

昭和 年 月 日

概要

水面又は水面近くで動揺する物体に働く流体力の、高次理論は大変複雑であるがそれを大別すると

a) 自由表面の非線型性.

b) 物体表面条件は各瞬間位置で指定しなければならない。所謂変位影響

c) いずれの場合にも浸水面が変化する。

のような困難があげられよう。

この中 a) b) はどちらかと言うと比較的簡単であって単に複雑なだけである。

しかしながら夫々の発散波を有限波高の波として取扱わねばならないので3次以上の理論は格段に困難になってくる。

この事は c) についても同じである。

そう言う事で以下の理論は2次元の理論を考へる事とするがそれでも1次元理論に比し格段に複雑な事は見る通りである。

又 c) は舷側が水線所分まで無直な場合は away があると出て来る事がわかる。

又高次流体力が問題になるような大振幅動揺では粘性減衰が必ずしも問題になって来るのであまり高次の理論をたててもその実用上の意味が薄れてくると言う事も考えねばならない。

1 自由表面条件

水面ではベルヌーイの定理より

$$\frac{p(x,t)}{\rho} = \varphi_t(x,y,t) - g\eta(x,t) - \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) \Big|_{y=\eta} = 0 \quad (1.1)$$

- オ 水面が境界面である条件は、

$$\eta_t(x,t) = -\varphi_y(x,\eta,t) + \eta_x(x,t)\varphi_x(x,\eta,t), \quad (1.2)$$

今自由の項迄とすると (1.1) より

$$\varphi_t(x,0,t) - g\eta(x,t) + \eta\varphi_{ty} - \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) \Big|_{y=0} = 0$$

あるいはさらに

$$g\eta(x,t) = \varphi_t(x,0,t) + \frac{1}{g}\varphi_t\varphi_{ty} - \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2), \quad (1.3)$$

(1.2) より

$$\eta_t(x,t) = -\varphi_y(x,0,t) - \eta\varphi_{yy} + \eta_x\varphi_x$$

これに (1.3) を代入して

$$\eta_t(x,t) = -\varphi_y - \frac{\varphi_t}{g}\varphi_{yy} + \frac{\varphi_x}{g}\varphi_{tx}, \quad (1.4)$$

(1.3) から

$$g\eta_t = \varphi_{tt} + \frac{1}{g}(\varphi_t\varphi_{ty})_t - (\varphi_x\varphi_{xt} + \varphi_y\varphi_{yt}), \quad (1.5)$$

同式より

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} + g\varphi_y + \frac{1}{g}(\varphi_t\varphi_{ty})_t - (\varphi_x\varphi_{xt} + \varphi_y\varphi_{yt}) \\ + \varphi_t\varphi_{yy} - \varphi_y\varphi_{tt} = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

昭和 年 月 日

$$\varphi_{tt} + g \varphi_y = 2(\varphi_x \varphi_{tx} + \varphi_y \varphi_{yt}) - \varphi_t (\varphi_{yy} + \frac{1}{g} \varphi_{ytt}) \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \text{2.2.2} \quad \varphi(x, y, t) &= \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + O(\varepsilon^3), \\ \varphi^{(1)} &= O(\varepsilon), \quad \varphi^{(2)} = O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (1.6)$$

と置いて上式に代入し $O(\varepsilon^3)$ を省略すると

$$\varphi_{tt}^{(1)} + g \varphi_y^{(1)} = 0, \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{tt}^{(2)} + g \varphi_y^{(2)} &= 2(\varphi_x^{(1)} \varphi_{tx}^{(1)} + \varphi_y^{(1)} \varphi_{yt}^{(1)}) \\ &\quad - \varphi_t^{(1)} (\varphi_{yy}^{(1)} + \frac{1}{g} \varphi_{ytt}^{(1)}) \\ &\equiv P_t(x, t) \end{aligned} \quad (1.8)$$

と置く。

2.2.2 一般化

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(x, y, t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n^{(2)}(x, y) e^{in\omega t} \\ \varphi_n^{(1)} &= \varphi_n^{(1)} \end{aligned} \quad (1.9)$$

と表わされるだろうから (1.7) から

$$-n^2 \omega^2 \varphi_n^{(1)}(x, 0) + g \varphi_{ny}^{(1)}(x, 0) = 0, \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} -n^2 \omega^2 \varphi_n^{(2)}(x, y) + g \varphi_{ny}^{(2)}(x, y) &\equiv P_{tn} = \\ &= 2i\omega \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m (\varphi_{mx}^{(1)} \varphi_{n-m, x}^{(1)} + \varphi_{my}^{(1)} \varphi_{n-m, y}^{(1)}) \\ &\quad - i\omega \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m \varphi_m^{(1)} \chi_{n-m, y}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

昭和 年 月 日

但し $\chi_m(x, y) = \varphi_m^{(1)} + \frac{m^2 \omega^2}{g} \varphi_m^{(1)} \quad (1.12)$

又この時水面変位は、

$$\eta(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_n(x) e^{in\omega t} \quad (1.13)^+$$

$$g \eta_n(x) = in\omega \left\{ \varphi_n^{(1)}(x, 0) + \varphi_n^{(2)}(x, 0) \right\} \\ - \frac{1}{g} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_m^{(1)} \varphi_{n-m}^{(1)} - \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\varphi_{mx}^{(1)} \varphi_{n-m, x}^{(1)} + \varphi_{my}^{(1)} \varphi_{n-m, y}^{(1)} \right) \quad (1.13)$$

特に x の負方向に進む入射波については

$$\varphi^{(1)} = \varphi_1^{(1)}(x, t) = \frac{ga}{\omega} e^{ky} \cos \pi \quad (1.14) \\ k = \omega^2/g, \quad \pi = kx - \omega t,$$

