB}{A+KB}=\frac{-B_i}{|\alpha|^2}, \\ B_i &= \mathcal{I}\{B\}. \end{aligned}\right\} \quad \cdots \tag{25}$$

であるから p.23 (17) の関係は満たされている。
(19)によって近似値を求めると

K	0	0.1	.2	.5	1	2
$4C_{22}$	1	1.0360	1.0760	1.2308	1.6192	2.1056
$4\pi J_2^2$	0	.0163	.0628	.3858	1.4451	4.4334
$\mathcal{R}\, f_{55}$	.2667	.275	.290	.409	.575	.358
$-\mathcal{I}\, f_{55}$	0	.119	.222	.364	.241	.072
$\lvert\alpha\rvert^2$	1	1.074	1.162	1.664	4.710	24.089

となって K_∞ の値と較べると $K=0$ を除いてよい近似値ではない。

このような計算を次の近似に進めるには圧力分布が一般にどのように展開出来るかを知らねばならない。

さて一般に球表面上の任意の関数は体球函数で近似出来る（ポテンシャル論のText参照）。

よって今の場合は

$$\Pi(r,\varphi)=\sum_{n,m} {a_n \atop b_n} P_n^m(\mu) {\cos \atop \sin} m\varphi, \quad \mu=\sqrt{1-r^2}, \tag{26}$$

のようになり，今迄の近似は $P_0(\mu)=1$, $P_1^1(\mu)=r$ に対応するものである。

従って一般には次のようにとればよかろう。

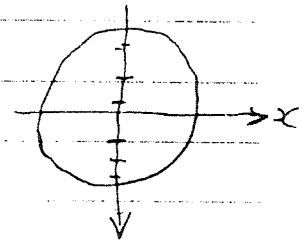
$$\left.\begin{aligned} \Pi(r,\varphi) &= \sum_n a_{2n} P_{2n}(\mu), \quad \text{for heaving} \\ &= \cos\varphi \sum_n a_{2n+1} P_{2n+1}^1(\mu) \quad \text{for pitching} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

昭和　　年　　月　　日

iii) 円板の折れ曲り動揺

y軸で蝶番止めになっているとしよう。

排水量に変化のない運動として



$$w = |x| - \frac{4}{3\pi} , \text{-----} (1)$$

をとろう。

これを第1近似とすると大変解析が面倒になるので前項終りの注意を参照して又後の計算の易しさも考えて

$$\Pi_0 = 1 + \beta r^2 \cos 2\theta , \text{-----} (2)$$

ととろう。

βは定数であるが後に見るような条件でαとは別に決められる。

変分法による定数の決定は少し形が違って、

$$A = \iint w^2 dS = \frac{\pi}{3} - \frac{16}{9\pi} = .48131 \qquad (3)$$

$$A' = \iint \Pi_0 w \, dS = \beta \iint r^3 dr |\cos\theta| \cos 2\theta d\theta = \frac{\beta}{3} , \qquad (4)$$

$$A'' = \iint \Pi_0^2 dS = \pi + \beta^2 \frac{\pi}{6} , \qquad (5)$$

$$\phi_0(\rho) = \int_0^\infty \frac{dk}{k - K + \mu i} \left[J_1(k) J_0(kr) + \overbrace{\beta J_2(kr)}^{\cos 2\theta} J_3(k) \right] , \qquad (6)$$

$$B = \iint \Pi_0 \phi_0 \, dS = 2\pi \int_0^\infty \frac{dk/k}{k - K + \mu i} \left[J_1^2(k) + \frac{\beta^2}{2} J_3^2(k) \right] , \qquad (7)$$

$$A'' + KB = 2\pi \int_0^\infty \frac{J_1^2(k) + \frac{\beta^2}{2} J_3^2(k)}{k - K + \mu i} dk , \qquad (8)$$

$$\int_0^\infty \frac{J_1^2(k)}{k} dk = \frac{1}{2} , \quad \int_0^\infty \frac{J_1^2(k)}{k^2} dk = \frac{4}{3\pi} ,$$

$$\int_0^\infty \frac{J_3^2(k) dk}{k} = \frac{1}{6} , \quad \int_0^\infty \frac{J_3^2(k)}{k^2} dk = \frac{4}{35\pi} ,$$

近似値は

$$\left.\begin{aligned} \Pi &= \alpha \Pi_0 \\ \alpha &= \frac{A'}{A''+KB} \\ [I] &= \alpha A' \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$f_{\gamma\gamma} = \frac{1}{K}\left(A-[I]\right) = \frac{AA''-A'^2+AKB}{K(A''+KB)}$$

となるが $f_{\gamma\gamma} \xrightarrow[K\to 0]{}$ finite と考えられるから

$$AA'' = A'^2 \qquad (10)$$

とならなければならない。これで β が定まる。
この時

$$f_{\gamma\gamma} = \frac{AB}{A''+KB}, \qquad (11)$$

(10) によって β を決めよう。

$$\pi\left(\frac{\pi}{3}-\frac{16}{9\pi}\right)\left(1+\frac{\beta^2}{6}\right) = \frac{\beta^2}{9}$$

$$\therefore \quad \beta = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{9}-\frac{\pi}{6}\times .48131\right)}{\pi\times .48131}} = \pm i(0.30526) \qquad \beta^2 = -.09318 \quad ; \quad \cdots(12)$$

$K \to 0$ では

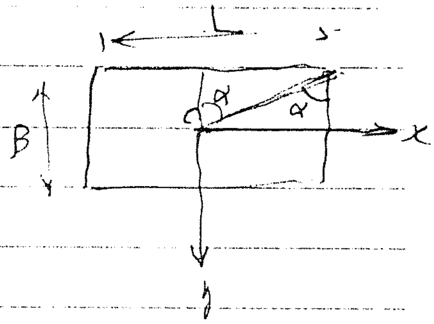
$$B \longrightarrow \pi + \beta^2\pi\cdot\frac{4}{3\pi} + O(K) = 3.0174 + \cdots$$

$$A''+KB \longrightarrow \pi\left(1+\frac{\beta^2}{6}\right) + \cdots = 3.092 + \cdots$$

$$\therefore \quad f_{\gamma\gamma} \xrightarrow[K\to 0]{} \frac{.4813\times 3.017+\cdots}{3.092+\cdots} = .4696 + \cdots$$

iv) 長方形板の上下動

$$w = 1, \quad \cdots (1)$$



とおくと

$$A = \iint dS = LB, \quad \cdots (2)$$

$$H_3^0(k,\theta) = \iint e^{ik(x\cos\theta + y\sin\theta)}\, dx\, dy$$

$$= 4\,\frac{\sin(\frac{k}{2}L\cos\theta)}{k\cos\theta} \times \frac{\sin(\frac{k}{2}B\sin\theta)}{k\sin\theta} = LB\, j_0(\tfrac{k}{2}L\cos\theta)\, j_0(\tfrac{k}{2}B\sin\theta), \quad \cdots (3)$$

$$B = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{\{H_3^0(k,\theta)\}^2}{k-K+\mu i}\, k\, dk, \quad \cdots (4)$$

$$B \xrightarrow[K\to 0]{} \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^\infty (H_3^0(k,\theta))^2\, dk = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty 〃 \, dk$$

$$= \frac{16}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta}\int_0^\infty \frac{\sin^2(\frac{k}{2}L\cos\theta)\sin^2(\frac{k}{2}B\sin\theta)}{k^4}\, dk \quad (5)$$

