

W0

M-62

No. 1

Date 54.8.23
9.28

流れにおける流体力の計算に関する覚書

別添529

一、流れにおける流体力の計算に特異点法を適用する場合、核関数の内所謂 Local value に相当する部分は無限級数の形となり、その収束が悪く（原点では対数的無限であるから当然であるが）あまり適当とは思われない。このような場合はむしろ有限要素法の方が好ましいようにも思われる。

一、核関数が無限級数で展開出来るという事は、この問題は固有関数系に展開出来るという事であるから、解法として最も自然なものは固有関数に展開する方法であるはずである。

1. 固有関数系と直交性

今固有関数を

$$\varphi = e^{ikx} \cosh k(h-y), \quad (1.1)$$

とくと $y=h$ における条件

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=h} = 0, \quad (1.2)$$

は満たされ、水面条件は

$$(k + \frac{\partial}{\partial y}) \varphi \Big|_{y=0} = 0, \quad (1.3)$$

であるから

$$K \cosh kh - k \sinh kh = 0$$

$$\text{or } K = +k \tanh kh, \quad (1.4)$$

この根はよく知られているように、一つの虚根

$$K = k_0 \tanh k_0 h, \quad (1.5)$$

とす附属無限箇の虚根

$$K = -m_n \tanh m_n h, \quad n \geq 1, \quad (1.6)$$

である。

それ以外 $x > 0$ で外に波が出て行き、

無限遠方で正則な固有関数系としては

$$\varphi_0 = A_0 e^{-ik_0 x} \cosh k_0(h-y), \quad ?$$

$$\varphi_n = A_n e^{-im_n x} \cosh m_n(h-y), \quad n \geq 1 \quad (1.7)$$

$$\int_0^h \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \bigg|_{x=0} dy = 0 \quad \text{for } i \neq j, \quad (1.12)$$

つまり L_{ij} は (12) にて 直交している。

特に $i=j$ ならば

$$\begin{aligned} \int_0^h \cos^2 m_i (h-y) dy &= \frac{1}{2} \left[h + \frac{\sin 2m_i h}{2m_i} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[h - \frac{\sin^2 m_i h}{K} \right] = \frac{1}{2} \left[h - \frac{K}{K^2 + m_i^2} \right] \end{aligned}$$

であるから

$$A_i = \frac{1}{\sqrt{\frac{m_i}{2} \left(h - \frac{K}{K^2 + m_i^2} \right)}}, \quad (1.13)$$

とかくと

$$L_{ij} = \frac{\rho}{2}, \quad (1.14)$$

のように 定化 出来る。

そうすると (1.7) は D で L (12) にて 正規直交系となるので 任意の関数をこの上に展開する事が可能である。

即ち

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi_n, \quad (1.15)$$

とすると

$$C_n = \int_0^h \varphi_n \frac{\partial \varphi}{\partial x} \bigg|_{x=0} dy, \quad (1.16)$$

と採ればよい。
 本は任意定数で、後に定める事とする。

さてこの系の直交性を求めるときに、2つのラグランジアン L_{ij} を導入しよう。

$$L_{ij} = \frac{\rho}{2} \iint_D \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dx dy - \frac{\rho g}{2} \int_0^\infty \eta_i \eta_j dx \quad (1.7)$$

$$= \frac{\rho}{2} \iint_D \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dx dy - \frac{\rho K}{2} \int_0^\infty \varphi_i \varphi_j dx, \quad (1.8)$$

$$L_{ij} = L_{ji}, \quad (1.9)$$

$$L_{ij} = -\frac{\rho}{2} \int_0^h \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \bigg|_{x=0} dy, \quad (1.10)$$

(1.9) より

$$\int_0^h \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \bigg|_{x=0} dy = \int_0^h \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \bigg|_{x=0} dy, \quad (1.11)$$

(1.7) を代入すると、

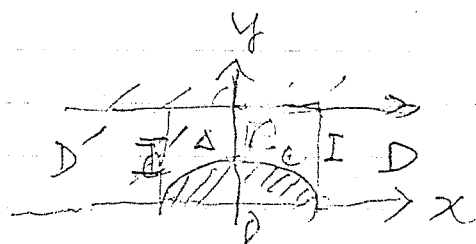
$$\begin{aligned} & -m_i A_i A_j \int_0^h \cos m_i(h-y) \cos m_j(h-y) dy \\ & = -m_i A_i A_j \int_0^h \cos m_i(h-y) \cos m_j(h-y) dy. \end{aligned}$$