とおくと (1.14) を満足する。

(1.8) の右辺は計算して見ると 0 となるので

$$\varphi_{tt}^{(2)} + g \varphi_y^{(2)} = 0, \quad (1.15)$$

一方水面変位は、

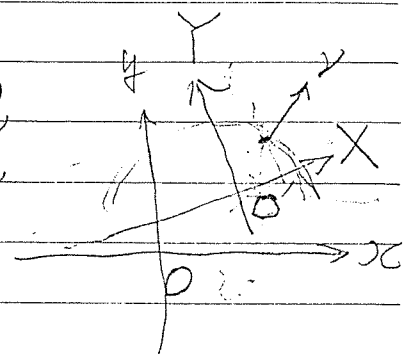
$$\eta(x, t) = a \sin \pi - \frac{ka^2}{2} \cos 2\pi + \varphi_t^{(2)} \quad (1.16)$$

となるので $\varphi_t^{(2)} = 0 \quad (1.17)$

とおくと $O(a^2)$ までは有限波高の波と
なっているので入射波は発散波のホドニシヤル
は線形理論通りでよい事になる。

2. 物体表面条件

物体に固定した座標系を (X, Y) ,
 空間に固定した座標系を (x, y) ,
 (X, Y) の原点 O' の移動量は
 $[x_0(t), y_0(t)]$, 又回転角は
 $\theta(t)$ とすると.



$$\left. \begin{aligned} X &= (x - x_0) \cos \theta + (y - y_0) \sin \theta \\ Y &= -(x - x_0) \sin \theta + (y - y_0) \cos \theta \end{aligned} \right\} (2.1)$$

物体表面での条件は

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_C = -\dot{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \dot{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \dot{\theta} \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad (2.2)$$

流れ関数では,

$$\left. \varphi(x, y, t) \right|_C = -\dot{x}_0 y + \dot{y}_0 x + \dot{\theta} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) \Big|_C, \quad (2.3)$$

物体表面が滑らかであるとするこの境界条件を物体の平均位置 C_0 の上での条件におきかえる事が出来るだろう。

C 上の点 (x, y) に対応する C_0 上の点 (X, Y) は移動座標では (X, Y) になつてゐるから (2.1) より

$$\left. \begin{aligned} x' &= (x - x_0) \cos \theta + (y - y_0) \sin \theta \\ y' &= -(x - x_0) \sin \theta + (y - y_0) \cos \theta \end{aligned} \right\} (2.4)$$

である。

又は逆に

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y - y_0 &= +x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

ここで (2.5) の左辺は展開すると

$$\psi(x, y, t) \Big|_c = \psi(x_0, y_0, t) \Big|_{c_0} + (x - x_0) \psi_x + (y - y_0) \psi_y + O(\varepsilon^3), \quad (2.6)$$

ただし, x_0, y_0, θ は $O(\varepsilon)$ と考える。

(2.5) 右辺は

$$\begin{aligned} x \dot{y}_0 - \dot{x}_0 y + \frac{\dot{\theta}}{2} (x^2 + y^2) \Big|_c &= \dot{y}_0 (x_0 + x' \cos \theta - y' \sin \theta) \\ &\quad - \dot{x}_0 (y_0 + x' \sin \theta + y' \cos \theta) + \frac{\dot{\theta}}{2} \left[(x_0 + x' \cos \theta - y' \sin \theta)^2 \right. \\ &\quad \left. + (y_0 + x' \sin \theta + y' \cos \theta)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0 + x' (\dot{y}_0 \cos \theta - \dot{x}_0 \sin \theta) \\ &\quad + y' (\dot{y}_0 \sin \theta + \dot{x}_0 \cos \theta) + \frac{\dot{\theta}}{2} \left[x_0^2 + y_0^2 + x'^2 + y'^2 \right. \\ &\quad \left. + 2x' (x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta) \right. \\ &\quad \left. + 2y' (-x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta) \right] \end{aligned}$$

$O(\varepsilon^2)$ の項をとると

$$\begin{aligned} &= x' \dot{y}_0 - y' \dot{x}_0 + \frac{\dot{\theta}}{2} (x'^2 + y'^2) \\ &\quad + x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0 - \dot{\theta} (x_0 x' + y_0 y') + \dot{\theta} (x_0 x' + y_0 y'), \end{aligned} \quad (2.7)$$

よって (2.6) は (2.5) を代入して $O(\varepsilon^2)$ までとると

$$\psi \Big|_c = \psi \Big|_{c_0} + (x_0 - y'_0 \theta) \psi_x + (y_0 + x'_0 \theta) \psi_y, \quad (2.6')$$

昭和 年 月 日

それ故

$$\psi(x, y, t) = \psi^{(1)} + \psi^{(2)}, \quad (2.8)$$

$$\psi^{(1)} = O(\varepsilon), \quad \psi^{(2)} = O(\varepsilon^2)$$

とおくと、(2.6') と (2.7) から (x', y') を $\varepsilon^{-1} \tau''(x, y)$ 程度に

$$\psi^{(1)}|_{c_0} = x\dot{y}_0 - y\dot{x}_0 + \frac{\dot{\theta}}{2}(x^2 + y^2), \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \psi^{(2)}|_{c_0} &= -(\dot{x}_0 - y\dot{\theta})\psi_x^{(1)} - (\dot{y}_0 + x\dot{\theta})\psi_y^{(1)} \\ &\quad + x\dot{c}_0\dot{y}_0 - y\dot{c}_0\dot{x}_0 - \dot{\theta}(x\dot{x}_0 + y\dot{y}_0) + \dot{\theta}(x\dot{x}_0 + y\dot{y}_0) \\ &= (\dot{x}_0 - y\dot{\theta})(\dot{y}_0 - \psi_x^{(1)}) - (\dot{y}_0 + x\dot{\theta})(\dot{x}_0 + \psi_y^{(1)}) \\ &\quad + \dot{\theta}(x\dot{x}_0 + y\dot{y}_0), \end{aligned} \quad (2.10)$$

入射波がある時はこの近似の段階ではそれは (2.14) で与えられる流れ/2) である

$$\psi_0^{(1)} = \frac{ga}{\omega} e^{ky} \sin \chi, \quad (2.11)$$

これを (2.3) の右辺に加えられるから

$$\begin{aligned} \psi_0^{(1)}|_c &= \frac{ga}{\omega} e^{ky} \sin \chi = \psi_0^{(1)}|_{c_0} + \left\{ \frac{ka}{\omega} \left[(x-x') e^{ky'} \cos \chi' + (y-y') e^{ky'} \sin \chi' \right] \right\} \\ &= \psi_0^{(1)}|_{c_0} + \omega a \left[(\dot{x}_0 - y'\dot{\theta}) e^{ky'} \cos \chi' + (\dot{y}_0 + x'\dot{\theta}) e^{ky'} \sin \chi' \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

