

水波理論の要約

別所正幸

内容 目次

概要

頁
0-1~2

1. 序論

- 1.1 時間領域の問題の定式化
- 1.2 周波数 " " " " " "
- 1.3 カとモーメント
- 1.4 ラグランジアンとハミルトンの原理

1
1
3
8
11

2. 周波数領域の理論

- 2.1 基本特異性
- 2.2 速度ポテンシャルの表現
- 2.3 遠場の漸近展開
- 2.4 境界積分方程式
- 2.5 カとモーメント, 可逆定理
- 2.6 エネルギー一定理
- 2.7 物体の微小変形
- 2.8 境界値問題の変分原理
- 2.9 解の一貫性と Irregular Frequency
- 2.10 Kramers-Kronig の関係

17
17
21
26
28
36
39
41
45
48
53

3. 時間領域の理論

- 3.1 基本特異性
- 3.2 速度ポテンシャル
- 3.3 遠場
- 3.4 カとモーメント, 可逆定理
- 3.5 エネルギー一定理
- 3.6 運動方程式と過渡応答

56
57
59
63
66
68
70

参考文献

72~73

概要

コーシー・ポアッソン以来の水波理論の歴史は長いけれども、工学的応用の歴史は比較的浅く、また今日の隆盛を見るには電算機の出現をまたねばならなかった。

しかもその大容量化は実験解析法への応用と共に従来主として周波数領域での計算に止まっていたものが、非定常時間領域への試行をうながしているように見える。

従来教科書は理論の全領域を網羅しているけれども既にかなり年を経ており、また最近のものは数値計算法に興味がおかれ、理論の全体的構成において今一步の整正さが望まれる。

本要約では理論全体の構成と統一性を主として、2次元浮体の動揺問題に限るが、しかし周波数領域と平行に時間領域の理論の要約を試みる。

そのために先ず両領域間の変換とハミルトニの最小作用の原理から説き起す事にする。

それぞれの領域の理論では 先ず基本特異性を導入し、それによる速度ポテンシャルの表現の種類の型を誘導する。それはまた境界積分方程式の種類の型に直接結びつく。

次に力およびモーメントあるいは一般力 は ラグランジアンである事とその可逆性を示し、また 浮体の存在仕事との関係を導く。

この ラグランジアンは 前出の ハミルトニの原理に現れた形で また境界値問題あるいは固有値問題の変分原理における汎関数とすることが出来る。

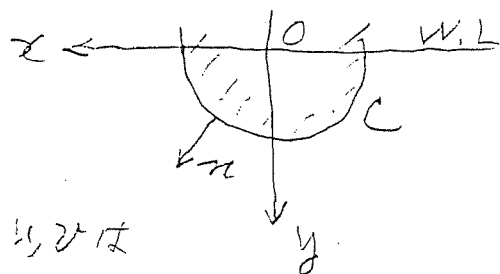
その他 解の一意性 その他 応用上 有用と思われる項目についても 觸れる事とする。

1. 序論

1.1 時間領域の問題の定式化

右図のよう座標系をとって

2次元領域 C の運動を考えよう。



速度ポテンシャルを ϕ とし 速度 (u, v) は

$$(u, v) = -\nabla \phi(x, y, t), \quad \dots (1.1.1)$$

のように定義するとベルヌーイの定理より, 2次元を

省略すると圧力 p は

$$\frac{1}{\rho} p(x, y, t) = \frac{\partial \phi}{\partial t} + g y, \quad \dots (1.1.2)$$

水面変位を η とすると 水面では

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(x, 0, t) - g \eta(x, t) = 0, \quad (1.1.3)$$

一方 水面の上向き速度は

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(x, t) = -\frac{\partial}{\partial y} \phi(x, 0, t), \quad \dots (1.1.4)$$

上の2式から η を消去するとよく知られた水面条件が得られる。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(x, 0, t) + g \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, 0, t) = 0, \quad (1.1.5)$$

残された問題は与えられた初期条件, 境界条件の下に ϕ を求める事である。

初期条件は $t=0$ まで

$$\phi(x, y, t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, y, t) = 0 \text{ for } t < 0, \quad (1.1.6)$$

境界条件は

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}(x, y, t) = - \dot{a}_j \frac{\partial \chi_j}{\partial n}, \text{ on } C, \quad (1.1.7)$$

$$\text{左右ゆれに対して } j=1, \quad \frac{\partial \chi_1}{\partial n} \equiv \frac{\partial x}{\partial n}$$

$$\text{上下ゆれに対して } j=2, \quad \frac{\partial \chi_2}{\partial n} \equiv \frac{\partial y}{\partial n}$$

$$\text{ねじり(原点まわり)に対して } j=3, \quad \frac{\partial \chi_3}{\partial n} \equiv x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n}$$

$\dot{a}_j$ は夫々の運動の速度とする。

このような解が一義的に定まる事は J.J. Stoker による証明がある。

一般にこのように仮のある問題ではどのような仮の存在をゆるすかを指定しなければ問題は不定となり後述の Sommerfeld の放射条件はその例であるが今の場合それに対する条件は初期条件 (1.1.6) である。

1.2 同値数領域の問題の定式化

一般に 前節の時同領域で境界値問題をとくのは容易でなく、ラプラス変換 または フーリエ変換を行って から問題を解くのが普通である。

この場合は フーリエ変換を行つた方が物理的 ^{すべの透きか} 像が明白で、つまり ^{すべの透きか} 調和振動をしている事に対応して便利である。

そこでまず フーリエ変換を次のように定義しよう。

任意の時同関数 $f(t)$ ($=0$ for $t < 0$) について

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \dots (1.2.1)$$

で フーリエ変換 $F(\omega)$ を定義すると 逆に

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.2.3)$$

$f(t)$ は一般に 実関数であるから (1.2.1) から

$$\overline{F(\omega)} = F(-\omega), \quad \dots (1.2.4)$$

また

$$f(t) = 0 \quad \text{for } t < 0, \quad (1.2.5)$$

と仮定したから (1.2.3) と合せて考えるとこれは

複素 ω -面 で $F(\omega)$ は 下半面で正則である事を意味している。

なお言うまでもないが $i\omega$ を s とおけばラプラス変換となる。

前節の式をフーリエ変換して、まず圧力 $P(x, y, \omega)$ は、
このフーリエ変換を $\bar{\Phi}$ とする

$$\frac{1}{\rho} P(x, y, \omega) = i\omega \bar{\Phi}(x, y, \omega), \quad \dots (1.2.6)$$

((1.1.2)の ϕ は 時間の関数ではない)

水面変位を $\gamma(x, t)$ とすると 水面で圧力0の条件は

$$i\omega \bar{\Phi}(x, 0, \omega) - g\gamma(x, \omega) = 0, \quad (1.2.7)$$

((1.1.4)は

$$i\omega \gamma(x, \omega) = -\frac{\partial \bar{\Phi}(x, 0, \omega)}{\partial y}, \quad (1.2.8)$$

((1.1.5)は

$$-\omega^2 \bar{\Phi}(x, 0, \omega) - g \frac{\partial}{\partial y} \bar{\Phi}(x, 0, \omega) = 0, \quad (1.2.9)$$

水深が無限とすると

$$\frac{\omega^2}{g} = k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \lambda: \text{波長}, \quad (1.2.10)$$

とあって上式は

$$k \bar{\Phi}(x, 0, \omega) \mp \frac{\partial \bar{\Phi}(x, 0, \omega)}{\partial y} = 0, \quad (1.2.11)$$

