

水野 2部
50.6.26

昭和50年2月9日

ストリツフ法 に関する覚書 (I) (前進速度のない場合)

別所 正和

内容

梗概

頁

1

1. ストリツフ法の誘導

2

2. ストリツフ法の3次元修正

9

3. 3次元計算

14 ~ 18

附録 A 3次元問題の近似解

A-1-1:

〃 B 種々の種分

B-0 ~ 15

概要

ストリツフ法は流れ力の計算について大変有用な近似法であるが波長が大変大きい時には誤差が割合大きい事が知られている。

以下においては

まずストリツフ法が如何に導出出来るかを従来の細長体理論とは違つた方法で言試して見る。

それはふたえポテンシャルを二つえポテンシャルとふたえの速度導線度分に分ける方法で結果においては従来の方法と変わらないが導出方法が簡単である割に数学的難点が少ない点に特色がある。

この方法によると波長の大きい所ではストリツフ法は良い近似でなければならぬ(半積分方程式では)事になるが上の導出の過程では波長が小さい事を前提としているので細長の所中程度の波長で良い近似であると言う事になる。

そういう事で波長の大きい時はストリツフ法に頼れないと考えられ、§2, 3 においては変分法による計算法を説明し、附録にその例を示す。

この方法では適当な許容回数を選んで、 π によって $\pi \rightarrow \pi$ で良い近似値を得る事が出来るようである。

なお今回は前進速度のない場合について、浮遊構造物のようなものを念頭において考えているので §2, 3 においては吃水の浅い極限つまり水面の圧力分布を主として考えているが排水量型に抗限するのは容易であろう。

昭和 年 月 日

1. ストリップ法の誘導

今から先による速度ポテンシャルを考えよう。

$$\phi(x, y, z) = \iint_S \sigma(x', y', z') S(x, y, z; x', y', z') dS(x', y', z'), \quad (1)$$

$$S(x, y, z; x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{k(z+z') + ikr(x-x') \cos \theta + i(y-y')k \sin \theta}}{-k - k + \mu i} dk d\theta, \quad (2)$$

$$r_1 = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2},$$

物体の長さを L , 幅を B とし

$$L \gg B, \quad (3)$$

つまり充分細長いものとする。

今 ε なる長さをとり

$$L \gg 2\varepsilon \gg B, \quad (4)$$

のように選ぶ事が出来るものとしよう。

物体は充分細長いから考えている断面 x をはさみ $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ の区間では σ は殆ど一定と考える事が出来るものとする。

そこで

$$\phi = \phi_1 + \phi_2. \quad (5)$$

$$\phi_1(x, y, z) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} dx' \int_C \sigma(x', y', z') S(x, y, z; x', y', z') dS, \quad (6)$$

$$\phi_2(x, y, z) = \iint_{S'} \sigma(x', y', z') S dS, \quad (7)$$

昭和 年 月 日

2:12 C は断面 Σ における外周曲線, ds はその線素,
 S' は S から $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ の区間だけを除いた曲面とする。

さて (6) において σ の ε の区間で Σ' に依存しないとして
 Σ' で積分すると得る

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) dx' = 2 \log \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + O\left(\frac{r_1 r_2}{\varepsilon^2}\right), \quad (8)$$

$$r_1 = \sqrt{(y-y')^2 + (z-z')^2}, \quad r_2 = \sqrt{(y-y')^2 + (z+z')^2}.$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} dx' \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{k(z+z') + i q(y-y') + i p(x-x')}}{k - K + \mu i} dk d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} dx' \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{p^2+q^2}(z+z') + i p(x-x') + i q(y-y')}}{\sqrt{p^2+q^2} - K + \mu i} dp dq$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{p^2+q^2}(z+z') + i q(y-y')}}{\sqrt{p^2+q^2} - K + \mu i} \times \frac{\sin p \varepsilon}{\varepsilon} dp dq,$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i q(y-y')}}{i q - K + \mu i} dq$$

$$= 4 \int_0^{\infty} \frac{e^{k(z+z')} \cos k(y-y')}{k - K + \mu i} dk + O\left(\frac{1}{K \varepsilon}\right), \quad (9)$$

→ 21)

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} S(x, y, z; x', y', z') dx' = S^T(y, z; y', z') + O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (10)$$

$$S^T(y, z; y', z') = \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{k(z+z')} \cos k(y-y')}{k - K + \mu i} dk, \quad (11)$$

となり S^T は 2次元問題の核に一致する。

すなわち $B \gg 2\varepsilon$ の極限で

$$\phi_1(x, y, z) \xrightarrow{B \gg 2\varepsilon} \int_C \sigma(x, y', z') S^T(y, z; y', z') ds \equiv \phi^T(y, z; x), \quad (12)$$

これは ストリツフ°法 による近似そのものである。
ストリツフ°法では ϕ_2 は 無視するのが 普通である。

しかし $L \gg 2\varepsilon$ の考えているので $S' \neq S$ であり、 ϕ_2 を一概に無視する言に仕方がないので 2重近似値を
考えて見よう。

S' では (4) の条件から

$$|x-x'| \gg |y-y'|, \quad |z-z'| \text{ or } |z+z'|, \quad (13)$$

である故

$$\begin{aligned} S(x, y, z; x', y', z') &\rightarrow \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{ik(x-x') + \mu z}}{k - K + \mu i} dk d\theta \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{J_0(k|x-x'|) k dk}{k - K + \mu i} \equiv S^0(x-x'), \quad (14) \end{aligned}$$

となる。

そこで

$$\int_C \sigma(x, y', z') ds = a(x), \quad (15)$$

とあくと、

$$\phi_2(x, y, z) \rightarrow \int_{-L/2}^{L/2} a(x') S^0(x-x') dx' \equiv \phi^1(x), \quad (16)$$

を得る。ここは $\int_{-L/2}^{L/2} dx'$ は $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ の区間は
考慮しない事を要するものとする。

(しかし $L \gg 2\varepsilon$ なので 大抵 2次元のようにとてよかう。)

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx' \equiv \int_{-L/2}^{L/2} dx' \quad (17)$$

昭和 年 月 日

結局 $\phi(x, y, z) \rightarrow \phi^T(y, z; x) + \phi^I(x), \quad (1.8)$

それ故 境界条件は $z=0$ 法線 n 側 x -面/内にあるとすると

$$\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial n} \Big|_0 \rightarrow \frac{\partial \phi^T(y, z; x)}{\partial n} \Big|_0, \quad (1.9)$$

となり, ストリツフ^o法による近似そのものとなる。

つまり ϕ は ストリツフ^o法で決めてよい事を意味している
 が ϕ としては ϕ^I による $z=0$ 影響 ϕ^I を加えればよい
 事を意味し, 細長船理論による式に類似している。

言うまでもなくこの段階での ストリツフ^o法に対する補正
 は 境界条件には関係しないので可能である。

今力の無次元量として f_{ij}, H を

$$f_{ij} = \iint_S \phi_i(x, y, z) \frac{\partial x_j}{\partial n} dS, \quad (2.0)$$

$$H(K, \theta) = \iint_S \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\} e^{-Kz + iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} dS, \quad (2.1)$$

のように定義して ϕ に (1.8) を代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \int_C \phi^T(y, z; x) \frac{\partial x_i}{\partial n} dS &= f_{ij}^T(x), \\ \int_C \frac{\partial x_i}{\partial n} dS &= b_i(x), \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_C \left\{ \phi^T(y, z; x) \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \phi^T}{\partial n} \right\} e^{-Kz + iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} dS &= h^T(x, K, \theta) e^{+iKx \cos \theta}, \\ \int_C \frac{\partial}{\partial n} e^{-Kz + iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} dS &= c(K, \theta), \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

なる量を導き入る

昭和 年 月 日

$$f_{i,j} = \int_{-1/2}^{1/2} \{ f_{ij}^T(x) + \phi^T(x) b(x) \} dx, \quad (24)$$

$$H(k, \theta) = \int_{-1/2}^{1/2} \{ h^T(x, k, \theta) + \phi^T(x) c(x, k, \theta) \} e^{iKx \cos \theta} dx, \quad (25)$$

なる近似値を得る。

この右辺の1項がストリツワ¹⁾法による値であるの2項が2項が修正量となる。

すなわち、近似(19) ^{or (16)} が少し乱れると与えられる値は、(14)を2項の和とすると、

$$\begin{aligned} S(x, y, z; x', y', z') &\longrightarrow S^0(x-x') \\ &+ y \frac{\partial}{\partial y} S(x, 0, 0; x', 0, 0) \\ &+ z \frac{\partial}{\partial z} S(x, 0, 0; x', 0, 0) \\ &= (1 - Kz) S^0(x-x'), \end{aligned} \quad (26)$$

となるが (18) の整理より

$$\phi(x, y, z) \longrightarrow \phi^T(y, z; x) + (1 - Kz) \phi^T(x), \quad (27)$$

とおくと (19) は

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi(x, y, z) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial n} \phi^T(y, z; x) - K \frac{\partial z}{\partial n} \phi^T(x), \quad (28)$$

を得る。

これをCに代って積分すると、右式を得る。

$$\int_C \frac{\partial}{\partial n} \phi ds \longrightarrow a(x) - K \phi^T(x) b(x), \quad (29)$$

227

$$\left. \begin{aligned} \int_c \frac{\partial}{\partial n} \phi^I ds &= \int_c \sigma ds = a(x) \\ b(x) &= \int_c \frac{\partial \phi}{\partial n} ds, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

ϕ^I は (16) により $a(x)$ で表現される故、これは $a(x)$ に対する積分方程式である。

なお S^0 について

$$\int_0^\infty \frac{J_0(kx)}{k^2 - K + \mu i} dk = -\frac{\pi}{2} \{H_0(Kx) - Y_0(Kx)\} - 2\pi i H_0^{(1)}(Kx)$$

なる積分がある故

$$S^0(x) = \frac{1}{2\pi|x|} - \pi K \{H_0(K|x|) - Y_0(K|x|)\} - 2\pi i K H_0^{(1)}(K|x|), \quad (31)$$

となり

$$\begin{aligned} S^0(x) &\xrightarrow{K \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi|x|} + O(K \log |x|), \\ &\xrightarrow{K \rightarrow \infty} 2\sqrt{\frac{2\pi K}{|x|}} e^{-i(K|x| + \frac{\pi}{4})} + O\left(\frac{1}{K|x|^3}\right). \end{aligned} \quad (32)$$

となり、

$$\begin{aligned} \phi^I(x) &\xrightarrow{K \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{a(x')}{|x-x'|} dx', \\ &\xrightarrow{K \rightarrow \infty} 2\sqrt{2\pi K} e^{-\frac{\pi}{4}i} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{a(x') e^{-iK|x-x'|}}{\sqrt{|x-x'|}} dx', \end{aligned} \quad (33)$$

がえられる。

(29) に (33) の後の式を代入すると丸尾等^{*}の得た式に似た方程式を得る。

丸尾, 佐々木; 造学論集 136号 (49年12月)

しかし (29) 右辺の 2 項は 1 項に比べて高次であるから逐次近似的に.

$$q(x) \rightarrow \int_{\frac{2}{21}} \phi ds + K b(x) \phi^2(x), \quad (34)$$

と近似する立場もある。

しかしこれから更に力を求める事を考えると結局近似的には (24) (25) に一致するので (29) 或いは (28) は特別の場合を除いてあまり詳しく必要はないように見える。

環理論との類推で考えると (28) 右辺の 2 項は誘導速度であり, Haldinseu, 丸尾等の考えは K が充分大きい時この項が 1 項に比べて無視出来ないとするものである。

この事は圧力 (中に比例する) については確かであるであろうが, それを積分した力の段階ではあまり問題になくてもよくなるであろう。

(細長氏によつてはそうもいかならうか?)