次頁の積分表により k に関する積分を実行すると

$$\int_0^\infty \frac{(〃)}{k^4}\, dk = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\times\frac{B^2}{4}\sin^2\theta\left(\frac{L}{2}\cos\theta - \frac{B}{6}\sin\theta\right) & \text{for } \frac{L}{2}\cos\theta > \frac{B}{2}\sin\theta \\ \frac{\pi}{2}\,\frac{L^2}{4}\cos^2\theta\left(\frac{B}{2}\sin\theta - \frac{L}{6}\cos\theta\right) & \text{for } \frac{B}{2}\sin\theta > \frac{L}{2}\cos\theta \end{cases}$$

よって　$L = B\tan\alpha$　とおくと

$$B(0) = \frac{16}{\pi^2}\times\frac{\pi}{16}B^2\int_0^\alpha \left(L\cos\theta - \frac{B}{3}\sin\theta\right)\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$+ \frac{L^2}{\pi}\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\left(B\sin\theta - \frac{L}{3}\cos\theta\right)\frac{d\theta}{\sin^2\theta}, \quad (6)$$

ここで　$\displaystyle\int_0^\alpha \frac{d\theta}{\cos\theta} = \log\left\{\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right\}$, $\displaystyle\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin\theta} = \log\left(\cot\frac{\alpha}{2}\right)$,

$$\int_0^\alpha \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta = -1 + \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta = -1 + \frac{1}{\sin\alpha},$$

昭和　　年　　月　　日

よって

$$B(0) = \frac{B^2}{\pi}\left[L\, lg\{\cot(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{\alpha}{2})\} + \frac{B}{3}\left(1-\frac{1}{\cos\alpha}\right)\right]$$

$L = B\tan\alpha$

$$+\frac{L^2}{\pi}\left[B\, lg(\cot\tfrac{\alpha}{2}) + \frac{L}{3}\left(1-\frac{1}{\sin\alpha}\right)\right], \quad \cdots\cdots (6)$$

ここで $\alpha \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ とすると $(B \to 0)$

$$lg(\cot\tfrac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2} lg\left(\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right) = \cos\alpha + \frac{\cos^3\alpha}{3} + \cdots, \quad \cos\alpha = \frac{B}{\sqrt{L^2+B^2}}$$

$$lg\{\cot(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{\alpha}{2})\} = \frac{1}{2} lg\left(\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right) = \sin\alpha + \frac{\sin^3\alpha}{3} + \cdots, \quad \sin\alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2+B^2}}$$

$$= \frac{1}{2} lg\left(\frac{\sqrt{L^2+B^2}+L}{\sqrt{L^2+B^2}-L}\right) \longrightarrow -lg\left(\frac{B}{2L}\right)$$

$$B(0) \xrightarrow[B/L \to 0]{} \frac{LB^2}{\pi}\left[lg\left(\frac{2L}{B}\right) + \frac{1}{3}\left(1-\frac{B}{L}\right)\right]$$

$$+\frac{L^2B}{\pi}\left[\frac{B}{\sqrt{L^2+B^2}} - \frac{B}{6L}\right]$$

$$\fallingdotseq \frac{LB^2}{\pi}\left[\frac{3}{2} + lg\left(\frac{2L}{B}\right)\right], \quad \cdots\cdots (7)$$

よって

$$f_{33} = \frac{AB}{A+KB} \xrightarrow[K \to 0]{B/L \to 0} \frac{\frac{LB^2}{\pi}\left[\frac{3}{2} + lg\left(\frac{2L}{B}\right)\right] + \cdots}{1 + \frac{KB}{\pi}\left(\frac{3}{2} + lg\frac{2L}{B}\right) + \cdots}, \quad (8)$$

strip 法による added mass の近似値は $K \to \infty$ で

$$M = L \times \frac{\pi}{8} B^2, \quad \cdots\cdots (9)$$

$K \to 0$ では、対数的に無限大である。

昭和　　年　　月　　日

1) 長方形板の縦ゆれ

$$w = x , \quad \cdots \quad (1)$$

$$A = \iint x^2 dx\,dy = \frac{L^2}{12}B , \quad (2)$$

$$H_5^0(k,\theta) = \iint x\, e^{ik(x\cos\theta + y\sin\theta)} dx\,dy = \frac{B}{2}\times\frac{L^2}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \xi\, e^{ik\left(\frac{L}{2}\xi\cos\theta + \frac{B}{2}\eta\sin\theta\right)} d\xi\, d\eta$$

$$= \frac{i}{2}BL^2\, j_0\left(\frac{k}{2}B\sin\theta\right) j_1\left(\frac{k}{2}L\cos\theta\right), \quad \cdots (3)$$

$$B(K) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{|H_5^0(k,\theta)|^2}{k - K + \mu i} k\, dk\, d\theta \quad , \cdots (4)$$

$$= \frac{B^2L^4}{4\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} \frac{j_0^2\left(\frac{k}{2}B\sin\theta\right) j_1^2\left(\frac{k}{2}L\cos\theta\right)}{k - K + \mu i} k\, dk\, d\theta$$

又

$$B = \iint w\, \phi_0\, ds , = \iint w(P)\, ds \iint w(Q)\, S(P,Q)\, ds(Q) \quad (5)$$

であり

$$S(P,Q)_{\,|z|=\zeta=0} = \frac{1}{2\pi r} + \frac{K}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{J_0(kr)\,dk}{k - K + \mu i}$$

$$= \frac{1}{2\pi r} - \frac{iK}{2}H_0^{(2)}(Kr) - \frac{K}{4}\left\{\mathbf{H}_0(Kr) - Y_0(Kr)\right\}, \quad (6)$$

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

であるから

$$B(K) \xrightarrow[K\to 0]{} B(0) = \frac{1}{2\pi}\iiiint \frac{w(P)\,w(Q)}{r} dS(P)\, dS(Q) , \quad \cdots (7)$$

である。

積分表によって今の場合

$$B(0) = \frac{1}{12\pi}\left[B^2L^3 \log\left\{\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right\} - B^3L^2(\sec\alpha - 1) + \right.$$

$$\left. + \frac{B^5}{5}\left(\frac{2}{3} - \sec\alpha + \frac{\sin^3\alpha}{3}\right) + \frac{L^5}{5}(\operatorname{cosec}\alpha - 1)\right], \quad (8).$$

$$L = B\tan\alpha .$$

従って $K\to 0$ では

$$f_{15} \to \frac{AB(0)}{A+KB(0)} = \frac{B(0)}{1+KB(0)/A} \to B(0), \qquad \cdots\cdots (9)$$