これから (2.9), (2.10) は

$$\psi^{(1)}|_{c_0} = x\dot{y}_0 - y\dot{x}_0 + \frac{\dot{\theta}}{2}(x^2 + y^2) - \frac{ga}{\omega} e^{ky} \sin \chi, \quad (2.13)$$

昭和 年 月 日

$$\begin{aligned}\psi^{(2)}|_{c_0} &= (\dot{x}_0 - y_0)(\dot{y}_0 - \psi_x^{(1)} - \omega a e^{ky} \cos x) \\ &= (y_0 + x_0)(\dot{x}_0 + \psi_y^{(1)} + \omega a e^{ky} \sin x) \\ &\quad + \theta(x x_0 + y y_0),\end{aligned}\quad (2.14)$$

$$\therefore \psi^{(1)} \quad \left. \begin{aligned} x_0(t) &= X f_{inc}(t) \\ y_0(t) &= Y f_{inc}(t) \end{aligned} \right\} \quad \theta(t) = \Theta f_{inc}(t) \quad (2.15)$$

のようにして X, Y, Θ を未知の変位の振幅中と
考え (2.13) より

$$\begin{aligned}\psi^{(1)}(x, y, t) &= X \psi_{1x}^{(1)} + Y \psi_{2y}^{(1)} + \Theta \psi_{3y}^{(1)} \\ &\quad + a \psi_{4x}^{(1)},\end{aligned}\quad (2.16)$$

とあくと (2.14) は

$$\begin{aligned}\psi^{(2)}|_{c_0} &= (\dot{x}_0 - y_0)(\dot{y}_0 - X \psi_{1x}^{(1)} - Y \psi_{2y}^{(1)} - \Theta \psi_{3y}^{(1)} - a \psi_{4x}^{(1)} - \omega a e^{ky} \cos x) \\ &\quad - (y_0 + x_0)(\dot{x}_0 + \omega a e^{ky} \sin x + X \psi_{1y}^{(1)} + Y \psi_{2x}^{(1)} + \Theta \psi_{3x}^{(1)} \\ &\quad \quad \quad + a \psi_{4y}^{(1)}) \\ &\quad + \theta(x x_0 + y y_0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= -x_0 X \psi_{1x}^{(1)} + x_0(\dot{y}_0 - Y \psi_{1y}^{(1)}) - y_0(\dot{x}_0 + X \psi_{1x}^{(1)}) \\ &\quad - y_0 Y \psi_{2y}^{(1)} \\ &\quad - a x_0(\psi_{4x}^{(1)} + \omega e^{ky} \cos x) - a y_0(\psi_{4y}^{(1)} + \omega e^{ky} \sin x) \\ &\quad + a(-y \dot{y}_0 - x \dot{x}_0) + \theta(x x_0 + y y_0) \\ &\quad + y_0(X \psi_{1x}^{(1)} + Y \psi_{2x}^{(1)} + \Theta \psi_{3x}^{(1)} + a \psi_{4x}^{(1)} + \omega e^{ky} \cos x) \\ &\quad - x_0(X \psi_{1y}^{(1)} + Y \psi_{2y}^{(1)} + \Theta \psi_{3y}^{(1)} + a \psi_{4y}^{(1)} + \omega e^{ky} \sin x)\end{aligned}$$

昭和 年 月 日

$\psi^{(2)}|_{c_0} = f(t)$ に対する解は 0 と考えてよいから
上式は ② に

$$\begin{aligned} \psi^{(2)}|_{c_0} = & -x_0 X \psi_{1x}^{(1)} - x_0 Y \psi_{2x}^{(1)} - y_0 X \psi_{1y}^{(1)} - y_0 Y \psi_{2y}^{(1)} \\ & - a x_0 (\psi_{4x}^{(1)} + \omega e^{ky} \cos x) - a y_0 (\psi_{4y}^{(1)} + \omega e^{kx} \sin y) \\ & + \theta \left[y \{ X \psi_{1x}^{(1)} + Y \psi_{2x}^{(1)} + a \psi_{4x}^{(1)} + a \omega e^{ky} \cos x \} \right. \\ & \left. - x \{ X \psi_{1y}^{(1)} + Y \psi_{2y}^{(1)} + a \psi_{4y}^{(1)} + a \omega e^{kx} \sin y \} \right] \\ & + \theta \textcircled{4} (y \psi_{3x}^{(1)} - x \psi_{3y}^{(1)}), \quad (2.17') \end{aligned}$$

2.17' 簡解の爲に同篇を考えると同解は考えなくて
よいから上式も大分短くなった。

さらに

$$\begin{aligned} x_0(t) &= X \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\omega t} \\ y_0(t) &= Y \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{in\omega t} \end{aligned} \quad (2.18)$$

とあくと (2.16) は又

$$\begin{aligned} \psi_1^{(1)}(x, y, t)|_{c_0} &= -y \frac{\dot{x}_0}{X}, \quad \psi_2^{(1)}|_{c_0} = x \frac{\dot{y}_0}{Y} \\ \psi_4^{(1)}|_{c_0} &= -\frac{a}{\omega} e^{ky} \sin x \end{aligned} \quad (2.19)$$

つまり

$$\begin{aligned} \psi_1^{(1)} &= i\omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n a_n \psi_n^{(1)}(x, y) e^{in\omega t} \\ \psi_2^{(1)} &= i\omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n b_n \psi_n^{(2)}(x, y) e^{in\omega t} \\ \psi_4^{(1)} &= + \frac{ia}{2\omega} \left(\psi_1^{(d)} e^{i\omega t} - \psi_{-1}^{(d)} e^{-i\omega t} \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\psi_n^{(1)}|_{c_0} = -y,$$

$$\psi_n^{(d)}|_{c_0} = e^{ky + ikx}$$

$$\psi_n^{(2)}|_{c_0} = x$$

昭和 年 月 日

と仮定すると

$$\psi^{(2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n e^{in\omega t}, \quad (2.21)$$