よって、 $m_i \neq m_j$ ならば

しかし (1.7) が完備である事が証明されれば
解の一意性も同時にわかるが Δ は非負性
を持たないので証明は面倒である。

今はそれが出来たとしよう。

水面に左右対称な物体
があってその浸水境界を C
としよう。



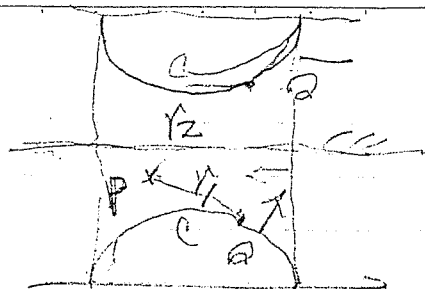
又 C と水線の交点から沿直線を水底まで
下して 左を I, I' とし, C と I, I' と水底で
囲まれた領域を Δ としよう。

その外側は $x > 0$ の側を D , 反対側を D'
とすると, D, D' における速度ポテンシャルは
 I, I' 上の法線速度が与えられる (1.15)
(1.16) により決まる。

領域 Δ では 上の法線速度が
与えられるが一義的に定まる。

鏡像効果を考慮して (1.14) のように

r_1, r_2 を定義すれば



$$\varphi(P) = \int_C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_0} - \varphi \frac{\partial}{\partial n_0} \right) \log \frac{r_1}{r_2} ds(Q)$$

$$+ \int_{I_+} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'} - \varphi \frac{\partial}{\partial x'} \right) \log \frac{r_1}{r_2} dy(Q)$$

$$- \int_{I_-} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'} - \varphi \frac{\partial}{\partial x'} \right) \log \frac{r_1}{r_2} dy(Q), \quad (1.17)$$

I および I' 上で

$$\varphi|_{I_+} = \varphi|_{I_-}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}|_{I_+} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}|_{I_-} \quad (1.18)$$

$$\varphi|_{I'_+} = \varphi|_{I'_-}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}|_{I'_+} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}|_{I'_-}$$

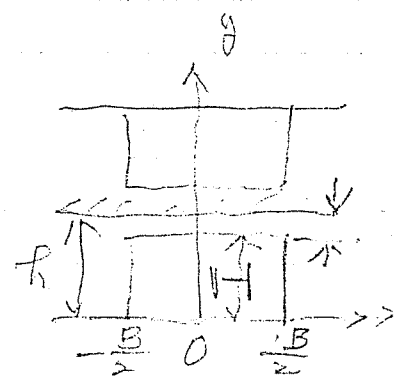
I_+, I_- はそれぞれ I の右側, 左側を意味するものとする。

(1.15), (1.16) により I_+ の側では与えられた $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ によって φ が表わされているから (1.18) の2つ式は

$$\varphi|_{I_+} = \sum \varphi_n|_{I_+} \int_0^h \varphi_n \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy \quad (1.17)$$

とおくとこれと (1.17) を併立させて 互変換を
 上の法線座標の下に 解が得られる。
 今 簡単な例を考へよう。

幅 B , 深さ H ($\leq h$) の箱船が
 上下動するとして。



この場合 箱と水底の隙間が
 小さいとするとそこでの流速は
 垂直方向に一定と考えようから (1.17)
 の方程式を解くまでもなく、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=\frac{B}{2}-0} &= \frac{B}{2(h-H)} & \text{for } h > y > H \\ 0 & & \text{for } H > y > 0 \end{aligned} \right\} (1.18)$$

上下動速度の振幅は 1 とする。

なお

$$\varphi = \frac{x^2}{2(h-H)} \quad \left. \begin{aligned} \text{for } \frac{B}{2} > x > -\frac{B}{2} \\ h > y > H \end{aligned} \right\} (1.19)$$

従って この場合は 同値方程式を解くまでもなく
(1.18) を (1.16) に代入して.

$$C_n = \int_{h-H}^h \varphi_n \Big|_{x=\frac{B}{2}} dy \times \frac{B}{2(h-H)}, \quad \dots$$

$$\int_{h-H}^h \cos m_n (h-y) dy = \frac{\sin m_n (h-y)}{m_n} \Big|_h^{h-H} = \frac{\sin m_n H}{m_n}$$

$$C_n = A_n \frac{B}{2(h-H)} \cdot \frac{\sin m_n H}{m_n}, \quad \dots (1.20)$$

となって、解が求まる。

なお、この (1.7) の固有関数の x の原点は $\frac{B}{2}$ に
移しておくものとする。

この時 箱の底面では (1.19) のように近似した
ので、それを積分しても減衰項は出て来ない。

しかし 共振 ^{の共振箱} 状態では (1.20) によって

$$C_0 = A_0 \frac{B}{2(h-H)} \frac{\sinh k_0 h}{k_0}, \quad \dots (1.21)$$

となるので $x \gg 1$ では

$$\varphi = C_0 \varphi_0 = \frac{B}{2(h-H)} e^{-i k_0 (x - \frac{B}{2})} \frac{\cosh(k_0(h-y)) \sinh(k_0 h)}{\frac{i k_0}{2} (h - \frac{K}{K^2 - k_0^2})} \quad (1.22)$$