となる。

境界条件は

$$\frac{\partial}{\partial n} \bar{\Phi}(x, y, \omega) = -U_j(\omega) \frac{\partial \chi_j}{\partial n}, \quad \text{on } C. \quad (1.2.12)$$

$$U_j(\omega) = \int_0^\infty \dot{q}_j e^{-i\omega t} dt, \quad (1.2.13)$$

$\dot{q}_j, \chi_j$ は (1.1.8) に よる。

前節の初期条件 (1.1.6) に 対応するものが 与えて

いては 問題が 不定 となる。

これはよく知られている Sommerfeld (1907) の射影条件であって、物理的には物体が波を外側に放射する条件である。これについては二重積分の解。

このような境界値問題が一義的に定まるかどうかについては一部疑問が残っており後述する。

さて実際上はこの形で境界値問題が解かれて実用に使われている筈であるが、これが解かれていけば前節の問題もそれを逆変換すればいい筈で (1.2.3) により (速度ポテンシャルは

$$\phi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Phi}(x, y, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.2.14)$$

のようにならされる。

実際上は (1.2.12) の境界値問題は各要素(点)に対して解かれ

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_j}{\partial n}(x, y, \omega) = -\frac{\partial \chi_j}{\partial n}, \quad \text{on } C, \quad (1.2.15)$$

とするので上式は

$$\phi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_j(\omega) \bar{\Phi}_j(x, y, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.2.16)$$

の形となる。

それゆゑ今

$$\phi_j^\delta(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{P}_j(x, y, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.2.17)$$

とおくと (1.2.13) と合せて (1.2.16) は

$$\phi(x, y, t) = \int_0^t a(\tau) \phi_j^\delta(x, y, t-\tau) d\tau, \quad (1.2.18)$$

と表わされる。

こゝに ϕ_j^δ の境界条件は (1.2.15) により、(1.2.17) から

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi_j^\delta(x, y, t) = - \frac{\partial}{\partial n} \delta(t), \quad \dots (1.2.19)$$

こゝに

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega, \quad \dots (1.2.20)$$

は Dirac の δ 関数である。

即ち ϕ_j^δ は $t=0$ でインパルス的に動く時の速度ポテンシャルである。

即ち結局の所 (1.1.7) の正定値問題には (1.2.19) のインパルスポテンシャルから (1.2.18) のように表されるからで ϕ_j^δ を求めるには (1.2.17) からわかるように $\overline{P}_j(\omega)$ がわかればよい。

しかし $\overline{P}_j(\omega)$ がすべての周波数で求められるは大変困難な事である。

一方実験的には $\phi_j(t)$ を求めるのは困難で、それをフーリエ変換すれば $\Phi_j(x, y, \omega)$ が求められて、実用的試験法となっている。

なお フーリエ変換で

$$U(\omega) = \int_0^{\infty} \dot{a}(t) e^{-i\omega t} dt = -a(0) + i\omega \int_0^{\infty} a(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (1.2.21)$$

のように初期値が残る点に注意すべきである。

速度ポテンシアルについては、(1.1.6)を反定するの2、その心配はない。

1.3 カとモーメント

時間領域で物体に作用する力はモーメントは

圧力 p は

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + gy, \quad (1.3.1)$$

したがって、力は

$$X_j = - \int_C p \frac{\partial x_j}{\partial n} ds, \quad j=1, 2, \quad (1.3.2)$$

モーメントは

$$M = - \int_C p \left(x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n} \right) ds, \quad (1.3.3)$$

まず

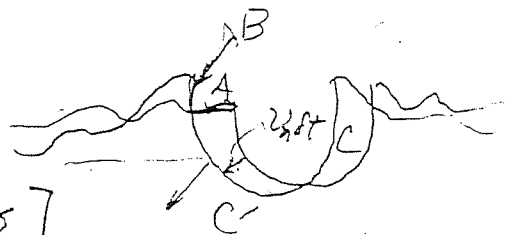
$$\frac{d}{dt} \int_C \phi \frac{\partial x_j}{\partial n} ds$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial n} = x \frac{\partial \phi}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n}, \quad \frac{\partial x}{\partial n}$$

$$\frac{d}{dt} \int_C \phi \left(x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n} \right) ds,$$

なる形を考慮しよう。

$$\frac{d}{dt} \int_C \phi \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = \frac{1}{dt} \left[\int_{C'} \phi' \frac{\partial x_j}{\partial n} ds - \int_C \phi' \frac{\partial x_j}{\partial n} ds \right]$$



$$\pi \ll L \quad \phi' = \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} \delta t, \quad (1.3.4)$$

$$\int_{C'} \phi' \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = \int_{A+B} \phi' \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = \int_C \phi' \frac{\partial x_j}{\partial n} ds + \int_C \frac{\partial \phi'}{\partial x_j} v_n ds, \quad (1.3.5)$$

$$v_n = - \frac{\partial \phi}{\partial n}, \quad \dots$$

$$\int_{A+B} \phi' \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = \phi \int_{A+B} \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = [\phi \dot{x}_j] \delta t$$

$$\int_{A+B} \phi' \frac{\partial y}{\partial n} ds = \phi \int_{A+B} \frac{\partial y}{\partial n} ds = - [\phi v_x] \delta t$$

(1.3.6)

v_x : x 方向の速度

したがって (1.3.6) の右辺を 高次項として 無視見出来る とすると

$$\frac{d}{dt} \int_C \phi \frac{\partial X_i}{\partial n} ds = \int_C \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial X_i}{\partial n} ds - \int_C \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds, \quad (1.3.7)$$

同様にして

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_C \phi (x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n}) ds &= \int_C \frac{\partial \phi}{\partial t} (x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n}) ds \\ &\quad - \int_C (x \frac{\partial \phi}{\partial y} - y \frac{\partial \phi}{\partial x}) \frac{\partial \phi}{\partial n} ds, \quad (1.3.8) \end{aligned}$$

これを (1.3.2), (1.3.3) に代入すると

$$\begin{aligned} X_i &= - \frac{d}{dt} \int_C \phi \frac{\partial X_i}{\partial n} ds + \int_C \left[\frac{1}{2} g \frac{\partial X_i}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] ds \\ &\quad - g \int_C y \frac{\partial X_i}{\partial n} ds, \quad (1.3.9) \end{aligned}$$

$$M = - \frac{d}{dt} \int_C \phi (x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n}) ds$$

$$\begin{aligned} &+ \int_C \left[\frac{g^2}{2} (x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n}) - (x \frac{\partial \phi}{\partial y} - y \frac{\partial \phi}{\partial x}) \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] ds \\ &\quad - g \int_C y (x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n}) ds, \quad \dots (1.3.10) \end{aligned}$$

線型理論では右辺が1項は 周期的力を与え
が2項は 定常力と 倍周成分を与え, が3項は
静水圧成分である。

が2項の積分は 水面を切る点を 両端とする

任意の曲線の上に積分しても値は変らない。

特に浸水体では特異点の周りの積分に変換して ^(定常問題で) Laplace の公式と呼ばれるものを用いる。

今中は ϕ として表わされるとすると ^{Biot-Savart の公式} の公式

$$\begin{aligned} L_{\phi} &= \int_C \left[\frac{1}{2} \rho^2 \frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right] ds \\ &= \int_C \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} ds, \quad \dots \quad (1.3.11) \end{aligned}$$

となる。

水面を切る物体では ^{成り立つ。} ~~成立~~ しない。

このように浸水体では力についても大変問題が複雑で、例えば (1.3.6) の力/式は浸水面の変化に因係するなど考慮に入れねばならぬ。非線型問題は言う迄もなく、これらの星力つ線型問題にも因係する場合がある。

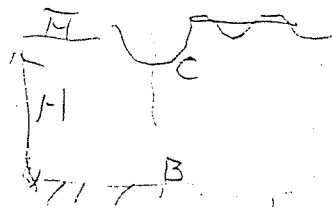
1.4 ラグランジアンとハミルトンの原理

今領域 D で圧力を無視しよう。

$$L = - \iint_D p \, dx \, dy = \rho \iint_D \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + g y \right] dx \, dy, \quad (1.4.1)$$

$$\text{よす} \quad \iint_D y \, dx \, dy = \int_{CHT} \frac{\eta^2}{2} dx - \frac{1}{2} \frac{H^2}{2} \int dx, \quad (1.4.2)$$