逆に力についてはストリツフ法の精度が良い事からこの推論は保証出来よう。

最後にこのストリツフ法の導入では (10) 式の近似が成立つ事が前提であるが (19) 式に見る通り, その際には $K\varepsilon \gg 1$ でなければならぬ。一方 $L \gg \varepsilon$ である故に $KL \gg 1$ でなければならぬ。つまり波長が充分小さくなければならぬ。

従つて K が小さい時はストリツフ法を使うのは注意しなければいけない事になり, 実際 (28) において $K \rightarrow 0$ とするとストリツフ近似そのものとなる。

しかし実際にはストリツフ法は $K \rightarrow 0$ では良い近似を与えない。

つまり $K \rightarrow 0$ の時ストリツフ法を誘導速度を導入してもあまり良い近似は得られないであろう。

2. ストリップ法の 3次元修正

ストリップ法は2次元問題の解を使って3次元問題の解を近似するものであるが、この時直接力の計算に使うのでエネルギー関係等に集合が悪い。

そこで2次元問題の解を近似値として、3次元問題の境界値問題に適するように修正して使えば集合がよいだろう。

このような方法には境界値問題を変分問題に変換してをく集合がよい。

すなわち変分法は

$$J = \int_S \mu \left(2\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} - 2 \frac{df}{dn} \right) dS, \quad \dots (1)$$

の ϕ に関する極値 $[J]$ は

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{df}{dn} : \text{given}, \quad \dots (2)$$

の時に得られ

$$[J] = - \int_S \mu \frac{\partial \phi}{\partial n} dS, \quad \dots (3)$$

となる。

今2次元問題の potential を ϕ^T とし

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = w(x, y) \frac{\partial \phi^T}{\partial n} \quad \dots (4)$$

となつておくとしよう。

§4 (5) に見るように

$$\begin{aligned} \text{横ストリップでは } w(x, y) &= \begin{cases} 1 & \dots \text{heave, roll} \\ -x & \dots \text{pitch} \end{cases} \\ \frac{\partial \phi^T}{\partial n} &= - \frac{\partial z}{\partial n} \end{aligned} \quad (5)$$

縦ストリップでは $w(x, y) = \begin{cases} 1 & \dots \text{heave, pitch, roll} \end{cases}$

$$\frac{\partial \phi^T}{\partial n} = \begin{cases} - \frac{\partial z}{\partial n} & : \text{heave} \\ z \frac{\partial x}{\partial n} - x \frac{\partial z}{\partial n} & : \text{pitch} \\ -z \frac{\partial y}{\partial n} + y \frac{\partial z}{\partial n} & : \text{roll} \end{cases} \quad (6)$$

となる。

μ の S 上での近似値を

$$C\mu(p)|_S = Cw(x)\mu^T(p)|_S, \dots (7)$$

としよう。($w(x, y)$) は上式に於ける y 方向には一定故 $w(x)$ と置く

C は求むる修正係で一般的には (x, y) の関数としてよりか、ここでは簡単の爲に定数として置く。

S 上での (q) となる B を $B = \frac{\partial}{\partial n} S(p, q)$ と置けば、 p, q (2/1) 式により

$$\phi(p) = \iint_S \mu(q) \frac{\partial}{\partial n_q} S(p, q) ds(q), \dots (8)$$

さて

$$A = - \iint_S \mu \frac{df}{dn} ds = - \iint_S w^2(x) \mu^T \frac{\partial}{\partial n} \phi^T ds$$

$$= - \int w^2(x) dx \int_{C(y)} \mu^T \frac{\partial}{\partial n} \phi^T ds \quad \text{for Tr. Strip}$$

$$= - \int dy \int_{C(x)} \mu^T \frac{\partial}{\partial n} \phi^T ds \quad \text{for Long Strip}$$

$$\text{故、今} \quad - \int_C \mu^T \frac{\partial}{\partial n} \phi^T ds = f^T(x), \dots (9)$$

とおくと

or $f^T(y)$

$$\begin{aligned} A &= \int w^2(x) f^T(x) dx, \quad \text{for T.S.} \\ &= \int f^T(y) dy = B f^T(y), \quad \text{for L.S.} \end{aligned} \quad (10)$$

これはストリツプ法による近似値そのものである。

2.2.2

$$B = - \iint_S \mu \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = - \iint_S w(x) \mu^T(p) \frac{\partial \phi}{\partial n_p} dS(p)$$

$$= - \iint_S \iint_S w(x) w(x') \mu^T(p) \mu^T(q) \frac{\partial^2}{\partial n_p \partial n_q} S(p, q) dS(p) dS(q), \quad (11)$$

2.2.3

$$4\pi S(p, q) = \frac{1}{r(p, q)} - \frac{1}{r(p, \bar{q})} + \frac{k}{\pi} \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \frac{e^{-k(z+z') + i k(\omega - \omega')}}{k - k + \pi i} dk d\theta,$$

2.2.3 から

$$B_0 = - \frac{1}{4\pi} \iint_S \iint_S w(x) w(x') \mu^T(p) \mu^T(q) \frac{\partial^2}{\partial n_p \partial n_q} \left\{ \frac{1}{r(p, q)} - \frac{1}{r(p, \bar{q})} \right\} dS dS, \quad (12)$$

$$\int_{C(x)} \mu^T(p) \frac{\partial}{\partial n} e^{-kz + i k y \sin \theta} dS = H^T(x; k, \sin \theta), \quad (13)$$

$$\int_{C(y)} \mu^T(p) \frac{\partial}{\partial n} e^{-kz + i k x \cos \theta} dS = H^T(y; k, \cos \theta), \quad (14)$$

よって

$$= - \iint_S \iint_S w w' \mu^T \mu^T \frac{\partial^2}{\partial n_p \partial n_q} e^{-k(z+z') + i k(\omega - \omega')} dS dS$$

$$= - \int dx \int dx' H^T(x; k, \sin \theta) H^T(x'; k, -\sin \theta) w(x) w(x'),$$

for T. S.

$$= - \int dy \int dy' H^T(y; k, \cos \theta) H^T(y'; k, -\cos \theta),$$

for L. S.

$$B = B_0 + \frac{K}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{H^T(y; k, \cos\theta) H^T(y; k, -\cos\theta)}{k - K + \mu i} dy d\theta \quad (15)$$

for L.S.

$$B = B_0 + \frac{K}{(2\pi)^2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} w(x) w(x') dx dx' \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{H^T(x; k, \cos\theta) H^T(x'; k, -\cos\theta)}{k - K + \mu i} dk d\theta \quad (16)$$

for T.S.

A, B は H^T がわかっているからこれを代め
(1), (2) 代入すれば

$$J = +2CA - C^2B, \quad (17)$$

となるからこれを C で微分して $\partial J / \partial C = 0$ とおくと

$$C = A/B, \quad (18)$$

$$[J] = \frac{A^2}{B}, \quad (19)$$

を得る。

これから (10) 式から判るように A は ストリツフ法に
よる近似値 のものであるから C は 3次元修正
係数と見なすことができる。

この時 H^T は 1次元は

$$H(K, \theta) = \iint_S \mu(p) \frac{\partial}{\partial n} e^{-Kz + iK(x \cos\theta + y \sin\theta)} dS = C H_{(K, \theta)}^{ST}, \quad (20)$$

$$H^{ST} = \int w(x) dx e^{iKx \cos\theta} H^T(x; K, \cos\theta), \quad \text{for T.S.} \quad (21)$$

$$H^{ST} = \int dy e^{iKy \sin\theta} H^T(y; K, \cos\theta), \quad \text{for L.S.} \quad (22)$$

となる。 H^{ST} は ストリツフ法で求まる値である。

なお、1) のものを変分的に求めると、 δ となる。

これらの計算は、しかし大変複雑であって、又その基礎において 2 次元計算の結果を利用する。

しかもその計算過程は、3 次元計算であって、2 次元におけるものと全く相似である。

しかもストリツポフの精度は $K \rightarrow 0$ で悪くなるというのであるから、 $K \rightarrow 0$ では 3 次元計算を直接実行するのが簡便である。

一方 K の大きい所では、系集運動力が小さいので、これらの係数の精度は運動計算の結果にはあまり関係ないものである。

3. 3次を計算に於て $k \rightarrow 0$

一般にストリツポ法は k の大きい程でより精度があるが、 k の小さい程では是合が悪いようである。

一方、その3次を修正は前節に見たようにかなり面倒な計算になる。

しか、 k の小さい程では近似計算特に前節に述べた変分法はかなりよい近似値を与えようと考えられる。

そこで少しそれについて考えて見よう。

ここではB型を想定し、圧力分布で考えて見よう。

変分原理は、

$$I = \iint_S \pi(2w + \phi_z) dS, \quad \dots (1)$$

の極値は $\phi_z = -2w(x, y), \quad \dots (2)$

$$[I] = \iint_S \pi w dS, \quad \dots (3)$$

となる事である。

この時のポテンシャルは

$$\phi(P) = \iint_S \pi(Q) S(P, Q) dS(Q), \quad \dots (4)$$

$$\pi S(P, Q) = \frac{1}{r(P, Q)} - \frac{1}{r(P, Q)} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{kz + ik(\bar{Q} - \bar{P})}}{k - k + \mu i} dk d\theta,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + k \right) \phi(P) \Big|_{z=0} = -\pi(x, y), \quad \dots (5)$$

である。

$k \rightarrow 0$ では(5)から得られるように、

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi \Big|_{z=0} = -\pi(x, y), \quad \dots (6)$$

であるから

$$\pi(x, y) = w(x, y), \quad \dots (7)$$

昭和 年 月 日

よって、

$$\pi(x, y) = \alpha w(x, y), \quad \dots (8)$$

と置いて 変分原理によつて α を決めよう。

今

$$\phi_0(\phi) = \iint_S w \phi \, ds,$$

$$\iint_S w^2 \, ds = A$$

$$\iint w \phi_0 \, ds = B$$

(9).