$B\to 0$ のとき $\left(\alpha\to\frac{\pi}{2}\right)$

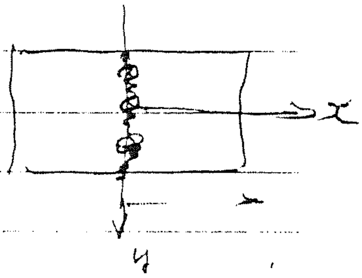
$$B(0) = \frac{B^2L^3}{12\pi}\left[\log\left\{\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right\} - \frac{1}{\tan\alpha}\left(\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}\right) + \frac{\frac{2}{3}\cos^3\alpha - \cos^2\alpha + \frac{1}{3}}{5\tan^3\alpha\cos^3\alpha} + \frac{\tan^2\alpha}{5}\left(\frac{1-\sin\alpha}{\sin\alpha}\right)\right]$$

$$= \frac{B^2L^3}{12\pi}\left[\log\left\{\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right\} - \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} + \frac{1-3\cos^2\alpha+2\cos^3\alpha}{15\sin^3\alpha} + \frac{\sin\alpha}{5(1+\sin\alpha)}\right]$$

$$\xrightarrow[B\to 0]{} \frac{L^3B^2}{12\pi}\left[\log\left(\frac{2L}{B}\right) - \frac{5}{6}\right] \quad // \qquad \cdots (10)$$

vi) 矩形桁の折曲り

$$w = |x| - \frac{L}{4} \quad , \cdots (1)$$



$$\iint w\,dx\,dy = 0$$

$$A = \iint w^2 dx\,dy = 2B\int_0^{\frac{L}{2}} \left(x-\frac{L}{4}\right)^2 dx = 4B\frac{\left(\frac{L}{4}\right)^3}{3}$$

$$= \frac{L^3 B}{48} \quad , \cdots (2)$$

$$\Pi_0 = \beta + \frac{4}{L^2}\left(x^2 - \frac{L^2}{12}\right) \quad , \cdots (3)$$

$$A' = \iint \Pi_0 w\,ds = \frac{8}{L^2}\cdot B\cdot\int_0^{\frac{L}{2}}\left(x-\frac{L}{4}\right)\left(x^2-\frac{L^2}{12}\right)dx \; ,$$

$$\xi^3 - \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi}{3} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{BL^2}{2}\int_0^1 \left(\xi - \frac{1}{2}\right)\left(\xi^2 - \frac{1}{3}\right)d\xi = \frac{BL^2}{2}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right]$$

$$= \frac{BL^2}{24} \quad , \cdots (4)$$

$$A'' = \iint \Pi_0^2\,ds = BL\beta^2 + \frac{16}{L^4}B\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\left(x^2 - \frac{L^2}{12}\right)^2 dx$$

$$= BL\beta^2 + B\frac{16\times 2}{L^4}\times\left(\frac{L}{2}\right)^5\int_0^1\left(\xi^2 - \frac{1}{3}\right)^2 d\xi$$

$$= BL\beta^2 + BL\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\right)$$

$$= BL\left(\beta^2 + \frac{4}{45}\right) \quad , (5)$$

$$\frac{1}{12} - \frac{4}{45} = \frac{45-48}{12\times 45}$$

前出のように

$$A A'' = A'^2 \quad (6)$$

でなければならぬから

$$-\beta^2 = -\frac{1}{180} \quad // \quad (7)$$

$$\beta = \pm 1/\sqrt{180}$$

これによれば β は小さくて (3) 式からわかるようにやはり heaving ($\nu=1$) との coupling は小さいようである。

この場合の計算は大変面倒であるので β は無視して式のみ羅列しておく。

$$H_\eta^0(k,\theta) = \iint \frac{4}{L^2}\left(x^2-\frac{L^2}{12}\right) e^{ik\varpi}\,dx\,dy$$

$$\frac{4}{L^2}\left(\frac{L^2}{4}\xi^2-\frac{L^2}{12}\right)$$

$$= B\, j_0\left(\frac{k}{2}B\sin\theta\right)\frac{L}{3}\int_{-1}^{1} e^{\frac{ik}{2}\xi L\cos\theta}\left(\frac{3\xi^2}{2}-\frac{1}{2}\right)d\xi$$

$$= \frac{2}{3}LB\, j_2\left(\frac{k}{2}L\cos\theta\right) j_0\left(\frac{k}{2}B\sin\theta\right), \quad ---(8)$$

これにはもう一つの考え方があって $e^{ik\varpi}$ を diffraction potential の近似値と見るならば

$$-\frac{L}{2},\ \frac{L}{2}$$

$$H_\eta^0(k,\theta) = \iint w\, e^{ik\varpi}\,dx\,dy = \iint\left\{|x|-\frac{L}{4}\right\} e^{ik\varpi}\,dx\,dy$$

$$= B\, j_0\left(\frac{k}{2}B\sin\theta\right)\frac{L^2}{2}\int_0^1\left(\xi-\frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{kL}{2}\xi\cos\theta\right)d\xi$$

$$= \frac{L^2B}{2}\, j_0\left(\frac{kB}{2}\sin\theta\right)\left[\frac{\sin\left(\frac{k}{2}L\cos\theta\right)}{kL\cos\theta} - \frac{1-\cos\left(\frac{k}{2}L\cos\theta\right)}{\left(\frac{k}{2}L\cos\theta\right)^2}\right], \quad (9)$$

（定義の関係で次元があっていない！）

$$B(k) = \iint \Pi_0\, \Phi_0\, dS = \iiiint \Pi_0(P)\Pi_0(Q)\, S(P,Q)\, dS(P)\, dS(Q),$$

1. $$B(0) = \frac{1}{2\pi}\iiiint \frac{\Pi_0(P)\Pi_0(Q)}{r}\, dS,$$

etc.

附録B　種々の積分

B-1　$\iint f(|x-x'|)\,dx\,dx'$,　$\iint x x' f(|x-x'|)\,dx\,dx'$

B-2　$\iint \left(x^2-\frac{L^2}{12}\right) f(|x-x'|)\,dx\,dx'$,　$\iint \left(x^2-\frac{L^2}{12}\right)\left(x'^2-\frac{L^2}{12}\right) f(|x-x'|)\,dx\,dx'$

B-3　$\iiiint \frac{1}{r}\,dx\,dx'\,dy\,dy'$

B-4　$\iiiint \frac{x x'}{r}\,dx\,dx'\,dy\,dy'$

B-5　$\iint J_0(k|x-x'|)\,dx\,dx'$,　$\iint x x' J_0(k|x-x'|)\,dx\,dx'$

B-6　$\int_0^\infty j_0^2(ka)\,j_0^2(kb)\,dk$,　$\int_0^\infty j_1^2(ka)\,j_0^2(kb)\,dk$.

B-9　$\int_0^{\pi/2} (\ 〃\ )\,d\theta$,　$\int_0^{\pi/2} (\ 〃\ )\,d\theta$

B-11　$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{H_3^0(k,\theta)\}^2\,d\theta$.

B-12　$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{H_3^0(k,\theta)\}^2\,d\theta$,　$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |H_5^0(k,\theta)|^2\,d\theta$.

B-13　$j_n(z)$

B-14　$f_{r,n}(z) = \iiint_0^z J_n(t)\,dt^r$

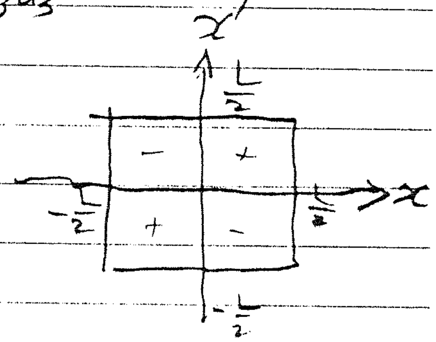
B-15　$f_{2,0}(x)$ の数表.