右辺の2項は定数であるから以後無視しよう。



右辺の1項はポテンシャルエネルギー V である。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho g}{2} \int_H \eta^2 dx &= V_w \\ \frac{\rho g}{2} \int_C \eta^2 dx &= V_s \end{aligned} \right\} V = V_w + V_s, \quad (1.4.3)$$

(V_s is static energy + dynamic strain energy)

次に前12項は12

$$\frac{d}{dt} \iint_D \phi \, dx \, dy = \iint_D \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dx \, dy + \int_{C+F} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \, ds, \quad (1.4.4)$$

なる関係があり、また運動エネルギー T

$$T = \frac{\rho}{2} \iint_D (\nabla \phi)^2 \, dx \, dy = \frac{\rho}{2} \int_{C+F} \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \, ds, \quad \dots (1.4.5)$$

であるからよす (1.4.1)

$$L = T - V, \quad \dots (1.4.6)$$

これはラグランジアンもしくは Kinetic Potential (とよめはれる量である。

(1.4.7) において水面変位 η が $\Delta\eta$ だけあれば

$$\delta L = - \int_{\bar{H}} p \delta \eta dx, \quad \text{---} \quad (1.4.7)$$

となるから、任意の $\delta\eta$ に対して

$$\delta L = 0$$

となるように運動ポテンシャルを定めれば"上式から

$$p = 0 \quad \text{on } \bar{H}, \quad (1.4.8)$$

となって自由表面条件が得られる。

この方法は非線形の場合にも使用出来る。

線型化すれば" (1.1.3) により (V_s を除いて)

$$L_W = T - V_W = \frac{\rho}{2} \int_{\bar{H}} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} - g \eta^2 \right) dx - \frac{\rho}{2} \int_C \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds, \quad (1.4.9)$$

右辺第1項の積分を更に時間 t で積分すれば

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} \int_0^t \int_{\bar{H}} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} - g \eta^2 \right) dx &= \frac{\rho}{2} \int_0^t \int_{\bar{H}} \left\{ \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right\} dx \\ &= \frac{\rho}{2g} \left[\int_{\bar{H}} \phi \frac{\partial \phi}{\partial t} dx \right]_{t=0}^{t=t} + \frac{\rho}{2} \int_0^t \int_{\bar{H}} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) dx, \quad (1.4.10) \end{aligned}$$

となって (1.1.5) と初期条件により ($t \rightarrow \infty$ で ϕ or $\partial \phi / \partial t = 0$)

上式は0となるので結局

$$\int_0^\infty L_W dt = -\frac{P}{2} \int_0^\infty dt \int_C \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS, \quad \dots (1.4.11)$$

となり C 上の値のみで決まる事になる。

これをフーリエ変換面で見ると フラクショナルな、

定理により

$$\int_0^\infty L_W dt = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \tilde{L}_W(\omega) d\omega, \quad \dots (1.4.12)$$

$$\tilde{L}_W(\omega) = -\frac{P}{2} \int_C \bar{\Phi}(\omega) \frac{\partial \bar{\Phi}(\omega)}{\partial n} dS, \quad (1.4.13)$$

となる。

これは水面条件 (1.2.7), (1.2.8) より

$$\tilde{L}_W = \frac{P}{2} \iint_D \nabla \Phi \nabla \bar{\Phi} dx dy - \frac{Pg}{2} \int_C |\Upsilon(\omega)|^2 dX, \quad (1.4.14)$$

となり、やはり 運動エネルギー と ポテンシャルエネルギー

の差 となつてゐるので これも ラグランジアン と呼ぼう。

はがある場合 一般には $T \rightarrow \infty$, $V_W \rightarrow \infty$ であるが

少なくとも線形理論では

その差は有限なので L_W は存在すると考えられる。

Modified Lagrangian

$$L_m = -\frac{P}{2} \int_C \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS$$

ハミルトンの最小作用の原理によれば、
 このラグランジアン外力のなす仕事の和の時間積分
 (ハミルトニアン) の変分が 0 になるように運動が
 起きる。

その条件は

$$\int_0^{t \rightarrow \infty} (\delta L + A) dt = 0, \quad \dots (1.4.15)$$

2.12

$$A = \sum_j f_j \delta x_j, \quad \dots (1.4.16)$$

は仮想仕事で、 x_j は仮想変位、 f_j はその
 モードの一般力である。

以下簡潔の爲に周波数面では ω が周波数であることを示す
 とすれば (1.4.15) は周波数面では

$$\delta L + Q = 0, \quad \dots (1.4.16)$$

$$L = -\frac{c}{2} \int_C \bar{P}(\omega) \frac{\partial \bar{P}(\omega)}{\partial n} ds = \frac{P_0}{2} \int_C |Y(\omega)|^2 dX, \quad (1.4.17)$$

$$Q = \frac{1}{2} \sum \left(\bar{F}_j(\omega) \bar{X}_j(\omega) + \bar{F}_j X_j \right), \quad (1.4.18)$$

$$X_j(\omega) = \int_0^{\infty} \delta x_j e^{-i\omega t} dt$$

今例として 上下ゆれを考慮しよう。

(1.2.16), (1.2.21) より

$$\bar{\Phi}(\omega) = i\omega X_2 \bar{\Phi}_2(\omega),$$

であるから

$$\mathcal{L} = \omega^2 X_2 \bar{X}_2 \mathcal{L}_2 - \frac{\rho g}{2} X_2 \bar{X}_2 B, \quad (1.4.19)$$

(2.12) $Y(\omega) = y + X_2(\omega)$ で y は時間的に図 1.1 の "0" の値 (省略) である。

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{\rho}{2} \int_C \bar{\Phi}_2 \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial n} dS, \quad (1.4.20)$$

となるので (1.4.16) から 任意の X_2 に対して 同式が成立する。

$$\omega^2 \mathcal{L}_2 - \frac{\rho g}{2} B + \frac{1}{2} F_j(\omega) = 0, \quad (1.4.21)$$

つまり

$$F_j(\omega) = -\rho \omega^2 \int_C \bar{\Phi} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} dS + \rho g B, \quad (1.4.22)$$

でなければならぬ。

この右辺 (1.3.9) の右辺が 1 項のフーリエ変換

に等しく、 F_j は静的復原力である。

(1.4.21) は力がラグランジアンで表わされることを示しているが、問題が複雑になるとき 此による方法は力学的に妥当な値を与えないと考えられる。

同時に 浮体の運動と同時に振動をとり扱おう
とすると問題が随分で困難となるが、ハミルトン
の原理を使うこの方法では誤りか少ない。

その場合は L_w または δ に 物体自体のラグラン
ジアンを加えておけば"容易に運動方程式が導
びける。

弾性体の氷上振動。

スプリング

2. 同位数領域の理論

1.2 節 に 引 続 け て 同 位 数 領 域 の 理 論 を 構 成 す
 なお 簡 単 の 為 に 速 度 ポリノミヤル 等 は 小 文 字 で 表 示 し て
 同 位 数 面 の 位 置 を 示 す 事 と す る。

2.1 基本特異性

水面下 $Q(x, y)$ の 点 に あ る 単 位 吸 出 し に よ る 速 度 ポリ
 ノミヤル は

$$S(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r'}{r} + \frac{1}{\pi} \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-k(y+y')} \cos k(x-x')}{R-k+\mu i} dk, \quad (2.1)$$

$$(2.1.2) \quad P \equiv (x, y), \quad r = \overline{PQ}, \quad r' = \overline{P\bar{Q}}, \quad \bar{Q} \equiv (x', -y')$$

この 解 は 水 面 で S を x に 関 し て フーリエ 変 換 す る 事 に
 よ っ て 求 め ら れ る。 この 予 定 定 の 関 係 が あ る。

$$\frac{1}{x+iy} = -i \int_0^{\infty} e^{ik(x+iy)} dk$$

$$\log(x+iy) = - \int_0^{\infty} \left[e^{ik(x+iy)} - e^{ik} \right] \frac{dk}{k} \quad (2.1.3)$$