と置く

$$I = \alpha A - \{ \alpha^2 A + K \alpha^2 B \}, \quad \dots (10).$$

よって、

$$\alpha = \frac{A}{A + KB}, \quad \dots (11)$$

$$[I] = \frac{A^2}{A + KB}$$

よつて 近似値 が与えられる。

この時 p.7 (24) によつて

$$H(K, \varphi) = \alpha \iint w e^{iKw(\varphi)} \, ds, \quad \dots (12)$$

である。

従つて B を計算すればよい。 $[I]$ は 高次の浮力を含んでおらず 変分原理によつて求まる。

$$f_{ij} = - \iint \phi \phi_0 \, ds = \iint \phi w \, ds = \frac{1}{K} \iint w (\pi - w) \, dx \, dy$$

$$= \alpha B = \frac{AB}{A + KB}, \quad \dots (13)$$

$$= \frac{1}{K} \{ A - [I] \},$$

浸した平では前節と同様に作るが今は物体が薄いので浸水平板として近似出来るよう。

そうすると変分原理は

$$J = \iint_S \mu \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + 2w \right) dx dy, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_S = -w(x, y), \quad (15)$$

$$[J] = \iint_S \mu w dx dy, \quad (16)$$

p.8 (30) に依り

$$f_{ij} = \iint_S \mu w_j dx dy - \iiint_D (\nabla x_j)^2 d\tau, \quad (17)$$

となり各々は $x_j \equiv x$ では右辺 x の項は排水容積となるから $[J]$ は排水量と附加質量の分を含む事になる。

従って平板で近似する時 $[J]$ から求めたものは (附加質量 + 排水質量) = 見掛質量の近似値となっている事に注意すべきである。

同様の理由でコックン図数はフルードクリップ力を含んでいるので後からこれを考慮に加える必要はない事になる。

さて p.7 (20) より

$$\phi(p) = \iint_S \mu(Q) \frac{\partial}{\partial z} S(p, Q) dS(Q), \quad (18)$$

$$4\pi \left(K S + \frac{\partial}{\partial z} S \right) = K \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \left(\frac{z-z'}{r_1^3} - \frac{z+z'}{r_2^3} \right)$$

$$4\pi \left(K S + \frac{\partial}{\partial z} S \right) = K \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - \left(\frac{z-z'}{r_1^3} + \frac{z+z'}{r_2^3} \right) \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 4\pi \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} S &= K^2 S + K \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \\
 &\quad - K^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - K \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \\
 &= K^2 \left\{ S - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right\} - 2K \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \\
 &= 4\pi K^2 \tilde{S}(p, q) + 2K \frac{(z+z')}{r_2^3} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$4\pi \tilde{S} = 4\pi S - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{k J_0(kR) e^{-k(z+z')}}{k - K + \mu i} dk, \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
 \phi_z \Big|_{z=T} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint_S \mu(q) \left\{ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right\} dS_1 - \frac{KI}{\pi} \iint_S \frac{\mu(q)}{r_2^3} dS \\
 &\quad + K^2 \iint_S \mu \tilde{S} dS, \quad (22)
 \end{aligned}$$

従って $K \rightarrow 0$ の時の次の近似は

$$\begin{aligned}
 \phi_z \Big|_{z=T} &= -w \doteq -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint_S \mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) dS, \quad (23) \\
 \text{つまり} \quad \phi_z \Big|_{z=0} &= 0
 \end{aligned}$$

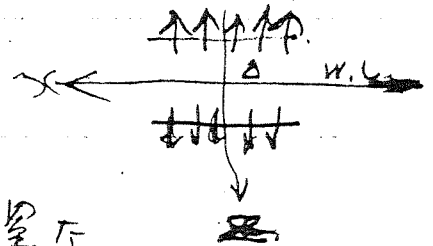
の解である。

この解 μ は T の下側の時は無限流体中の平板のそれになるが、 T から今のように小さいと全く異なつて来て(10)様な近似値は得られない。

今それが(23)から求められたとし、それを μ_0 とおくと

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint_S \mu_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) dS \Big|_{z=T} = w(x, y), \quad (24)$$

$$\phi_z \Big|_{z=T} = -w - \frac{KI}{\pi} \iint_S \frac{\mu_0 dS}{r_2^3} + K^2 \iint_S \mu_0 \tilde{S} dS, \quad (25)$$



又
$$A = \iint_S \mu_0 w \, dx \, dy, \quad \dots \quad (26)$$

$$A + KB = - \iint_S \mu_0 \phi_{,2} \, dx \, dy = A + \frac{KT}{\pi} \iint_S \iint_S \frac{\mu_0(p) \mu_0(q)}{r_{12}^3} \, ds(p) \, ds(q) \\ - K^2 \iint_S \iint_S \, ds(p) \, ds(q) \, \mu_0(p) \mu_0(q) \tilde{S}(p, q), \quad (27)$$

とおくと前同様に

$$\alpha = \frac{A}{A + KB}, \quad \dots \quad (28)$$

とすると

$$\mu(x, y) = \alpha \mu_0(x, y), \quad \dots \quad (29)$$

が 1 近似となる。

(24) の積分方程式を解く時もこの変分原理を応用する事が出来る。

又 $T \rightarrow 0$, $KT \rightarrow 0$ の極限では (28) と (4), (5) を較べて見ればわかるように (22) の右辺第 1, 2 項は消えて形式的に

$$K\mu \xrightarrow{T \rightarrow 0} -\pi \xrightarrow{K \rightarrow 0} -2\pi, \quad \dots \quad (30)$$

となる。

(24) の解がこの極限に近づくかどうかはよくわからないが、物体の遠ざけでは $T \rightarrow 0$ とした場合この極限値によるポテンシャルに近づくであろう事は言えよう。

昭和 年 月 日

附録 3次元問題の近似解

§6 で述べた方法により、円板、長方形板の heave, pitch, linged osc. の問題を圧力分布として近似的に解いて見る。

なお、浸水板でも吃水が浅いと §6 (30) のように圧力分布と見なす事が出来るがその際実用的には、波の強制力には e^{-kT} を減衰には e^{-2kT} をかけておいた方がよからう。

又板の厚みが有限の場合は従来の計算結果を参照して、更に (30) 式を参照すると、波の強制力にはフルードクリロツフ力が含まれているが、又附加荷重は

$$m(\text{平板}) > m(\text{有限厚み}) > m(\text{平板}) - \rho V(\text{排水容積})$$

の関係があるようであるので注意すべきである。

(2次元平板で $k \rightarrow \infty$ では $m(\text{有限厚み}) = m(\text{平板})$, (楕円板等))

- i) 円板の上下垂力
- ii) 円板の縦ゆれ
- iii) 円板の折曲りゆれ
- iv) 長方形板の上下垂力
- v) " " 縦ゆれ
- vi) " " 折曲りゆれ

i) 円板の上下動

以下半径を1としよう。

$$w=1, \quad (1)$$

よかくと §6 により

$$A = \iint w^2 r dr d\theta = \pi, \quad (2)$$

$$\phi_0(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint r' dr' d\theta' \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{ik(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}')} dk du}{k - K + \mu i}$$

$$\begin{aligned} H_3^{(0)}(k|\varphi) &= \int_0^1 r dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{ikr\omega(\theta-u)} = 2\pi \int_0^1 J_0(kr) r dr = \frac{2\pi}{k^2} \int_0^k J_0(t) t dt \\ &= \frac{2\pi}{k^2} J_1(k), \quad (3) \end{aligned}$$

$$\phi_0(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_1(k) e^{ikr\omega(\theta-u)} dk du}{k - K + \mu i} = \int_0^{\infty} \frac{J_0(kr) J_1(k) dk}{k - K + \mu i}, \quad (4)$$

$$B = \iint w \phi_0 dS = 2\pi \int_0^1 \phi_0 r dr = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(k) dk/k}{k - K + \mu i}, \quad (5)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{J_1^2(k) dk}{k} = \frac{1}{2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(k) dk}{k^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\pi}{4} \times 4} = \frac{4}{3\pi}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad A + KB &= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{J_1^2(k) dk}{k - K + \mu i} \xrightarrow{K \rightarrow 0} \pi \\ B &\xrightarrow{K \rightarrow 0} \frac{8}{3} \end{aligned} \quad (6)$$

$$C_{n,m}(K) = P.V. \int_0^{\infty} \frac{J_n(k) J_m(k)}{k - K} dk, \quad (7)$$

右の図数を等入すると

$$A + KB = 2\pi C_{1,1}(K) - 2\pi^2 i J_1^2(K), \quad (8)$$

272

$$\alpha = \frac{A}{A+KB} \xrightarrow{K \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{8}{3\pi}K - \frac{\pi}{2}K^2 i}, \quad (9)$$

$$f_{3,3} = \frac{AB}{A+KB} \xrightarrow{K \rightarrow 0} \frac{\frac{8}{3} - \frac{\pi^2}{2}Ki}{1 + \frac{8}{3\pi}K - \frac{\pi}{2}K^2 i}, \quad (10)$$

$$H_3(K, \varphi) = 2\pi\alpha J_1(K) \ll K, \quad (11)$$

(17) は $K=1 \sim 2$ までかなりより近似値である*

K	0	0.1	0.2	0.5	1	2
C_{61}^{**}	0.5	.5489	.6026	.7450	.7701	-.0426
πJ_1^2	0	.0078	.0311	.1844	.6085	1.0498
$\text{Re}(f_{33})$	2.667	2.805	2.710	2.310	1.886	1.601
$-\text{Im}(f_{33})$	0	.407	.671	.984	.992	.751

以下の場合の値は計算には K のような変形が便利である。

$$I_{n,m} = \int_0^\infty \frac{J_n(k) J_m(k) dk}{k - K + i\epsilon} = C_{n,m}(K) - \pi i J_n(K) J_m(K), \quad (12)$$

$n \geq m$

$$I_{n,m} = -\pi i J_n(K) H_m^{(2)}(K) + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{J_n(ik) H_m^{(1)}(ik) dk}{K + iK} + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{J_n(-ik) H_m^{(2)}(ik) dk}{K - iK}$$

$$= -\pi i J_n(K) H_m^{(2)}(K) + \int_0^\infty J_n(k) K_m(k) dk \left[\frac{1}{\pi i} \frac{1}{k + iK} + \frac{i}{\pi (K - iK)} \right]$$