昭和　　年　　月　　日

$$I_0 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int f(|x-x'|)\,dx\,dx'$$

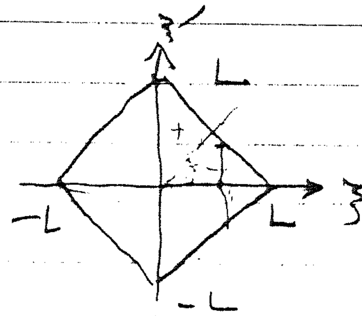
$$x-x'=\xi,\quad x+x'=\xi',\quad x=\frac{\xi+\xi'}{2},\quad x'=\frac{\xi'-\xi}{2}$$

$$dx\,dx' = \frac{\partial(x,x')}{\partial(\xi,\xi')}\,d\xi\,d\xi' = \frac{1}{2}\,d\xi\,d\xi'$$



$$I_0 = 2\int_0^L d\xi\, f(|\xi|)\int_0^{L-\xi} d\xi'$$

$$I_0 = 2\int_0^L (L-\xi)\, f(|\xi|)\, d\xi$$



$$I_1 = \iint_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x x' f(|x-x'|)\,dx\,dx'.$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L d\xi\, f(|\xi|)\int_0^{L-\xi}(\xi'^2-\xi^2)\,d\xi'$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L d\xi\, f(|\xi|)\left[\frac{(L-\xi)^3}{3} - \xi^2(L-\xi)\right]$$

$(L-\xi)\left[(L-\xi)^2-3\xi^2\right]$
$L(L^2-2\xi^2-2L\xi)$
$= L^3-2L^2\xi-2L\xi^2$
$-\xi L^2+2L\xi^2+2\xi^3$
$= L^3-3\xi L^2+2\xi^3$

$$(L-\xi)^3-3\xi^2(L-\xi) = (L-\xi)\left[L^2-2L\xi-2\xi^2\right] = (L-\xi)\left[\cancel{2L}\ \ 6L\right.$$

$$= (L-\xi)\left[L^2-2L\xi-2(L-\xi)^2+2L^2-4L\xi\right] =$$

$$= (L-\xi)\left[3L^2-6L(\xi-L+L)-2(L-\xi)^2\right]$$

$$= (L-\xi)\left[-3L^2+6L(L-\xi)-2(L-\xi)^2\right]$$

$$\therefore\ I_1 = \frac{1}{6}\int_0^L\left[-3L^2(L-\xi)+6L(L-\xi)^2-2(L-\xi)^3\right] f(|\xi|)\,d\xi \quad //$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^L\left[L^3-3\xi L^2+2\xi^3\right] f(|\xi|)\,d\xi \quad //$$

昭和　　年　　月　　日

$\frac{1}{2}\times 2$

$$I_{20} = \frac{4}{L^2}\iint_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(x^2 - \frac{L^2}{12}\right) f(|x-x'|)\,dx\,dx'$$

$$x^2 = \frac{(\xi+\xi')^2}{4}$$

$$= \frac{1}{L^2}\int_0^L f(|\xi|)\,d\xi \int_{\xi-L}^{L-\xi} d\xi' \left[\xi^2 + 2\xi\xi' + \xi'^2) - \frac{L^2}{3}\right]$$

$$(L-\xi)\left\{(L-\xi)^2 + 3\xi^2 - L^2\right\}$$
$$(4\xi^2 - 2L\xi)$$

$$= \frac{1}{L^2}\int_0^L f(|\xi|)\,d\xi \left[\left(\xi^2 - \frac{L^2}{3}\right)2(L-\xi) + \frac{2}{3}(L-\xi)^3\right]$$

$$(L-\xi)(2\xi - L)\xi = \xi\left[2L\xi - L^2 - 2\xi^2 + \xi L\right]$$

$$= \frac{4}{3L^2}\int_0^L f(|\xi|)\,d\xi \left[-L^2\xi + 3L\xi^2 - 2\xi^3\right]$$

$$I_{22} = \frac{16}{L^4}\iint \left(x^2 - \frac{L^2}{12}\right)\left(x'^2 - \frac{L^2}{12}\right) f(|x-x'|)\,dx\,dx'$$

$$\left(x^2 - \frac{L^2}{12}\right)\left(x'^2 - \frac{L^2}{12}\right) = (xx')^2 - \frac{L^2}{12}(x^2 + x'^2) + \frac{L^4}{12^2}$$

$$= \left(\frac{\xi^2 - \xi'^2}{4}\right)^2 + \frac{L^2}{48}\left(2\xi^2 + 2\xi'^2\right) + \frac{L^4}{12}$$

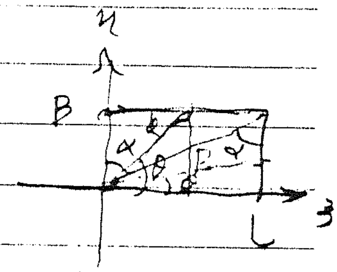
$$= \frac{2}{L^4}\int_0^L d\xi\, f(|\xi|)\int_0^{L-\xi} d\xi' \left[\xi^4 - 2\xi^2\xi'^2 + \xi'^4 + \frac{2}{3}L^2(\xi^2 + \xi'^2) + \frac{4}{3}L^4\right]$$

$$= \frac{2}{L^4}\int_0^L d\xi\, f\left[\left(\xi^4 + \frac{2}{3}L^2\xi^2 + \frac{4}{3}L^4\right)(L-\xi) + \left(\frac{2}{3}L^2 - 2\xi^2\right)\frac{(L-\xi)^3}{3} + \frac{(L-\xi)^5}{5}\right]$$

$$\frac{(L-\xi)^3}{15}\left(\frac{10}{3}L^2 - 10\xi^2 + 3L^2 - 6L\xi + 3\xi^2\right)$$

昭和　　年　　月　　日

$$I = \iiiint \frac{dx\,dx'\,dy\,dy'}{r} = 4\int_0^L\int_0^B \frac{(L-\xi)(B-\eta)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\,d\xi\,d\eta$$



$\xi = r\cos\theta$, $\eta = r\sin\theta$ $\Big\}$ $d\xi\,d\eta = r\,dr\,d\theta$.

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} d\theta \int_0^{L\sec\theta} (L - r\cos\theta)(B - r\sin\theta)\,dr + 4\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{B/\sin\theta} (\quad)(\quad)\,dr$$

$$\int_0^r (L - r\cos\theta)(B - r\sin\theta)\,dr = LBr - \frac{r^2}{2}(L\sin\theta + B\cos\theta) + \frac{r^3}{3}\sin\theta\cos\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} d\theta \left[L^2B\sec\theta - \frac{L^2}{2}\sec^2\theta(L\sin\theta + B\cos\theta) + \frac{L^3}{3}\sin\theta\sec^2\theta\right]$$

$$+ 4\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[\frac{LB^2}{\sin\theta} - \frac{B^2}{2\sin^2\theta}(L\sin\theta + B\cos\theta) + \frac{B^3\cos\theta}{3\sin^2\theta}\right]$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} d\theta \left[\frac{L^2B}{\cos\theta} - \frac{L^3\sin\theta}{3\cos^2\theta}\right] + 2\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\pi/2} d\theta \left[\frac{LB^2}{\sin\theta} - \frac{B^3\cos\theta}{3\sin^2\theta}\right] \quad /\!/$$

