

17-31

昭和48年10月28日

11月25日増補

浅い水面に浮ぶ平板の問題

別冊正刊

序

1. 問題の定式化	1
2. カとモーメント	2
3. 積分定理	5
4. 境界値問題	6
5. 遠方の速度ポテンシアル	8
6. 平板の上下揺れ, 縦揺れ	9
7. 長方形板の問題	16
8. 有限水深の極限としての浅海	17
9. 2次元問題	19-28

序

水深が充分浅くなると、所謂 浅水の問題になる。
 このような時は又一つの極限として、波の速さがあるばかり
 でなく、同板 相 同板 などでは 解析的に 解け
 るので 便利である。

又 2次元問題は勿論 簡単に 置いて、J.J. Stoker
 の Text に 記されて いる 通りである。

なおこの Text には 力は explicit に 出て いないが 2次元の 通りである。
 §2 (4) の 形で heaving 1111 (幅を 2 と して)

$$f_{33} = -\frac{2}{3h} \left(1 - \frac{3}{K}i\right),$$

出て行く波の振幅は、

$$A = \frac{i}{Kh} e^{iKx}, \quad [\phi = A e^{-iKx} \text{ for } x > 0]$$

pitching に 対し、

$$f_{44} = -\frac{2}{45h} \frac{(6+iK)}{(1+iK)},$$

15 の 振幅 は

$$A = -\frac{e^{iKx}}{3h(1+iK)},$$

16 の 振幅 は

$$e_3 = \int_{-1}^1 (\phi_0 + \phi_1) \left(\frac{1}{2} \right) dx = -2iKhA$$

と なるから

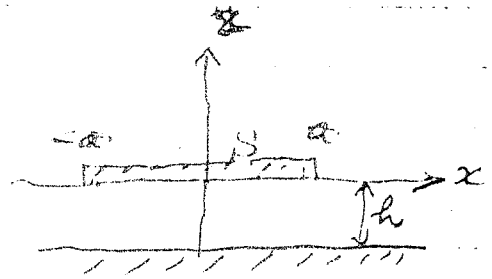
$$e_3 = 2e^{iKx}$$

$$e_4 = -\frac{2iK}{3(1+iK)} e^{iKx},$$

1. 問題の定式化*

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = \frac{1}{gh} \zeta_t, \quad \text{on } (1)$$

$$\zeta_t = -h(\Phi_{xx} + \Phi_{yy}) \quad \text{on } (2)$$

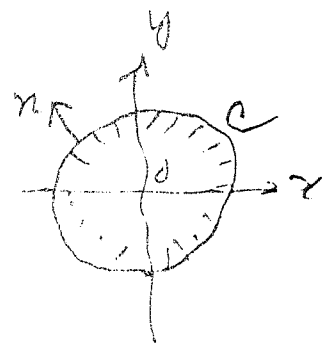


$$\frac{p}{\rho} = -\Phi_t \oplus g\zeta \quad (3)$$

$$[\psi = \nabla \Phi]$$

$$\Phi_n, \Phi_t, \text{ continuous on } C \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \varphi(x, y) e^{i\omega t} \\ \zeta &= z(x, y) e^{i\omega t} \\ p &= p(x, y) e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} (5)$$



とある。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \frac{\omega^2}{gh} \varphi &= 0 \quad \text{outside } C \\ i\omega z(x, y) &= -h(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), \quad \text{inside } C \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\varphi_n, \varphi \text{ continuous on } C, \quad (7)$$

$$\text{とある} \quad \varphi = -i\omega X \phi \quad (8)$$

X は 運動の振幅, とあると (6) の 1 式は 不変で 2 式は

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = \frac{z(x, y)}{h} \quad (9)$$

$$E = \frac{1}{2} \rho \int_{\text{vol}} (\dot{\zeta}^2 + \dot{\Phi}^2) dV + \frac{1}{2} \rho g \int_{\text{vol}} \zeta^2 dV$$

$$\dot{E} = \frac{1}{2} \rho \int_{\text{vol}} \dot{\zeta} \dot{\zeta} dV$$

* J. J. Stoker "Water Waves" p. 414 ~

$$\frac{d^6}{dx^6} \varphi + \frac{\rho g \cdot m \omega^2}{E h} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{\omega^2 \rho}{E h} \varphi = 0$$

2. 力とモーメント

垂直力 Z と モーメント M_x, M_y は 静水圧を除いて
運動圧による

$$Z = \iint_S p_i dx dy = -\rho \iint_S \Phi_t dx dy = -\rho i \omega \iint_S \phi_i dx dy, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \iint_S p_i \left(\frac{y}{x} \right) dx dy = -\rho \iint_S \frac{\Phi_t}{x} y dx dy = -\rho i \omega \iint_S \frac{\phi_i(y)}{x} dx dy, \\ M_y &= \iint_S p_i \left(\frac{x}{y} \right) dx dy = -\rho \iint_S \frac{\Phi_t}{y} x dx dy = -\rho i \omega \iint_S \frac{\phi_i(x)}{y} dx dy, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(8) 式を代入すると

$$\left. \begin{aligned} Z &= -\rho X_j \omega^2 f_{j3} \\ M_x &= -\rho X_j \omega^2 f_{j4} \\ M_y &= -\rho X_j \omega^2 f_{j5} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{j3} &= \iint_S \phi_i \left(\frac{1}{x} \right) dx dy, \\ f_{j4} &= \iint_S \phi_i \left(\frac{y}{x} \right) dx dy, \\ f_{j5} &= \iint_S \phi_i \left(\frac{x}{y} \right) dx dy, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

したがって力は、入射波の potential は振幅 a と

$$\left. \begin{aligned} \phi_0(x, y) &= \frac{ga}{i\omega} \phi_0(x, y) \\ \phi_0(x, y) &= e^{iK(x\cos\alpha + y\sin\alpha)} \\ K &= \omega/\sqrt{gh} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

これより ϕ_d は $\pi/4$ だけ遅れる

$$\left. \begin{aligned} \phi_d &= \frac{ga}{i\omega} \phi_d(x, y) \\ X_d &= \frac{g}{\omega^2} a \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

とかくと

$$\left. \begin{aligned} Z_w &= -\rho g a e_3 \\ M_{wx} &= -\rho g a e_4 \\ M_{wy} &= -\rho g a e_5 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

と 3173

$$e_{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}} = \iint_S \left((\phi_0 + \phi_j) \left(\frac{1}{x} \frac{1}{y} \right) \right) dx dy, \quad (8)$$

2節(2)より (3.4.8)より

$$h \iint_S \phi_0 \Delta \phi_j dS = h \iint_S \phi_j \Delta \phi_0 dS = \frac{\omega^2}{g} \iint_S \phi_j \phi_0 dS$$

$$e_j = h \iint_S [K^2 \phi_j + \frac{Z_j}{\omega^2}] \phi_0 dS,$$

$$= 4ik H_j(K, \alpha), \quad j=3, 4, 5, \quad (9)$$

H_j は §5, (4) による。

$$Z_3 \equiv 1, \quad Z_4 \equiv x, \quad Z_5 \equiv y$$

よって Hankel の関係式である。

さて (4) (8) は S 上のポテンシヤルで与えられるから
 C の外側でポテンシヤルで表すには

$$\iint_S \phi_i Z_j dS = h \iint_S \phi_i \Delta \phi_j dS = h \iint_S \phi_j \Delta \phi_i dS$$

で与えられる。

昭和 年 月 日

— $L\Delta\phi_i = Z_i$ の一つの特解(これは被験により
簡単に求まる)を f_i とおくと

$$\iint_S \phi_i Z_j dS = \iint_S f_j Z_i dS + h \int_C \left(\phi_i \frac{\partial f_j}{\partial n} - f_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right) ds, (10)$$

となり、ここで ϕ_i は外側のポテンシャルに等しいからこの式は外側のポテンシャルでの力の表現となる。

3. 積分定理

今 2つの ポテンシャル ϕ_1, ϕ_2 があつて S 上で

$$\{1, 9 \text{ により}\} \quad \nabla^2 \phi_j = h \Delta \phi_j, \quad j=1, 2, \dots (1)$$

となるときと

$$\iint_S \phi_1 \nabla^2 \phi_2 dx dy = h \iint_S \phi_1 \Delta \phi_2 dx dy = h \iint_S \phi_2 \Delta \phi_1 dx dy + h \int_C \left(\phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right) ds$$

C の内外で ϕ_1, ϕ_2 は 連続であり、かつ ϕ_1, ϕ_2 は
無限遠方で 0 となり、 $\sqrt{r}$ で 小さくなる radiation
potential とするならば、右辺の 2 項は消えて
再び (1) により 2 項の 相消性 が 成立する。

$$\iint_S \phi_1 \nabla^2 \phi_2 dx dy = \iint_S \phi_2 \nabla^2 \phi_1 dx dy, \quad \dots (2)$$

又 C 上で $\{5\}$ (2) 式の 両辺を 有するならば

$$\iint_S \phi_1 \nabla^2 \phi_2 dx dy - \iint_S \phi_2 \nabla^2 \phi_1 dx dy = \frac{2\pi^2}{\pi K} \int_0^{2\pi} [H_1(\theta) \overline{H_2(\theta)}] d\theta, \quad (3)$$

また C 外側 の ポテンシャル の 相消定理 (2) を求め
るときは $\rightarrow \tau_2$ ように

$$\int_C \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} ds = \int_C \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} ds, \quad \dots (4)$$

4. 境界値問題

§1, (6), (9) の一般解は極座標表示で C の外では

$$\phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(2)}(Kr) \cos n\theta, \quad (1)$$

$K = \omega/\sqrt{gR}$

C の内側では

$$\phi(x, y) = \frac{1}{h} \left[f_0(x, y) + f(x, y) \right], \quad (2)$$

$$\Delta f_0(x, y) = Z(x, y) \quad (3)$$

$$\Delta f(x, y) = 0$$

(1) は poisson の方程式であるから f_0 は極座標表示で求まるが今は観察により f_0 を求めるのが困難であるのでこの係数にしておく。

ここで $f(x, y)$ は任意の適切な関数である。

f_0 がわかれば物理系上の境界条件は満たされるので問題は外側で (1) のようなポテンシヤルに滑らかに接続されるように f を決めるつまり matching の問題である。

形式的には次のように考えられる。

C の外側でノイマン問題を N^0 とすると

$$\phi(p) = \int_C \phi(q) N^0(p, q) ds, \quad \dots (4)$$

内側で N^i と T^i と

$$\phi(p) = \frac{1}{h} f_0(p) + \int_C (\phi - \frac{f_0}{h}) N^i(p, q) ds(q),$$

$$= \frac{1}{h} \left[f_0(p) - \int_C \frac{\partial f_0}{\partial n} N^i ds \right] + \int_C \frac{\partial \phi}{\partial n} N^i ds, \quad (5)$$

C 上で ϕ と ϕ_n が一致する場合には (4) と (5) を equate して

昭和 年 月 日

$$\frac{1}{h} \left[f_0(p) - \int_C \frac{\partial f_0}{\partial n} N^i ds \right] = \int_C \frac{\partial \phi}{\partial n} \{ N^0 - N^i \} ds, \quad \text{on } C \quad (6)$$

積分方程式を得る。

右辺の核は N^0 と N^i が共に対称性を持つことにより、積分方程式の正則性によって $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ は一義的に決まる。

ところで (5) により C の内部で ϕ が決まり問題は解けた事になる。

実際には N^0, N^i が与えられる事が大変なので適当な f を仮定して (1) と (2) を C 上でつなげるような一連方程式を立てるのが最も簡単な数値的方法であろう。

具体的な問題に入る前に境界条件について考えておこう。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{heaving} \text{ に対して} & z(x, y) = 1, \\ \text{pitching} \text{ に対して} & z(x, y) = x, \\ \text{rolling} \text{ に対して} & z(x, y) = y. \end{array} \right\} \quad (7)$$

diffraction に対しては、§2, (5) のように入射波を ϕ_0 とし

$$\Delta(\phi_a + \phi_0) = 0 \quad \text{on } C$$

$$\Delta \phi_a = -\Delta \phi_0 = k^2 \phi_0 = \frac{z}{-h}$$

$$\therefore z = \frac{\omega^2}{g} \phi_0(x, y), \quad \dots \dots (8)$$

となる。

5. 遠方のポテンシャルについて

(2nd?)