フーリエに

$$(x+iy) [\log(x+iy) - 1] = i \int_0^{\infty} \left[e^{ik(x+iy)} - 1 - ik e^{ik} \right] \frac{dk}{k^2}$$

とす

$$S'(P, Q) = S(Q, P), \quad \dots (2.2.3)$$

つまり 可逆性 がある。 3次元問題でもこれは成立つ。

しかし 前進速度 がある 場合、定常問題 ならば

波の 項 の 符 号 が 変 化 し 非 可 逆 的 で あ る。

次に

$$(K + \frac{\partial}{\partial y})S(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \left[(K + \frac{\partial}{\partial y}) \log \frac{1}{r} + (K - \frac{\partial}{\partial y}) \log r' \right], \quad (2.14)$$

となって項が消える。

Asymptotic behavior

$P \rightarrow Q$ では (2.14) の右辺が 2 項の和に分れる。

その値で決まるので

$$\frac{1}{r-K} = \frac{1}{r} + \frac{K}{r(r-K)} \rightarrow \frac{1}{r} + \frac{K}{r^2}$$

と (2.2.2) を利用し

$$S(P, Q) \xrightarrow{P \rightarrow Q} \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{1}{r r'} \right) + \frac{K}{\pi} \operatorname{Re} \left[(x-x' + i(y+y')) \log (x-x' + i(y+y')) \right] + O(r'), \quad (2.2.5)$$

右辺が 2 項は K の小さい時は、第 1 項に比べて

無視しても良いように見えるが K が大きい時は必ずしも

無視し得ないと思われる。

また P と Q が充分離れている時は

$$S(P, Q) \rightarrow -i e^{-K(y+y') - iK(x-x')}$$

$$+ (y' - \frac{1}{K}) \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \right) u_1(P) + \dots, \quad (2.2.6)$$

$$u_1(P) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{y}{r^2} - \frac{x^2 - y^2}{K r^4} \right), \quad r = x^2 + y^2, \quad (2.2.7)$$

とすると右辺の1項は発散を表わし、他は波なしポテンシャルである。

また $(y - \frac{1}{k})$ は原点で正則な波なしポテンシャルである。

応用上 (2.1.1) の系役関数^{2.2のように} T を考えておくと便利な事がある。

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = -\frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2.1.8)$$

$$T(p, q) = \frac{1}{2\pi} (\Theta + \Theta') + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{\frac{-k(y+y')}{-k-k+yi}} \frac{\sin k(x-x')}{-k-k+yi} dk, \quad (2.1.9)$$

$$\tan \Theta = \frac{y-y'}{x-x'}, \quad \tan \Theta' = \frac{y+y'}{x-x'}$$

であるが Θ, Θ' のとり方に充分注意しなければならない。

よく似た関数として 単位サーキュレーシヨニによるポテンシャルがある。

その流れ関数は S と同じ特異性をもつからそれと較べる事に流れ関数を考えよう。

(1.2.11) を x で微分して流れ関数の水面条件は

$$K \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, 0) = 0, \quad \dots (2.1.10)$$

これは $K = g/v^2$, (v は流れの速度) とおくと
 一様流れの中の定常問題 (定常流体力学理論)
 の時の速度ポテンシャルの水面条件である。

逆に定常問題の場合の流れ関数の水面条件
 は (1.4.11) である。

さて今の問題では (2.4.1) を求めるのと同じような
 流れ関数 T^r は

$$T^r(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{1}{rr'} \right) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-k(y+y')}}{k^2 - k + \mu^2} e^{ik(x-x')} dk, \quad (2.4.11)$$

それ故速度ポテンシャルは

$$S^r(P, Q) = \frac{-1}{2\pi} (\Phi + \Phi') - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-k(y+y')}}{k^2 - k + \mu^2} \sin k(x-x') dk, \quad (2.4.12)$$

定常問題の核関数としてはこれは上流側に
 ないという条件がつくので (2.4.11) とはの

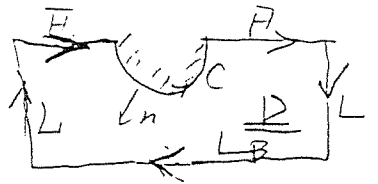
項だけ異なる。今これを $S^{(u)}$ とし x の正側
 が上流とすると

$$S^{(u)}(P, Q) = T^r(P, Q) + i e^{-iKx - Ky}, \quad (2.4.13)$$

実際これは実関数となる。

2.2 速度ポテンシャルの表現

速度ポテンシャル又は流れ関数は
調和関数であるからよく知られている。
ように右図の積分路に同じ



$$\phi(P) = \frac{-1}{2\pi} \int_{C+L+L+B} \left[\frac{\partial \phi(Q)}{\partial n} \log r(P, Q) - \phi(Q) \frac{\partial}{\partial n_0} \left[\frac{1}{r} \right] \right] ds_Q, \quad (2.2.1)$$

$$= 0 \quad \text{outside } D,$$

なる表現がある。

流がなければ積分路は無限遠方を持つて
行く事によりその寄与を充分小さくする事が出来る
と考えられるか。今は流があるとすので L 上の積分
を無視出来る。(無限水深ならば水底の積分は)
もちろん無視出来る。

ここで対数特異性の所に前節の基で
特異性を導入しても同じ表現が得られ
この際 F 上の積分は打消し合って

$$\phi(P) = \int_C \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} S(P, Q) - \phi(Q) \frac{\partial}{\partial n_0} S \right] ds_Q, \quad (2.2.2)$$

$$= 0 \quad \text{outside } D$$

なる表現がえられる。

この時 Γ 上の積分が消えることは $|x|$ の充分大きい
 Γ_Γ で

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} S(p, q) &\doteq -iK S(p, q) \\ K &\gg 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} \phi(p) &\doteq -iK \phi(p) \end{aligned} \right\} \dots (2.2.3)$$

なる条件が必要で、これは Sommerfeld の放射
 条件である。

これは 速度ポテンシャルから (2.1.6) の π のはつまり
 外側に放射する波を持つていければよい事を示す。

しかし、領域 D の外側では、恒等的に 0 と
 なるのであるから、この条件は、外側から見ると Γ で
 C の起す波を吸収している事になり、これは消波
 条件あるいは波吸収条件と言える。

(2.2.2) の表現に到達するのにもう一つ障害が
 あって、それは ケーネレーションによる流れ関数 Γ の
 (2.1.11) を使う場合に生じるもので、その際水面条件
 は (2.1.10) であるから、 Γ 上の積分は部分積分
 (2 より)

$$\psi(P) = \int_C \left[\frac{\partial \psi}{\partial n} T^x(P, Q) - \psi \frac{\partial T^x}{\partial n} \right] dS_Q + \psi_L, \quad (2.2.4)$$

$$\begin{aligned} \psi_L &= - \int_H \left[\frac{\partial \psi}{\partial y'} T^x - \psi \frac{\partial T^x}{\partial y'} \right] dx' \\ &= \frac{1}{k} \left[\psi \frac{\partial T^x}{\partial x'} - \frac{\partial \psi}{\partial x'} T^x \right]_{F.P.}^{A.P.}, \quad (2.2.5) \end{aligned}$$

のように ψ_L なる項が現れ、これは定常問題で言う所謂線積分項である。

定常問題では法線微分が0の解があり、少々面倒な事になった。

2の場合も同じく

$$\psi_H(P) = \int \left[\frac{\partial \psi}{\partial n} T^x - \psi \frac{\partial T^x}{\partial n} \right] dS + [T^x]_{F.P.}^{A.P.}, \quad (2.2.6)$$