$\frac{K - iK - K - iK}{\pi i (K^2 + K^2)}$

$$= -\pi i J_n(K) H_m^{(2)}(K) - \frac{2K}{\pi} \int_0^\infty \frac{J_n(k) K_m(k) dk}{k^2 + K^2}, \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{なお} \quad J_n(k) K_m(k) &\xrightarrow{k \rightarrow 0} \left(\frac{k}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} \times (n-1)! \left(\frac{2}{k}\right)^n = \frac{(n-1)!}{2}, \\ J_0(k) K_0(k) &\xrightarrow{k \rightarrow 0} -\log\left(\frac{k}{2}\right), \end{aligned} \right\}$$

* W. D. Kim

** Bessho, Nomura

ii) 円板の経緯ゆえ.

$$z = x = r \cos \theta, \quad \dots \quad (14)$$

$$A = \iint \omega^2 r dr d\theta = \int_0^1 r^3 dr \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}, \quad \dots \quad (15)$$

$$\begin{aligned} H_5^0(ku) &= \int_0^1 r^2 dr \int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta e^{i k r \cos(\theta-u)} d\theta = 2\pi i \left(\int_0^1 r^2 J_1(kr) dr \right) \cos u \\ &= \frac{2\pi i}{k} J_2(k) \cos u, \quad \dots \quad (16) \end{aligned}$$

つまり

$$\begin{aligned} \phi_0(p) &= \frac{-2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_2(k) e^{i k r (\cos \theta - u)}}{k - K + \mu i} dk \cos u du \\ &= \int_0^{\infty} \frac{J_2(k) J_1(kr)}{k - K + \mu i} dk \cos \theta, \quad \dots \quad (17) \end{aligned}$$

$$\therefore B = \iint \omega \phi_0 ds = \pi \int_0^{\infty} \frac{J_2^2(k)}{(k - K + \mu i) k} dk, \quad \dots \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{J_2^2(k)}{k} dk &= \frac{1}{4}, \quad \int_0^{\infty} \frac{J_2^2(k)}{k^2} dk = \frac{(\frac{1}{2})(1)(2)(-\frac{3}{2})}{2\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{7}{2})} = \frac{1}{4 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{15}{8} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}} \\ &= \frac{4}{15\pi} \end{aligned}$$

$$\therefore A + KB = \pi \int_0^{\infty} \frac{J_2^2(k)}{k - K + \mu i} dk = \pi \left[C_{2,2}(K) - \pi i J_2^2(K) \right], \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} A + KB &\xrightarrow{K \rightarrow 0} \frac{\pi}{4} + \frac{4}{15}K - \frac{\pi^2 i}{64}K^3 \\ B &\xrightarrow{K \rightarrow 0} \frac{4}{15} - \frac{\pi^2 i}{64}K^2 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\alpha = \frac{A}{A + KB} \xrightarrow{K \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{16}{15\pi}K - \frac{\pi}{16}iK^3}, \quad \dots \quad (21)$$

$$f_{55} = \frac{AB}{A + KB} \xrightarrow{K \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{15} - \frac{\pi^2 i}{64}K^2}{1 + \frac{16}{15\pi}K - \frac{\pi}{16}iK^3}, \quad (22)$$

昭和 年 月 日

$$H_2(K, u) = \frac{2\pi i}{K} \alpha \bar{J}_2(K) \cos u, \quad (23)$$

なお $\int \frac{f}{g} dz = \int \frac{A/B}{A + KB} = \frac{-B_i}{1/\alpha^2} \quad (25)$

$$B_i = \int dB$$

そこで p. 23 (14) の関係は満たされている。
 (14) によって 近似値を求めると

K	0	0.1	0.2	0.5	1	2
AC_{22}	1	1.0360	1.0760	1.2308	1.6192	2.1056
$4\pi J_2^2$	0	.0163	.0628	.3858	1.4451	4.4334
$Re f_{55}$	.2667	.275	.290	.409	.515	.358
$-J f_{55}$	0	.119	.222	.364	.241	.072
$ x ^2$	1	1.074	1.162	1.664	4.710	24.089

となって K_{lim} の値と較べると $K=0$ を除いてよい近似値ではない。

このような計算を次の近似に替えるには圧力分布が一般にどのように展開出来るかを知らねばならない。

さて一般に表面上の任意の関数は体球函数で近似出来る (ポテンシャル論の Text 参照)。

よって今の場合は

$$\Pi(r, \varphi) = \sum_{n,m} \frac{a_{nm}}{b_n} P_n^m(\mu) (\cos m \varphi), \quad \mu = \sqrt{1-r^2}, \quad (26)$$

のようになり、今この近似は $P_0(\mu)=1$, $P_1(\mu)=\mu$ に代るものである。

従って一般には次のようにとればよかろう。

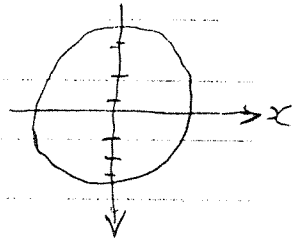
$$\begin{aligned} \Pi(r, \varphi) &= \sum_n a_{2n} P_{2n}(\mu), \text{ for heaving} \\ &= \cos \varphi \sum_n a_{2n+1} P'_{2n+1}(\mu) \text{ for pitching} \end{aligned} \quad (27)$$

昭和 年 月 日

iii) 円板の折曲り運動

y 軸で固定止めになつてゐるとし、
 折れ量に 変化の無い 運動として

$$w = |x| - \frac{4}{3\pi}, \quad (1)$$



をとる。

これを 1 近似とすると大変解析が面倒になるの2"
 前項終りの注意を参照して又後の計算の易しさを考えて

$$\pi_0 = 1 + \beta^2 \cos 2\theta, \quad (2)$$

としよう。

β は定数であるが後に見るような条件で α とは別に
 決められる。

積分法による定数の決定は少し形が違って、

$$A = \iint w^2 dS = \frac{\pi}{3} - \frac{16}{9\pi} = .48131 \quad (3)$$

$$A' = \iint \pi_0 w dS = \beta \iint r^3 dV \cos \theta \cos 2\theta d\theta = \frac{\beta}{3} \quad (4)$$

$$A'' = \iint \pi_0^2 dS = \pi + \beta^2 \frac{\pi}{6} \quad (5)$$

$$\phi_0(r) = \int_0^\infty \frac{dk}{k - K + \mu i} \left[J_1(kr) J_0(kr) + \beta J_2(kr) J_3(kr) \right],$$

(6)

$$B = \iint \pi_0 \phi_0 dS = 2\pi \int_0^\infty \frac{dk}{k - K + \mu i} \left[J_1^2(k) + \frac{\beta^2}{2} J_3^2(k) \right], \quad (7)$$

$$A'' + KB = 2\pi \int_0^\infty \frac{J_1^2(k) + \frac{\beta^2}{2} J_3^2(k)}{k - K + \mu i} dk, \quad (8)$$

$$\int_0^\infty \frac{J_1^2(k)}{k} dk = \frac{1}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{J_1^2(k)}{k^2} dk = \frac{4}{3\pi},$$

$$\int_0^\infty \frac{J_2^2(k)}{k} dk = \frac{1}{6}, \quad \int_0^\infty \frac{J_3^2(k)}{k^2} dk = \frac{4}{35\pi},$$

近似値は

$$\pi = \alpha \pi_0$$

$$\alpha = \frac{A'}{A'' + KB}$$

$$[I] = \alpha A'$$

$$f_{ij} = \frac{1}{K} (A - [I]) = \frac{AA'' - A'^2 + AKB}{K(A'' + KB)}$$

となるが $f_{ij} \xrightarrow{K \rightarrow 0} \text{finite}$ と考えられるから

$$AA'' = A'^2 \quad (10)$$

とならなければならぬ。これより β が定まる。

2nd

$$f_{ij} = \frac{AB}{A'' + KB} \quad (11)$$

(10)より β を決める。

$$\pi \left(-\frac{\pi}{3} - \frac{16}{9\pi} \right) \left(1 + \frac{\beta^2}{6} \right) = \frac{\beta^2}{9}$$

$$\therefore \beta = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{9} - \frac{\pi}{6} \times 48131 \right)}{\pi \times 48131}} = \pm i(0.30526) \quad ; \quad \beta^2 = -0.09318 \quad (12)$$

$K \rightarrow 0$ では

$$B \rightarrow \pi + \beta^2 \pi \cdot \frac{4}{3\pi} + O(K) = 3.0174 + \dots$$

$$A'' + KB \rightarrow \pi \left(1 + \frac{\beta^2}{6} \right) + \dots = 3.092 + \dots$$

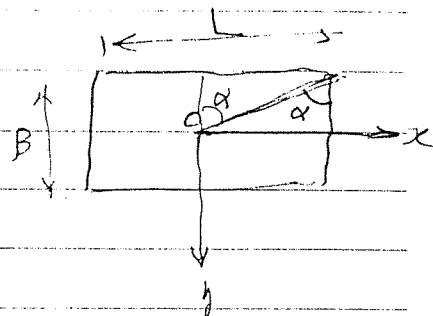
$$\therefore f_{ij} \xrightarrow{K \rightarrow 0} \frac{4813 \times 3.017 + \dots}{3.092 + \dots} = 4696 + \dots$$

IV) 長方形板の上下動

$$n=1, \quad (1)$$

とある

$$A = \iint dS = LB, \quad (2)$$



$$H_3^0(k, \theta) = \iint e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy$$

$$= 4 \frac{\sin(\frac{kL}{2} \cos \theta)}{k \cos \theta} \times \frac{\sin(\frac{kB}{2} \sin \theta)}{k \sin \theta} = LB j_0(\frac{kL}{2} \cos \theta) j_0(\frac{kB}{2} \sin \theta), \quad (3)$$

$$B = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{|H_3^0(k, \theta)|^2}{k - K + \mu i} k dk, \quad (4)$$

$$B \xrightarrow{K \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} (H_3^0(k, \theta))^2 dk = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} 11 dk$$

$$= \frac{16}{\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\frac{kL}{2} \cos \theta) \sin^2(\frac{kB}{2} \sin \theta)}{k^4} dk \quad (5)$$