§4 (1) は又

$$H_0^{(2)}(kr) \xrightarrow{r \rightarrow 0} -iY_0(kr) \doteq \frac{2}{\pi i} \ln\left(\frac{\gamma k r}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} e^{-ikr + \frac{\pi}{4}i}$$

2" 節から *

$$\phi(P) = \frac{i}{4} \int_C \left[\phi(Q) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(KR) - \frac{\partial \phi}{\partial n} H_0^{(2)}(KR) \right] dS(Q) \quad (1)$$

$$R = PQ = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}, \quad P \equiv (x, y), \quad Q \equiv (x', y')$$

より

$$\phi(P) \xrightarrow{P \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} H(k, \theta) e^{-ikr + \frac{\pi}{4}i}, \quad \dots (2)$$

$$H(k, \theta) = \frac{i}{4} \int_C \left\{ \phi(Q) \frac{\partial}{\partial n} e^{ik\tilde{\omega}} - \frac{\partial \phi}{\partial n} e^{ik\tilde{\omega}} \right\} dS(Q) \quad (3)$$

$$\tilde{\omega} = x' \cos \theta + y' \sin \theta, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

グリーンの定理によつて S 上の積分は T と

$$H(k, \theta) = \frac{1}{4i} \int_S \left[k^2 \phi(Q) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} \right] e^{ik\tilde{\omega}} dS(Q), \quad \dots (4)$$

よつて S 上の ϕ がわかれば 出て行く波の T の形は
わかることになる。

* T.H. Havelock; P. R. S. vol. 175 (1940)
 H. Masuo; Bull. Fac. Sci. Tokyo Univ. vol. 3 (1956)
 M. Bessho; J. Z. K. vol. 103 (1958)

昭和 年 月 日

6. 円板の上下面と軸に於て

半径を1とする。

i) 上下面

$$z(x, y) = 1 \quad \text{for } r < 1$$

$$\text{よって } \phi(r, 0) = \frac{1}{4h} [r^2 + C], \quad r \leq 1, \quad (1)$$

 $r > 1$ の場合

$$\left. \begin{aligned} \phi(r, 0) &= A H_0^{(0)}(kr) \\ \phi_r(r, 0) &= -KA H_1^{(2)}(kr) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

 $\text{よって } r=1$ の境界条件より

$$\frac{1}{2h} = -KA H_1^{(2)}(k) \quad \text{より } \phi \quad (3)$$

$$\frac{1}{4h} (1+C) = A H_0^{(2)}(k) \quad \text{より } \phi \quad (4)$$

$$\text{よって } \left. \begin{aligned} A &= -\frac{1}{2kH_1^{(2)}(k)} \\ C &= -1 - 2H_0^{(2)}(k) / [kH_1^{(2)}(k)] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} f_{33} &= \iint \phi \, r \, dr \, d\theta = \frac{2\pi}{4h} \int_0^1 (r^2 + C) r \, dr = \frac{\pi}{2h} \left[\frac{1}{4} + \frac{C}{2} \right] \\ &= \frac{\pi}{4h} \left[1 + 4 \frac{H_0^{(2)}(k)}{H_1^{(2)}(k)} \right] \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{33}(k, \alpha) &= \frac{1}{4i} \int_0^1 \left[\frac{k^2}{4h} (r^2 + C) + \frac{1}{2h} \right] e^{ikr \cos(\theta - \alpha)} r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{\pi}{2ih} \int_0^1 \left[1 + \frac{k^2}{4} (r^2 + C) \right] J_0(kr) r \, dr \\ &= \frac{\pi}{2ih} \left[\frac{J_1(k)}{k} \left(1 + \frac{k^2}{4} C \right) + \frac{k}{4} J_1(k) - \frac{1}{2} J_2(k) \right] \end{aligned}$$

昭和 年 月 日

$$\therefore \int_0^{\infty} J_0(z) z dz = J_1(\infty),$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} z^3 J_0(z) dz &= z^2 (z J_1(z)) - 2 \int_0^{\infty} z \{z J_1(z)\} dz \\ &= z^3 J_1(z) - 2 z^2 J_2(z) = z^3 \left\{ J_1(z) - \frac{2}{z} J_2(z) \right\} \\ &= \frac{z^3}{2} \{ J_1 - J_3 \} = z^3 J_2'(z) \end{aligned}$$

$$H_3(K, \alpha) = \frac{1}{2iK^2 H_1^{(2)}(K)}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} K \rightarrow 0 \quad \therefore \quad H_0^{(2)}(K) &\xrightarrow{K \rightarrow 0} \frac{2}{\pi^2} \log\left(\frac{\sigma K}{2}\right) \\ &\searrow K \rightarrow \infty \quad \sqrt{\frac{2}{\pi K}} e^{-iK + \frac{\pi}{4}i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_1^{(2)}(K) &\xrightarrow{K \rightarrow 0} -\frac{2}{\pi_1 K} \\ &\searrow K \rightarrow \infty \quad i \sqrt{\frac{2}{\pi K}} e^{-iK + \frac{\pi}{4}i} \end{aligned}$$

$$J_n(K) \xrightarrow{K \rightarrow 0} \left(\frac{K}{2}\right)^n / n!,$$

$$J_n(K) \xrightarrow{K \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi K}} \cos\left(K - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

 $K \rightarrow 0 \therefore$

$$A \doteq +\frac{\pi i}{2h}, \quad C \doteq -1 + 2 \log\left(\frac{\sigma K}{2}\right),$$

$$f_{33} \doteq \frac{\pi}{2h} \left[-\frac{1}{2} + 2 \log\left(\frac{\sigma K}{2}\right) \right] = -\frac{\pi}{2h} \left[\log\left(\frac{\sigma K}{2}\right) - \frac{1}{4} \right], \quad (8)$$

$$H_3(K, \alpha) \doteq -\frac{\pi}{4h}, \quad (9)$$

$$k \rightarrow \infty$$

$$A \doteq i \left[\frac{\sqrt{2K}}{\pi} e^{-ik + \frac{\pi}{4}i} \right] = \frac{i\sqrt{\pi}}{\sqrt{2K}} e^{ik - \frac{\pi}{4}i}$$

$$C \doteq -1 + \frac{2i}{K}$$

$$f_{33} \doteq \frac{\pi}{8K} \left[-\frac{1}{2} + \frac{2i}{K} \right] = -\frac{\pi}{8K} \left[1 - \frac{4i}{K} \right], \quad (10)$$

$$H_3(k, \alpha) \doteq \frac{1}{2ik\sqrt{\frac{2}{\pi K}}} e^{ik - \frac{\pi}{4}i} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2K}} e^{ik - \frac{\pi}{4}i}, \quad (11)$$

昭和 年 月 日

ii) 糸のゆれ

$$z = r \cos \theta \quad \text{for } r \leq 1$$

$$\left. \begin{aligned} \phi(r, \theta) &= \frac{1}{8h} [r^2 + c] r \cos \theta \\ r \geq 1 \text{ については} \\ \phi(r, \theta) &= A H_1^{(2)}(kr) \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

A > 2

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{8h} (1+c) &= A H_1^{(2)}(k) \\ \frac{1}{8h} (3+c) &= k A H_1^{(2)'}(k) \end{aligned} \right\}$$

$$\therefore \frac{1}{4h} = A [k H_1^{(2)'} - H_1^{(2)}] = -k A H_2^{(2)}(k)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{1}{4k h H_2^{(2)}(k)} \\ c &= -1 - \frac{2 H_1^{(2)'}(k)}{k H_2^{(2)}(k)} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} f_{44} &= \iint \phi(r \cos \theta) r dr d\theta = \frac{\pi}{8h} \int_0^1 (r^2 + c) r^3 dr \\ &= \frac{\pi}{8h} \left[\frac{1}{8} + \frac{c}{4} \right] = \frac{\pi}{32h} \left[c + \frac{2}{3} \right], \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_4(K, \alpha) &= \frac{1}{4i} \iint_S \left[\frac{r \cos \theta}{2h} + \frac{k^2}{8h} [r^2 + c] r \cos \theta \right] e^{i k r \cos(\theta - \alpha)} r dr d\theta \\ &= \frac{\pi \cos \alpha}{2h} \int_0^1 \left[r^2 + \frac{k^2}{8} (r^4 + c r^2) \right] J_1(kr) dr \end{aligned}$$

$$\int_0^z z^2 J_1(z) dz = z^2 J_2(z)$$

$$\int_0^z z^4 J_1(z) dz = z^4 J_2 - 2 \int_0^z z^3 J_2(z) dz = z^4 J_2 - 2 z^3 J_3$$

$$\therefore H_4(K, \alpha) = \frac{\pi}{2Kh} \cos \alpha \left[\left(1 + \frac{K^2}{8}\right) J_2(K) + \frac{K^2}{8} \left\{ J_2(K) - \frac{2}{K} J_3(K) \right\} \right]$$

$$= \frac{\pi \cos \alpha}{2Kh} \left[J_2 - \frac{K}{4} J_3 - \frac{KH_1^{(2)}(K) J_2(K)}{4 H_2^{(2)}} \right]$$

$$= \frac{\pi \cos \alpha}{8h} \left[J_1 - \frac{J_2 H_1^{(2)}}{H_2^{(2)}} \right] = \frac{\pi \cos \alpha}{8h H_2^{(2)}(K)} [J_1 Y_2 - J_2 Y_1]$$

$$= \frac{i \cos \alpha}{4Kh H_2^{(2)}(K)} \quad (15)$$

$$H_2^{(2)}(K) \xrightarrow{K \rightarrow 0} -i Y_2(K) \doteq \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{K}\right)^2$$

$$\xrightarrow{K \rightarrow \infty} -\sqrt{\frac{2}{\pi K}} e^{-iK + \frac{\pi}{4}i}$$

∴ 以上より $K \rightarrow 0, \infty$ の不定積分は容易に求められる

iii) 散光

特に必要は無いが $\alpha > 2$ のようにする。

$$z = \frac{\omega^2}{g} e^{iK(X \cos \alpha + Y \sin \alpha)} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{\omega^2}{g} e^{iKr \cos \theta}, \quad (16)$$

$r \leq 1$ のとき

$$\phi_d = -e^{iKX} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n C_n r^n \cos n\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (C_n r^n - i^n J_n(Kr)) \cos n\theta$$

$r \geq 1$ のときは

$$\phi_d = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n A_n H_n^{(2)}(Kr) \cos n\theta, \quad (17)$$

$r = 1$ のとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (C_n - i^n J_n(K)) \cos n\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n A_n H_n^{(2)}(K) \cos n\theta,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (nC_n - K i^n J_n'(K)) \cos n\theta = K \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n A_n H_n^{(2)'}(K) \cos n\theta,$$

$$\therefore e^{iKr \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n(Kr) \cos n\theta$$

$$\left. \begin{aligned} C_0 - J_0(K) &= A_0 H_0^{(2)}(K) \\ -J_0'(K) &= A_0 H_0^{(2)'}(K) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} C_n - i^n J_n(K) &= A_n H_n^{(2)}(K) \\ nC_n - i^n K J_n'(K) &= K A_n H_n^{(2)'}(K) \end{aligned} \right\} \text{ for } n \geq 1$$

$$\begin{aligned} \therefore A_0 &= -J_0'(K) / H_0^{(2)'}(K) \\ C_0 &= J_0(K) - \frac{J_0'(K) H_0^{(2)}(K)}{H_0^{(2)'}(K)} = \frac{J_0 Y_0' - J_0' Y_0}{i H_0^{(2)'}(K)} \\ &= \frac{2}{\pi K i H_0^{(2)'}(K)} = \frac{2i}{\pi K H_1^{(2)}(K)} \end{aligned} \quad (19)$$

昭和 年 月 日

$$-i^n \left[J_n'(K) - \frac{n}{K} J_n \right] = A_n \left[H_n^{(2)'}(K) - \frac{n}{K} H_n^{(2)} \right]$$

$$-i^n J_{n+1}(K) = A_n H_{n+1}^{(2)}(K)$$

$$\therefore A_n = -i^n \frac{J_{n+1}(K)}{H_{n+1}^{(2)}(K)}, \quad (20)$$

$$\therefore C_n = i^n J_n(K) - \frac{i^n J_{n+1}(K) H_n^{(2)}}{H_{n+1}^{(2)}(K)} = \frac{i^{n-1}}{H_{n+1}^{(2)}(K)} \left[J_n Y_{n+1} - J_{n+1} Y_n \right]$$

$$\begin{aligned} J_n Y_{n+1} - J_{n+1} Y_n &= J_n \left(\frac{n}{K} Y_n - Y_n' \right) - \left(\frac{n}{K} J_n - J_n' \right) Y_n \\ &= Y_n J_n' - J_n Y_n' = \frac{-2}{\pi K} \end{aligned}$$

$$\therefore C_n = \frac{2i^{n+1}}{\pi K H_{n+1}^{(2)}(K)}, \quad (21)$$

よりの3次式は §2 (8) より

$$\phi_0 + \phi_d = \sum_{n=0}^{\infty} e_n C_n r^n \cos n\theta$$

であるから、

$$e_3 = \iint_S (\phi_0 + \phi_d) r^3 dr d\theta = \pi C_3 = \frac{2i}{K H_4^{(2)}(K)} \quad (22)$$

$$e_4 = \iint_S (\phi_0 + \phi_d) r^4 \cos \theta dr d\theta = \frac{\pi}{2} C_4 = \frac{-1}{K H_5^{(2)}(K)}$$