のような流れ関数は $\psi=0$ に対し恒等的に0でない解を持つと考えられる。

しかし右辺の2項に対応する速度ポテンシャルは(2.1.12)により A.P., F.P. において水面から物体表面に移る際、ジャグががある。

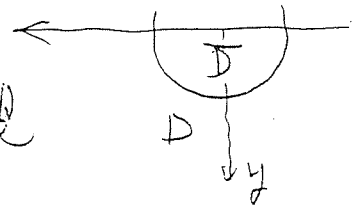
それ故 2の場合には水面と物体面で速度

ポテンシャルが連続であるという条件を追加すれば、一意的に解は定まると考えられる。

実際中がジャムする車は物理的には圧力がジャムする車であるから、物体の近くの水面で妙な車が近らない限りそのような解は考えにくい。

しかし、モットリアルホームを持つような物体で計算精度がや、おちるような場合はこのような解が表われて来る可能性はあろう。

最後に (2.2.2) において σ 式を使い, D の境界領域 Γ を考え, 差引きして 2 重出し式 2 重出し式, サーキニレーニヨニ式表現を得る事になる。



$$\phi(p) = \int_C \sigma(q) S(p, q) ds, \quad (2.2.4)$$

$$\phi(p) = \int_C \mu(q) \frac{\partial}{\partial n_q} S(p, q) ds; \quad (2.2.5)$$

$$\phi(p) = \int_C \gamma(q) S^\gamma(p, q) ds, \quad (2.2.6)$$

ここで (2.1.8) より

$$\frac{\partial}{\partial n_q} S(p, q) = \frac{\partial}{\partial s_q} T(p, q), \quad (2.2.7)$$

(2.1.9) と (2.1.12) を使って

$$T(p, q) = S^\gamma(p, q), \quad (2.2.8)$$

これから (2.2.5) を部分積分して

$$\phi(p) = [\mu S^\gamma] - \int_C \frac{\partial \mu}{\partial s_q} S^\gamma(p, q) ds_q, \quad (2.2.9)$$

となり

$$\gamma = - \frac{\partial \mu}{\partial s} \quad \text{on } C, \quad (2.2.10)$$

であるから (2.2.9) の右辺が 1 項分だけ差がある。

(2.2.5) と (2.2.9) の差

は $\int_C \mu \gamma ds$ である。これは μ の境界値 γ の積分である。これは μ の境界値 γ の積分である。

2.3 遠場の漸近展開とコッチニ関数

(2.2.2) に (2.1.6) を代入すると遠場では

$$\phi(p) \xrightarrow{|x| \gg 1} i H^\pm(k) e^{-ky \mp i k x} - \int_{\pm \infty}^x u_1(p) + \begin{cases} x > 0, +i p \\ x < 0, -i p \end{cases} \quad (2.3.1)$$

2.12

$$H^\pm(k) = \int_C \left(\phi \frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} y \right) e^{-ky \pm i k x} ds, \quad (2.3.2)$$

$$\int_{\pm \infty}^x = \int_C \left[\phi \frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \left(y - \frac{1}{k} \right) \right] ds, \quad (2.3.3)$$

のようになって 遠場では振幅は コッチニ関数であらわされや2項は 1/2 ないポテンシヤルで、その係数は 後述のように 積分である。

このコッチニ関数は 遠場の 発散波 振幅、物体上のポテンシヤルと境界条件で表わされる、という意味で 遠場と近場の性質を結びつける関数といえる。

また $e^{-ky + i k x}$ を $\left(\begin{smallmatrix} x \text{ の 遠 方 面 へ 進 む } \\ \text{入 射 波} \end{smallmatrix} \right)$ と見、その散乱しポテンシヤルを ϕ_d^+ とすると

$$\frac{\partial \phi_d^+}{\partial n}(\rho) = - \frac{\partial}{\partial n} e^{-ky + i k x}, \quad \text{on } C, \quad (2.3.4)$$

となるから、これを (2.3.2) に代入すると 後述の可逆定理を使って、

$$H^+(k) = - \int_0 \Phi_a^+(p) \frac{\partial \phi}{\partial n} ds, \quad (2.3.5)$$

$$\Phi_a^\pm(p) = e^{-ikx \pm iky} + \phi_a^\pm(p), \quad (2.3.6)$$

即ち 物体が静止していて入射波を散乱している時の全速度ポテンシャルに境界条件をかけて積分したもつとなっているから、 ϕ による強制力あるいはモーメントを表現している事になる。
 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ に制限はないから、一般に物体が振動する場合についても 先の振動モードの被強制一般力を表現している。

2.4 境界積分方程式

境界値問題を解くには (2.2.2) 又は (2.2.4~6) の法線微分をとつてものを P on C とすれば積分方程式と見なせるからこれを解くのがよく使われる方法である。

今は (2.2.2) にわいて考えて見よう。

境界積分方程式は留数に注意して

$$\frac{1}{2}\phi(P) + \int_C \phi \frac{\partial S}{\partial n} \Big|_C ds = \int_C \frac{\partial \phi}{\partial n} S(P, Q) ds, \quad (2.4.1)$$

と書ける。

特に上下半平面 ϕ_2 , 散乱 ϕ_d^+ では

$$\int_C \left[\left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{\partial S}{\partial n} S - \frac{\partial^2 S}{\partial n^2} S \right] ds = 0$$

$$\int_C \left[e^{-ky + ikx} \frac{\partial S}{\partial n} S - S \frac{\partial}{\partial n} e^{-ky + ikx} \right] ds = 0$$

であるから まず (2.2.2) は

$$\left. \begin{aligned} \phi_2(P) &= - \int_C \bar{\Phi}_2 \frac{\partial S}{\partial n} S(P, Q) ds, \\ \bar{\Phi}_2 &= \phi_2 + y - \frac{1}{k} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.3)$$

$$\phi_d^+(P) = - \int_C \bar{\Phi}_d^+ \frac{\partial S}{\partial n} S ds, \quad (2.4.4)$$

$\bar{\Phi}_d^+$ は (2.3.6) による。

$$\int_C \left(k \frac{\partial S}{\partial n} - \frac{\partial^2 S}{\partial n^2} \right) ds + \int_{\Gamma} k \frac{\partial S}{\partial y} d\gamma = 0$$

となるから境界積分方程式は

$$\frac{1}{2}\overline{\Phi}_2(p) + \int_C \overline{\Phi}_2 \frac{\partial}{\partial n} S \Big|_C ds = y - \frac{1}{K},$$

$$\frac{1}{2}\overline{\Phi}_2^+(p) + \int_C \overline{\Phi}_2^+ \frac{\partial}{\partial n} S \Big|_C ds = e^{Ky + iKx},$$

(2.4.5)

と書ける。

いづれにしても フレドホルム の第2種方程式であるから

$$\frac{1}{2}\phi(p) + \lambda \int_C \phi \frac{\partial}{\partial n} S \Big|_C ds = 0, \quad (2.4.6)$$

なる 斉次方程式の固有値 λ が 1 でなければ 解を有する。

この固有値は (2.2.3) に より 計算されるのであるが

しかし self adjoint ($S(p, q) \neq S(q, p)$) ではない。

そこで S を 実部と 虚部 $\bar{P}$ に 分解すると (2.1.5) より

$$S(p, q) = S_c(p, q) - i S_s(p, q), \quad (2.4.7)$$

$$S_s(p, q) = e^{-K(y+y')} \cos K(x-x')$$

ϕ も

$$\phi = \phi_c - i \phi_s \quad (2.4.8)$$

と 実部, 虚部をわけて, 計算のために

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial n} = 0, \quad \text{on } C \quad (2.4.9)$$

とし (2.4.1) に代入すると上の2つの方程式となる。

$$\frac{1}{2}\phi_c(p) + \int_c \phi_c \frac{\partial S_c}{\partial n} \Big|_c ds = \int_c \frac{\partial \phi_c}{\partial n} S_c ds + \int_c \phi_s \frac{\partial S_s}{\partial n} ds,$$

$$\frac{1}{2}\phi_s(p) + \int_c \phi_s \frac{\partial S_c}{\partial n} \Big|_c ds = - \int_c \phi_c \frac{\partial S_s}{\partial n} ds,$$

(2.4.5)