次の積分表により、右に示した積分を実行すると

$$\int_0^{\infty} \frac{11}{k^4} dk = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \times \frac{B^2}{4} \sin^2 \theta (\frac{L}{2} \cos \theta - \frac{B}{3} \sin \theta) & \text{for } \frac{L}{2} \cos \theta > \frac{B}{2} \sin \theta \\ \frac{\pi}{2} \frac{L^2}{4} \cos^2 \theta (\frac{B}{2} \sin \theta - \frac{L}{6} \cos \theta) & \text{for } \frac{B}{2} \sin \theta > \frac{L}{2} \cos \theta \end{cases}$$

$$\delta > \alpha \quad L = B \tan \alpha \quad \text{とある}$$

$$B(0) = \frac{16}{\pi^2} \times \frac{\pi}{16} B^2 \int_0^{\alpha} (k \cos \theta - \frac{B}{3} \sin \theta) \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$+ \frac{L^2}{\pi} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (B \sin \theta - \frac{L}{3} \cos \theta) \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}, \quad (6)$$

$$\text{if } \alpha = \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\cos \theta} = \log \left\{ \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right\}, \quad \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin \theta} = \log \left(\cot \frac{\alpha}{2} \right),$$

$$\int_0^{\alpha} \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} d\theta = -1 + \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} d\theta = -1 + \frac{1}{\sin \alpha}$$

昭和 年 月 日

よって

$$B(0) = \frac{B^2}{\pi} \left[L \log \left(\cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right) \right] + \frac{B}{3} \left(1 - \frac{1}{\cos \alpha} \right) \\ + \frac{L^2}{\pi} \left[B \log \left(\cot \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\sin \alpha} \right) \right], \quad \dots (6) \quad L = B \tan \alpha$$

よって $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ と $\pi/3$ と $(B \rightarrow 0)$

$$\log \left(\cot \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \right) = \cos \alpha + \frac{\cos^3 \alpha}{3} + \dots, \quad \cos \alpha = \frac{B}{\sqrt{L^2 + B^2}}$$

$$\log \left(\cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right) = \sin \alpha + \frac{\sin^3 \alpha}{3} + \dots, \quad \sin \alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2 + B^2}}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{L^2 + B^2} + L}{\sqrt{L^2 + B^2} - L} \right) \Rightarrow -\log \left(\frac{B}{2L} \right)$$

$$B(0) \xrightarrow{B \rightarrow 0} \frac{LB^2}{\pi} \left[\log \left(\frac{2L}{B} \right) - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{B}{L} \right) \right]$$

$$+ \frac{L^2 B}{\pi} \left[\frac{B}{\sqrt{L^2 + B^2}} - \frac{1}{6L} \right]$$

$$\approx \frac{LB^2}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \log \left(\frac{2L}{B} \right) \right], \quad \dots (7)$$

よって

$$f_{33} = \frac{AB}{A + KB} \xrightarrow[\kappa \rightarrow 0]{B \rightarrow 0} \frac{\frac{LB^2}{\pi} \left[\frac{3}{2} + \log \left(\frac{2L}{B} \right) \right] + \dots}{1 + \frac{KB}{\pi} \left(\frac{3}{2} + \log \left(\frac{2L}{B} \right) \right) + \dots}, \quad (8)$$

strip には f_{33} added mass の 1/2 だけ 1/2 ($K \rightarrow \infty$)

$$M = L \times \frac{\pi}{8} B^2, \quad \dots (9)$$

 $K \rightarrow 0$ ならば、対数的に無限大である。

昭和 年 月 日

1) 長方形板の縦ゆれ.

$$w = x, \quad \dots \quad (1)$$

$$A = \iint x^2 dx dy = \frac{L^2}{12} B, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} H_5^0(k, \theta) &= \iint x e^{i(kx \cos \theta + \frac{1}{2} k y^2)} dx dy = \frac{B}{2} \times \frac{L^2}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} e^{i(k \frac{L}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} k y^2)} dz dy \\ &= \frac{1}{2} B L^2 j_0\left(\frac{k}{2} B \cos \theta\right) j_1\left(\frac{k}{2} L \sin \theta\right), \quad \dots \quad (3) \end{aligned}$$

$$B(k) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{|H_5^0(k, \theta)|^2}{k - K + \mu i} k dk d\theta, \quad \dots \quad (4)$$

$$= \frac{B^2 L^4}{4\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} \frac{j_0^2\left(\frac{k}{2} B \cos \theta\right) j_1^2\left(\frac{k}{2} L \sin \theta\right)}{k - K + \mu i} k dk d\theta.$$

$$\text{又} \quad B = \iint w \phi_0 ds, = \iint w(p) ds \iint w(q) S(p, q) ds(q) \quad (5)$$

2) 8))

$$S(p, q) \Big|_{z=z'=0} = \frac{1}{2\pi r} + \frac{K}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_0(kr) dk}{k - K + \mu i}$$

$$= \frac{1}{2\pi r} - \frac{iK}{2} H_0^{(2)}(Kr) - \frac{K}{4} \{H_0(Kr) - Y_0(Kr)\}, \quad (6)$$

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

2) 8) から

$$B(k) \xrightarrow{k \rightarrow 0} B(0) = \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{w(p)w(q)}{r} ds(p) ds(q), \quad \dots \quad (7)$$

2) 8) 3)。

半量分表 12 5 7 2 今の場合

$$\begin{aligned} B(0) &= \frac{1}{12\pi} \left[B^2 L^3 \lg \left\{ \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right\} - B^3 L^2 (\sec \alpha - 1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B^5}{5} \left(\frac{2}{3} - \sec \alpha + \frac{2\alpha^3}{3} \right) + \frac{L^5}{5} (\csc \alpha - 1) \right], \quad (8) \end{aligned}$$

4) 10)

$$L = B \tan \alpha$$

§ 2.2 $K \rightarrow 0$ の場合

$$f_{ss} \rightarrow \frac{AB(0)}{A + KB(0)} = \frac{B(0)}{1 + KB(0)/A} \rightarrow B(0), \quad \dots (9)$$

$\frac{B}{L} \rightarrow 0$ の場合 ($\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$)

$$\begin{aligned} B(0) &= \frac{B^2 L^3}{12\pi} \left[\log \left(\cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right) - \frac{1}{\tan \alpha} \left(\frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \right) + \frac{\frac{2}{3} \cos^3 \alpha - \cos^2 \alpha + \frac{1}{3}}{5 \tan^3 \alpha \cos^3 \alpha} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tan^2 \alpha \left(\frac{1 - \sin \alpha}{\sin \alpha} \right)}{5} \right] \\ &= \frac{B^2 L^3}{12\pi} \left[\log \left(\cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right) - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} + \frac{1 - 3 \cos^2 \alpha + 2 \cos^3 \alpha}{15 \tan^3 \alpha} + \frac{\sin \alpha}{5(1 + \sin \alpha)} \right] \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{B \rightarrow 0} \frac{L^3 B^2}{12\pi} \left[\log \left(\frac{2L}{B} \right) - \frac{5}{6} \right] // \quad \dots (10)$$

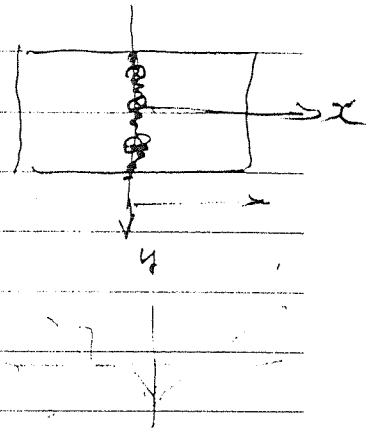
vi) 長方形板の付曲り

$$w = |x| - \frac{L}{4}, \quad \dots (1)$$

$$\iint w \cdot dx dy = 0$$

$$A = \iint w^2 dx dy = 2B \int_0^{\frac{L}{2}} \left(x - \frac{L}{4}\right)^2 dx = 4B \frac{\left(\frac{L}{4}\right)^3}{3}$$

$$= \frac{L^3 B}{48}, \quad \dots (2)$$



$$\Pi_0 = \beta + \frac{4}{L^2} \left(x^2 - \frac{L^2}{12}\right), \quad \dots (3)$$

$$A' = \iint \Pi_0 w ds = \frac{8}{L^2} B \int_0^{\frac{L}{2}} \left(x - \frac{L}{4}\right) \left(x^2 - \frac{L^2}{12}\right) dx$$

$$= \frac{BL^2}{2} \int_0^1 \left(3 - \frac{1}{2}\right) \left(3^2 - \frac{1}{3}\right) d\beta = \frac{\beta BL^2}{2} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right]$$

$$= \frac{\beta BL^2}{24}, \quad \dots (4)$$

$$A'' = \iint \Pi_0^2 ds = BL\beta^2 + \frac{16}{L^4} B \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(x^2 - \frac{L^2}{12}\right)^2 dx$$

$$= BL\beta^2 + B \frac{16 \times 2}{L^4} \times \left(\frac{L}{2}\right)^5 \int_0^1 \left(3^2 - \frac{1}{3}\right)^2 d\beta$$

$$= BL\beta^2 + BL \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\right) \quad \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}$$

$$= BL \left(\beta^2 + \frac{4}{45}\right), \quad (5)$$

vii) 出のよう

$$A A'' = A'^2 \quad (6)$$

この値は" なるから

$$-\beta^2 = -\frac{1}{180} \quad // \quad (7)$$

$$\beta = \pm \frac{1}{\sqrt{180}}$$

$$\frac{1}{12} - \frac{4}{45} = \frac{15-48}{12 \times 45}$$

$$\frac{15-48}{12 \times 45}$$

昭和 年 月 日

これに代わって β は小さくて (3) 式からわかるようにやはり hearing ($w=1$) との coupling は小さいようにある。

この場合の計算は大変面倒であるので β は無視して、式のみ羅列しておく。

$$\begin{aligned}
 H_0^0(k, \theta) &= \iint \frac{4}{L^2} \left(x^2 - \frac{L^2}{2}\right) e^{ik\vec{r}} dx dy \\
 &= B j_0\left(\frac{k}{2} B \sin \theta\right) \frac{L^2}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{z^2}{2} - \frac{1}{2}\right) e^{\frac{ik}{2} z \cos \theta} dz \\
 &= \frac{2}{3} L B j_2\left(\frac{k}{2} L \cos \theta\right) j_0\left(\frac{k}{2} B \sin \theta\right), \quad \dots (8)
 \end{aligned}$$

これにはもう一つの考え方があって $e^{ik\vec{r}}$ を diffractive potential の近似値と見るならば

$$\begin{aligned}
 H_0^0(k, \theta) &= \iint w e^{ik\vec{r}} dx dy = \iint \left(|x| - \frac{L}{4}\right) e^{ik\vec{r}} dx dy \\
 &= B j_0\left(\frac{k}{2} B \sin \theta\right) \frac{L^2}{2} \int_0^1 \left(3 - \frac{1}{z}\right) \cos\left(\frac{k}{2} z \cos \theta\right) dz \\
 &= \frac{L^2 B}{2} j_0\left(\frac{k}{2} B \sin \theta\right) \left[\frac{\sin\left(\frac{k}{2} L \cos \theta\right)}{\frac{k}{2} L \cos \theta} - \frac{1 - \cos\left(\frac{k}{2} L \cos \theta\right)}{\left(\frac{k}{2} L \cos \theta\right)^2} \right], \quad (9)
 \end{aligned}$$

(定義の係数で述べが、あっていない！)

$$B(k) = \iint \pi_0(p) dS = \iiint \pi_0(p) \pi_0(q) S(p, q) dS(p) dS(q),$$

$$B(r) = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{\pi_0(p) \pi_0(q)}{r} dS,$$

etc.