$\frac{\pi}{2} - \theta = \theta'$

$$= 2\int_0^{\alpha} d\theta \left[\frac{LB^2}{\cos\theta} - \frac{B^3\sin\theta}{3\cos^2\theta}\right] + 2\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \left[\frac{L^2B}{\sin\theta} - \frac{L^3}{3}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right] \quad /\!/$$

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\cos\theta} = \log\{\cot(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\alpha}{2})\}, \qquad \int_{\alpha}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin\theta} = \log(\cot\tfrac{\alpha}{2}).$$

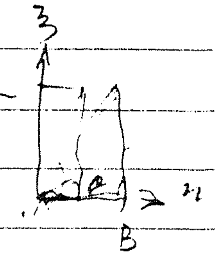
$$\int_0^{\alpha} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = \sec\alpha - 1, \qquad \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta = \operatorname{cosec}\alpha - 1$$

$$I = 2LB^2\log\{\cot(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\alpha}{2})\} - \frac{2}{3}B^3(\sec\alpha - 1) + 2L^2B\log(\cot\tfrac{\alpha}{2}) - \frac{2}{3}L^3(\operatorname{cosec}\alpha - 1) \quad /\!/$$

昭和　　年　　月　　日

$$I = \iiiint \frac{xx'}{r}\,dx\,dx'\,dy\,dy'$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^L\int_0^B (B-\eta)(L^3 - 3\zeta L^2 + 2\zeta^3)\frac{d\zeta\,d\eta}{\sqrt{\zeta^2+\eta^2}}$$



$\zeta = r\sin\theta$

$\eta = r\cos\theta$

$$= \frac{1}{3}\int_0^\alpha d\theta \int_0^{B\sec\theta}(B - r\cos\theta)(L^3 - 3rL^2\sin\theta + 2r^3\sin^3\theta)\,dr$$

$$+ \frac{1}{3}\int_\alpha^{\pi/2} d\theta \int_0^{L/\sin\theta}(B - r\cos\theta)(\qquad '' \qquad)\,dr$$

$$\int_0^r \Big[BL^3 - 3L^2B\sin\theta(r) + 2B\sin^3\theta(r^3) - L^3\cos\theta(r) + 3r^2L^2\sin\theta\cos\theta - 2r^4\sin^3\theta\cos\theta\Big]\,dr$$

$$= BL^3(r) - \frac{r^2}{2}(3L^2B\sin\theta + L^3\cos\theta) + r^3L^2\sin\theta\cos\theta + \frac{B}{2}\sin^3\theta\, r^4 - \frac{2}{5}r^5\sin^3\theta\cos\theta$$

$$I = \frac{1}{3}\int_0^\alpha d\theta\Big[BL^3\Big(\frac{B}{\cos\theta}\Big) - \frac{B^2}{2\cos^2\theta}(3L^2B\sin\theta + L^3\cos\theta) + \frac{B^3L^2}{\cos^3\theta}\sin\theta\cos\theta + \frac{B^5}{2}\frac{\sin^3\theta}{\cos^4\theta} - \frac{2}{5}B^5\frac{\sin^3\theta}{\cos^4\theta}\Big]$$

$$+\frac{1}{3}\int_\alpha^{\pi/2} d\theta\Big[BL^3\frac{L}{\sin\theta} - \frac{L^2}{2\sin^2\theta}(3L^2B\sin\theta + L^3\cos\theta) + \frac{L^5\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{BL^4}{2\sin\theta} - \frac{2L^5}{5}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\Big]$$

$1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{10-5-4}{10} = \frac{1}{10}$

$$= \frac{1}{3}\int_0^\alpha d\theta\Big[\frac{B^2L^3}{2\cos\theta} - \frac{B^3L^2}{2}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} + \frac{B^5}{10}\frac{\sin^3\theta}{\cos^4\theta}\Big]$$

$$+\frac{1}{3}\int_\alpha^{\pi/2} d\theta\Big[\frac{L^5}{10}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\Big]$$

$$\int_0^\alpha \frac{\sin^3\theta}{\cos^4\theta}\,d\theta = \frac{2}{3} - \sec\alpha + \frac{\sec^3\alpha}{3}$$

$$= \frac{B^2L^3}{6}\log\Big\{\cot\Big(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\Big)\Big\} - \frac{B^3}{6}L^2(\sec\alpha - 1) + \frac{B^5}{30}\Big(\frac{2}{3} - \sec\alpha + \frac{\sec^3\alpha}{3}\Big)$$

$$+ \frac{L^5}{30}(\operatorname{cosec}\alpha - 1)$$

$$I_0 = \iint_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} J_0(k|x-x'|)\,dx\,dx' = 2\int_0^L (L-\xi) J_0(k\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{2}{k^2}\int_0^{kL}(kL-t)J_0(t)\,dt = \frac{2L}{k}\left[\int_0^{kL} J_0(t)\,dt - J_1(kL)\right]$$

$$\int_0^z t J_0(t)\,dt = t J_1(t) \qquad \left[\begin{array}{l} I_0 \xrightarrow{k\to 0} L^2 \\ \xrightarrow{k\to\infty} \frac{2L}{k} \end{array}\right]$$

$$\int_0^z t^3 J_0(t)\,dt = t^3 J_1(t) - 2\int t^2 J_1(t)\,dt = t^3 J_1(t) - 2t^2 J_2(t) =$$

$$I_1 = \iint x x' J_0(k|x-x'|)\,dx\,dx' = \frac{1}{6}\int_0^L \left[L^3 - 3L^2\xi + 2\xi^3\right] J_0(k|\xi|)\,d\xi$$

$$= \frac{1}{6k^4}\int_0^{kL}\left[(kL)^3 - 3(kL)^2 t + 2t^3\right] J_0(t)\,dt$$

$L^4 - 3L$

$$= \frac{1}{6k^4}\left[(kL)^3\int_0^{kL} J_0(t)\,dt - 3(kL)^3 J_1(kL) + 2(kL)^3 J_1(kL) - 2(kL)^2 J_2\right]$$

$-\frac{1}{2}(J_0 + J_2)$

$$= \frac{L^3}{6k}\left[\int_0^{kL} J_0(t)\,dt - J_1(kL) - \frac{2J_2(kL)}{kL}\right]$$

$$\xrightarrow{k\to 0} \frac{1}{6}\int_0^L (L^3 - 3L^2\xi + 2\xi^3)\,d\xi = \frac{1}{6}\left[L^4 - \frac{3}{2}L^4 + \frac{2}{4}L^4\right] = 0$$

$$-\frac{k^2}{4\times 6}\int_0^L (L^3\xi^2 - 3L^2\xi^3 + 2\xi^5)\,d\xi = -\frac{k^2 L^6}{24}\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{2}{6}\right)$$

$\frac{2\times 4 - 3\times 3}{3\times 4}$

$$I_1 \xrightarrow{k\to 0} \frac{k^2 L^6}{12\times 24}$$

$$\xrightarrow{k\gg 1} \frac{L^3}{6k}$$

$$I_0 = \int_0^\infty j_0^2(ka)\, j_0^2(kb)\, dk \quad , \quad I_1 = \int_0^\infty j_1^2(ka)\, j_0^2(kb)\, dk .$$

$$j_0(z) = \frac{\sin z}{z} \quad , \quad j_1(z) = \frac{\sin z}{z^2} - \frac{\cos z}{z} .$$