この式は (7), (15) と因数とを
を除いて一致するから §2 (9) が成立する
ことがめられる。

7. 矩形板の問題

円板以外で解析的に解けるのは楕円板でこれはマシウ関数に展開すればよい。

しかし他の形状では数値的に板かうより他に方法はない。

矩形板の場合も結局 §4 (1), (2) の展開を仮定して C 上の接線条件によって係数を決める事になる。

ここでは $K \rightarrow 0$ の近似値について考える。

まず §4 (2), (3) の $f_0(x, y)$ は

$$\Delta \frac{(x^2 + y^2)}{4} = 1$$

$$\Delta \frac{1}{8} (x^3 + y^2 x) = x$$

であるから

$$f_0(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4h} (x^2 + y^2), & \text{for } \text{cave} \\ \frac{1}{8h} (x^3 + y^2 x), & \text{for } \text{pitch} \end{cases} \quad (1)$$

ϕ の 1 次近似は f_0 であったか、あるいは §2 (10) によって

$$f_{33} \doteq \iint f_{03} dS = \frac{1}{4h} \iint (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{4h} \left[\frac{L^3 B}{12} + \frac{L B^3}{12} \right], \quad (2)$$

$$f_{44} \doteq \frac{1}{8h} \iint (x^3 + y^2 x) x dx dy = \frac{1}{8h} \left[\frac{L^5 B}{80} + \frac{L^3 B^3}{144} \right], \quad (3)$$

又 1 次の振幅力は §2 (9) によって

$$e_3(\alpha) \doteq \lim_{K \rightarrow 0} \iint e^{iK(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} dx dy = \frac{4 \sin \frac{K}{2} (L \cos \alpha) \sin \left(\frac{K}{2} B \sin \alpha \right)}{K^2 \cos \alpha \sin \alpha}, \quad (4)$$

$$e_4(\alpha) \doteq \lim_{K \rightarrow 0} \iint x e^{iK(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} dx dy = \quad (5)$$

8. 有限水深の無限限としての浅海
水深が有限とすると、そのグリーン関数は*

$$G(x, y, z; a, b, c) = 2\pi i \frac{m_0^2 - k^2}{h m_0^2 - h k^2 + K} \cosh m_0(c+h) \cosh m_0(x+h) \times H_0^{(1)}(m_0 R)$$

$$+ 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n^2 + k^2}{h m_n^2 + h k^2 - K} \cosh m_n(c+h) \cosh m_n(x+h) K_0(m_n R), \quad (1)$$

$$\text{但し } K = \omega^2 g,$$

$$\left. \begin{aligned} m_0 \tanh m_0 h &= K \\ m_n h \tan m_n h &= -K \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$h \rightarrow 0$ とすると (2) より、

$$m_0 = \sqrt{K/h}, \quad m_n = \frac{n\pi}{h}, \quad (3)$$

よって、(1) は、

$$G \rightarrow \frac{\pi i}{h} H_0^{(1)}(m_0 R) + \frac{4}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \cosh m_n(c+h) \cosh m_n(x+h) K_0(m_n R), \quad (4)$$

をうける公式は、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \cosh\left(\frac{n\pi}{h} v\right) K_0\left(\frac{n\pi}{h} R\right) &= \frac{1}{2} \log\left(\frac{R}{4h}\right) \\ &+ \frac{h}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + \{(2m-2)h - v\}^2}} - \frac{1}{2mh} \right] \\ &+ \frac{h}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + \{2mh + v\}^2}} - \frac{1}{2mh} \right], \quad (5) \end{aligned}$$

* J. H. Hwang, H. Maeda, H. Issiki

昭和 年 月 日

であるから (4) の右辺の2項は、主要項として
対数的特異点を持つ関数な(5)の形に
表すなおす事が出来る。

なお(5)の右辺の2, 3項は、水底および水面を周する
image 項であるから、水の中で正確である。

このような核(4)を用いければ、有限水深の場合と同じ
解法を適用出来るけれど、前節迄の解と完全に
一致するとは思われない。

前節迄の議論は、浅海は理論によっている
ので、これよりもさらに近似的な理論になつてい
ると思つてよからう。

9. 2次元問題

最後に J.J. Stoker の Text の解を 4' 報の形式に整理しておく。

解くべき方程式は [5] (6), (9) は

$$\phi_{xx} + K^2 \phi = 0, \quad K^2 = \omega^2 / gh, \quad (1)$$

$$\phi_{xx} = \frac{1}{h} Z(x), \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} Z &= -\rho \omega^2 x_j f_{j3} \\ M_y &= -\rho \omega^2 x_j f_{j5} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{j3} \\ f_{j5} \end{aligned} \right\} = \int_{-1}^1 \phi_0 \left(\frac{1}{x} \right) dx, \quad (4)$$

$$\text{したがって} \quad \phi_0(x) = e^{iKx}, \quad (5)$$

この力は

$$\left. \begin{aligned} Z &= -\rho g a e_3 \\ M_y &= -\rho g a e_5 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} e_3 \\ e_5 \end{aligned} \right\} &= \int_{-1}^1 (\phi_0 + \phi_a) \left(\frac{1}{x} \right) dx \\ &= 4i \ln \left(\begin{aligned} H_3^\pm(k) \\ H_5^\pm \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

$$H_j^\pm(k) = \frac{1}{4i} \int_{-1}^1 \left[K^2 \phi_j + \frac{Z}{h} \right] e^{\pm iKx} dx, \quad (8)$$

0) 1次元の解 for $\varepsilon = 0$.

$$\phi(x) = \frac{1}{\hbar} (C + Dx) \quad \text{for } |x| \leq 1$$

$$\phi(x) = A^+ e^{-ikx} \quad \text{for } |x| > 1$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{C+D}{\hbar} &= A^+ e^{-ik} \\ \frac{D}{\hbar} &= -ik A^+ e^{-ik} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \frac{C-D}{\hbar} &= A^- e^{ik} \\ \frac{D}{\hbar} &= +ik A^- e^{ik} \end{aligned} \right\}$$

A^+ が恒等的に 0 でない解は

$$\phi(x) = \frac{D}{\hbar} x$$

$$\frac{D}{\hbar} = -ik A^+ e^{-ik}$$

$$A^+ = -A^-$$

この解だけ不定となるがこれは 下図のようになる場合の swaying osc. に対応する解であると考えられる。

今の場合 sway の影響は小さいとして 以下はこれを見ない。

もし考えに入れるとするとこの解では不定であるから 実際の形から

sway による変位 $\delta(x)$ を求めて

解くのがよからう。

(定数を入れて)

そうすると角型に近づくにつれ上の解に近づくであろう。

昭和 年 月 日

i) 上下重り

 $z = 1$ とおくと (2) より

$$\phi(x) = \frac{1}{h} \left(\frac{x^2}{2} + c \right), \quad \text{for } |x| < 1, \quad (9)$$

 $|x| \geq 1$ では

$$\phi(x) = A^+ e^{ikx} \quad \text{for } x \geq 0, \quad (10)$$

 $\therefore \phi$ と ϕ_x が $x = \pm 1$ で連続であるから (12)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{2} + c \right) &= A^+ e^{-ik} = A^- e^{-ik} \\ \frac{1}{h} &= -ik A^+ e^{-ik} = -ik A^- e^{-ik} \end{aligned} \right\} \quad (11) \quad A^+ = A^-$$

より

$$\left. \begin{aligned} A^+ &= \frac{e^{ik}}{-ikh} \\ c + \frac{1}{2} &= \frac{i}{k} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$f_{33} = \frac{1}{h} \int_{-1}^1 \left(\frac{x^2-1}{2} + \frac{i}{k} \right) dx = \frac{1}{h} \left(\frac{2i}{k} - \frac{2}{3} \right), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} H_j^+ &= \frac{1}{4i} \int_{-1}^1 [\phi_{jxx} \phi_0 - \phi_j \phi_{0xx}] dx = \frac{1}{4i} [\phi_j \phi_0 - \phi_j \phi_{0x}]_{x=-1}^{x=1} \\ &= \frac{1}{4i} [2ik A_j^+] = \frac{-k}{2} A_j^+, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\text{or } e_j = 4ik H_j^+ = -2ikh A_j^+, \quad (15)$$

運動方程式は

$$M \ddot{z} + \rho g A_w z = Z + Z_w, \quad (16)$$

$$[-\omega^2 M + 2\rho g + \rho \omega^2 f_{33}] z = -\rho g a e_3, \quad (17)$$

$$\therefore z = \frac{-\rho g a e_3}{2\rho g - \omega^2 M + \rho \omega^2 f_{33}} = \frac{-2\rho g a e^{ik}}{2\rho g - \omega^2 M + \frac{\rho \omega^2}{h} \left(-\frac{2}{3} + \frac{2i}{k} \right)}$$

$$\frac{z}{a} = \frac{-2e^{ik}}{2 - \frac{\omega^2}{g} \left(\frac{M}{P} + \frac{Q}{3R} \right) + 2i} \quad (18)$$

ii) 縦ゆれ.

$z = x$. とおくと (2) より

$$\phi = \frac{1}{h} \left(\frac{x^3}{6} + cx \right) \quad (19)$$

$|x| \geq$ では (10) のように表わされる x の接続条件は

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{6} + c \right) &= A^+ e^{-ik} = -A^- e^{-ik} \\ \frac{1}{h} \left(\frac{1}{2} + c \right) &= -ikA^+ e^{-ik} = ikA^- e^{-ik} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\underline{A^+ = -A^-}$$

$$\frac{1}{3h} = (-ik - 1)A^+ e^{-ik}$$

$$A^+ = \frac{-e^{+ik}}{(1+ik)3h}$$

$$c + \frac{1}{6} = \frac{-1}{3(1+ik)}$$

$$(21)$$

$$\begin{aligned} f_{55} &= \int_{-1}^1 f_5 x dx = \frac{1}{h} \left(\frac{2}{5h} + \frac{2c}{3} \right) = \frac{2}{3h} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3(1+ik)} \right) \\ &= \frac{2}{3h} \left(-\frac{1}{15} - \frac{1-ik}{3(1+k^2)} \right) = \frac{-2}{3h} \left[\frac{16+k^2}{15(1+k^2)} + \frac{ik}{3(1+k^2)} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

運動方程式は

$$I \ddot{\theta} + \rho g BM \theta = M_y + M_{wy} \quad (23)$$

$$[-\omega^2 I + \frac{2}{3} \rho g + \rho \omega^2 f_{55}] \theta = -\rho g a e_5 \quad (24)$$

$$BM = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$\left[\frac{2}{3} - \frac{\omega^2}{g\rho} I + \frac{\omega^2}{g} f_{55} \right] \theta = + \frac{2ikha(-e^{ik})}{3\lambda(1+ik)}$$

$$\left[\frac{2}{3} - \frac{\omega^2}{g\rho} I + \frac{\omega^2(2(6+k^2))}{g\rho 45(1+k^2)} + \frac{2ik^3}{9(1+k^2)} \right] \frac{\theta}{ka} = \frac{2e^{ik}}{3\lambda(1+ik)}, \quad (25)$$

iii) 散乱

$$z = \frac{\omega^2}{g} e^{ikx}$$

とかく

$$\phi_d = -e^{ikx} + C + Dx, \quad -|x| < 1, \quad (26)$$

$$\phi_d = A_d e^{\pm ikx}, \quad \text{for } |x| > 1.$$

$$C + D - e^{ik} = A_d^+ e^{-ik}$$

$$D - ik e^{ik} = -ik A_d^+ e^{-ik}$$

$$C - D - e^{-ik} = A_d^- e^{-ik}$$

$$D - ik e^{-ik} = ik A_d^- e^{-ik}$$

$$(e^{ik} - e^{-ik}) = (A_d^+ + A_d^-) e^{-ik}$$

$$2C - (e^{ik} + e^{-ik}) = (A_d^+ + A_d^-) e^{-ik}$$

$$2D - (e^{ik} - e^{-ik}) = (A_d^+ - A_d^-) e^{-ik}$$

$$C = e^{ik} //, \quad D = A_d^+ e^{-ik};$$

$$A_d^+ = \frac{ik}{1+ik} e^{2ik} //, \quad D = \frac{ike^{ik}}{1+ik} //$$

$$A_d^- = \left[\frac{ike^{ik}}{1+ik} - ik e^{-ik} \right] \frac{e^{ik}}{ik} = \frac{e^{2ik}}{1+ik} - 1 //$$

(28)

iv) 反射波, 透過波 (未)

反射波の振幅 A_R , 透過波 A_T とおくと.