そうしておく(自己条件の)
対称性を有するフレドホルム4の第2種
方程式であるから数学的難点はない。

1の式を整理するとわかるように ϕ_c と ϕ_s の間には
密接な関係がある。

2の式を端的に見るには $(\phi - \bar{\phi}) = -\frac{1}{2}\phi_s$ なる
関数の境界値問題を考えて見るとよい。

まず (2.4.4) を恒等すると

$$\frac{\partial}{\partial n}(\phi - \bar{\phi}) = 0 \quad \text{on } C, \quad (2.4.5)$$

無限遠方では (2.3.1) から

$$\begin{aligned} \phi - \bar{\phi} &\xrightarrow{x \gg 1} i H^+(k) e^{-ky - i k x} + i H^+ e^{-ky + i k x} \\ &\xrightarrow{x \ll -1} i H^-(k) e^{-ky + i k x} + i H^- e^{-ky - i k x} \end{aligned}$$

この左の第2項は原点に入射する波を表わして

いるから (2.3.6) を使ってそれを差引いておくと

$$\phi - \bar{\phi} - i\overline{H(k)}\Phi_a^+ - i\overline{H(k)}\Phi_a^- \xrightarrow{x \rightarrow 0} O(e^{+kx - i\epsilon x}) \quad (2.4.4)$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow 0} O(e^{+kx + i\epsilon x})$$

となって左辺は散乱ポテンシヤルであり, (2.4.5)の境界条件をもつ故, もし解が一意的なものは

$$\phi(p) - \bar{\phi}(p) = i\overline{H(k)}\Phi_a^+(p) + i\overline{H(k)}\Phi_a^-(p), \quad (2.4.5)$$

なる関係式がある。

これらの散乱ポテンシヤルがわかっているならば ϕ_s をあらためて求める必要はない。また逆に (2.4.1) を解く過程で散乱ポテンシヤルも求めている事は (2.4.5) によって明らかである。

境界値問題を解くもう一つの普及した方法は Ursell-
田方法であり, それは (2.3.1) からわかるように 遠く場では
波と波なしポテンシャルになっている事からも予想される
ように, 原点に波源を置き他は波なしポテンシャルで
近似する方法である。

波源ポテンシャルを $\phi_w(p)$ としよう。それは S で
そのコンチン図数を
のように定義しよう。
$$H_w^\pm(k) = 1, \quad \dots \quad (2.4.8)$$

また左右対称な浮体の対称運動を考慮して

$$H^+(k) = H^-(k) \equiv H(k), \quad \dots \quad (2.4.9)$$

とすれば

$$\phi(p) - i H(k) \phi_w(p) = \phi_m(p), \quad (2.4.10)$$

なる関数 ϕ_m は波なしである。

今新しく

$$S_m(p, Q) = \frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial y} \right) \log \frac{r'}{r}, \quad (2.4.11)$$

なる核関数を考えると

$$(K + \frac{\partial}{\partial y}) S'(p, Q) = \frac{1}{2\pi k} (K^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}) \log \frac{r'}{r}$$

$$\begin{matrix} \overline{y \rightarrow 0} \\ \text{or } y' \rightarrow 0 \end{matrix} 0, \quad \dots \quad (2.5.11)$$

とじて水面条件を満足する (2.212) を与え
 時と同様に

$$\phi_m(p) = \int_C \left[\frac{\partial \phi_m}{\partial n} S_m - \phi_m \frac{\partial}{\partial n} S_m \right] ds, \quad (2.5.12)$$

あるいは

$$m(p) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial n} - \phi_m \frac{\partial}{\partial n} \right) \left(\frac{r'}{r} \right) ds, \quad (2.5.13)$$

とかくと

$$\phi_m(p) = m(p) - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial y} m(p), \quad (2.5.14)$$

境界条件は (2.4.10) より

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial n}(p) = \frac{\partial \phi}{\partial n} - (H(k) \frac{\partial \phi}{\partial n})_w, \quad (2.5.15)$$

であるから 前同様 境界積分方程式を作つて
 解けばよい。ここで $H(k)$ は未知であるが
 それを決める事に

$$H_m^{\pm}(k) = \int_C \left(\phi_m \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \phi_m}{\partial n} \right) e^{k y \pm i k x} ds = 0, \quad (2.5.16)$$

なる条件を加えてあげればよい。

Ursell-田村法では (2.5.13) の $m(p)$ を 級数展開

(で) 解いているわけである。

(2.5.14) は存在しポラリニカル q -重形式である。

演算は水面条件の随伴形式である。

もう一つの考え方は $(2, 1, 4)$ を利用して $(2, 2, 2)$ から

$$K\phi(p) + \frac{\partial}{\partial y}\phi(p) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left[\frac{\partial \phi}{\partial u} - \phi \frac{\partial}{\partial v} \right] \left[(K + \frac{\partial}{\partial y}) \ell_y \frac{1}{r} + (K - \frac{\partial}{\partial y}) \ell_y \frac{1}{r'} \right] ds, \quad (2.5.17)$$

として波を遷出する方法がある。

この場合右辺は $\mathbf{A}$ の $\mathbf{0}$ となる正則行列であり、
特に $\mathbf{C}$ が γ 軸に一致、つまり平板の時便利である。

その1つ1つを $\mathbb{Z}$ (2,2,2) は

$$K\phi + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=0} = +P(x), \quad - - - (2.5.18)$$

 γ あく と

$$\phi(p) = - \int' P(x') S(p, Q) dx', \quad \dots (2.5/9)$$

となるから

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + K^2\right) \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{d^2 P(x)}{dx^2} - \frac{K}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{P(x')}{x-x'} dx', \quad (2.52)$$

9.53 在境界積分方程式を得る。

この積分方程式は帆の形を与えるために

$$F_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \rho \cdot \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{d^2}{dt^2} \right)$$

$$p + \frac{\kappa}{\pi} \frac{\partial}{\partial \kappa} \int \frac{p dx'}{\kappa - \kappa'} = 0$$

3-10-77 9 2 as above

2-欠元湯走下

その他 浅水、有限水深の場合は直交円数系が
あり、一方核円数は大変複雑なもので、^{物体のまわりの}それを利用
するのが便利であり、その時は領域を分割して

物体を含む領域では (2.2.1) を使うことになる。

もちろん (2.2.1) を最初から使って放射条件
境界条件で問題を解く事も出来るわけで
くれも便利なる場合がある。

この際、放射条件のかわりに 適当な節には
略収特異点をあいてもよい。

2.5 カとモーメント, 可逆定理

カとモーメントは (1.3.9), (1.3.10) で与えられる。

今の場合は (1.2.6) の圧力をそれぞれ 1:4 周に与え果とる。

$$F_{ij} = - \int_C p_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = - \int_C p_i \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \frac{\partial x_j}{\partial n} ds, \quad (2.5.1)$$

$$f_{ij} = \int_C \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds, \quad (2.5.2)$$

但し ϕ_i は i -mode の運動の振幅とある。

2.5.2, グリーンの定理より

$$f_{ij} = - \iint_D \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx dy + g \int_{\frac{1}{4}} \eta_i \eta_j dx, \quad (2.5.3)$$

となり, (1.4.6), (1.4.14) と同様に与える (1.4.14)

と少し異なるので modified Lagrangean と呼ばれる。

(2.5.3) の形から直ちに可逆定理

$$f_{ij} = f_{ji}, \quad (2.5.4)$$

を得る。

この定理では ϕ_i, ϕ_j は放射するポテンシャルで

なければならぬ。

そこで入射がある場合は散乱係数によって

$$\int_C \phi_d \frac{\partial \phi_i}{\partial n} ds = \int_C \phi_f \frac{\partial \phi_d}{\partial n} ds = - \int_C \phi_f \frac{\partial \phi_0}{\partial n} ds, \quad (2.5.5)$$

$$\phi_0 \text{ は } \lambda \text{ 固有値と } T \text{ である。 } \phi_0 = e^{-k y \pm i k x}$$

したがって、このように、 ϕ_0 は $\pm$ -モードは a を法線方向に

$$\bar{E}_j = + p g a \int_C (\phi_0 + \phi_d) \frac{\partial \phi_i}{\partial n} ds$$