$a = \frac{\cancel{k}}{2} L \cos\theta$

$b = \frac{\cancel{k}}{2} B \sin\theta .$

$$j_0^2(z) = \frac{\sin^2 z}{z^2} = \frac{1-\cos 2z}{2z^2}$$

$$j_1^2(z) = \frac{\sin^2 z}{z^2} + \frac{\cos^2 z}{z^2} - \frac{\sin 2z}{z^3} = \frac{1-\cos 2z}{2z^4} + \frac{1+\cos 2z}{2z^2} - \frac{\sin 2z}{z^3}$$

$$j_0^2(ka)\, j_0^2(kb) = \frac{1}{4k^4a^2b^2}(1-\cos 2ka)(1-\cos 2kb)$$

$$= \frac{1}{4k^4a^2b^2}\left(1 \mp \cos 2ka - \cos 2kb \pm \cos 2ka \cos 2kb\right)$$

$\frac{1}{2}\left(\cos 2k(a+b) + \cos 2k(a-b)\right)$

$$= \frac{1}{16k^4a^2b^2}\Big[4 - 2\left\{e^{2ika} + e^{2ikb} + e^{-2ika} + e^{-2ikb}\right\} \pm e^{2ik(a+b)} \pm e^{2ik(a-b)} \pm e^{-2ik(a+b)} \pm e^{-2ik(a-b)}\Big]$$

$\to 0$

$$j_1^2(ka)\, j_0^2(kb) = \frac{1}{4k^6a^4b^2}(1-\cos 2ka)(1-\cos 2kb)$$

$$+ \frac{1}{4k^4a^2b^2}(1+\cos 2ka)(1-\cos 2kb)$$

$$- \frac{1}{2k^5a^3b^2}\sin 2ka\,(1-\cos 2kb)$$

$$= \frac{1}{16k^6a^4b^2}\Big[4 - 2\left\{e^{2ika} + e^{2ikb} + e^{-2ika} + e^{-2ikb}\right\} + e^{2ik(a+b)} + e^{-2ik(a+b)} + e^{2ik(a-b)} + e^{-2ik(a-b)}\Big]$$

$$+ \frac{1}{16k^4a^2b^2}\Big[4 + 2\left\{e^{2ika} - e^{2ikb} + e^{-2ika} - e^{-2ikb}\right\} - e^{2ik(a+b)} - e^{-2ik(a+b)} - e^{2ik(a-b)} - e^{-2ik(a-b)}\Big]$$

$$+ \frac{i}{8k^5a^3b^2}\Big[\frac{2}{\cancel{2}}\left(e^{2ika} - e^{-2ika}\right) - \left(e^{2ik(a+b)} + e^{2ik(a-b)}\right) + e^{-2ik(a+b)} + e^{-2ik(a-b)}\Big]$$

昭和　　年　　月　　日

$(a+b)^3+(a-b)^3 = 2a^3+6ab^2$

$(a+b)^3-(a-b)^3 = 2b^3+6a^2b$

$2a^3-2b^3-(a+b)^3-(a-b)^3 = -2b^3-6ab^2$

$2a^3-2b^3-(a+b)^3+(a-b)^3 = 2a^3-4b^3-6a^2b$

$(a+b)^4+(a-b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
$\qquad +a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$
$\qquad = 2a^4+12a^2b^2+2b^4$

$(a+b)^4-(a-b)^4 = 8a^3b+8ab^3$

$(a+b)^5+(a-b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$
$\qquad a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$
$\qquad = 2a^5+20a^3b^2+10ab^4$

$(a+b)^5-(a-b)^5 = 10a^4b+20a^2b^3+2b^5$

$(a+b)^5+(a-b)^5-2a^5-2b^5 = 20a^3b^2+10ab^4-2b^5$

$(\quad)-(\quad)-2a^5-2b^5 = 10a^4b+20a^2b^3-2a^5$

16. $I_1 = \frac{\pi}{60a^4b^2}\{2b^5-20a^3b^2-10ab^4)$

$+\frac{\pi}{12a^2b^2}(-2b^3-6ab^2)+\frac{\pi}{12a^3b^2}[12a^2b^2+2b^4)$

$(3a^2+b^2-ab)$

$= \frac{\pi}{30a^4}(b^3-10a^3-5ab^2)+\frac{\pi}{6a^3}[6a^2+b^2-ab-3a^2)$

$= \frac{\pi}{30a^4}\{b^3-10a^3-\cancel{5ab^2}+15a^3+\cancel{5ab^2}-5a^2b\}$

$= \frac{\pi}{30a^4}\{b^3+5a^3-5a^2b\}$ // for $a>b$.

$I_1 = \frac{\pi}{60a^4b^2}\{2a^5-10a^4b-20a^2b^3\}+\frac{\pi}{12a^2b^2}\{2a^3-4b^3-6a^2b\}$

$+\frac{\pi}{12a^3b^2}\{8a^3b+8ab^3-2a^4\}$,

$= \frac{\pi}{30a^4b^2}\{a^5-\cancel{5a^4b}-\cancel{10a^2b^3}+5a^5-\cancel{10a^2b^3}-\cancel{15a^4b}$
$\quad +\cancel{20a^4b}+20a^2b^3-5a^5\}$

$= \frac{\pi}{30a^4b^2}\{a^5\} = \frac{\pi a}{30b^2}$ // for $a<b$.

昭和　　年　　月　　日

$$I_0 = \frac{2\pi i^4}{6\times 32\, a^2 b^2}\left[-2\{(2a)^3+(2b)^3\} + 2^3(a+b)^3 \pm 2^3(a-b)^3\right]$$

$\pm$: $a>b$ ならば $+$, $a<b$ $-$

$$= \frac{\pi}{12a^2b^2}\left[(a+b)^3 \pm (a-b)^3 - 2a^3 - 2b^3\right]$$

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$\cancel{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

$$= \frac{\pi}{12a^2b^2}\left[6ab^2-2b^3\right] \quad \text{for } a>b, \quad = \frac{\pi}{6a^2}(3a-b)$$

$$= \frac{\pi}{12a^2b^2}\left[6a^2b-2a^3\right] \quad \text{for } a<b, \quad = \frac{\pi}{6b^2}(3b-a)$$

$$I_1 = \frac{2\pi i^6 \times 2^5}{5\times 24\times 32\, a^4 b^2}\left[-2(a^5+b^5)+(a+b)^5 \pm (a-b)^5\right]$$

12

$$+\frac{2\pi i^4\times 2^3}{6\times 32\times a^2b^2}\left[2(a^3-b^3)-(a+b)^3 \mp (a-b)^3\right]$$

$$+\frac{2\pi i^6\times 2^4}{24\times 16\, a^3 b^2}\left[2a^4-(a+b)^4 \mp (a-b)^4\right]$$

$$= \frac{\pi}{60a^4b^2}\left\{2a^5+2b^5-(a+b)^5 \mp (a-b)^5\right\}$$

$$+\frac{\pi}{12a^2b^2}\left[2a^3-2b^3-(a+b)^3 \mp (a-b)^3\right\}$$

$\times 5a^2$

$$+\frac{\pi}{12a^3b^2}\left[(a+b)^4 \pm (a-b)^4 - 2a^4\right]$$

$\times 5a$

$$= \frac{\pi}{60a^4b^2}\Big[2a^5+2b^5-10a^2b^3-(a+b)^5-5a^2(a+b)^3$$

$$+5a(a+b)^4 \mp \{(a-b)^5+5a^2(a-b)^3-5a(a-b)^4\}\Big]$$

[illegible] $5a(a+b)$ [illegible] $(a+b)^2]$

$(3a$ [illegible] a^2 $b^2)$

$(a-b)^3[(a-b)^2+5a^2-5(a-b)a]$

(a^2+b^2+3ab)