$$A_R = -K^2 \left[Z A_3^+ + \Theta A_5^+ + \frac{g a}{\omega^2} A_d^+ \right], \quad \left. \begin{array}{l} (29) \end{array} \right\}$$

$$A_T = -K^2 \left[Z A_3^- + \Theta A_5^- + \frac{g a}{\omega^2} (A_d^- + 1) \right],$$

$$\frac{A_R + A_T}{a} = -(A_d^+ + A_d^- + 1) - 2 \frac{K^2 h}{a} Z A_3^+ \quad \left. \begin{array}{l} (30) \end{array} \right\}$$

$$\frac{A_R - A_T}{a} = -(A_d^+ - A_d^- - 1) - 2 \frac{K^2 h}{a} \Theta A_5^+$$

$$A_d^+ + A_d^- + 1 = e^{2iK},$$

$$A_d^+ - A_d^- - 1 = \left(\frac{iK - 1}{1 + iK} \right) e^{2iK}, \quad \left. \begin{array}{l} \end{array} \right\}$$

$$\frac{K^2 h}{a} Z A_3^+ = \frac{-2 e^{2iK}}{\Delta_3} \cdot \frac{K}{-i} = \frac{2K e^{2iK}}{i \Delta_3}$$

$$\frac{K^2 h}{a} \Theta A_5^+ = \frac{K^3 h \cdot 2 e^{iK} (-e^{iK})}{\Delta_5 \cdot 3i(1+iK)^2 \cdot 3h} = \frac{-2K^3 e^{2iK}}{9i(K+iK)^2 \Delta_5}$$

v) 弾性平頂の場合

$$EI \zeta_{xxxx} + \frac{W}{gL} \zeta_{tt} + P \Phi_t + P g \zeta = \bar{P}_w \quad (31)$$

$$EI \zeta_{xxxx} - \frac{\omega^2 W}{gL} \zeta + P \omega^2 a \phi + P g \zeta = P_w \quad (32)$$

$$P_w = -P(\Phi_0 + \Phi_a)_t = -P g a (\phi_0 + \phi_a) \quad (33)$$

$$\Phi = -i \omega a \phi$$

$$\zeta/a = \Sigma$$

$$\frac{EI}{Pg} \Sigma_{xxxx}(x) - \frac{\omega^2 W}{PgL} \Sigma + \Sigma + \frac{\omega^2}{g} \phi = -(\phi_0 + \phi_a) \quad (34)$$

$$\phi_{xx} = \frac{1}{a} \Sigma(x) \quad \text{for } |x| < 1 \quad (35)$$

$$\text{今 } \Sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n u_n(x) \quad (36)$$

と展開出来るは

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \phi_n(x) \quad (37)$$

$$u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ etc.}$$

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}K} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{K} \right)$$

$$u_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x \text{ etc.}$$

$$\phi_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{2K} \left[\frac{x^3}{6} - x \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3(1+iK)} \right) \right] \quad (39)$$

昭和 年 月 日

$$n \geq 2 \quad 1 \leq 2, 7, 12, 18 \quad U_n(x) = \left(\frac{2}{m_n}\right)^4 \frac{d^4}{dx^4} U_n \quad \text{etc}$$

$$h \phi_n(x) = \left(\frac{2}{m_n}\right)^4 U_n''(x) + C + Dx \quad \left. \vphantom{\frac{2}{m_n}} \right\} (40)$$

$$\phi_n(x) = A_n^+ e^{-iKx} \quad \text{for } x \geq 1.$$

とあわせて境界条件から $U_n'(\pm 1) = U_n''(\pm 1) = 0$ 故

$$A_{2n}^+ e^{-iK} = C/h.$$

$$-iK A_{2n}^+ e^{-iK} = 0$$

$$A_{2n+1}^+ e^{-iK} = D/h.$$

$$-iK A_{2n+1}^+ e^{-iK} = D/h.$$

$$A_n^+ = C = D = 0, \quad (41)$$

つまり ϕ_n は 0 なるポテンシャルとなる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_n(x) &= \frac{1}{h} \left(\frac{2}{m_n}\right)^4 U_n''(x) & \text{for } |x| < 1 \\ &= 0 & \text{for } |x| > 1 \end{aligned} \right\} (42)$$

$$\therefore \int_{-1}^1 \phi_n(x) U_m(x) dx = f_{n,m} = \frac{1}{h} \left(\frac{2}{m_n}\right)^4 \int_{-1}^1 U_n'' U_m dx$$

$$= \frac{1}{h} \left(\frac{2}{m_n} \times \frac{2}{m_m}\right)^4 \int_{-1}^1 U_n'' U_m^{(4)} dx = f_{m,n}, \quad n, m \geq 2. \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 U_n'' U_m^{(4)} dx &= U_m^{(3)} U_n'' \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 U_m''' U_n'' dx = -U_m''' U_n'' \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 U_m'' U_n^{(4)} dx \\ &= - \int_{-1}^1 U_m''' U_n''' dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\phi_0 + \phi_a) U_n dx &= e_n = 4i h H_n^+(K). \quad \left. \vphantom{\int_{-1}^1} \right\} (44) \\ H_n^+(K) &= \frac{1}{4i} \int_{-1}^1 \left[K^2 \phi_n + \frac{U_n}{h} \right] e^{iKx} dx. \end{aligned}$$

昭和 年 月 日

$$H_n^* = \frac{1}{4ik} \int_{-1}^1 \left[K^2 \left(\frac{2}{m_n} \right)^4 U_n'' + U_n \right] e^{iKx} dx.$$

$$e_n = \left(\frac{2}{m_n} \right)^4 \int_{-1}^1 \left[K^2 U_n'' + U_n \right] e^{iKx} dx = 0, \quad \text{for } n \geq 2 \quad (45)$$

ϕ_n は異なるため 明らかに $e_n = 0$ である。(422)

こゝらの関係式を使い、(34) の両辺に $U_n(x)$ をかけて積分すると、 $U_n(x)$ の正交性から、

$$D_n C_n + \frac{\omega^2}{g} \sum_{m=0}^{\infty} C_m f_{m,n} = -e_0 \delta(0,n) - e_1 \delta(1,n), \quad (46)$$

$$D_n = \frac{EI}{\rho g} \left(\frac{m_n}{2} \right)^4 - \frac{\omega^2 W}{\rho g^2 L} + 1, \quad \dots (47)$$

$$\delta(n,m) = \begin{cases} 1 & \text{for } n=m \\ 0 & \text{for } n \neq m. \end{cases} \quad m, n = 0$$

例 (1) e_0, e_1 は (12), (15), (21) より

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 (\phi_0 + \phi_0) dx = \sqrt{2} e^{iK}$$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{-1}^1 (\phi_0 + \phi_0) x dx = \left(\frac{2}{3} \right) \frac{iK}{(1+iK)} e^{iK}, \quad (48)$$

(13), (22) より

$$f_{0,0} = \frac{1}{2L} \left(\frac{2}{K} i - \frac{2}{3} \right),$$

$$f_{1,1} = \frac{-4}{9L} \left(\frac{1}{15} + \frac{1-iK}{3(1+K^2)} \right), \quad (49)$$

高次の振動モードの寄与を無視すると、

昭和 年 月 日

$$\left. \begin{aligned} D_0' c_0 + \frac{\omega^2}{g} c_2 f_{2,0} &= -e_0 \\ D_2' c_2 + \frac{\omega^2}{g} c_0 f_{2,0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

$$\left. \begin{aligned} D_0' &= 1 - \frac{\omega^2 W}{g P g L} + \frac{\omega^2}{g} f_{0,0}, \\ D_2' &= 1 - \frac{\omega^2 W}{g P g L} + \frac{\omega^2}{g} f_{2,2} + \frac{\omega^2}{g} \frac{W}{P g L} \\ \frac{\omega^2}{g} &= \frac{EI}{WL^3} m_2^4 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

$$\left. \begin{aligned} D_1' c_1 + \frac{\omega^2}{g} c_3 f_{3,1} &= -e_1 \\ D_3' c_3 + \frac{\omega^2}{g} c_1 f_{3,1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

$$\left. \begin{aligned} D_1' &= 1 - \frac{\omega^2}{g} \left\{ \frac{W}{P g L} - f_{1,1} \right\}, \\ D_3' &= 1 - \frac{\omega^2}{g} \left\{ \frac{W}{P g L} - f_{3,3} \right\} + \frac{\omega^2}{g} \frac{W}{P g L}, \\ \frac{\omega^2}{g} &= \frac{EI}{WL^3} m_3^4 \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

(46) の両辺に $\bar{C}_n$ をかけると、 $\bar{C}_n C_n$ の項が現れる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n \bar{C}_n C_n + \frac{\omega^2}{g} \sum_{n,m=0}^{\infty} \bar{C}_n C_m f_{m,n} = -(\bar{e}_0 C_0 + \bar{e}_1 C_1)$$

この項を整理する。

$$\frac{\omega^2}{g} \sum_n \sum_m \bar{C}_n C_m (f_{m,n} - \bar{f}_{m,n}) = + [\bar{e}_0 C_0 + \bar{e}_1 C_1 - e_0 C_0 - e_1 C_1]$$

$f_{m,n}$ は $f_{0,0}$, $f_{1,1}$ のみ 0 ではないので、

$$\frac{\omega^2}{g} [\bar{C}_0 C_0 (f_{0,0} - \bar{f}_{0,0}) + \bar{C}_1 C_1 (f_{1,1} - \bar{f}_{1,1})] = [\bar{e}_0 C_0 + \bar{e}_1 C_1 - e_0 C_0 - e_1 C_1]$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega^2}{g} \bar{C}_0 C_0 (f_{0,0} - \bar{f}_{0,0}) &= \bar{e}_0 C_0 - e_0 C_0, \\ \frac{\omega^2}{g} \bar{C}_1 C_1 (f_{1,1} - \bar{f}_{1,1}) &= \bar{e}_1 C_1 - e_1 C_1, \end{aligned} \right\}$$

$$f_{0,0} - \bar{f}_{0,0} = \frac{2i}{K - \bar{K}}$$

$$f_{1,1} - \bar{f}_{1,1} = \frac{8iK}{27(1+K^2)}$$

$$\therefore C_0 \bar{C}_0 (2Ki) = \sqrt{2} (\bar{C}_0 e^{-iK} - C_0 e^{iK})$$

$$C_1 \bar{C}_1 \left(\frac{8iK^3}{27(1+K^2)} \right) = \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{-iK \bar{C}_1 e^{-iK}}{1-iK} - \frac{C_1 iK e^{iK}}{1+iK} \right]$$

$$C_0 \bar{C}_0 = \frac{1}{\sqrt{2} Ki} (\bar{C}_0 e^{-iK} - C_0 e^{iK})$$

$$C_1 \bar{C}_1 = -\frac{27 \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{3}{2}}}{8K^2} [\bar{C}_1 (1+iK) e^{-iK} + C_1 (1-iK) e^{iK}]$$

昭和 48 年 11 月 25 日

水面に浮ぶ弾性平板の重力揺動
(2次元, 有限水深の場合)

別紙に付

序言

頁
0

1. 速度ポテンシャル

1

2. 積分定理

4

3. 力について

5

4. 運動方程式

9

5. 境界値問題

13

附録 A

核函数

A-1-8

B

梁の揺動振動

B-1-6

序

有限水深の次元動揺問題が無限水深の場合とどの程度異なるかについて以下に考察して見た。

鉛直的には本質的に何等変らないと言えよう。

この事は浅水においても同じである*。

弾性平板とことわつたのはあまり意味がない。たゞその運動方程式を書き下して見ただけである。

つまりこのような場合も境界条件を適当な周数系に展開すれば“剛体的な運動の場合と全く同様に運動方程式が立てられる”と言う事である。

* “浅い水面上に浮ぶ平板の問題”

1. 速度ポテンシャル

圧力, 速度ポテンシャル, 表面変位
をそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} p(x, y) e^{i\omega t} \\ \phi(x, y) e^{i\omega t} \\ A(x) e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

とおく。

$$\frac{1}{\rho} p(x, 0) = i\omega \phi(x, 0) + g A(x), \quad (2)$$

$$\phi_y(x, 0) = -i\omega A(x), \quad (3)$$

水面条件は $K \phi(x, 0) + \phi_y(x, 0) = \frac{\omega}{ig} p(x), \quad (4)$

水底条件は $\phi_y(x, h) = 0, \quad (5)$

振動の振幅を X_j とし それに F_j のポテンシャルを
 ϕ_j のようにおきそれを次のように正規化しておこう。

$$\phi_j(x, y) = i\omega X_j \phi_j(x, y), \quad (6)$$

C 上の境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_j}{\partial n_j} &= -i\omega X_j w_j(x, y), \\ \frac{\partial \phi_j}{\partial w_j} &= -\eta_j(x, y), \end{aligned} \right\} \text{ on } C, \quad (7)$$

とす。

(5) に代りて p, η, ϕ とする

$$\left. \begin{aligned} p_j(x, y) &= \rho g X_j p_j(x, y), \\ \eta_j(x) &= X_j \eta_j(x), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

とすると (5), (3), (4) は

昭和 年 月 日

$$\phi_y(x, 0) = -\zeta_j(x), \quad \dots (9)$$

$$K \phi(x, 0) + \phi_y(x, 0) = -\zeta_j(x, 0), \quad (10)$$

$$\text{となる。} \quad \phi_y(x, h) = 0, \quad \dots (11)$$

$x=0$ 方向からの入射波を考えよう。

$$A_0(x) = a e^{ik_0 x}, \quad \dots (12)$$

これは

$$K = \tanh kh, \quad \dots (13)$$

の実根である。

(10) の右端振幅 a の正規化ポテンシャルは

$$\phi_0(x, y) = \frac{ik_0 a \cosh k_0(h-y)}{\omega \cosh k_0 h} e^{ik_0 x}, \quad (14)$$