附録 13 年々々の年々分

$$B-1 \quad \iint f(x-x') dx dx' \quad \iint x x' f(x-x') dx dx'$$

$$B-2 \quad \iint (x^2 - \frac{L^2}{12}) f(x-x') dx dx' \quad \iint (x^2 - \frac{L^2}{12}) (x'^2 - \frac{L^2}{12}) f(x-x') dx dx'$$

$$B-3 \quad \iiint \frac{1}{r} dx dx' dy dy'$$

$$B-4 \quad \iiint \frac{x x'}{r} dx dx' dy dy'$$

$$B-5 \quad \iint J_0(k|x-x'|) dx dx' \quad \iint x x' J_0(k|x-x'|) dx dx'$$

$$B-6 \quad \int_0^\infty j_0^2(ka) j_0^2(kb) dk \quad \int_0^\infty j_1^2(ka) j_0^2(kb) dk$$

$$B-9 \quad \int_0^{\pi/2} (\downarrow) d\theta \quad \int_0^{\pi/2} (\downarrow) d\theta$$

$$B-11 \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ H_3^0(k, \theta) \}^2 d\theta$$

$$B-12 \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ H_3^0(k, \theta) \}^2 d\theta \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | H_5^0(k, \theta) |^2 d\theta$$

$$B-13 \quad j_n(z)$$

$$B-14 \quad f_{n,n}(z) = \int_0^z \int_0^z J_n(t) dt^n$$

$$B-15 \quad f_{2,0}(x) \text{ の数値}$$

昭和 年 月 日

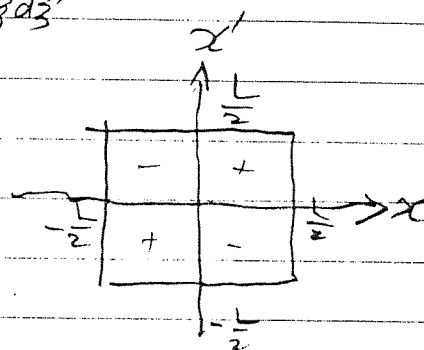
$$I_0 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x-x') dx dx'$$

$$x-x' = \xi, \quad x+x' = \xi', \quad x = \frac{\xi+\xi'}{2}, \quad x' = \frac{\xi-\xi'}{2}$$

$$dx dx' = \frac{\partial(x, x')}{\partial(\xi, \xi')} d\xi d\xi' = \frac{1}{2} d\xi d\xi'$$

$$I_0 = 2 \int_0^L d\xi f(|\xi|) \int_0^{L-\xi} d\xi'$$

$$I_0 = 2 \int_0^L (L-\xi) f(|\xi|) d\xi$$



$$I_1 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x x' f(x-x') dx dx'$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L d\xi f(|\xi|) \int_0^{L-\xi} (\xi^2 - \xi'^2) d\xi'$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L d\xi f(|\xi|) \left[\frac{(L-\xi)^3}{3} - \xi^2(L-\xi) \right]$$

$$\begin{aligned} & (L-\xi) \left[\frac{(L-\xi)^2 - \xi^2}{3} \right] \\ &= \frac{1}{3} (L-\xi) (L^2 - 2L\xi - \xi^2) \\ &= \frac{1}{3} (L^3 - 2L^2\xi - L\xi^2 - \xi^3) \\ &= \frac{1}{3} (L^3 - 3L^2\xi + 3L\xi^2 - \xi^3) \end{aligned}$$

$$(L-\xi)^3 - \xi^2(L-\xi) = (L-\xi) [L^2 - 2L\xi - \xi^2] = (L-\xi) [L^2 - 2L\xi - \xi^2]$$

$$= (L-\xi) [L^2 - 2L\xi - 2(L-\xi)^2 + 2L^2 - 4L\xi] =$$

$$= (L-\xi) [3L^2 - 6L\xi - L + L - 2(L-\xi)^2] =$$

$$= (L-\xi) [-3L^2 + 6L(L-\xi) - 2(L-\xi)^2]$$

$$\therefore I_1 = \frac{1}{6} \int_0^L \left[-3L^2 + 6L(L-\xi) - 2(L-\xi)^2 \right] f(|\xi|) d\xi //$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^L [L^3 - 3L^2\xi + 2\xi^3] f(|\xi|) d\xi //$$

昭和 年 月 日

$$I_{20} = \frac{4}{L^2} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(x^2 - \frac{L^2}{12}\right) f(1x-x') dx dx'$$

$$x^2 = \frac{(3+\frac{1}{3})^2}{4}$$

$$= \frac{1}{L^2} \int_0^L f(\beta) d\beta \int_{\beta-L}^{\beta} d\beta' \left[\beta'^2 + 2\beta\beta' + \beta'^2 - \frac{L^2}{3} \right]$$

$$(L-\beta) \left\{ (L-\beta)^2 + 3\beta^2 - L^2 \right. \\ \left. (4\beta^2 - 2L\beta) \right\}$$

$$= \frac{1}{L^2} \int_0^L f(\beta) d\beta \left[\left(\beta^2 - \frac{L^2}{3}\right) 2(L-\beta) + \frac{2}{3} (L-\beta)^3 \right]$$

$$(L-\beta)(2\beta-L)\beta = \beta [2L\beta - L^2 - 2\beta^2 + 3L]$$

$$= \frac{4}{3L^2} \int_0^L f(\beta) d\beta \left[-L^2\beta + 3L\beta^2 - 2\beta^3 \right]$$

$$I_{22} = \frac{16}{L^4} \iint \left(x^2 - \frac{L^2}{12}\right) \left(x'^2 - \frac{L^2}{12}\right) f(1x-x') dx dx'$$

$$= \left(x^2 - \frac{L^2}{12}\right) \left(x'^2 - \frac{L^2}{12}\right) = (xx')^2 - \frac{L^2}{12} (x^2 + x'^2) + \frac{L^4}{12^2}$$

$$= \left(\frac{\beta^2}{4}\right)^2 + \frac{L^2}{48} (2\beta^2 + 2\beta'^2) + \frac{L^4}{12}$$

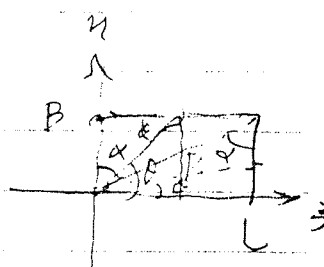
$$= \frac{2}{L^4} \int_0^L d\beta f(\beta) \int_0^{\beta} d\beta' \left[\beta^4 - 2\beta^2\beta'^2 + \beta'^4 + \frac{2}{3} L^2 (\beta^2 + \beta'^2) + \frac{4}{3} L^4 \right]$$

$$= \frac{2}{L^4} \int_0^L d\beta f \left[\left(\beta^4 + \frac{2}{3} L^2 \beta^2 + \frac{4}{3} L^4\right) (L-\beta) + \left(\frac{2}{3} L^2 - 2\beta^2\right) \frac{(L-\beta)^3}{3} + \frac{(L-\beta)^5}{5} \right]$$

$$\frac{(L-\beta)^5}{15} \left(\frac{10}{3} L^2 - 10\beta^2 + 3L^2 - 6L\beta + 3\beta^2 \right)$$

昭和 年 月 日

$$I = \iiint \frac{dx dx' dy dy'}{r} = 4 \int_0^L \int_0^B \frac{(L-z)(B-y)}{\sqrt{z^2 + y^2}} dz dy$$



$$z = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad \left\{ \begin{array}{l} dz dy = r dr d\theta \end{array} \right.$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{L \sec \theta} (L - r \cos \theta)(B - r \sin \theta) dr + \frac{1}{4} \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^{B/\sin \theta} (L - r \cos \theta)(B - r \sin \theta) dr$$

$$\int_0^r (L - r \cos \theta)(B - r \sin \theta) dr = LB r - \frac{r^2}{2} (L \sin \theta + B \cos \theta) + \frac{r^3}{3} \sin \theta \cos \theta$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} d\theta \left[LB \sec \theta - \frac{L^2 \sec^2 \theta}{2} (L \sin \theta + B \cos \theta) + \frac{L^3}{3} \sin \theta \sec^2 \theta \right]$$

$$+ 4 \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \left[\frac{LB^2}{\sin \theta} - \frac{B^2}{2 \sin^2 \theta} (L \sin \theta + B \cos \theta) + \frac{B^3 \cos \theta}{3 \sin^2 \theta} \right]$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \left[\frac{L^2 B}{\cos \theta} - \frac{L^3 \sin \theta}{3 \cos^2 \theta} \right] + 2 \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \left[\frac{L B^2}{\sin \theta} - \frac{B^3 \cos \theta}{3 \sin^2 \theta} \right]$$

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \theta'$$

$$= 2 \int_0^{\alpha} d\theta \left[\frac{L B^2}{\cos \theta} - \frac{B^3 \sin \theta}{3 \cos^2 \theta} \right] + 2 \int_{\alpha}^{\pi/2} d\theta \left[\frac{L^2 B}{\sin \theta} - \frac{L^3 \cos \theta}{3 \sin^2 \theta} \right]$$