ゆえに各 \$n\$ に対する境界条件は

$$\begin{aligned} \psi_n|_{c_0} = & -i\omega X^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} m a_{n-m} a_m \psi_{m,x}^{(1)} \\ & -i\omega XY \sum_m \left[m \{ a_{n-m} b_m \psi_{m,x}^{(2)} + b_{n-m} a_m \psi_{m,y}^{(1)} \} \right] \\ & +i\omega Y^2 \sum_m m b_{n-m} b_m \psi_{m,y}^{(2)} \\ & - \frac{aX}{2} \{ a_{n-1} \} \\ & - \frac{aY}{2} \{ \quad \} \end{aligned} \quad (2.22)$$

昭和 年 月 日

3. 速度ポテンシャル

$$\varphi(x, y, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi^{(n)}(x, y) e^{in\omega t} \quad (3.1)$$

と分解すると $\varphi^{(n)}$ は水面上で (1.7) を満たすから C_0 上の
 吹き出し分布で表わされるとすると

$$\varphi^{(n)}(x, y) = \int_{C_0} \sigma^{(n)}(Q) S^{(n)}(P, Q) dS, \quad \left. \begin{array}{l} P \equiv (x, y) \\ Q \equiv (x', y') \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

$$S^{(n)}(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-k} \cos k(x-x') dk}{k - n^2 k + \mu i n \omega}, \quad (3.3)$$

$$\text{よって} \quad \sigma(x, y, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma^{(n)}(x, y) e^{in\omega t} \quad (3.4)$$

ええ すると

$$\varphi(x, y, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{C_0} \sigma^{(n)}(Q) S^{(n)}(P, Q) e^{in\omega t} dS$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T d\tau \int_{C_0} \sigma(Q, \tau) G(P, Q; t-\tau) dS, \quad (3.5)$$

$$G(P, Q, t-\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S^{(n)}(P, Q) e^{in\omega(t-\tau)} \quad (3.6)$$

$$\sum_{n=-N}^N e^{in\omega t} = 1 + 2 \frac{\sin \frac{N\omega t}{2}}{\frac{\omega t}{2}} \cos \frac{N+1}{2} \omega t$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{\omega t}{2}} \left(-\sin \frac{\omega t}{2} + \sin \frac{2N+1}{2} \omega t \right)$$

$$= \frac{\sin \frac{2N+1}{2} \omega t}{\sin \frac{\omega t}{2}} \quad (3.7)$$

昭和 年 月 日

$$I = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i n \omega t}}{k - n^2 K + \mu i n \omega} = g \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i n \omega t}}{\sigma^2 - (n \omega - \mu i)^2}, \quad \sigma^2 = g k \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{\sigma^2 - (n \omega - \mu i)^2} = \left(\frac{1}{\sigma + n \omega - \mu i} + \frac{1}{\sigma - n \omega + \mu i} \right) \frac{1}{2\sigma}$$

$$= \frac{1}{2\sigma} \int_0^{\infty} e^{i(\sigma + n \omega - \mu i)p} dp + \frac{1}{2\sigma} \int_0^{\infty} e^{i(\sigma - n \omega + \mu i)p} dp$$

$$= \frac{1}{\sigma} \int_0^{\infty} e^{-\mu p - i n \omega p} \sin \sigma p \, dp$$

$$I = \frac{g}{\sigma} \int_0^{\infty} e^{-\mu p} \sin \sigma p \, dp \cdot \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2} \frac{\omega}{\sigma} (t-p)\right)}{\sin \frac{\omega}{2} (t-p)} = \frac{g}{\sigma} \sin \sigma t \quad (3.9)^2$$

昭和 年 月 日

一方 (3.10) を $N^{(n)}(P, Q)$ に導入して

$$\frac{\partial}{\partial p} N^{(n)}(P, Q) \Big|_{P \in C} = 0 \quad (3.10)$$

とし水面条件を満足せしめると

$$\varphi^{(n)}(P) = - \int_{C_0} \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial \nu} N^{(n)}(P, Q) ds(Q), \quad (3.11)$$

すなわち (3.5) に対応して

$$\varphi(P, t) = - \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{C_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} R(P, Q; t-\tau) ds(Q), \quad (3.12)$$

$$R(P, Q; t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} N^{(n)}(P, Q) e^{i n \omega t}, \quad (3.13)$$

と表わされる。

2 節の境界値問題のうちもう一つは水面で
圧力が与えられるものである。

今水面で

$$\frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial y} - n^2 K \varphi^{(n)} = g(x, 0), \quad (3.14)$$

とすると

$$\varphi^{(n)}(P) = - \int_{C_0} \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial \nu} N^{(n)}(P, Q) ds + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\varphi^{(n)} \frac{\partial}{\partial y'} - \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial y'} \right) N^{(n)} dx',$$

とかけよから (3.14) と N の斉次の水面条件により

$$\varphi^{(n)}(P) = - \int_{C_0} \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial \nu} N^{(n)} ds + \int_{-\infty}^{\infty} g(x', 0) N^{(n)}(P; x', 0) dx', \quad (3.15)$$

昭和 年 月 日

境界値問題の解は一意的に決まると考えられる。
 今 φ_n を C_0 上で正規完全直交系 $\{v_n\}$ に展開
 出来るようにする。(以下肩符を略す)

$$\varphi_n(P) = + \int_{C_0} v_n(Q) N(P, Q) dS, \quad (3.16)$$

が解の全体を構成する。

それ故

$$N(P, Q) = + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(P) v_n(Q), \quad |P| \geq |Q| \quad (3.17)$$