となる。

よって

$$\phi_0(x, y) = \frac{\cosh k_0(h-y)}{\cosh k_0 h} e^{ik_0 x}, \quad \dots (15)$$

$$\frac{ik_0 a}{\omega} \phi_0(x, y) = \phi_0(x, y),$$

$$\zeta_0(x) = K \phi_0(x, 0)$$

となる。

散乱ポテンシャルはやはり

$$\phi_d(x, y) = \frac{ik_0 a}{\omega} \phi_d(x, y), \quad \dots (16)$$

と正規化すると境界条件は

$$\frac{\partial}{\partial n} (\phi_0 + \phi_d) = 0 \quad \text{on } C, \quad (17)$$

となる。

$$\text{従って} \quad X_0 = X_d = a/K.$$

昭和 年 月 日

Q 点で対数特異点を持ち (10)(11) を満たす (但し $p=0$)
関数 $S(p, Q)$ ($P \equiv (x, y), Q \equiv (x', y')$) は 付録 A.12
に示されているが、それを与えよう。―― (18)

$$\phi(P) = \int_c \{ \phi_n(Q) S(p, Q) - \phi(Q) S_n(p, Q) \} dS(Q), \quad (18)$$

と表わされる。

特に、水層の (1, -1) の上の圧力分布の場合は (10)
により

$$\phi(P) = - \int_{-1}^1 p(x') S(p, x') dx', \quad \dots (19)$$

で与えられる。

さて S は $|x| \gg 1$ で A (25) より、

$$S(p, Q) \xrightarrow{|x| \gg 1} iD \frac{\cosh k_0(h-y) \cosh k_0(h-y')}{\cosh^2 k_0 h} e^{-ik_0|x-x'|}, \quad (20)$$

$$D = \frac{-k_0 h}{(k^2 - k_0^2) h^2 - k h} = \frac{1}{[\tanh k_0 h + k_0 h \operatorname{sech}^2 k_0 h]}$$

となるから ϕ は

$$\phi(P) \xrightarrow[x \gg 1]{x \ll -1} -iD H^\pm(k_0) \frac{\cosh k_0(h-y)}{\cosh k_0 h} e^{\mp i k_0 x}, \quad (21)$$

$$H^\pm(k_0) = - \int_c \left(\phi_n - \phi \frac{\partial}{\partial n} \right) \frac{\cosh k_0(h-y)}{\cosh k_0 h} e^{\pm i k_0 x} dS, \quad (22)$$

$$H^\pm(k_0) = \int_{-1}^1 p(x) e^{\pm i k_0 x} dx, \quad \dots (23)$$

29 頁

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow -iKD H^\pm(k_0) e^{\mp i k_0 x} \\ A(x) &\longrightarrow -iKX_j D H^\pm(k_0) e^{\mp i k_0 x} \end{aligned} \right\} (24)$$

2. 積分定理

今2つのポテンシャル ϕ_1, ϕ_2 を考えるとグリー-2の定理により直ちに

$$\int_C \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} ds = \int_C \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} ds, \quad \dots (1)$$

なる関係がある事がわかる。

又圧力分布では p_1 に ϕ_1 , p_2 に ϕ_2 が対応するとすると §1 (10) により

より

$$\int_{-1}^1 p_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial y} dx = \int_{-1}^1 p_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial y} dx, \quad \dots (2)$$

がえられる。

$$\text{又} \quad \int_C (\phi_1 \frac{\partial \bar{\phi}_2}{\partial n} - \bar{\phi}_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial n}) ds$$

なる積分を考えると同じくグリー-2の定理により無限遠方の積分面での積分が零で §1 (21) より

$$\begin{aligned} \int_0^h \cosh^2 k_0(h-y) dy &= \frac{1}{2} \int_0^h [1 + \cosh 2k_0(h-y)] dy \\ &= \frac{1}{2} \left[y - \frac{\sinh 2k_0(h-y)}{2k_0} \right] = \frac{1}{4k_0} [2k_0 h + \sinh 2k_0 h] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cosh^2 k_0 h} \int_0^h \cosh^2 k_0(h-y) dy &= \frac{1}{2k_0 h} [k_0 h \operatorname{sech}^2 k_0 h + \tanh k_0 h] \\ &= 1/[2k_0 h D], \quad \dots (3) \end{aligned}$$

よって

$$\int_C \left[\phi_1 \frac{\partial \bar{\phi}_2}{\partial n} - \bar{\phi}_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right] ds = i \frac{D}{2h} \left[H_1^*(k_0) \bar{H}_2^*(k_0) + H_1(k_0) \bar{H}_2(k_0) \right] \quad (4)$$

同様にして

$$\int_{-1}^1 \left(p_1 \frac{\partial \bar{\phi}_2}{\partial y} - \bar{\phi}_2 \frac{\partial p_1}{\partial y} \right) dx = \frac{D}{2ik_0 h} [\quad \quad], \quad \dots (5)$$

3. 力について.

i -mode の運動による j -mode の一般力積

$$F_{ij} = - \int_c P(x, y) w_j(x, y) ds, \quad (1)$$

と書こう。 $\dots = 1$

• この圧力には 静水圧を含ませることにしよう。

$$P_i(x, y) = i\rho\omega \phi_i(x, y) = -\rho\omega^2 X_i \phi_i(x, y), \quad (2)$$

と理解し、この時 (1) は

$$F_{ij} = \rho\omega^2 X_i f_{ij}, \quad (3)$$

$$f_{ij} = \int_c \phi_i w_j ds, \quad (4)$$

となる。

圧力分布の時は §1 (10) により

$$f_{ij} = -\frac{1}{k} \int_{-1}^1 \phi_{i,y} w_j dx - \frac{1}{k} \int_{-1}^1 P_i w_j dx, \quad (5)$$

となる。

特に 鉛直による力は

$$E_j = - \int_c (P_0 + P_d) w_j ds, \quad (6)$$

である。

$$E_j = \rho g a e_j, \quad (7)$$

$$e_j = \int_c (\phi_0 + \phi_d) w_j ds, \quad (8)$$

となる。

昭和 年 月 日

圧力分布では §1 (16) と (17) により.

$$e_j = -\frac{1}{k} \int_{-1}^1 \{p_0 + p_d\} w_j dx, \quad \dots (9)$$

さて §2 の定理より.

$$f_{ij} = -\int_c \phi_i \phi_{j,n} ds = -\int_c \phi_j \phi_{i,n} ds = f_{ji}, \quad (10)$$

$$\text{又} \quad \int_{-1}^1 p_i w_j dx = f_{ij}^* \quad (11)$$

とあくと

$$f_{ij}^* = f_{ji}^*, \quad \dots (12)$$

$$\text{又} \quad \int_c \phi_d w_j ds = -\int_c \phi_d \phi_{j,n} ds = -\int_c \phi_j \phi_{d,n} ds = \int_c \phi_j \phi_{0,n} ds$$

これから §1 (22) 式により

$$e_j = \int_c (\phi_j \phi_{0,n} - \phi_0 \phi_{j,n}) ds = -H_j^+(k_0), \quad (13)$$

なる 'Hasler' の関係を得る。

これは圧力分布でも同じ式でよい。

又 w_j は real

と 12 おくと §2 (4) により,

$$\overline{f_{ji}} - f_{ij} = \overline{f_{ij}} - f_{ij} = \frac{iD}{2h} [H_i^+ \overline{H_j^+} + H_i^- \overline{H_j^-}], \quad (14)$$

同様にして

$$\overline{f_{ij}^*} - f_{ij}^* = \frac{D}{2ikh} [\quad \quad \quad], \quad (15)$$

とし C が左右対称な場合 対称運動では H_j は
§1 (22) から

$$H_j^+(k_0) = H_j^-(k_0), \quad \text{--- (16)}$$

又 反対称運動では

$$H_j^+(k_0) = -H_j^-(k_0), \quad \text{--- (17)}$$

となる。

今 (14) は i, j を入れかえても 対称性から同じになるので

$$H_i^+ \overline{H_j^+} + H_i^- \overline{H_j^-} = H_j^+ \overline{H_i^+} + H_j^- \overline{H_i^-}, \quad (18)$$

ゆえに (16), (17) を代入すると

$$H_i^+ \overline{H_j^+} = H_j^+ \overline{H_i^+}, \text{ or } \frac{H_i^+}{H_j^+} = \frac{\overline{H_i^+}}{\overline{H_j^+}}, \quad (19)$$

をうる。なお $i \neq j$ である。対称又は反対称でなければならぬ。

ゆえに §2 (4) において ϕ_1 に ϕ_a , ϕ_2 に ϕ_j を代入すると

$$\int_C (\phi_a \phi_{jn} - \overline{\phi_j} \phi_{an}) ds = \int_C (\phi_a \phi_{jn} - \overline{\phi_j} \phi_{an}) ds$$

$$= \int_C [(\phi_a + \phi_j) \phi_{jn} - (\phi_a \overline{\phi_j} - \overline{\phi_j} \phi_{an})] ds$$

$$= H_j^+(k_0) - \overline{H_j^-(k_0)} = \frac{iD}{2\hbar} [H_a^+ H_j^+ + H_a^- \overline{H_j^-}], \quad (20)$$

よって

対称運動では (16) により

$$H_j^+ - \overline{H_j^+} = \frac{iD}{2\hbar} [H_a^+ + H_a^-] \overline{H_j^+}, \quad \text{--- (21)}$$

反対称運動では (17) により

$$H_j^+ + \overline{H_j^+} = \frac{iD}{2\hbar} [H_a^+ - H_a^-] \overline{H_j^+}, \quad (22)$$

なお

$$H_d^{\pm}(k_0) = \int_C (\phi_d \phi_{0n}^{\pm} - \phi_0^{\pm} \phi_{dn}) dS, \quad (23)$$

$$\text{但し } \phi_0^{\pm} \equiv \phi_0, \quad \phi_0^{-} = \bar{\phi}_0,$$

そして (20) において さらに $j=d$ とおくと.

$$\int_C (\phi_d \bar{\phi}_{dn} - \bar{\phi}_d \phi_{dn}) dS = \int_C (\bar{\phi}_d \phi_{0n}^{+} - \phi_d \phi_{0n}^{-}) dS.$$

$$= \int_C [\bar{\phi}_d \phi_{0n}^{-} - \phi_0^{-} \phi_{dn}] - [\phi_d \phi_{0n}^{-} - \phi_0^{-} \phi_{dn}] dS =$$

$$\text{何と云へば} \phi_0^{-} \phi_{dn} - \phi_0^{-} \phi_{dn} = \phi_0^{-} \phi_{0n}^{+} - \phi_0^{-} \phi_{0n}^{+} - \phi_0^{+} \phi_{0n}^{-} + \phi_0^{+} \phi_{0n}^{-}$$

$$\text{となり} \int_C (\phi_0^{+} \phi_{0n}^{-} - \phi_0^{-} \phi_{0n}^{+}) dS = 0.$$

この左辺の積分は 無限遠方の検査面の積分
とする事が出来るが 左方の面のそれと右方のそれが打ち消
し合うからである。

よって

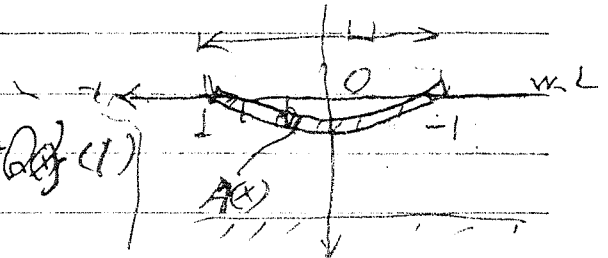
$$H_d^+(k_0) - H_d^-(k_0) = \frac{iD}{2\pi} [H_d^+ \bar{H}_d^+ + H_d^- \bar{H}_d^-], \quad (24)$$

を得る。

4. 運動方程式

運動方程式は、

$$EI \frac{d^4 A(x)}{dx^4} + m \omega^2 A(x) = -\{P(x) + Q(x)\} \quad (1)$$



EI は曲げ剛性, m は梁の質量とする。

また $P(x)$ には 静止時の浮力は含めないものとする。 $Q(x)$ は外力

合 適当な振幅 X によって、 ξ のように正規化すると

$$\left. \begin{aligned} P(x) &= p \xi X p(\xi), \quad Q(x) = p \xi X q(\xi) \\ A(x) &= X \eta(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\varepsilon \frac{d^4 \eta(\xi)}{d\xi^4} - \alpha K \eta(\xi) = -\{p(\xi) + q(\xi)\} \quad (3)$$

$$\varepsilon = \frac{EI}{p \xi}, \quad \alpha = \frac{m}{p}, \quad K = \frac{\omega^2}{g} \quad (4)$$

とかけ ξ (3), (4) により

$$\left. \begin{aligned} \phi(x, 0) &= -\eta(x) \\ K \phi(x, 0) - \eta(x) &= -p(x) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

よって $p(x)$ を消去すると

$$\varepsilon \frac{d^4 \eta(x)}{dx^4} - \alpha K \eta(x) + \eta(x) = K \phi(x, 0) - q(x), \quad (6)$$