となり、上式と (2.3.2) から、 $\bar{E}_j$ はスキントの公式をうける。

$$\bar{E}_j = - p g a H(k), \quad \dots \quad (2.5.6)$$

(2.5.4) は、物体が複数列個ある場合に拡張出来る。
相互結合モード

今は C_1, C_2 2つの物体があるものとし、

C_1 が i -mode の運動を、 C_2 が j -mode の運動を

しているものとする。また、速度ポテンシャルの境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_i}{\partial n} &= - \frac{\partial \chi_i}{\partial n} \text{ on } C_1, & \frac{\partial \phi_i}{\partial n} &= 0 \text{ on } C_2, \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial n} &= 0 \text{ on } C_1, & \frac{\partial \phi_i}{\partial n} &= - \frac{\partial \chi_j}{\partial n} \text{ on } C_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.5.8)$$

としよう。

グリーンの定理より

$$\int_{C_1 + C_2} \phi_i \frac{\partial \phi_i}{\partial n} ds = \int_{C_1 + C_2} \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n} ds$$

これから (2.5.8) より

$$\int_{C_1} \phi_i \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dS = \int_{C_2} \phi_i \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dS, \quad \dots (2.5.9)$$

となる。

つまり C_2 の j -mode の運動によって C_1 が受ける i -mode の力に

C_1 の i -mode の運動によって C_2 が受ける j -mode の力に
等しい。

C_1 と C_2 が充分離れているならば、互に他の運動による影響は (2.3.1) より進行波だけである。

よって (2.5.9) は (2.5.7) の π に移行する。

これがハスキントの図像の π である。

2.6. エネルギー一定理

元カ p が $\vec{v}$ で動く物体になす仕事の時間平均は

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) v(t) dt = \frac{1}{T} [p(\omega) \bar{v}(\omega) + \bar{p}(\omega) \bar{v}(\omega)]$$

であるから i -mode の運動が j -mode になす仕事の (2.6.1)

時間平均は

$$W_{ij} = \frac{1}{T} \int_0^T [p_i \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial n} + \bar{p}_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n}] ds$$

$$= -\frac{i p \omega}{4} \int_0^T (\phi_i \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial n} - \bar{\phi}_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n}) ds, \quad (2.6.2)$$

$$\text{但し} \quad \frac{\partial \phi_j}{\partial n} = -v_j,$$

これは (1.4.17) と (1.4.20) のように定義される

ラグランジヤンの虚部である事を意味してをり、

グリーンの定理によりこの積分は無限遠方の

検査面上に等価出束子か前節の場合と異なり

今は (2.3.1) からその上の積分は 0 にならない。

境界条件を規格化し、実数値をとるようにして

おくと次の積分がわかればよい。

$$f_{ij} - \bar{f}_{ij} = -\int_0^T (\phi_i - \bar{\phi}_i) \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds, \quad (2.6.3)$$

(2.4.7)を代入し (2.3.5)の表式を使えば

$$\frac{1}{i}(\bar{f}_{ij} - f_{ij}) = \sum_j H_j^+(x) \bar{H}_j^+(k) + \sum_j H_j^-(x) \bar{H}_j^-(k), \quad (2.6.4)$$

をうる。

特に 散乱ポテンシャルを含む積分からは有用な種類の関係が出て来る。

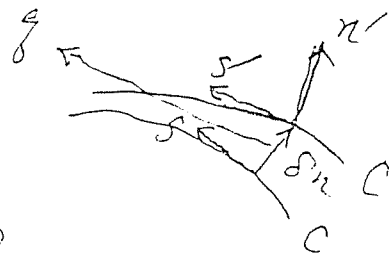
これは (2.4.7) の関係から予想出来る行である。

その式で 逆ポテンシャルの複素共轭値を考えたが、それはフーリエ変換の所に戻って考えると時間軸を逆にした運動を考える事であるから逆時間運動となづけると、(2.4.7)は逆時間運動を正時間運動で表現した事になる。

この時 前進速度があると 前進速度も逆に ^{（速度と）}なるけれども、数式上ではどちらとも考えられ、
^{流れの方向を反にした}
 もう一つ 逆流れ運動を考えおいた方がよい。

2.7 物体の微小変形

今物体 C が法線方向に僅かに δn だけ変形したとしよう。



この時 δn はいづらかで C' における
 ような変形は取扱かわないものとする。

C' に対する速度ポテンシャルを ϕ' とすると (2.2.2) により

$$\phi'(p) = \int_{C'} \left[\frac{\partial \phi'}{\partial n'} S - \phi' \frac{\partial S}{\partial n'} \right] ds', \quad (2.7.1)$$

一方 C に対する速度ポテンシャル ϕ は (2.2.2) の形

に表わされる積分路を C' としてもよいから

$$\phi(p) = \int_{C'} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n'} S - \phi \frac{\partial S}{\partial n'} \right] ds', \quad (2.7.2)$$

よって

$$\delta \phi = \phi' - \phi = \int_{C'} \left[\frac{\partial (\phi' - \phi)}{\partial n'} S - (\phi' - \phi) \frac{\partial S}{\partial n'} \right] ds, \quad (2.7.3)$$

ここで流れ関数を ψ' , ψ とすると

$$\frac{\partial \phi'}{\partial n'} - \frac{\partial \phi}{\partial n'} \Big|_{C'} = \frac{\partial}{\partial s'} (\psi' - \psi) \Big|_C$$

であるから図から $(\psi' - \psi)$ の右側の流量の差は

$$\psi' - \psi = g \delta n$$

$$g = - \frac{\partial \Phi}{\partial s} = - \frac{\partial}{\partial s} (\chi + \phi) \quad (2.7.4)$$

$\chi \equiv \chi_j$ とする。つまり C に沿う流速である。

物体に対する相対

それ故 系(5) $\bar{u} = 2$ の項を省略すると

$$\delta\phi = \int_C \left[\frac{\partial(\delta\phi)}{\partial n} \rho - \delta\phi \frac{\partial \rho}{\partial n} \right] ds, \quad \dots (2.7.5)$$

7" 境界条件は

$$\frac{\partial(\delta\phi)}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial s}(\rho \delta n), \quad (2.7.6)$$

となる。

これについては (2.5.2) を少し変形して

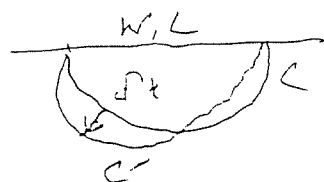
$$f_{ij}^* = - \int_C \bar{\Phi}_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds, \quad \dots (2.7.7)$$

よおければ

$$f_{ij}^* = f_{ij} - A_{ij}, \quad (2.7.8)$$

$$A_{ij} = \int_C x_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds, \quad \dots (2.7.9)$$

$$\text{他} \quad \begin{cases} \bar{\Phi}_i = x_i + \phi_i, \\ \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial n} = 0 \quad \text{on } C \end{cases} \quad (2.7.10)$$



と

$$f_{ij}^* = - \int_{C'} \bar{\Phi}_i \frac{\partial x_j}{\partial n'} ds + \int_C \nabla \bar{\Phi}_i \cdot \nabla x_j \rho n ds$$

7" あらうから

$$f_{ij}^{*'} = - \int_{C'} \bar{\Phi}_i' \frac{\partial x_j}{\partial n'} ds$$

とある。この $\frac{\delta}{\delta}$ を とすれば

$$\delta f_{ij}^* = f_{ij}^{*'} - f_{ij} = - \int_{C'} \delta \bar{\Phi}_i \frac{\partial \chi_j}{\partial n'} ds - \int_C \nabla \bar{\Phi}_i \nabla \chi_j \delta n ds$$