但し

$$\int_{C_0} v_n(Q) v_m(Q) dS(Q) = \delta_{n,m}, \quad (3.18)$$

と展開出来る。

一方 δ に φ_n を同様に

$$\delta(P, Q) = + \sum_{n=0}^{\infty} g_n(P) v_n(Q), \quad (3.19)$$

つまり

$$g_n(P) = + \int_{C_0} \delta(P, Q) v_n(Q) dS(Q), \quad (3.20)$$

$\{g_n(P)\}$ は $\{v_n\}$ が与えられると計算出来る1変数である。

これと $\{\varphi_n\}$ の関係系を求めよう。

φ_n の次出しによる表現は

$$\varphi_n(P) = \int_{C_0} \sigma_n(Q) \delta(P, Q) dS(Q), \quad (3.21)$$

$$\sigma_n(Q) = \sum_m a_{n,m} v_m(Q), \quad (3.22)$$

それ故 (3.19) より

$$\varphi_n(p) = \sum_m a_{n,m} g_m(p), \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \varphi_n(p)}{\partial p} \Big|_{C_0} = -\psi_n(p) = \sum_m a_{n,m} \frac{\partial g_m(p)}{\partial p}, \quad (3.25)$$

あるいは ψ_μ をかけて積分して.

$$-\delta_{n,\mu} = \sum_m a_{n,m} g_{m\mu}, \quad \mu=1 \sim \infty \quad (3.26)$$

$$g_{m\mu} = \int_{C_0} \psi_\mu(p) \frac{\partial g_m(p)}{\partial p} ds$$

これから未知係数 $a_{n,m}$ を決める方程式である。
 C_0 上では φ_n と ψ_n は互に展開出来る。

$$\varphi_n(p) \Big|_C = + \sum_m f_{n,m} \psi_m(p), \quad (3.27)$$

$$f_{n,m} = + \int_{C_0} \varphi_n \psi_m ds = - \int_{C_0} \varphi_n \frac{\partial \varphi_m}{\partial p} ds, \quad (3.28)$$

$$\text{よって } f_{m,n} = f_{n,m}, \quad (3.29)$$

(3.24) を (3.28) に代入すると.

$$f_{n,m} = \sum_\mu a_{n,\mu} g'_{\mu,m}$$

$$g'_{\mu,m} = \int_{C_0} g_\mu(p) \psi_m(p) ds, \quad (3.30)$$

昭和 年 月 日

4 カの公式

先ず"浸水体"について考えよう。

圧力は

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - g y - \frac{1}{2} v^2, \quad \dots \quad (4.1)$$

故

$$\left. \begin{aligned} \overline{F_x} \\ \overline{F_y} \end{aligned} \right\} &= - \int_C p \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \nu} \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} \end{pmatrix} ds, \quad (4.2)$$

$$M = - \int_C p \left(x \frac{\partial y}{\partial \nu} - y \frac{\partial x}{\partial \nu} \right) ds,$$

一方自由表面では圧力は0であるから上式は又

$$\overline{F_x} = - \int_{C+F} p \frac{\partial x}{\partial \nu} ds, \quad \dots \quad (4.3)$$

としてもよい。

さて C の法線速度は $(-\frac{\partial \varphi}{\partial \nu})$ であるから

$$\frac{d}{dt} \int_C \varphi \frac{\partial x}{\partial \nu} ds = \int_C \varphi_t \frac{\partial x}{\partial \nu} ds - \int_C \varphi \varphi_x ds, \quad (4.4)$$

なお周縁があるので

$$\begin{aligned} - \frac{\overline{F_x}}{\rho} &= + \frac{d}{dt} \int_C \varphi \frac{\partial x}{\partial \nu} ds + \int_C \left(\varphi_x \varphi - \frac{g^2}{2} \frac{\partial x}{\partial \nu} \right) ds \\ &\quad - g \int_C y \frac{\partial x}{\partial \nu} ds, \quad \dots \quad (4.5) \end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned} - \frac{\overline{F_y}}{\rho} &= \frac{d}{dt} \int_C \varphi \frac{\partial y}{\partial \nu} ds + \int_C \left(\varphi_y \varphi - \frac{g^2}{2} \frac{\partial y}{\partial \nu} \right) ds - g \int_C y \frac{\partial y}{\partial \nu} ds \\ &\quad (4.6) \end{aligned}$$

$$-\frac{M}{\rho} = \frac{d}{dt} \int_C \varphi \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) ds + \int_C \left[(x \varphi_y - y \varphi_x) \varphi - \frac{1}{2} \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] ds - \gamma \int_C \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) ds, \quad (4.7)$$

で (4.3) と同様上の積分は $C+F$ としても良い。
上式で右辺の3項は 静水圧力の項で 液体本体では

$$\int_C y \frac{\partial \varphi}{\partial x} ds = 0, \quad \int_C y \frac{\partial \varphi}{\partial y} ds = \iint_D dx dy = \text{Area} \quad (4.8)$$

$$\int_C \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) ds = \iint_D x dx dy = 0 \quad (\text{重心を原点とすれば})$$

右辺の2項は C を特異点を過ぎらないう限り
何處にとつても良いので我々の場合は平均
位置 C_0 とする事が出来る。

$$\int_C \left(\varphi_x \varphi_y - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right) ds, \quad \dots \quad (4.9)$$

又 φ が流出分布で (3.5) のように表される
時は

$$= 2\pi \int_{C_0} \varphi_x ds, \quad \dots \quad (4.10)$$

の様に ラグリー の公式で表わされるので ラグリー力
と呼ぶ。

右辺の1項は 定常分はなく、動的成分である。
この内特に F_x, F_y については

$$\int_C y \frac{\partial \varphi}{\partial x} ds = \int_C \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) ds + \int_C x \frac{\partial \varphi}{\partial y} ds$$

昭和 年 月 日

となり C 上で

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_C = -v_0 \quad (4.11)$$

と与えられているので右辺第2項は未知であり
一方右辺第1項は積分路を自由に変える
事が出来る。

又 浸れ体で"吹出し表現"であれば"と同様

$$= -2\pi \int_{C_0} \sigma X ds = \int_C X v_0 ds \quad (4.12)$$

等と表わされる。

モーメントについては上のよううまく行かないので。

C 上の値を C_0 上の値で近似するしかないだろう。

C 上の点 (x, y) に対応する C_0 上の点の座標 (x', y') は
(2.4) で与えられるから

$$\phi(x, y, z) \approx \phi(x', y', z) + (x-x')\phi_x + (y-y')\phi_y \quad (4.13)$$