$\alpha\quad \frac{L}{2}\cos\theta > \frac{B}{2}\sin\theta$

$\tan\alpha > \tan\theta.$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_0\, d\theta = \frac{\pi}{6}\int_0^{\alpha}\left[\frac{3}{\frac{L}{2}\cos\theta} - \frac{\left(\frac{B}{2}\right)\sin\theta}{\left(\frac{L}{2}\right)^2\cos^2\theta}\right)d\theta.$$

$$+\ \frac{\pi}{6}\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{3}{\frac{B}{2}\sin\theta} - \frac{\left(\frac{L}{2}\right)\cos\theta}{\left(\frac{B}{2}\right)^2\sin^2\theta}\right]d\theta.$$

$$= \frac{\pi}{3L}\left[\int_0^{\alpha}\left(\frac{3}{\cos\theta} - \frac{B^2\sin\theta}{L^2\cos^2\theta}\right)d\theta\right]$$

$$+\ \frac{\pi}{3B}\int_\alpha^{\pi/2}\left(\frac{3}{\sin\theta} - \frac{L\cos\theta}{B\sin^2\theta}\right)d\theta$$

$+\frac{1}{\sin\alpha}(\cos\alpha - 1)$

$\tan\alpha\left(1-\frac{1}{\sin\alpha}\right)$

$$= \frac{\pi}{L}\log\left\{\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right\} + \frac{B}{3L^2}\pi\times\left(1-\frac{1}{\cos\alpha}\right)$$

$-\frac{\sin\alpha}{\cancel{\tan\alpha}(1+\sin\alpha)}$

$$+\ \frac{\pi}{B}\log\left(\cot\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\pi L}{3B^2}\left(1-\frac{1}{\sin\alpha}\right)$$

$\tan\alpha = L/B,\quad \cos\alpha = \frac{B}{\sqrt{L^2+B^2}},\quad \sin\alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2+B^2}}$

$\cot^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{\sqrt{L^2+B^2}+B}{\sqrt{L^2+B^2}-B}$

$\cot^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{\sqrt{L^2+B^2}+L}{\sqrt{L^2+B^2}-L}$

$$I_0 = \frac{\pi}{2L}\log\left(\frac{\sqrt{L^2+B^2}+L}{\sqrt{L^2+B^2}-L}\right) + \frac{\pi}{3L^2}\left(-B+\sqrt{L^2+B^2}\right)$$

$$+\ \frac{\pi}{2B}\log\left(\frac{\sqrt{L^2+B^2}+B}{\sqrt{L^2+B^2}-B}\right) + \frac{\pi}{3B^2}\left(\sqrt{L^2+B^2}-L\right)$$

$$= \frac{\pi}{L}\log\left\{\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right\} + \frac{\pi}{B}\log\cot\frac{\alpha}{2}$$

$$-\ \frac{\pi}{3L}\left[\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_1 \, d\theta = \frac{\pi}{15}\int_0^{\alpha}\left\{\frac{B^3}{L^4}\frac{\sin^3\theta}{\cos^4\theta} + \frac{5}{L\cos\theta} - 5\frac{B}{L^2}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right\} d\theta.$$

$$+\frac{\pi}{15}\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{L\cos\theta}{B^2\sin^2\theta}\, d\theta$$

$$\int_0^\alpha \frac{\sin^3\theta}{\cos^4\theta}\,d\theta = \int_{\cos\alpha}^1 \frac{(1-x^2)dx}{x^4} = \left(\frac{-1}{3x^3}+\frac{1}{x}\right)_{\cos\alpha}^1 = \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{3\cos^3\alpha}\right)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{3\cos^3\alpha} = \frac{2\cos^3\alpha - 2\cos^2\alpha+1}{3\cos^3\alpha}$$

$$= \frac{\pi}{15}\left\{\frac{B^3}{L^4}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{3\cos^3\alpha}\right) + \frac{5}{L}\log\left\{\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right\} + \frac{5B}{L^2}\left(1-\frac{1}{\cos\alpha}\right)\right\}$$

$$+ \frac{\pi}{15}\frac{L}{B^2}\left(1-\frac{1}{\sin\alpha}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3L}\log\left\{\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right\} + \frac{B}{15\pi L^2}\left\{1-\sec\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\left(\frac{2}{3} - \cancel{\frac{1}{\cos\alpha}} + \frac{1}{3\cos^3\alpha}\right)\right\}$$

$$+ \frac{\pi}{15}\frac{L}{B^2}\left(-1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)$$

$$\frac{\pi B}{45\pi L^2\sin^2\alpha}\left[3\sin^2\alpha - 3\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + 2\cos^2\alpha - 3\cos\alpha + \sec\alpha\right]$$

$$\left[1+\sin^2\alpha - 2\sec\alpha\right]$$

$$= \frac{\pi}{3L}\log\left\{\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right\} + \frac{\pi}{15}\frac{L}{B^2}\left(\frac{1}{\sin\alpha}-1\right)$$

$$+ \frac{\pi}{45\pi L\sin^3\alpha}\left(\cos\alpha + \cos\alpha\sin^2\alpha - 2\right)$$

$$= \frac{\pi}{3L}\log\left\{\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right\} + \frac{\pi}{45L}\left[\frac{3\sin\alpha}{1+\sin\alpha} - \frac{2-\cos\alpha-\cos\alpha\sin^2\alpha}{\sin^3\alpha}\right]$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ak}{k} dk = \frac{\pi}{2}$$

$a = \frac{k}{2}\cos\theta$, $b = \frac{B}{2}\sin\theta$.

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 ak}{k^2} dk = \frac{\pi}{2} a ,$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ak \sin bk}{k^2} dk = \begin{cases} 0 & \text{for } a > b. \\ \frac{\pi}{2} & a = b \\ \frac{\pi}{2} & a < b. \end{cases} \quad ?$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 ak \sin^2 bk}{k^4} dk = \frac{\pi}{6} b^2(3a-b) \quad \text{for } a > b > 0.$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{k}{2}\sin\theta\right)\sin^2\left(\frac{b}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta\cos^2\theta} d\theta = \iint_0^a da^2 \iint_0^b db^2\, J_0\left(\sqrt{a^2+b^2}\right),$$

$$= \sum_{m=0}^\infty \varepsilon_{2m}(-)^m \iint_0^a J_{2m}(a)\,da^2 \iint_0^a J_{2m}(b)\,dk^2$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left\{H_3^0(k,\theta)\right\}^2 d\theta = \frac{1}{k^4}\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{2m}(-)^m \iint_0^{kL} J_{2m}(a)\,da^2 \iint_0^{kB} J_{2m}(b)\,dk^2.$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{2m}(-)^m \iint_0^L J_{2m}(kx)\,dx^2 \iint_0^B J_{2m}(ky)\,dy^2 ,$$

特に $B \to 0$ では

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left\{H_3^0(k,\theta)\right\}^2 d\theta = \frac{B^2}{2}\iint_0^L J_0(kx)\,dx^2 = \frac{B^2}{2k^2}\iint_0^{kL} J_0(t)\,dt^2$$