を得る。

いづれにしても (3) と (5) あるいは (5) と (6) の聯立方程式を解いて解が求められることになる。

$q(x)$ は強制力振動の場合限りば原点で上下に集中強制力を加えるならば

$$q(x) = \delta(x), \quad \dots \quad (7)$$

昭和 年 月 日

となり、又右方向からの入射波によって生ずるならは

$$q(x) = p_0(x) + p_d(x), \quad \dots (8)$$

但し $x = a/k$,

となる。

(5) の多量の式は (19) により

$$q(x) = p(x) - K \int_{-1}^1 p(x') S(x, 0; x', 0) dx', \quad (9)$$

であり、これと (3) から p , 又は q を消去するととなり後述する微積分方程式をうる。

なお、梁端自由端を有するものとするは“さらに

$$\frac{d^2}{dx^2} q(x) = \frac{d^3}{dx^3} q(x) = 0 \quad \text{for } x = \pm 1, \quad (10)$$

形式的に以下のように解ける。

とす”

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n U_n(x), \quad \dots (11)$$

但し

$$U_0(x) = 1/\sqrt{2}$$

$$U_1(x) = x/\sqrt{\frac{3}{2}}$$

(12)

$n \geq 2$ は、

$$\varepsilon \frac{d^4}{dx^4} U_n(x) - \alpha K_n U_n(x) = 0, \quad \dots (13)$$

の解とす。(附録 B)

$K_n = \omega_n^2/8$, ω_n は固有円振動数である。

又

$$\int_{-1}^1 U_n(x) U_m(x) dx = \delta_{n,m}, \quad \dots (14)$$

と正規化しておく。

又 $U_n(x)$ に対する (9) の解を $p_n(x)$ としよう。
 そうすると (3) 式は、

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (K_n - K) C_n U_n(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} C_n p_n(x) - q(x), \quad (15)$$

となる。

よって $u_n(x)$ をかけて積分すると

$$\alpha(K_n - K)C_n = - \sum_{m=0}^{\infty} C_m \int_{-1}^1 p_m(x) u_n(x) dx - \int_{-1}^1 g(x) u_n(x) dx, \quad (16)$$

§3 (14) の記法を使えば

$$\alpha(K_n - K)C_n + \sum_{m=0}^{\infty} C_m f_{m,n}^* = - \int_{-1}^1 g(x) u_n(x) dx, \quad (17)$$

となり g と (17) を代入するは

$$\int_{-1}^1 g(x) u_n(x) dx = u_n(0), \quad (18)$$

(8) を代入すれば §3 (9), (13) により

$$\int_{-1}^1 g(x) u_n(x) dx = \int_{-1}^1 (p_0 + p_d) u_n(x) dx = K H_n^+(k_0), \quad (19)$$

を得る。

従って $f_{m,n}^*$, H_n^+ がわかっているから C_n は (17) から求められる。

強制動揺の場合

この時刻に出て行く波の振幅は §1 (24) により

$$K H_n^+(k_0) = K D \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n^+(k_0), \quad (20)$$

溶液中動揺の場合にはこれに更に散乱波は反射波が加わるので x の正方向への反射波の振幅 R は

$$R = -i a D \left[H_0^+(k_0) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n H_n^+(k_0) \right], \quad \text{for } x \rightarrow \infty, \quad (21)$$

x の負方向の振幅は入射波も含めて

$$T = a - i a D \left[H_0^-(k_0) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n H_n^-(k_0) \right], \quad \text{for } x \rightarrow -\infty, \quad (22)$$

と与えられる。

昭和 年 月 日

よ3いけ

$$R+T = a - i\alpha D [H_a^+ + H_a^- + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \{H_n^+ + H_n^-\}],$$

$$T-R = a - i\alpha D [H_a^- - H_a^+ + \sum c_n \{H_n^- - H_n^+\}],$$

となる。

n が偶数奇数に依りて、係数は対称、反対称となるから
 §3 (16), (17), (21), (22) により

$$R+T = a - i\alpha D \left[\frac{H_a^+ - H_a^-}{iD H_a^+} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} H_{2n}^+ \right], \quad j=2n \quad (23)$$

$$T-R = a - i\alpha D \left[\frac{H_a^+ + H_a^-}{iD H_a^+} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} H_{2n+1}^+ \right], \quad j=2n+1 \quad (24)$$

j は任意の値でよい。

5. 境界値問題

圧力分布に対する境界値問題は §1 (7)(10) によつて

$$w(x) = -\phi_y(x, 0) = p(x) + K\phi(x, 0), \quad (1)$$

で無限水深の場合と同じである。 (§4 (9))

よつて

$$\phi(x, 0) = -\int_{-1}^1 p(x') S(x, x') dx', \quad (2)$$

1 かり流小周数を導入すると (C.f. A)

$$\psi(x, 0) = -\int_{-1}^1 p(x') T(x, x') dx', \quad (3)$$

$\phi = -\psi_y$ であるから (1) より

$$w(x) = \psi_{xx}(x, 0), \quad (4)$$

あるいは

$$W(x) = \psi(x, 0) \quad (5)$$

$$W(x) = \int_{-1}^x w(x') dx' + \text{const.} \quad (6)$$

(5) 式の形において T は有限重分の関数であるから、数値計算が容易である。

又 (6) の定数に対応する斉次解は平板の away に対応する解と考えられる。

さて (5) を実部と虚部に分けてよくと散乱ポテンシャルと共振ポテンシャルの間には §2 のような関係があるので簡単に本はすでに負を返している。

この場合前節で見たように u の直交系 u_j に対するすべての解が必要であるが、この時散乱ポテンシャルは更にこれらで表わせるので、系中の散乱ポテンシャルは解く必要がない事になる。

即ち今附録 A の $u_j^{(4)}(x) = 1_j u_j(x)$ と u_0, u_1 の解を $p_j(x)$ とすると散乱ポテンシャルに對しては

$$w_d = -\frac{\partial}{\partial y} \phi_d = +\frac{\partial}{\partial y} \phi_0 = -k_0 \tanh k_0 h e^{ik_0 x} = -K e^{ik_0 x}, \quad (7)$$

であるから w_d は $u_n(x)$ にこのように展開出来る。

$$w_d = -K \sum_{j=0}^{\infty} I_j u_j(x), \quad (8)$$

$$I_j = -\frac{1}{K} \int_0^1 w_d u_j dx = \int_0^1 u_j(x) e^{ik_0 x} dx, \quad (9)$$

ここに I_j は (9.22) 部分積分より $u_j''(\pm 1) = u_j'''(\pm 1) = 0$ を考慮して

$$I_j = -\frac{k_0^2}{\lambda_j - k_0^2} \int_0^1 u_j'' e^{ik_0 x} dx, \quad (10)$$

$$I_j = \frac{k_0^2}{\lambda_j - k_0^2} \left[(ik_0 u_j - u_j') e^{ik_0 x} \right]_{x=1}^0, \quad (11)$$

よって

$$p_d(x) = -K \sum_{j=0}^{\infty} I_j p_j(x), \quad (12)$$

これから

$$\int_0^1 p_d u_j dx = \int_0^1 p_d w_d dx = -K \int_0^1 p_j e^{ik_0 x} dx = -K H_j^+(k_0)$$

故に §2 (14) 式より

$$H_j^+(x_0) = \sum_{i=0}^{\infty} I_{ij} f_{ij}^* \quad , \quad \dots (13)$$

従い

$$f_{ji}^* = \int_{-1}^1 p_{ij} dx = f_{ji}^* \quad (14)$$

よるから

$$p_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_{ij}^* u_j(x) \quad , \quad \dots (15)$$

右の関係があるので $p(x)$ を $u_j(x)$ に展開して解いておけば便利である。

なお §2 (15) の f_{ij} は

$$f_{ij} = + \frac{\delta_{ij}}{K} - \frac{1}{K} f_{ij}^* \quad , \quad \dots (16)$$

となる。

又 (10) からわかるように

$$p(x) = u_j(x) + \frac{k_0^2}{\lambda_j^2} u_j''(x) \quad , \quad \dots (17)$$

左の圧力分布はほぼ1となるので $k_0/\sqrt{\lambda_j} \ll 1$ ならば $p \approx u_j$ となるから $p_i (i \geq 2)$ はほぼ0と見做られる。

又

$$\delta(x-\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) u_n(\xi) \quad , \quad (18)$$

に於ける圧力は

$$p(x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\xi) p_n(x) = p(\xi, x) \quad (19)$$

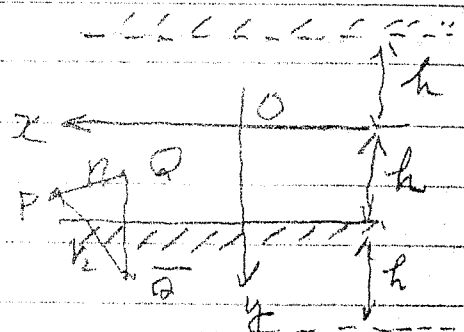
$$\therefore \int_{-1}^1 p(x, \xi) u_m(x) dx = p_m(\xi) \quad , \quad (20)$$

$$\therefore f_{nm}^* = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p(x, \xi) u_m(x) u_m(\xi) dx d\xi \quad (21)$$

附録 A 核関数

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + K\right) S(p, Q) = 0, \text{ for } y=0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} S(p, Q) = 0 \text{ for } y=h, \quad (2)$$



$$P \equiv (x, y), \quad Q \equiv (x', y')$$

(1), (2) を満足し $P=Q$ の対数的特異点を持つ関数 S を求めよう。

まず

$$S(p, Q) = -\frac{1}{2\pi} \log(r_1 r_2) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{-kh}{e^k} \cosh k(h-y) \cosh k(h-y') \cos k(x-x') \frac{dk}{k}, \quad (3)$$

$$\text{とおいておく。} \quad r_1 = PQ, \quad r_2 = P\bar{Q}$$

そして (1) に $F(k)$ を代入しよう。

すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \log r_1 &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{-k(y-y')}{e^k} \cos k(x-x') dk, \quad \text{for } y' > y, \\ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \log r_2 &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{-k(2h-y-y')}{e^k} \cos k(x-x') dk, \quad \text{for } (y+y') \leq h. \end{aligned} \right\}$$

であるから 形式的に

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \log r_1 &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{-k(y-y')}{e^k} \cos k(x-x') \frac{dk}{k}, \quad \text{for } y' > y, \\ \frac{1}{2\pi} \log r_2 &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{-k(2h-y-y')}{e^k} \cos k(x-x') \frac{dk}{k}, \quad \text{for } 2h > y+y', \end{aligned} \right\}$$

この積分は下限を 0 とすると存在しないので適当な γ で正めて収束しなければならぬが議論の結果には変りはないのでとりあえずこの儘使い後で収束する。

これらの展開 (3) 式に入れて (1) の条件を考えると。

昭和 年 月 日

$$\frac{1}{2\pi} \log r_1 r_2 = - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-kx + ky} \cosh k(h-y) \cos k(x-x') \frac{dk}{k},$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \log r_1 r_2 = - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-kx + ky} \sinh k(h-y) \cos k(x-x') \frac{dk}{k},$$

よって

$$S_y + KS = \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} e^{-kx + ky} \cosh k(h-y) \cos k(x-x') \times$$

$$\times \left[-(k+K) e^{ky} - \{k \sinh k(h-y) + K \cosh k(h-y)\} F(k) \right],$$

よって $y=0$ で (1) の式は

$$F(k) = (k+K) / [K \cosh kh - k \sinh kh], \quad (4)$$

である。よって

このまゝで (3) の右辺第2項の積分は $y=0$ で計算出来る。

$$\begin{aligned} \frac{k+K}{K \cosh kh - k \sinh kh} &= \frac{1}{\cosh kh} + \frac{k(1 + \tanh kh)}{K \cosh kh - k \sinh kh} \\ &= \frac{1}{\cosh kh} + \frac{k e^{kh}}{(K \cosh kh - k \sinh kh) \cosh kh}, \quad (5) \end{aligned}$$

である。よって (3) は

$$S(p, q) = I + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cosh k(h-y) \cosh k(h-y) \cos k(x-x')}{(K \cosh kh - k \sinh kh) \cosh kh} dk, \quad (6)$$

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-kx + ky} \cosh k(h-y) \cos k(x-x') \frac{dk}{k} \times$$

$$\times \left[\frac{\cosh k(h-y)}{\cosh kh} - e^{ky} \right],$$

右辺第2項は対称項である。

より

$$\cosh k(h-y) - e^{ky} \cosh kh = - e^{ky} \sinh ky,$$

よって

$$I = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sinh k y}{\cosh k h} \cosh k(h-y') \cos k(x-x') \frac{dk}{k}, \quad (7)$$

となり、この式から I は $y=0$ で 0 となる I である事がわかる。
 I の値では積分が存在しないので、これを y 微分したものを
 積分して見よう。

$$\begin{aligned} I_y &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cosh k y}{\cosh k h} \cosh k(h-y') \cos k(x-x') dk \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos k(x-x')}{(1+e^{-2kh})} \left[e^{k(y-y')} + e^{-k(y+y')} \right. \\ &\quad \left. + e^{-2kh} \{ e^{k(y+y')} + e^{-k(y-y')} \} \right] dk, \quad (8) \end{aligned}$$