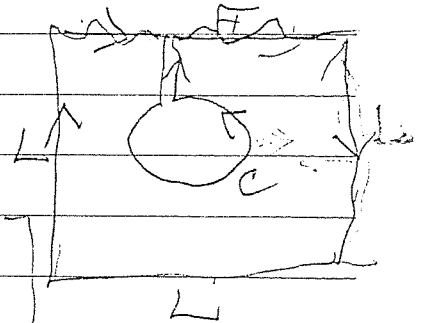
$$(x\phi_x - y\phi_y) ds = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2) = \dots$$

等によって C_0 上の積分に変える事が出来る。

さて (4.3) のように積分路を $C + \Gamma$ 上に採る時は
(4.5) (4.13) 右辺第2項のラグランジュカは上のように無限遠方の
積分路 Γ 上の積分に等しく代れば

$$\int_{C+\Gamma} \left(\phi_x \phi_y - \frac{z^2}{2} \frac{\partial X}{\partial z} \right) ds$$

$$= \lim_{H \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \int_{x=-\infty}^{\infty} (\phi_x^2 - \phi_y^2) dy \Big|_{y=-H}^{y=H} + \frac{1}{2} \int_{x=-\infty}^{\infty} (\phi_x^2 - \phi_y^2) dy \Big|_{y=-H}^{y=H} \right]$$



(4.13)

のようになって ϕ の無限遠方の座標 (波の項だけ)
がわかればよい。

昭和 年 月 日

右辺の1項の内の F_x, F_y の分については.

$$\frac{d}{dt} \int_{C+H} \varphi \frac{\partial x}{\partial \nu} ds = \frac{d}{dt} \int_{C+H} \left(\varphi \frac{\partial x}{\partial \nu} - x \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) ds + \frac{d}{dt} \int_{C+H} x \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds$$

$$= \frac{d}{dt} \int_L \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi \frac{\partial x}{\partial \nu} \right) ds + \frac{d}{dt} \int_C x \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds$$

$$+ \int_H x \ddot{\varphi} dx, \quad \dots \quad (4.14)$$

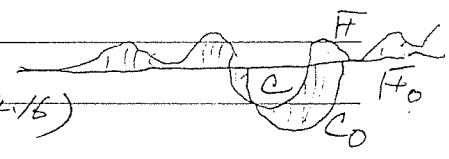
$$\text{" } \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \Big|_H = -\dot{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \dot{\varphi} \frac{\partial x}{\partial \nu}, \quad \dots \quad (4.15)$$

F_y については x を y にかえればよい。

右辺の1項の積分は L の位置には関係ない。これから φ の内の1項は関係なく、無限遠方の層間のダブルット項の係数で表わされることになる。

以上の議論ではもはや浸水係でも水面を貫通していても同じである。

最後に (4.5) ~ (4.7) の3項より静水圧力の項については C, H の平均位置を C_0, H_0 とすると

$$\int_{C+H} y \frac{\partial x}{\partial \nu} ds = \int_{C+H_0} y \frac{\partial x}{\partial \nu} ds = \int_{C_0} y \frac{\partial x}{\partial \nu} ds, \quad (4.16)$$


$$\int_{C+H} y \frac{\partial y}{\partial \nu} ds = \int_{C_0+H_0} y \frac{\partial y}{\partial \nu} ds + \int_{\Delta} dx dy = \int_{C_0} y \frac{\partial y}{\partial \nu} ds + \int_{H_0+C_0} y dx, \quad (4.17)$$

$y^2 x_2 -$

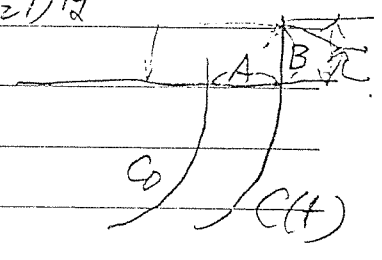
$$\begin{aligned} \int_{C+H} y \left(x \frac{\partial y}{\partial \nu} - y \frac{\partial x}{\partial \nu} \right) ds &= \int_{C_0+H_0} (y x y_2 - y^2 x_2) ds + \int_{\Delta} x dx dy \\ &= \int y (x y_2 - y x_2) ds + \int y x dx. \quad (4.18) \end{aligned}$$

それ故 (4.6) から x 方向には静的浮力の成分は変動力がない事, (4.12) には水面の変動力を考えるとアルキメデスの浮力と (4.18) になっている事からわかる。

しかし実際の計算には浸水体では C_0 上の積分に変更したもので計算する方が便利で、特に吹出し分布で表わされる時は (4.10), (4.12) のようになる。

浸水体の場合は静的浮力を除いた力は

$$\frac{F_x'}{P} = - \int_C \left(\varphi_t - \frac{1}{2} g^2 \right) \frac{\partial x}{\partial r} ds$$



のようになるからこれから上の B の部分を除いて A の部分を加えると、(4.4) が成立つので、即ち

$$\frac{d}{dt} \int_{C+A} \varphi \frac{\partial x}{\partial r} ds = \int_{C+A} \varphi_t \frac{\partial x}{\partial r} ds - \int_{C+A} \varphi_r \varphi_x ds.$$

ただし A の部分では $\varphi_r = 0$ である。

$$\frac{F_x'}{P} = + \int_B \left(\varphi_t - \frac{g^2}{2} \right) \frac{\partial x}{\partial r} ds$$

$$- \frac{d}{dt} \int_{C+A} \varphi \frac{\partial x}{\partial r} ds + \int_{C+A} \left(\frac{g^2}{2} \frac{\partial x}{\partial r} - \varphi_r \varphi_x \right) ds.$$

のように考えればわかる、3 項は C_0 上の積分に変える事が出来、や 1 項は高次の項であるから C_0 と水面の交点の値によって計算してよいだろう。亦たラガーカンの項は今の近似ではエオラーのポテンシャルについてののみ計算すればよい。