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\cos \theta} = \log \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \right), \quad \int_{\alpha}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin \theta} = \log \left(\cot \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\int_0^{\alpha} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \sec \alpha - 1, \quad \int_{\alpha}^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta = \operatorname{cosec} \alpha - 1$$

$$I = 2 L B^2 \log \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \right) - \frac{2}{3} B^3 (\sec \alpha - 1) + 2 L^2 B \log \left(\cot \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{2}{3} L^3 (\operatorname{cosec} \alpha - 1)$$

$$\bar{I} = \iiint \frac{xx'}{r} dx dx' dy dy'$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^L \int_0^B (B-y)(L^3 - 3yL^2 + 2y^3) \frac{dy dz}{\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^\alpha d\theta \int_0^{B \cos \theta} (B - r \cos \theta)(L^3 - 3rL^2 \sin \theta + 2r^3 \sin^3 \theta) dr$$

$$+ \frac{1}{3} \int_{\pi/2}^\pi d\theta \int_0^{L \sin \theta} (B - r \cos \theta) (L^3 - 3rL^2 \sin \theta + 2r^3 \sin^3 \theta) dr$$

$$\int_0^r [BL^3 - 3L^2 B \sin \theta (r) + 2B \sin^3 \theta (r^3) - L^3 \cos \theta (r) + 3r^2 L^2 \sin \theta \cos \theta - 2r^4 \sin^3 \theta \cos \theta] dr$$

$$= BL^3(r) - \frac{r^2}{2} (3L^2 B \sin \theta + L^3 \cos \theta) + r^3 L^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$+ \frac{B}{2} \sin^3 \theta r^4 - \frac{2}{5} r^5 \sin^3 \theta \cos \theta$$

$$I = \frac{1}{3} \int_0^\alpha d\theta \left[BL^3 \left(\frac{B}{\cos \theta} \right) - \frac{B^2}{2 \cos^2 \theta} (3L^2 B \sin \theta + L^3 \cos \theta) + \frac{B^3 L^2}{\cos^3 \theta} \sin \theta \cos \theta \right. \\ \left. + \frac{B^5 \sin^3 \theta}{2 \cos^4 \theta} - \frac{2}{5} B^5 \frac{\sin^3 \theta}{\cos^5 \theta} \right]$$

$$+ \frac{1}{3} \int_{\pi/2}^\pi d\theta \left[BL^3 \frac{L}{\sin \theta} - \frac{L^2}{2 \sin^2 \theta} (3L^2 B \sin \theta + L^3 \cos \theta) + \frac{L^5 \cos \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{BL^4}{2 \sin \theta} - \frac{2L^5 \cos \theta}{5 \sin^2 \theta} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^\alpha d\theta \left[\frac{B^2 L^3}{2 \cos \theta} - \frac{B^3 L^2}{2 \cos^2 \theta} \sin \theta + \frac{B^5 \sin^3 \theta}{10 \cos^4 \theta} \right]$$

$$+ \frac{1}{3} \int_{\pi/2}^\pi d\theta \left[\frac{L^5}{10 \sin^2 \theta} \cos \theta \right]$$

$$\int_0^\alpha \frac{\sin^3 \theta}{\cos^4 \theta} d\theta = \frac{2}{3} - \sec \alpha + \frac{\sec^3 \alpha}{3}$$

$$= \frac{B^2 L^3}{6} \log \left\{ \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right\} - \frac{B^3 L^2}{6} (\sec \alpha - 1) + \frac{B^5}{30} \left(\frac{2}{3} - \sec \alpha + \frac{\sec^3 \alpha}{3} \right)$$

$$+ \frac{L^5}{30} (\csc \alpha - 1)$$

$$I_0 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} J_0(k|x-x'|) dx dx' = 2 \int_0^L (L-z) J_0(kz) dz$$

$$= \frac{2}{k^2} \int_0^{kL} (kL-t) J_0(t) dt = \frac{2L}{k} \left[\int_0^{kL} J_0(t) dt - J_1(kL) \right]$$

$$\int_0^z t J_0(t) dt = z J_1(z) \quad \left[\begin{array}{l} J_0 \xrightarrow{k \rightarrow 0} \frac{L^2}{2} \\ \frac{2L}{k} \end{array} \right]$$

$$\int_0^z t^3 J_0(t) dt = t^3 J_1(t) - 2 \int t^2 J_1(t) dt = t^3 J_1(t) - 2t^2 J_2(t) =$$

$$I_1 = \iint x x' J_0(k|x-x'|) dx dx' = \frac{1}{6} \int_0^L [L^3 - 3L^2 z + 2z^3] J_0(kz) dz$$

$$= \frac{1}{6k^4} \int_0^{kL} [kL^3 - 3(kL)^2 t + 2t^3] J_0(t) dt$$

$$= \frac{1}{6k^4} \left[(kL)^3 \int_0^{kL} J_0(t) dt - 3(kL)^2 J_1(kL) + 2(kL)^3 J_1(kL) - 2(kL)^2 J_2(kL) \right]$$

$$= \frac{L^3}{6k} \left[\int_0^{kL} J_0(t) dt - J_1(kL) - \frac{2J_2(kL)}{kL} \right]$$

$$\xrightarrow{k \rightarrow 0} \frac{1}{6} \int_0^L (L^3 - 3L^2 z + 2z^3) dz = \frac{1}{6} \left[L^4 - \frac{3}{2} L^4 + \frac{2}{4} L^4 \right] = 0$$

$$- \frac{k^2}{4 \times 6} \int_0^L (L^3 z^2 - 3L^2 z^3 + 2z^5) dz = -\frac{k^2 L^6}{24} \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{2}{6} \right)$$

$$\xrightarrow{k \rightarrow 0} \frac{k^2 L^6}{12 \times 24} //$$

$$\xrightarrow{k \rightarrow 1} \frac{L^3}{6k}$$

$$I_0 = \int_0^{\infty} j_0^2(ka) j_0^2(kb) dk, \quad I_1 = \int_0^{\infty} j_1^2(ka) j_1^2(kb) dk$$

$$j_0(z) = \frac{j_1^2 z}{z^2}, \quad j_1(z) = \frac{j_1^2 z}{z^2} - \frac{\cos z}{z} \quad \left| \begin{array}{l} a = \frac{1}{2} L \cos \alpha \\ b = \frac{1}{2} B \sin \alpha \end{array} \right.$$

$$j_0^2(z) = \frac{j_1^2 z}{z^2} = \frac{1 - \cos 2z}{2z^2}$$

$$j_1^2(z) = \frac{j_1^2 z}{z^2} + \frac{\cos^2 z}{z^2} - \frac{j_1^2 z}{z^3} = \frac{1 - \cos 2z}{2z^4} + \frac{1 + \cos 2z}{2z^2} - \frac{j_1^2 z}{z^3}$$

$$\begin{aligned} j_0^2(ka) j_0^2(kb) &= \frac{1}{4k^4 a^2 b^2} (1 - \cos 2ka)(1 - \cos 2kb) \\ &= \frac{1}{4k^4 a^2 b^2} (1 + \cos 2ka - \cos 2kb + \cos 2ka \cos 2kb) \\ &= \frac{1}{16k^4 a^2 b^2} \left[4 - \frac{1}{2} \left\{ e^{2ika} + e^{2ikb} + e^{-2ika} + e^{-2ikb} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left\{ e^{2ik(a+b)} + e^{2ik(a-b)} + e^{-2ik(a+b)} + e^{-2ik(a-b)} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_1^2(ka) j_0^2(kb) &= \frac{1}{4k^5 a^3 b^2} (1 - \cos 2ka)(1 - \cos 2kb) \\ &\quad + \frac{1}{4k^5 a^2 b^2} (1 + \cos 2ka)(1 - \cos 2kb) \\ &\quad - \frac{1}{2k^5 a^3 b^2} (\sin 2ka (1 - \cos 2kb)) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16k^5 a^3 b^2} \left[4 - 2 \left\{ e^{2ika} + e^{2ikb} + e^{-2ika} + e^{-2ikb} \right\} + e^{2ik(a+b)} + e^{-2ik(a+b)} \right. \\ \left. + e^{2ik(a-b)} + e^{-2ik(a-b)} \right]$$

$$+ \frac{1}{16k^5 a^2 b^2} \left[4 + 2 \left\{ e^{2ika} + e^{2ikb} + e^{-2ika} + e^{-2ikb} \right\} - e^{2ik(a+b)} - e^{-2ik(a+b)} \right. \\ \left. - e^{2ik(a-b)} - e^{-2ik(a-b)} \right]$$

$$+ \frac{1}{8k^5 a^3 b^2} \left[\frac{2}{3} (e^{2ika} - e^{-2ika}) - (e^{2ik(a+b)} + e^{-2ik(a+b)}) + e^{2ik(a-b)} + e^{-2ik(a-b)} \right]$$

$$(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a^3 + 6ab^2$$

$$(a+b)^3 - (a-b)^3 = 2b^3 + 6a^2b$$

$$2a^3 - 2b^3 - (a+b)^3 - (a-b)^3 = -2b^3 - 6ab^2$$

$$2a^3 - 2b^3 - (a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a^3 - 4b^3 - 6a^2b$$

$$\begin{aligned}(a+b)^4 + (a-b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ &\quad + a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\ &= 2a^4 + 12a^2b^2 + 2b^4\end{aligned}$$

$$(a+b)^4 - (a-b)^4 = 8a^3b + 8ab^3$$

$$\begin{aligned}(a+b)^5 + (a-b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\ &\quad + a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5 \\ &= 2a^5 + 20a^3b^2 + 10ab^4\end{aligned}$$

$$(a+b)^5 - (a-b)^5 = 10a^4b + 20a^2b^3 + 2b^5$$

$$(a+b)^5 + (a-b)^5 - 2a^5 - 2b^5 = 20a^3b^2 + 10ab^4 - 2b^5$$

$$() - () - 2a^5 - 2b^5 = 10a^4b + 20a^2b^3 - 2a^5$$

$$I_1 = \frac{\pi}{60a^4b^2} \{ 2b^5 - 20a^3b^2 + 10ab^4 \}$$

$$+ \frac{\pi}{12a^2b^2} (-2b^3 - 6ab^2) + \frac{\pi}{12a^3b^2} [12a^2b^2 + 2b^4]$$

$$= \frac{\pi}{30a^4} (b^3 - 10a^3 - 5ab^2) + \frac{\pi}{6a^3} [6a^2 + b^2 - ab - 3a^2]$$

$$= \frac{\pi}{30a^4} \{ b^3 - 10a^3 - 5ab^2 + 15a^3 + 5ab^2 - 5a^2b \}$$

$$= \frac{\pi}{30a^4} \{ b^3 + 5a^3 - 5a^2b \} \quad // \quad \text{for } a > b$$