と書けるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+e^{-2kh}} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-2nhk} \\ \text{であるから 別項は} & \int_0^{\infty} \frac{e^{-k(y+y')} \cos k(x-x')}{1+e^{-2kh}} dk = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-k(y+y'+2nh)} \cos k(x-x') dk \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (y'+y+2nh)}{(x-x')^2 + (y'+y+2nh)^2} = \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z - z' - 2nhi} \right] \\ & \quad z = x + iy, \quad z' = x' + iy' \end{aligned}$$

となるので

$$I_y = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{y'-y+2nh}{(x-x')^2 + (y'-y+2nh)^2} + \frac{y+y+2nh}{(x-x')^2 + (y+y+2nh)^2} \right], \quad (9)$$

となるから

$$\frac{1}{\sinh t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{t - n\pi}$$

存在定理) があること

$$\frac{1}{\sinh \frac{\pi z}{2h}} = \frac{2h}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z - 2nhi}$$

$$\int \left\{ \frac{\pi}{2h \sinh(\frac{\pi z}{2h})} \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n (2nh - y)}{x^2 + (y - 2nh)^2},$$

これを利用して

$$I_y = -\frac{1}{4h} \left\{ \frac{1}{\sinh \frac{\pi(z-z')}{2h}} - \frac{1}{\sinh \frac{\pi(z-\bar{z}')}{2h}} \right\}, \quad (10)$$

y で積分して、

$$I = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \log \left[\frac{\tanh \frac{\pi}{4h}(z-z')}{\tanh \frac{\pi}{4h}(z-\bar{z}')} \right], \quad \dots (11)$$

$$z = x + iy, \quad z' = x' + iy'$$

を得る。

次に、

$$S(p, \alpha) = I + S_1(p, \alpha), \quad \dots (12)$$

と置いて S_1 について考えよう。

S_1 の被積分関数は長の実数関数であるから

$$S_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh k(h-y) \cosh k(h-y') \cosh k(x-v)}{(K \cosh kh - k \sinh kh) \cosh kh} dk, \quad (13)$$

と書ける。

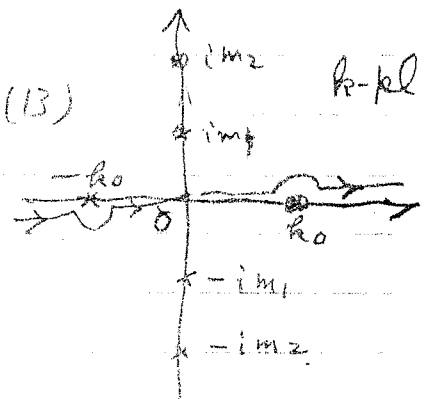
特異点はすべて、 k 値の極で

$$K = k \tanh kh, \quad \dots (14)$$

の根 k の点であるから、実軸上には $(\pm k_0)$ 、虚軸上には $\pm im_1$ と無限 (15) ある。

$$\left. \begin{aligned} K &= k_0 \tanh(k_0 h) \\ K &= -m_1 \tanh(m_1 h) \end{aligned} \right\} \quad \dots (15)$$

S_1 のもう一つの条件として、 k が外に出て行くというのを満足するには、実軸上の極を (16) のようによける積分路をとるべきである。



昭和 年 月 日

この一群の特異点は分岐の $\cosh kh$ の零点

$$k = \pm \frac{i\pi}{2h} (2n+1) \quad \text{for } n=0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

である。

よって

$$S_1 = I_1 + S_2 \quad (17)$$

とある I_1 を (16) に基づいて S_2 を (14), (15) に基づいて I_2 とすると
 である I_1 は

$$\sinh kh = \pm i (-1)^n$$

であるから

$$I_1 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2h} (2n+1)y}{(2n+1)} \sin \frac{\pi}{2h} (2n+1)y' e^{-\frac{\pi}{2h} (2n+1)(x-x')} \quad (18)$$

for $x > x'$

を得るから I を π 倍と (18) 式に

$$\frac{1}{\sinh \frac{\pi}{2h} B} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2h} (2n+1)B}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi}{2h} B (2n+1)}}{2n+1} = -\frac{1}{2} \log \left(\tanh \frac{\pi B}{4h} \right)$$

であるから

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} \log \left[\frac{\tanh \frac{\pi}{4h} (z - \bar{z}') \tanh \frac{\pi}{4h} (\bar{z} - z')}{\tanh \frac{\pi}{4h} (z - z') \tanh \frac{\pi}{4h} (\bar{z} - \bar{z}')} \right] \quad (19)$$

or $I_1 = \text{Re} \frac{1}{2\pi} \log \left[\frac{\tanh \frac{\pi}{4h} (z - \bar{z}')}{\tanh \frac{\pi}{4h} (z - z')} \right] = -I$

よって

$$S(P, Q) = S_2(P, Q), \quad (20)$$

昭和 年 月 日

→ 2121 S_z は

111111

$$\frac{d}{dk} (K \cosh kh - k \sinh kh) = (Kh - 1) \sinh kh - kh \cosh kh$$

2" (14) を代 入 722

$$\frac{d}{dk} (K \cosh kh - k \sinh kh) = \frac{1}{k} \{ (K^2 - k^2)h - K \} \cosh kh, \quad (21)$$

2" 722 から

$$S = S_z = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n \cosh m_n(h-y) \cosh m_n(h-y')}{[(K^2 + m_n^2)h - K] \cosh^2 m_n h} e^{-m_n|x-x'|}$$

$$- i \frac{k_0 \cosh k_0(h-y) \cosh k_0(h-y')}{[(K^2 - k_0^2)h - K] \cosh^2 k_0 h} e^{-i k_0|x-x'|} \quad \dots (22)$$

を 3.0

722 $y=y'=0$ 2" 11

$$S(P, Q)|_{y=y'=0} = S_z(P, Q)|_{y=y'=0}$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n e^{-m_n|x-x'|}}{[(K^2 + m_n^2)h - K]} - \frac{i k_0 e^{-i k_0|x-x'|}}{[(K^2 - k_0^2)h - K]}, \quad (23)$$

のように 16) 等となる。

又 $h \rightarrow \infty$ として (15) の PQ は

$$h \rightarrow \infty \quad 2" \text{ は } k_0 = K, \quad \dots (24)$$

 $m_n (2 \rightarrow 0, 2, 4)$

$$m_n h = \frac{\pi}{2}(2n-1) + \delta_n, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

と おく と

$$Kh = (n\pi - \frac{\pi}{2} + \delta_n) \cot \delta_n$$

よ 2.

$$\delta_n = \frac{(n - \frac{1}{2})\pi}{Kh}$$

$$m_n = \frac{(n - \frac{1}{2})\pi}{h} \left(1 + \frac{1}{Kh}\right), \quad \dots (25)$$

昭和 年 月 日

 $h \rightarrow 0$ では

$$k_0 \equiv \sqrt{\frac{K}{h}} = \frac{\omega}{\sqrt{gh}} \quad , \quad (26)$$

また

$$m_n = n\pi - \delta_n \quad , \quad n=1, 2, 3, \dots$$

とすると

$$kh = (n\pi - \delta_n) \tan \delta_n \quad ,$$

と仮定から

$$\delta_n \equiv \frac{kh}{n\pi}$$

$$m_n \equiv \frac{n\pi}{\frac{kh}{n\pi}} - \frac{K}{n\pi} \quad , \quad (27)$$

となる。

S 関数の $h \rightarrow 0$ or $h \rightarrow \infty$ の極限は (11), (12), (13) から

$$S(P, Q) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int \left(\frac{z-z'}{z-\bar{z}'} \right) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty - h(y+y')} \frac{e^{\cos k(x-x')}}{k-k_0} dk \quad , \quad (28)$$

このとき k -plane の極は左右対称となるので
この式は変換になる。

 $h \rightarrow 0$ では

$$S(P, Q) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{P \neq Q} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos k(x-x')}{k-k_0^2 h} dk = \frac{e^{-i k_0 |x-x'|}}{2 h k_0} \quad , \quad (29)$$

$k_0 = \omega/\sqrt{gh}$

となって特異点は消えてしまう形になり具合が悪いので $h \rightarrow 0$ の極限では別の近似浅水近似*として扱おう。

なお $|x-x'| \rightarrow \infty$ では (22) から明らかのように

$$S(P, Q) \xrightarrow{|x-x'| \gg 1} \frac{-i k_0 e^{-i k_0 |x-x'|}}{[(k^2 - k_0^2)h - K]} \times \frac{\sinh k_0(h-y) \cosh k_0(h-y')}{\cosh^2 k_0 h} \quad , \quad (30)$$

で他の項は指数的に減衰する。

* J. J. Stoker "Water Waves"

S は $P=Q$ での対称的特異点を有するのだから、
等ではその共役関数 T を使うのが便利である。

今

$$S_x(P, Q) = T_y(P, Q) \quad \left\{ \begin{array}{l} (31) \end{array} \right.$$

$$S_y(P, Q) = -T_x(P, Q)$$

のような T を求めると、直ちに

$$T(P, Q) = \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n \sin m_n(h-y) \cos m_n(h-y') e^{-m_n|x-x'|}}{[(k^2 + m_n^2)h - k] \cosh m_n h} \right. \\ \left. + \frac{k_0 \sinh k_0(h-y) \cosh k_0(h-y') e^{-i k_0|x-x'|}}{[(k^2 - k_0^2)h - k] \cosh^2 k_0 h} \right] \operatorname{sgn}(x-x') \quad (32)$$

又より

$$T(P, Q) \Big|_{y=y'=0} = k \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k e^{-m_n|x-x'|}}{[(k^2 + m_n^2)h - k]} \right. \\ \left. + \frac{e^{-i k_0|x-x'|}}{[(k^2 - k_0^2)h - k]} \right] \operatorname{sgn}(x-x'), \quad (33)$$

よって

$$T \Big|_{y=y'=0} = k \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[(k^2 + m_n^2)h - k]} + \frac{1}{[(k^2 - k_0^2)h - k]} \right] \operatorname{sgn}(x-x'), \quad (34)$$

となる。 $x=x'$ での jump がある、 $(x-x')$ は $1/2$ の
奇関数である。

附録 B 梁の撓み振動の正規関数 *

$$\frac{d^4}{dx^4} \eta(x) - \left(\frac{m}{2}\right)^4 \eta(x) = 0, \quad (1)$$

$$K_n L = \frac{\omega_n^2}{g} L = \left(\frac{EI}{WL^3}\right) m_n^4, \quad \dots (2)$$

$L=2$

正規関数の正規化直交系を $u_n(x)$ とすると

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ u_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} x \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} u_{2n}(x) = A_{2n} \cos \frac{m_{2n}}{2} x + B_{2n} \cosh \frac{m_{2n}}{2} x \\ u_{2n+1} = A_{2n+1} \sin \frac{m_{2n+1}}{2} x + B_{2n+1} \sinh \frac{m_{2n+1}}{2} x \end{cases} \quad (4)$$

$$u_n''(x) = u_n''(x) = 0, \quad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{B_{2n}}{A_{2n}} = \frac{\cos \frac{m_{2n}}{2}}{\cosh \frac{m_{2n}}{2}} = - \frac{\sin \frac{m_{2n}}{2}}{\sinh \frac{m_{2n}}{2}} \\ \frac{B_{2n+1}}{A_{2n+1}} = \frac{\sin \frac{m_{2n+1}}{2}}{\sinh \frac{m_{2n+1}}{2}} = \frac{\cos \frac{m_{2n+1}}{2}}{\cosh \frac{m_{2n+1}}{2}} \end{cases} \quad (6)$$