5. 浮体の特殊性

全没水体の理論は数学的に問題が殆んどないと考えられるが物体が水面を貫通している時は水面が変化し又水面も変化するのだから影響を考慮する必要がある。

力等については前節で考察したように平均位置における積分に変換出来るので速度ポテンシャルの変化を考えればよい。

まず、線型理論では平均位置における流出分布で表現する事で特定の波を除くは充分満足すべき結果が得られている。

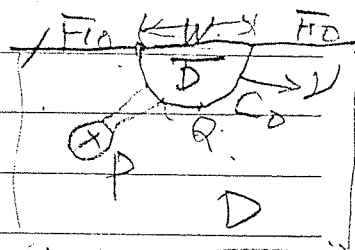
即ちグリーンの定理によって、

$$\varphi(p)e^{i\omega t} = \int_{C_0 + \Gamma_0} \left[\varphi \frac{\partial}{\partial n} S(p, Q) - \frac{\partial \varphi}{\partial n} S(p, Q) \right] ds e^{i\omega t},$$

と表わせるが Γ_0 上の積分は水面条件によって消えるので

$$\varphi(p) = \int_{C_0} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) S(p, Q) ds, \quad p \in D, \quad (5.1)$$

次に水面下で C_0 の内側の領域 D を考え、この中で正則な関数について同様に



$$\varphi_i(p) = + \int_{C_0 + \Gamma_0} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} S - \varphi_i \frac{\partial}{\partial n} S \right) ds$$

$$= \int_{C_0} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} S - \varphi_i \frac{\partial}{\partial n} S \right) ds, \quad p \in D, \quad (5.2)$$

Wで φ_i は水面条件を満たすものとする。

ここで $p \notin D$ ならば右辺は 0 となる。

$$\int_{C_0} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} S - \varphi_i \frac{\partial S(P, Q)}{\partial n} \right) dS = 0, \quad P \in D, \quad (5.3)$$

したがって $\varphi_i(P) = \rho(P), \quad P \in C_0, \quad (5.4)$

のように φ_i を選べば (5.1) と (5.3) をかけ
合せて、

$$\rho(P) = \int_{C_0} \frac{\partial}{\partial n} (\varphi_i - \varphi) S(P, Q) dS(Q), \quad P \in D, \quad (5.5)$$

となり 吹出し表現が得られる。 一意的に

つまり D において (5.4) を満たす φ_i が存在
すれば (5.5) は成立つ。

しかし K の特定の値では固有値数があつて
一意的に解は定まらず その時はこの表現
は成立しない事が知られている*。

しかし K のその値以外では吹出し分布で
表わされるし又 2重吹出しでも同様に
である。

固有値の所で は いづれにしても具合が悪い
ので 元にかゝつて (5.1) のものを積分方程式
として 解けば どのような 離散点 は表われない
ように思われる。

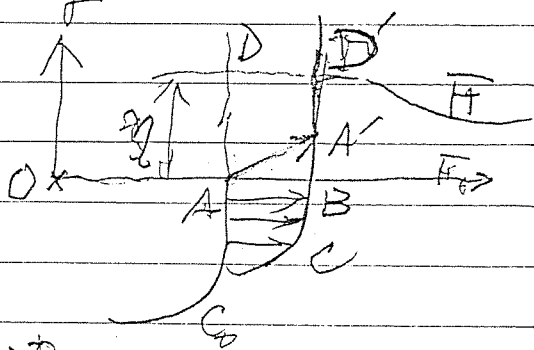
さて もう一つの 浮体の 特殊性は 浸水面
が変化し又 水面も (F) 変化することである。
その様子を 考えて 見よう。

* Ursell, 2nd Int. Conf. Num. Ship Hydro.

昭和 年 月 日

実際の位置はCであるか
理論ではC。上の浮力
分布で表現する。

又水面の実際の位置は
D-Hであるか AFを
水面と見なして水面条件を決める。



しかし水面の変化分 AB は速度ポテンシャルの形
から見て何の変化もおよぼせず、2次の部分に
1次の分では

は圧力分布となるがそれに ϕ_0 をかけると 3次の変化
分となるので今は無視出来る。

一方 C 上の法線速度が与えられるのである
から図のように水面下では2次迄正しく
境界条件が満たされているとしても水面上
の部分は何も指定されていない。そこには水か
いっもある勘定になる。

その水を外におし出す意には 3次以上の
項を無視して 単位時間

に ϕ_0

なる吸出しを近似的に A 点にだけは「あ」。
左端では勿論吸込みをおくべきである。
それを (3.12) によって表わすと

$$\dot{\phi}(P, t) = -\frac{1}{T} \int_0^T dt \cdot \left[\dot{\phi}_0 R(P, Q, t) \right]_{R: \text{左端}}^{R: \text{右端}} \quad (5.6)$$

となる。

昭和 年 月 日

6. 計算 について

従来の計算では 動搖が 單振動である場合
 になっているが 実際の運動では 高周は力か
 ければ 運動も なる言であるから 運動はやはり
 (2.18) のような 一般形と 考へて 計算しなれば
 なるまい。

又 力に 高次成分が 出て来るならば マシン
 の 振動の場合と同様 倍周期の運動
 が 出て来るので それを 予想するならば
 入射波の周波数は 2ω とし 計算をして
 置く方が 良かった。

境界値問題 については 何も問題はない
 ように 思われるが、力の積分の段階では
 C_0 上の φ の値が必要なので (5.1) を使うのが
 便法かも知れない。

固有値の計算 (円筒内部問題)

半没円筒の内部問題に関する固有値を求めよう。

$$L \equiv T - V = \int_{C_0} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds, \quad (A.1)$$

$$T = \int_D (\nabla \varphi)^2 d\tau = \int \varphi \varphi_y dx, \quad (A.2)$$

$$V = \frac{1}{\kappa} \int \varphi_y^2 dx$$

となるので

$$\varphi \text{ or } \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \text{ on } C_0, \quad (A.3)$$

とすれば

$$\left. \begin{aligned} T &= V, \quad \dots \dots \dots \\ \int \varphi \varphi_y dx &= \frac{1}{\kappa} \int \varphi_y^2 dx, \end{aligned} \right\} (A.4)$$