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{\pi}{60a^4b^2} \{ 2a^5 - 10a^4b - 20a^2b^3 \} + \frac{\pi}{12a^3b^2} \{ 2a^3 - 4b^3 - 6a^2b \} \\ &\quad + \frac{\pi}{12a^3b^2} \{ 8a^3b + 8ab^3 - 2a^4 \}\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{30a^4b^2} \{ a^5 - 5a^4b - 10a^2b^3 + 5a^3 - 10a^2b^3 - 15a^4b + 20a^4b + 20a^2b^3 - 5a^5 \}$$

$$= \frac{\pi}{30a^4b^2} \{ a^5 \} = \frac{\pi a}{30b^2} \quad // \quad \text{for } a < b$$

$$\tan \frac{L}{2} \cos \theta > \frac{B}{2} \sec \theta$$

$$\tan \alpha > \tan \theta$$

昭和 年 月 日

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_0 d\theta = \frac{\pi}{6} \int_0^{\alpha} \left[\frac{3}{\frac{L}{2} \cos \theta} - \frac{(\frac{B}{2}) \sec \theta}{(\frac{L}{2})^2 \cos^2 \theta} \right] d\theta$$

$$+ \frac{\pi}{6} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{3}{\frac{B}{2} \sec \theta} - \frac{(\frac{L}{2}) \cos \theta}{(\frac{B}{2})^2 \tan^2 \theta} \right] d\theta$$

$$= \frac{\pi}{3L} \left[\int_0^{\alpha} \left(\frac{3}{\cos \theta} - \frac{B^2 \sec \theta}{L \cos^2 \theta} \right) d\theta \right]$$

$$+ \frac{\pi}{3B} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{\sec \theta} - \frac{L \cos \theta}{B^2 \tan^2 \theta} \right) d\theta + \frac{1}{\sec \alpha} (\sec \alpha - 1)$$

$$= \frac{\pi}{L} \log \left\{ \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right\} + \frac{B^2 \pi}{3L^2} \left(1 - \frac{1}{\cos \alpha} \right) - \frac{1}{\sec \alpha} \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$+ \frac{\pi}{B} \log \left(\cot \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{\pi L}{3B^2} \left(1 - \frac{1}{\tan \alpha} \right) - \frac{1}{\tan \alpha} \frac{1}{1 + \tan \alpha}$$

$$\tan \alpha = L/B, \quad \cos \alpha = \frac{B}{\sqrt{L^2 + B^2}}, \quad \sec \alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2 + B^2}}$$

$$\cot^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{\sqrt{L^2 + B^2} + B}{\sqrt{L^2 + B^2} - B}$$

$$\cot^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}{1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)} = \frac{1 + \sec \alpha}{1 - \sec \alpha} = \frac{\sqrt{L^2 + B^2} + L}{\sqrt{L^2 + B^2} - L}$$

$$I_0 = \frac{\pi}{2L} \log \left(\frac{\sqrt{L^2 + B^2} + L}{\sqrt{L^2 + B^2} - L} \right) + \frac{\pi}{3L^2} (-B + \sqrt{L^2 + B^2})$$

$$+ \frac{\pi}{2B} \log \left(\frac{\sqrt{L^2 + B^2} + B}{\sqrt{L^2 + B^2} - B} \right) + \frac{\pi}{3B^2} (\sqrt{L^2 + B^2} - L)$$

$$= \frac{\pi}{L} \log \left\{ \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right\} + \frac{\pi}{B} \log \left(\cot \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$- \frac{\pi}{3L} \left[\frac{1 - \cos \alpha}{\sec \alpha} + \frac{\sec \alpha}{1 + \sec \alpha} \right]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_1 d\theta = \frac{\pi}{15} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{B^3 \sin^3 \theta}{L^4 \cos^4 \theta} + \frac{5}{L \cos \theta} - 5 \frac{B}{L^2} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \right\} d\theta$$

$$+ \frac{\pi}{15} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{L \cos \theta}{B^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

$$\int_0^{\alpha} \frac{\sin^3 \theta}{\cos^4 \theta} d\theta = \int_0^{\alpha} \frac{(1-x^2)dx}{x^4} = \left(-\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} \right) \Big|_{\cos \alpha}^1 = \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{3\cos^3 \alpha} \right)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{3\cos^3 \alpha} = \frac{2\cos^3 \alpha - 3\cos^2 \alpha + 1}{3\cos^3 \alpha}$$

$$= \frac{\pi}{15} \left\{ \frac{B^3}{L^4} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{3\cos^3 \alpha} \right) + \frac{5}{L} \log \left(\cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right) + \frac{5B}{L^2} \left(1 - \frac{1}{\cos \alpha} \right) \right\}$$

$$- \frac{\pi}{15} \frac{L}{B^2} \left(1 - \frac{1}{\cos \alpha} \right)$$

$$= \frac{\pi}{3L} \log \left(\cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right) + \frac{B}{15\pi L^2} \left\{ 1 - \sec \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{3\cos^3 \alpha} \right) \right\}$$

$$+ \frac{\pi L}{15B^2} \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha} \right)$$

$$\frac{\pi B}{45\pi L^2 \sin^2 \alpha} \left[\frac{3\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{3\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{2\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{3\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \sec \alpha \right]$$

$$[1 + \sin^2 \alpha - 2\sec \alpha]$$

$$= \frac{\pi}{3L} \log \left(\cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right) + \frac{\pi L}{15B^2} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - 1 \right)$$

$$+ \frac{\pi}{45\pi L \sin^3 \alpha} (\cos \alpha + \cos \alpha \sin^2 \alpha - 2)$$

$$= \frac{\pi}{3L} \log \left(\cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right) + \frac{\pi}{45L} \left[\frac{3\sin \alpha}{1 + \sin \alpha} - \frac{2 - \cos \alpha - \cos \alpha \sin^2 \alpha}{\sin^3 \alpha} \right]$$

$$\frac{L}{B^2} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - 1 \right) = \frac{\tan^2 \alpha (1 - \sin \alpha)}{L \sin^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha (1 - \sin \alpha)}{L (1 + \sin \alpha)}$$

昭和 年 月 日

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ak}{k} dk = \frac{\pi}{2}$$

$$a = \frac{k}{2} \cos \theta, \quad b = \frac{1}{2} B \sin \theta$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ak}{k^2} dk = \frac{\pi}{2} a,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ak \sin^2 bk}{k^2} dk = \begin{cases} 0 & \text{for } a > b \\ \frac{\pi}{2} & a = b \\ \frac{\pi}{2} & a < b \end{cases} \quad ?$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ak \sin^2 bk}{k^4} dk = \frac{\pi}{6} b^2 (3a - b) \quad \text{for } a > b > 0$$

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(\frac{a}{2} \cos \theta) \sin^2(\frac{b}{2} \cos \theta)}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} d\theta = \iint_0^a da^2 \iint_0^b db^2 J_0(\sqrt{a^2 + b^2}),$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{2m} (-1)^m \iint_0^a J_{2m}(a) da^2 \iint_0^b J_{2m}(b) db^2$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_3^0(k, \theta)|^2 d\theta = \frac{1}{k^4} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{2m} (-1)^m \iint_0^L J_{2m}(a) da^2 \iint_0^B J_{2m}(b) db^2$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{2m} (-1)^m \iint_0^L J_{2m}(kx) dx^2 \iint_0^B J_{2m}(ky) dy^2,$$

if $B \rightarrow 0$ then

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_3^0(k, \theta)|^2 d\theta = \frac{B^2}{2} \int_0^L J_0(kx) dx^2 = \frac{B^2}{2k^2} \int_0^L J_0(t) dt^2$$

昭和 年 月 日

$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |H_0^0(k, \theta)|^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iiint dx dy dx' dy' \int_0^{2\pi} e^{ik[(x-x')\cos\theta + (y-y')\sin\theta]} d\theta$$

$$= \iiint dx dx' dy dy' J_0(k\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2})$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{2m} (-)^m \iint J_{2m}(k|x-x'|) dx dx' \iint J_{2m}(k|y-y'|) dy dy'$$

$$= 4 \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{2m} (-)^m \int_0^L (L-z) J_{2m}(kz) dz \int_0^B (B-y) J_{2m}(ky) dy //$$

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |H_1^0(k, \theta)|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \iiint x x' dx dx' dy dy' \int_0^{2\pi} e^{ik\omega} d\theta$$

$$= \iiint dx dx' dy dy' x x' J_0(kr)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{2m} (-)^m \iint x x' J_{2m}(k|x-x'|) dx dx' \iint J_{2m}(k|y-y'|) dy dy'$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_{2m} (-)^m \int_0^L (L^3 - 3L^2z + 2z^3) J_0(kz) dz \int_0^B (B-y) J_0(ky) dy //$$

昭和 年 月 日

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z)$$

$$j_0(z) = \frac{\sqrt{z}}{2}, \quad j_1(z) = \frac{\sqrt{z}}{2} - \frac{\cos z}{z}$$

$$j_n(z) = \frac{1}{2i^n} \int_0^\pi e^{i2\omega z} P_n(\cos \omega) \sin \omega d\omega = \frac{1}{2i^n} \int_{-1}^1 e^{i2z\zeta} P_n(\zeta) d\zeta$$

$$h_0(z) = \frac{1-\cos z}{z}, \quad h_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H_n(z)$$

$$p_2(z) = \frac{3}{2} z^2 - \frac{1}{2}$$

昭和 年 月 日

$$f_{0,n}(z) = J_n(z), \quad f_{r,n}(z) = \int_0^z f_{r-1,n}(t) dt$$

$$f_{r,n}(z) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^z (z-t)^{r-1} J_n(t) dt$$

$$f_{r,n}(z) = \frac{z^r}{\Gamma(r)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(r+k)}{k!} J_{n+r+2k}(z)$$

$$f_{2,0}(z) = \int_0^z (z-t) J_0(t) dt = z \int_0^{\frac{z}{z}} J_0(t) dt - z J_1(z)$$

$$f_{2,0}(z) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) J_{2+2k}(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{2}$$

$$\int_0^{\infty} J_{\nu}(t) dt = 1 \quad \text{for } \nu > -1$$

$$\int_x^{\infty} J_0(t) dt \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x + \frac{\pi}{4})}$$

Recurrence formula

x	①	②	$f_{2,0}(x)/x$	$2f_{2,0}(x)/x^2$	$J_0(x)$
	$\int_0^x J_0(t) dt$	$J_1(x)$	①-②		
0	0	0	0	1. - - - -	1. - - - -
.5	.48968	.24227	.24741	.98964	
1	.91973	.44005	.47968	.95936	
1.5	1.24145	.55794	.68351	.91135	
2	1.42577	.57672	.84905	.84905	
2.5	1.46798	.49709	.97089	.77671	
3	1.38757	.33906	1.04851	.69901	
4	1.02473	-.06604	1.09077	.54538	
5	.71531	-.32758	1.04289		
6	.70622	-.27668	.98290		
7	.95464	-.00468	.95932		
8	1.21075	.23464	.97611		
9	1.25227	.24531	1.00690		
10	1.06701	.04347	1.02354		