一方 ϕ_n は 空間和函数 であるから (2.1) のように

表わされるとすると ϕ_n は 次の微分方程式を満たす。

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + k_0^2 \right] \phi_0(x, y) = 0, \quad \text{for } n=0$$

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - m_n^2 \right] \phi_n(x, y) = 0, \quad \text{for } n \geq 1$$
(2.6)

したがって 基礎解は (無限遠点で正則で) 漸かに発散する。

$$\phi_0 \longrightarrow H_0^{(2)}(k_0 R)$$

$$\phi_n \longrightarrow K_0(m_n R)$$

(2.7)

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

したがって 一般に 次の表現が成立つ

$$\phi_n(x, y) = \int_C \left(\phi_n \frac{\partial}{\partial \nu} S_n - S_n \frac{\partial \phi_n}{\partial \nu} \right) dS, \quad (2.8)$$

$$S_0(x, y; x', y') = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(k_0 R)$$

$$S_n(x, y; x', y') = \frac{1}{2\pi} K_0(m_n R)$$

(2.9)

さて任意の外側で正則な速度ポテンシャルは

$$\phi(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x, y) A_n \cos m_n z,$$

のように展開出来、またこれは C 上の法線微分^(2.10)が与えられれば一意的に定まる筈である。

よって (2.2) より $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ が与えられれば

$$\left. \frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial n} \right|_C = A_n \int_0^{\pi} \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_C \cos m_n z \, dz, \quad (2.11)$$

となって φ_n の法線微分が計算出来る。

この条件で (2.8) を解けば $\varphi_n(x, y)$ が求まり、これを集めれば (2.10) によって ϕ が求まる。

C の内側では前節同様に取り扱い、最後に C 上で $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ と ϕ が連続である条件によつて問題が解ける。

C が円筒の場合は簡単で

$$\varphi_0 = \sum_{j=0}^{\infty} H_j^{(2)}(k_0 r) (C_j^{(0)} \cos j\theta + D_j^{(0)} \sin j\theta), \quad (2.12)$$

$$\varphi_n = \sum_j K_j(m_n r) (C_j^{(n)} \cos j\theta + D_j^{(n)} \sin j\theta),$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

2. 3次元の場合

3次元の場合も 1次元ポテンシャルを

$$\phi_n(x, y, z) = \varphi_n(x, y) A_n \cos m_n z, \quad (2.1)$$

$$m_0 = i k_0$$

2" m_n は (1.6) の本根とすると前同様に

$$A_n A_j \int_0^h \cos m_n (h-z) \cos m_j (h-z) dz = \delta_{ij}, \quad (2.2)$$

これから z -方向には ϕ_n は直交系となっている。

(1.8) と同様 ラグランジュアを導入すれば

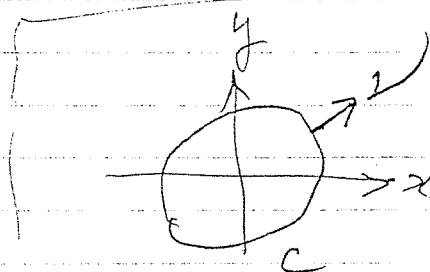
今後は

$$L_{ij} = \frac{\rho}{2} \int_0^h \int_C \phi_i(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \phi_j(x, y) ds, \quad (2.3)$$

$$L_{ij} = L_{ji}, \quad (2.4)$$

(2.2) より

$$L_{ij} = \frac{\rho}{2} \delta_{ij} \int_C \varphi_i(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \varphi_j ds, \quad (2.5)$$



平底の

特に C が円筒で 吃水が t であるとする

C と円筒底面と水底で囲まれた領域では

$$\phi(r, \theta, z) = \sum_{n, m} B_{nm}^n \cos\left(n \frac{h-z}{h-t} \pi\right) J_m\left(\frac{n\pi}{h-t} r\right) \cos m\theta, \quad (2.13)$$

のように展開出来る。

また円筒の底が水面下に沈んでいてその上に厚さ d の水がある場合は C 内でも

(2.10), (2.12) のようになるが その時 h のかわりに d を使い、又 (2.12) では

$$\left. \begin{aligned} H_j^{(2)}(k_0 r) &\longrightarrow J_j(k_0 r) \\ K_j(m_n r) &\longrightarrow I_j(m_n r) \end{aligned} \right\} (2.14)$$

と置きかえればよい。

最後に h が充分小さくなれば m_n ($n \geq 1$) は大きくなって (2.12) の φ_0 のみで ϕ が近似出来るとするのが長波理論であるが、その理論では浮体の下の水の領域の取扱いが面倒である。

しかし、この理論によれば前節同様に取扱がえて便利である。