(A.3) は又

$$\varphi \text{ or } \nu = 0 \text{ on } C_0, \quad (A.3')$$

としよう。

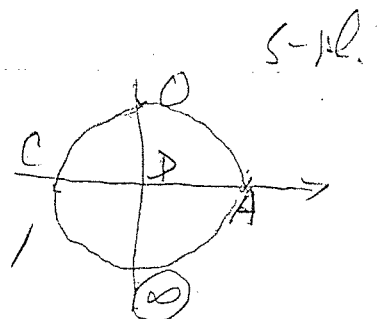
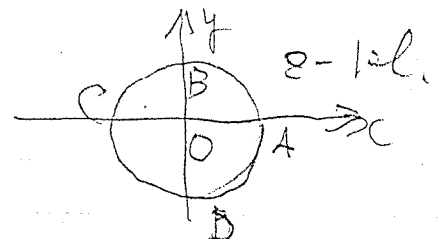
半没円筒の場合

$$\left\{ \begin{aligned} \zeta &= -i \frac{z+i}{z-i} \\ z &= i \frac{\zeta-i}{\zeta+i} \end{aligned} \right\} (A.5)$$

のような変換を考えると (A.3')
 のような関数

$$\varphi = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^n \quad \text{or} \quad \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \zeta^{-n}, \quad (A.6)$$

で表えられる。



ADC の E 2' は (A.5) より $dx = -\frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) d\theta$

$$x = -\tan\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad \& \frac{dz}{dz} = -\frac{2}{(5+i)^2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \Rightarrow \operatorname{Re} \frac{d}{dz} \sum A_n z^n \quad \text{or} \quad \operatorname{Re} -i \frac{d}{dz} \sum B_n z^n$$

$$= \operatorname{Re} -\frac{(5+i)^2}{2} \sum_n n A_n z^{n-1} = \operatorname{Re} -\frac{2i e^{i\theta}}{2} \cos^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_n n A_n e^{in\theta}$$

$$\text{or } \operatorname{Re} -\frac{(5+i)^2}{2i} \sum_n n B_n z^{n-1} = \operatorname{Re} 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_n n B_n e^{in\theta}$$

$$= -+2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_n n A_n \sin n\theta$$

$$\text{or } 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sum_n n B_n \cos n\theta$$

$$\frac{1 + \cos(\theta - \frac{\pi}{2})}{2} = \frac{1 + \sin \theta}{2}$$

$$T = \int \phi \phi_y dx = \sum_{n,m} n m A_n A_m \int_0^\pi \sin n\theta \sin m\theta d\theta$$

$$= -\frac{\pi}{2} \sum_n n A_n^2 \quad \text{or} \quad \frac{\pi}{2} \sum_n n B_n^2, \quad (A.8)$$

$$KV = \int \phi^2 dx = \sum_{n,m} n m A_n A_m \int_0^\pi (1 + \sin \theta) \sin n\theta \sin m\theta d\theta$$

$$\text{or } \sum_{n,m} n m B_n B_m \int_0^\pi (1 + \sin \theta) \cos n\theta \cos m\theta d\theta,$$

固有値問題は、 $0 < \theta < \pi$ で

$$K\phi = \phi, \quad (A.10)$$

となる K を求めればよいので (A.6), (A.7) について
 上式を満たすような K は無限次元の固有値
 行列式の極として与えられる。
 K がわかれば上式から A_n, B_n が求まる。
 レーリー・リッツの方法で最小の固有値を求めて見よう。

$$\phi = -A_1 \sin \theta, \quad B_1 \cos \theta \quad (A.11)$$

とかくと、

$$T = \frac{\pi}{2} A_1^2 \quad \text{or} \quad \frac{\pi}{2} B_1^2, \quad (A.12)$$

$$KV = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}\right) A_1^2 \quad \text{or} \quad \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\right) B_1^2, \quad (A.13)$$

それゆへ

$$K \approx 1 + \frac{\pi}{3\pi} \approx 1.8 \quad \text{or} \quad 1 + \frac{4}{3\pi} \approx 1.4, \quad (A.14)$$

を得るが左側の値は大変良い近似値である。^{前注}

なお一様流れの中の半没円筒の場合の
 水面条件は流れ関数では (A.10) の形になる
 ので C_0 上で $\psi = 0$ となる場合の固有値は
 今の場合の $\phi = 0$ の場合と全く同じになり、
 従ってその場合流れ関数は C_0 上の
 サークレレーションによって表現出来る事になる。
 しかしサークレレーション分布ではフッタの流出
 条件の様なものが表えられないと
 一義的に決まらない。
 又 K が固有値の場合も具合が悪い事
 は今の場合と同じである。

任意形状の内部問題

(5.2) 式から C_0 上の境界条件は $\varphi_i(p) = 0$ on C_0 に
おきて

$$\int_{C_0} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} S(P, Q) dS(Q) = 0, \quad P \in C_0, \quad (A.15)$$

K が固有値の ρ についてはこの積分方程式は
斉次解を有するのであるからその核のマトリックス
は特異になる。

つまりそのマトリックスの Determinant は 0 になる。

よってその行列を K の変数としてフロッットして
行けば固有値の相入 階値が ∞ と示められ
なおこの時 S の実数部のマトリックスのみ
考えればよい。

何故なら S の虚部 $S_{\text{虚}}$ は $e^{K(\theta + \theta')}$ の形
であり、 $\varphi_i|_{C_0} = 0$ なのだから

$$\begin{aligned} \int_{C_0} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} S_s dS &= \int_{C_0} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} S_s - \varphi_i \frac{\partial S_s}{\partial \nu} \right) dS \\ &= \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} S_s - \varphi_i \frac{\partial S_s}{\partial \nu} \right) dx' = 0, \end{aligned} \quad (A.16)$$

となりからである。
 C_0 上で $\varphi = 0$ のときは S の共軛関数を T とすれば
上と同形

$$\begin{aligned} \varphi_i(p) &= \int_{C_0} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} T - \varphi_i \frac{\partial T}{\partial \nu} \right) dS = - \int_{C_0} \varphi_i \frac{\partial T}{\partial \nu} dS \\ &= + \int_{C_0} \varphi_i \frac{\partial S}{\partial \nu} dS = 0 \quad \text{on } C_0, \end{aligned} \quad (A.17)$$

のマトリックスについて考えればよい。