昭和　　年　　月　　日

$$I_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |H_3^0(k,\theta)|^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iiiint dx\,dy\,dx'dy' \int_0^{2\pi} e^{ik[(x-x')\cos\theta + (y-y')\sin\theta]} d\theta .$$

$$= \iiiint dx\,dx'dy\,dy'\, J_0\left(k\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{2m}(-)^m \iint J_{2m}(k|x-x'|)\,dx\,dx' \iint J_{2m}(k|y-y'|)\,dy\,dy'$$

$$= 4\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{2m}(-)^m \int_0^L (L-\xi) J_{2m}(k\xi)\,d\xi \int_0^B (B-\eta) J_{2m}(k\eta)\,d\eta$$

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |H_5^0(k,\theta)|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\iint xx'\,dx\,dx'dy\,dy' \int_0^{2\pi} e^{ik\bar{\omega}} d\theta .$$

$$= \iiiint dx\,dx'dy\,dy'\, xx'\, J_0(kr)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{2m}(-)^m \iint xx' J_{2m}(k|x-x'|)\,dx\,dx' \iint J_{2m}(k|y-y'|)\,dy\,dy' .$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{2m}(-)^m \int_0^L (L^3 - 3L^2\xi + 2\xi^3) J_0(k\xi)\,d\xi \int_0^B (B-\eta) J_0(k\eta)\,d\eta$$

昭和　年　月　日

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, J_{n+\frac{1}{2}}(z)$$

$$j_0(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad j_1(z) = \frac{\sin z}{z^2} - \frac{\cos z}{z}$$

$$j_n(z) = \frac{1}{2i^n}\int_0^{\pi} e^{iz\cos\theta} P_n(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \frac{1}{2i^n}\int_{-1}^{1} e^{iz\xi} P_n(\xi)\, d\xi$$

$$h_0(z) = \frac{1-\cos z}{z}, \quad h_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, \mathbb{H}_n(z)$$

$$P_2(\xi) = \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}$$

昭和　年　月　日

$$f_{0,n}(z) = J_n(z)\ , \quad f_{r,n}(z) = \int_0^z f_{r-1,n}(t)\,dt.$$

$$f_{r,n}(z) = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^z (z-t)^{r-1} J_n(t)\,dt.$$

$$f_{r,n}(z) = \frac{2^r}{\Gamma(r)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+r)}{k!} J_{n+r+2k}(z)$$

$$f_{2,0}(z) = \int_0^z (z-t) J_0(t)\,dt = z\int_0^z J_0(t)\,dt - zJ_1(z)$$

$$f_{2,0}(z) = 4\sum_{k=0}^{\infty}(k+1) J_{2+2k}(z) \xrightarrow[z\to 0]{} \frac{z^2}{2}$$

$$\int_0^\infty J_\nu(t)\,dt = 1 \quad \text{for} \quad \nu > -1$$

$$\int_x^\infty J_0(t)\,dt \to \mathrm{Re}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

Recurrence formula

6

x	① $\int_0^x J_0(t)dt$	② $J_1(x)$	$f_{2,0}(x)/x$ ① − ②	$2f_{2,0}(x)/x^2$	$J_0(x)$
0	0	0	0	1.----	1. ——
.5	.48968	.24227	.24741	.98964	
1	.91973	.44005	.47968	.95936	
1.5	1.24145	.55794	.68351	.91135	
2	1.42577	.57672	.84905	.84905	
2.5	1.46798	.49709	.97089	.77671	
3	1.38757	.33906	1.04851	.69901	
4	1.02473	-.06604	1.09077	.54538	
5	.71531	-.32758	1.04289		
6	.70622	-.27668	.98290		
7	.95464	-.00468	.95932		
8	1.21075	.23464	.97611		
9	1.25227	.24531	1.00690		
10	1.06701	.04347	1.02354		

$$\cancel{\int p\, sgn\, x\, dx = H_{58} + E_8 = \rho g K X_5 f_{58} + \rho g a H_8}$$

$$H_8 \doteqdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{iKx} dx \int_c \left(\phi_8 \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \phi_8}{\partial n} \right) e^{-Kz} ds$$

$$\doteqdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{iKx} (sgn\, x)\, dx \cdot \underbrace{\int_c \left(\phi_3^T \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial z}{\partial n} \right) e^{-Kz + iKy} ds}_{(B - K f_3^T)}$$

$$= (B - K f_3^T) \frac{2i}{\cancel{i}K} \left(1 - \cos \frac{KL}{2}\right) =$$

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{iKx} sgn\, x\, dx = \frac{e^{i\frac{KL}{2}} - 1}{iK} - \frac{1 - e^{-i\frac{KL}{2}}}{iK}$$

$$= \frac{2}{iK} \left(\cos \frac{KL}{2} - 1 \right)$$

$$f_{58} = \frac{L^2}{4} f_3^T$$

$$F = \frac{1}{2} \rho g X_5 \left[K \left(\overset{\frac{L^2}{4} f_3^T}{f_{58}} + \frac{\nabla L}{4} \right) - \frac{A_{WL}}{4} + \frac{a}{X_5} H_8 \right]$$

$$= \frac{1}{8} \rho g X_5 \left[L \{ \underbrace{K (L f_3^T + \nabla) - A_W}_{-D_3} + \frac{4a}{X_5} H_8 \right]$$

$$= \frac{\rho g X_5}{8} \left[-D_3 L \right] + \frac{\rho g a}{2} H_8$$

昭和　　年　　月　　日

$$F_1 = \frac{\rho g X_5}{8}\left[-D_3 L + \frac{4a}{X_5} H_8\right]$$

$$\frac{X_5}{a} = \frac{H_5}{D_5}, \quad \frac{4 H_8 D_5}{H_5} =$$

$$\frac{H_8}{H_3} = \frac{\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{iKX} \, sgx \, dX}{\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{iKX} dx} = \frac{\frac{2}{iK}\left(\cos\frac{KL}{2} - 1\right)}{\frac{e^{\frac{iKL}{2}} - e^{-\frac{iKL}{2}}}{iK}}$$

$$= \frac{\left(\cos\frac{KL}{2} - 1\right)}{i \sin\frac{KL}{2}} = \frac{i\left(1 - \cos\frac{KL}{2}\right)}{\sin\frac{KL}{2}} = \frac{i \sin\frac{KL}{4}}{\cos\frac{KL}{4}}$$

$$= i \tan\frac{KL}{4}$$

$$F = \frac{\rho g L}{8} X_5 \left[-D_3 + \frac{4 H_8 D_5}{H_5 L}\right].$$

$$\frac{F_1}{\rho g L B a} = -\frac{1}{8}\frac{H_5}{D_5}\frac{D_3}{B} + \frac{H_8}{2LB}$$

$$= -\frac{1}{8}\frac{H_5 D_3}{D_5 B}\left\{1 - \frac{4 H_8}{L H_5} \times \frac{D_5}{D_3}\right\}$$

$$= -\frac{1}{8}\frac{H_5 D_3}{B D_5}\left\{1 - \frac{4 H_8 Z_m}{H_3 \cdot L \Theta_m}\right\}$$

$$\frac{4 H_8}{L H_3} \times \underbrace{\frac{H_3}{H_5} \frac{D_5}{D_3}}_{\frac{X_3}{a} \times \frac{a}{X_5}} = \frac{4 H_8 X_3}{L H_3 X_5}.$$