固有値方程式は、

$$\begin{cases} \tan \frac{m_{2n}}{2} = - \tanh \frac{m_{2n}}{2} \\ \tan \frac{m_{2n+1}}{2} = \tanh \frac{m_{2n+1}}{2} \end{cases} \quad (7)$$

or $\cos m_n \cosh m_n = 1$

昭和 年 月 日

$$\int_{-1}^1 U_n^2 dx = 1 \quad \text{と } \pi/2 \text{ より } A_n \text{ を決める。}$$

$$\int_{-1}^1 U_{2n}^2 dx = A_{2n}^2 \left(1 + \frac{\sin m}{m}\right) + B_{2n}^2 \left(1 + \frac{\operatorname{sh} m}{m}\right) + \frac{4AB}{m} \left(\frac{\operatorname{sh} \frac{m}{2} \cos \frac{m}{2}}{+ \operatorname{ch} \frac{m}{2} \sin \frac{m}{2}}\right)$$

$$= A_{2n}^2 \left[1 + \frac{\sin m}{m} + \frac{\cos^2 \frac{m}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{m}{2}} \left(1 + \frac{\operatorname{sh} m}{m}\right)\right]$$

$$= A_{2n}^2 \left[1 + \frac{\sin m}{m} + \cos m \left(1 + \frac{\operatorname{sh} m}{m}\right)\right] = 1.$$

$$\tan m = \frac{2 \tan \frac{m}{2}}{1 - \tan^2 \frac{m}{2}} = \frac{-2 \operatorname{th} \frac{m}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{m}{2}} = -\operatorname{sh} m$$

$$\therefore A_{2n}^2 = \frac{1}{1 + \cos m} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{m}{2}}, \quad A_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \frac{m}{2}}, \quad (8)$$

$$\int_{-1}^1 U_{2n+1}^2 dx = A_{2n+1}^2 \left(1 - \frac{\sin m}{m}\right) + B_{2n+1}^2 \left(\frac{\operatorname{sh} m}{m} - 1\right)$$

$$+ \frac{4AB}{m} \left(\sin \frac{m}{2} \operatorname{ch} \frac{m}{2} - \cos \frac{m}{2} \operatorname{sh} \frac{m}{2}\right)$$

$$= A_{2n+1}^2 \left[1 - \frac{\sin m}{m} + \cos m \left(\frac{\operatorname{sh} m}{m} - 1\right)\right] = 1.$$

$$\tan m = \frac{2 \tan \frac{m}{2}}{1 - \tan^2 \frac{m}{2}} = \operatorname{sh} m$$

$$\therefore A_{2n+1}^2 = \frac{1}{1 - \cos m} = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{m}{2}}, \quad \left. \begin{array}{l} A_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{m}{2}} \end{array} \right\} \quad (9)$$

$$A_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \frac{m}{2}}$$

$$m_2 = 2.36502$$

$$m_3 = 4.73004$$

$$m_4 = 7.06859$$

$$m_5 = 9.41371$$

$$\frac{m_0}{2} = 2.$$

(10).

$$m_n = \frac{1}{2} (2n-1)\pi$$

昭和 年 月 日.

$$h f_{n,m} = \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2 \int_{-1}^1 u_n'' u_m dx, \quad (11)$$

$$h f_{2n,2m} = \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2 \int_{-1}^1 (A_n \cos nx + B_n \sin nx)(A_m \cos mx + B_m \sin mx) dx.$$

$$n = \frac{2m}{2}, \quad m = \frac{2m}{2}.$$

$$= \frac{1}{n^2} \int_{-1}^1 (-u_n + 2B_n \sin nx) u_m dx = -\frac{\delta_{n,m}}{n^2} + 2\frac{B_n}{n^2} \int_{-1}^1 \sin nx u_m dx$$

$$\int_{-1}^1 \sin nx \cos mx dx = \frac{2 \sin n \cos m}{n} + \frac{m}{n} \int_{-1}^1 \sin nx \sin mx dx$$

$$= \frac{2}{n} \sin n \cos m + \frac{2m}{n^2} \sin n \sin m - \frac{m^2}{n^2} \int_{-1}^1 \sin nx \cos mx dx$$

$$= \frac{2}{n^2 + m^2} (n \sin n \cos m + m \sin n \sin m)$$

$$= \frac{2 \sin n \cos m}{n^2 + m^2} (n \tanh n + m \tanh m)$$

$$\int_{-1}^1 \sin nx \sin mx dx = \frac{2 \sin n \sin m}{n} - \frac{m}{n} \int_{-1}^1 \sin nx \cos mx dx.$$

$$= \frac{2}{n} \sin n \sin m - \frac{2m}{n^2} \sin n \sin m + \frac{m^2}{n^2} \int_{-1}^1 \sin nx \cos mx dx$$

$$= \frac{2 \sin n \sin m}{n^2 - m^2} [n \tanh n - m \tanh m] \xrightarrow{n=m} 1 + \frac{\sin n \sin n}{n}$$

$$h f_{2n,2m} = -\frac{\delta_{n,m}}{n^2} + \frac{4}{n^2 + m^2} \left[\frac{1}{n^2 + m^2} (n \tanh n - m \tanh m) + \frac{1}{n^2 - m^2} (n \tanh n - m \tanh m) \right]$$

$$= -\frac{\delta_{n,m}}{n^2} + \frac{4}{n^4 - m^4} (n \tanh n - m \tanh m), \quad (12)$$

$$h f_{2n} = \frac{1}{n^2} \int_{-1}^1 (u_n - 2A_n \cos nx) u_n dx = \frac{1}{n^2} [\delta_{nn}] - \frac{2A_n}{n^2} \int_{-1}^1 \cos nx u_n dx$$

$$\int_0^1 \cosh^2 nx \, dx = \int_0^1 (\cosh 2nx + 1) dx = 1 + \frac{\sinh 2n}{2n} = 1 + \frac{\sinh n \cosh n}{n}$$

B-4

昭和 年 月 日

$$\int_0^1 \cosh nx \cosh mx \, dx = \frac{2nm \cosh n}{n^2} + \frac{m}{n} \int_0^1 \sinh nx \cosh mx \, dx$$

$$= \frac{2}{n} \sinh n \cosh n - \frac{2m}{n^2} \cosh n \sinh n + \frac{m^2}{n^2} \int_0^1 \cosh nx \cosh mx \, dx$$

$$= \frac{2 \cosh n \cosh m}{n^2 - m^2} (n \tanh n - m \tanh m) + \frac{1}{n} (\sinh n \cosh n + \frac{1}{2} \sinh^2 n)$$

$$\therefore h f_{2n, 2m} = \frac{\delta_{n,m}}{n^2} - \frac{2}{n^2} \left[\frac{1}{n^2 - m^2} (m \tanh n - n \tanh m) + \frac{1}{n^2 + m^2} (m \tanh m - n \tanh n) \right]$$

$$= \frac{\delta_{n,m}}{n^2} - \frac{4}{n^4 - m^4} (n \tanh n - m \tanh m), \quad (13)$$

結局

$$\therefore h f_{2n, 2m} = \frac{4}{n^4 - m^4} (n \tanh n - m \tanh m), \quad \text{for } n \neq m. \quad (14)$$

$$h f_{2n, 2n} = \frac{\tanh n}{n^2} \left(\frac{1}{n} - \tanh n \right), \quad \text{for } n = m.$$

$$\text{そこで } n = \frac{m_{2n+1}}{2}, \quad m = \frac{m_{2m+1}}{2}$$

$$h f_{m+1, m+1} = \frac{1}{n^2} \int_0^1 (-u_n + 2B_n \sinh x) (A_m \sin mx + B_m \sinh mx) dx$$

$$= -\frac{\delta_{n,m}}{n^2} + \frac{2}{n^2} B_n \int_0^1 \sinh x u_m dx$$

$$n = \frac{m_{2n+1}}{2}, \quad m = \frac{m_{2m+1}}{2}$$

$$\int_0^1 \sinh x u_m dx = \frac{1}{2n^4} \int_0^1 \sinh x u_m^{(4)} dx = \frac{1}{2n^4} \left[u_m^{(3)} \cosh x - n \int_0^1 \cosh x u_m^{(3)} dx \right]$$

$$= \frac{2}{m^4} \left[u_m^{(3)}(1) \sinh n - n u_m^{(2)}(1) \cosh n + n^2 u_m^{(1)} \sinh n - n^3 u_m(1) \cosh n \right] + \frac{n^4}{m^4} \int_0^1 u_m \cosh x dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{m^4 - n^4} \left[mn^2 \sinh n (\coth m + \coth n) - 2n^3 \cosh n \right]$$

$$\therefore h f_{2n+1, 2m+1} = -\frac{\delta_{n,m}}{n^2} + \frac{4}{m^4 - n^4} [m \coth m - n \coth n], \quad (15)$$

昭和 年 月 日

$$x = mz^{-1/2}$$

$$\int_0^1 \sin^2 nx \, dx = \int_0^1 (1 - \cos 2nx) \, dx = 1 - \frac{\sin 2n}{2n}$$

$$\int_0^1 \sinh^2 nx \, dx = \int_0^1 (\cosh 2nx - 1) \, dx = \frac{\sinh 2n}{2n} - 1$$

$$\begin{aligned} h f_{2n+1, 2m+1} &= \frac{1}{2n^2} \left[\frac{1}{\sinh n} \left(\frac{\sinh n \cosh n}{n} - 1 \right) - \frac{1}{\sinh n} \left(1 - \frac{\sinh n \cosh n}{n} \right) \right] \\ &= \frac{\coth n}{n^2} \left(\frac{1}{n} - \coth n \right), \quad \text{for } n = m, \quad (16) \end{aligned}$$

577

$$h f_{2n+1, 2m+1} = \frac{4}{n^4 - m^4} [n \coth n - m \coth m], \quad \text{for } n \neq m, \quad (17)$$

$$\text{To find } n, m \text{ is } n = \frac{m_{2n+1}}{2}, \quad m = \frac{m_{2m+1}}{2}$$

$$\begin{aligned} h f_{2n, 0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{m_{2n}} \right)^4 \int_{-1}^1 U_{2n}'' \, dx = \sqrt{2} \left(\frac{2}{m_{2n}} \right)^4 U_{2n}'(1) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{m_{2n}} \right)^4 \left(\tanh \frac{m_{2n}}{2} - \tanh \frac{m_{2n}}{2} \right) = 2 \left(\frac{2}{m_{2n}} \right)^4 \tanh \frac{m_{2n}}{2}, \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h f_{2n+1, 1} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{m_{2n+1}} \right)^4 \int_{-1}^1 U_{2n+1}'' \, x \, dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{m_{2n+1}} \right)^4 \left(m_{2n+1} \coth \frac{m_{2n+1}}{2} - 2 \right) \\ \int_{-1}^1 U_{2n+1}'' \, x \, dx &= x U_{2n+1}' \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 U_{2n+1}' \, dx = 2 \left\{ U_{2n+1}(1) - U_{2n+1}(-1) \right\} \\ &= \sqrt{2} \left[\left(\frac{m}{2} \right) \left\{ \coth \frac{m}{2} + \coth \frac{m}{2} \right\} - 2 \right] = \sqrt{2} (m \coth \frac{m}{2} - 2) \end{aligned}$$

$$h f_{2n+1, 1} = \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{m_{2n+1}} \right)^3 \left(\coth \frac{m_{2n+1}}{2} - \frac{2}{m_{2n+1}} \right), \quad (19)$$

昭和 年 月 日

$$\frac{m_2}{2} = 2.36502, \quad \text{th} \frac{m_2}{2} = -\tan \frac{m_2}{2} = .98250$$

$$\frac{m_4}{2} = 31.49781, \quad \text{th} \frac{m_4}{2} = .999954$$

5491

$$m_{3/2} = 3.92660, \quad \text{coth} \frac{m_3}{2} = \cot \frac{m_3}{2} = 1.000782$$

$$m_{5/2} = 7.06859, \quad \text{coth} \frac{m_5}{2} = \cot \frac{m_5}{2} = 1.0000$$

$$h f_{2,0} = 2 \left(\frac{2}{m_2} \right)^2 \text{th} \frac{m_2}{2} = 2 (2.36502)^2 \times .9825 = .062809$$

$$h f_{2,2} = \left(\frac{2}{m_2} \right)^2 \text{th} \frac{m_2}{2} \left(\frac{2}{m_2} - \text{th} \frac{m_2}{2} \right) = .196424 (1.422829 - .9825) = -.109933$$

$$h f_{2,4} = \frac{4}{\left(\frac{m_2}{2} \right)^2 - \left(\frac{m_4}{2} \right)^2} \left(\frac{m_2}{2} \text{th} \frac{m_2}{2} - \frac{m_4}{2} \text{th} \frac{m_4}{2} \right) = \frac{13.173923}{228.5848} = .05885$$

$$h f_{4,0} = 2 \left(\frac{2}{m_4} \right)^2 \text{th} \frac{m_4}{2} = .0021890$$

$$h f_{4,4} = \left(\frac{2}{m_4} \right)^2 \text{th} \frac{m_4}{2} \left(\frac{2}{m_4} - \text{th} \frac{m_4}{2} \right) = -.027064$$

$$h f_{3,1} = \frac{4}{13} \left(\frac{2}{m_3} \right)^3 \left(\text{coth} \frac{m_3}{2} - \frac{2}{m_3} \right) = .0853833$$

$$h f_{3,3} = \left(\frac{2}{m_3} \right)^2 \text{coth} \frac{m_3}{2} \left(\frac{2}{m_3} - \text{coth} \frac{m_3}{2} \right) = -.0484293$$

$$h f_{3,5} = \frac{4}{\left(\frac{m_3}{2} \right)^2 - \left(\frac{m_5}{2} \right)^2} \left(\frac{m_3}{2} \text{coth} \frac{m_3}{2} - \frac{m_5}{2} \text{coth} \frac{m_5}{2} \right) = .00555862$$

3.13892 x 4 = 12.55568

$$h f_{5,1} = \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{m_5} \right)^3 \left(\text{coth} \frac{m_5}{2} - \frac{2}{m_5} \right) = .00561398$$

237.72051

$$h f_{5,5} = \left(\frac{2}{m_5} \right)^2 \text{coth} \frac{m_5}{2} \left(\frac{2}{m_5} - \text{coth} \frac{m_5}{2} \right) = -.0171826$$

.8585291