ここで

$$\delta \bar{\Phi}_i = \bar{\Phi}_i' - \bar{\Phi}_i$$

$$- \int_{C'} \delta \bar{\Phi}_i \frac{\partial \chi_j}{\partial n'} ds = + \int_{C'} \delta \bar{\Phi}_i \frac{\partial \phi_j'}{\partial n'} ds = \int_{C'} \phi_j' \frac{\partial (\bar{\Phi}_i' - \bar{\Phi}_i)}{\partial n'} ds$$

$$= - \int_{C'} \phi_j' \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial n'} ds = - \int_C \phi_j' \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial n} ds - \int_C \nabla \phi_j' \nabla \bar{\Phi}_i \delta n ds$$

$$= - \int_C \nabla \phi_j' \nabla \bar{\Phi}_i \delta n ds,$$

$$\therefore \left. \frac{\partial \bar{\Phi}_i'}{\partial n'} \right|_{C'} = \left. \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial n} \right|_C = 0$$

よって

$$\delta f_{ij}^* = - \int_C \nabla \bar{\Phi}_i \nabla \bar{\Phi}_j \delta n ds, \quad \dots \dots (2.7.10)$$

をうる。

特に $\bar{\Phi}_i = \bar{\Phi}_a^+$ とおくと (2.3.5) より

$$\delta H_j^+(K) = \int_C \nabla \bar{\Phi}_a^+ \nabla \bar{\Phi}_j \delta n ds, \quad (2.7.11)$$

左辺積分は 0 となつてゐるから 次のようにも書ける。

$$\delta H_j^+(K) = \int_C \frac{\partial \bar{\Phi}_a^+}{\partial s} \frac{\partial \bar{\Phi}_j}{\partial s} \delta n ds,$$

あるいは部分積分して水銀値は変わらないとすると

$$\delta H_j^+(k) = - \int_C \overline{\Phi}_d^+ \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \overline{\Phi}_d}{\partial s} \delta \eta \right) ds, \quad (2.7.12)$$

となり, (2.3.5) に (2.7.6) を代入した結果に等しくなる。

2.4節のべたように (2.4.5) による境界値問題を
とく時は 散乱ポテンシャルは常に求まっているので
上式により 微小変形による コツケン関数の変化は
容易に求められる。

例えは 近似的に コツケン関数が 0 となるように変形するには

$$\delta \eta = \varepsilon f(s) \quad (2.7.13)$$

と置くと

$$\delta H^+ = -\varepsilon I, \quad I = \int_C \overline{\Phi}_d^+ \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \overline{\Phi}_d}{\partial s} f \right) ds, \quad (2.7.14)$$

よるから, ε は 2 式で与えられる。

$$H^+ + \delta H^+ = 0 \quad \text{for } \varepsilon = \frac{H^+}{I}, \quad (2.7.15)$$

極小値原理理論では (2.7.12) の $\overline{\Phi}_d \rightarrow \phi_0$, $\frac{\partial \overline{\Phi}_d}{\partial s} = \psi$
と置く

$$\delta H = - \iint_C e^{\psi} \quad \text{と置く。}$$

2.8 境界値問題の積分原理

境界値問題を解くに当ってその近似度を評価

するには評価関数を定めねばならない。

例えば無限流体中では運動エネルギーのようなもの

をとるのが最も自然であろう。

今近似解を ϕ , 正解を f としその誤差のポテンシャルの運動エネルギーは

$$E = \frac{\rho}{2} \iint_D [\nabla(\phi - f)]^2 dx dy, \quad (2.8.1)$$

変分をとれば

$$\begin{aligned} \delta E &= \rho \iint_D (\nabla \delta \phi) \cdot \nabla (\phi - f) dx dy \\ &= -\rho \iint_D \delta \phi \Delta \phi dx dy - \rho \int_C \delta \phi \frac{\partial (\phi - f)}{\partial n} ds, \end{aligned} \quad (2.8.2)$$

となる。

$$\text{先ず } \phi \text{ とし } \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial n} \text{ on } C \quad (2.8.3)$$

なる比較関数群を(2.8.2)に代入

$$\Delta \phi = 0 \text{ in } D \text{ for } \delta E = 0, \quad (2.8.4)$$

これは Kelvin の定理に一致する。

しかし一般に調和関数の素解はよく知られていて境界条件を満たすようにそれを定める事の方が難かしいので数値解法的には調和関数である許容関数中を考える方が实际的であろう。

その時は (2.8.2) から

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial n} \quad \text{on } C \quad \text{for } \delta E = 0, \quad (2.8.5)$$

また 2.7.11 より

$$E = -\frac{\rho}{2} \int_C \left[\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} - 2\phi \frac{\partial f}{\partial n} + f \frac{\partial f}{\partial n} \right] ds, \quad (2.8.6)$$

であり右辺第3項は ϕ の変分をとれば"なくなるから

$$I = -\frac{\rho}{2} \int_C \left[\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} - 2\phi \frac{\partial f}{\partial n} \right] ds, \quad (2.8.7)$$

なる汎関数を考えても同じである。

また その時は

$$E \geq 0, \quad \text{---} \quad (2.8.8)$$

であるから $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ on C ならば ϕ は恒等的に

D の中で 0 となり、解の一意性が保証される。

我々の場合は評価関数としてラグランジアンを
とることにすると (2.5.2) の形に ^{modified} 定められるのでやはり
(2.8.7) の汎関数をとればよい。

それに水面があるのだから複雑ではあるが、
水面条件を満たす調和関数はよく知られているので
それを比較関数として変分をとれば (2.8.5) が成立。

しかしこの場合ラグランジアンは (2.8.8) のような
定符号性を有する事は証明出来ないので解の
一意性は保証出来ない。

電算機を用いる数値計算ではこの方法が
便利な場合はいらないが、 $K \rightarrow 0$ 又は ∞ の近似値
の推定、容器内の水の動揺の固有値の推定
に用いて便利である。
(リー・リッパ法)

2.9 解の一様性と Irregular frequency

前節にもふれたように自由水面がある場合、解の一様性の証明は少し面倒で個々の問題で証明された。以外に一般的に証明は成果類にはあまり見られない。

さてその要点は

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } C, \quad (2.9.1)$$

なる条件を満たす解が定数を除いて恒等的に 0 となる事を証明する事である。

その時まず

$$M = - \int_C \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = 0, \quad \dots (2.9.2)$$

又 (2.3.5) により

$$H^\pm(K) = - \int_C \Phi_d^\pm(p) \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = 0, \quad (2.9.3)$$

であるから、恒等的に 0 でない ϕ が存在するとすると、
水面で 0 となる関数 m によって
それは m なる ϕ (2.5.14) のように表わされる。

m なるポテンシャルは (2.5.14) のように表わされ、また
今の場合境界条件 (2.9.1) は斉次であるから定係数
が整数 m の時は、それで割って ϕ を実関数と見て
よいので以下 そのように扱う。

(2.9.2) は

$$\begin{aligned}
 M &= \iint_D (\nabla \phi)^2 dx dy - K \int_{\bar{H}} \phi^2 dx \\
 &= \iint_D \left[(\nabla m)^2 + \frac{1}{K^2} (\nabla m_y)^2 - \frac{2}{K} \nabla m \nabla m_y \right] dx dy \\
 &\quad - \frac{1}{K} \int_{\bar{H}} (m_y)^2 dx
 \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}
 2 \iint_D \nabla m \nabla m_y dx dy &= \iint_D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla m)^2 dx dy \\
 &= - \int_C (\nabla m)^2 \frac{\partial y}{\partial n} ds - \int_{\bar{H}} (m_y)^2 dx, \\
 \therefore (\nabla m)^2 \Big|_{y=0} &= m_y^2
 \end{aligned}$$

であるから なるから

$$M = \iint_D \left[(\nabla m)^2 + \frac{(\nabla m_y)^2}{K^2} \right] dx dy + \frac{1}{K} \int_C (\nabla m)^2 \frac{\partial y}{\partial n} ds, \quad (2.9.4)$$

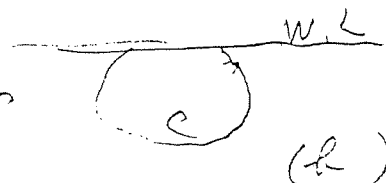
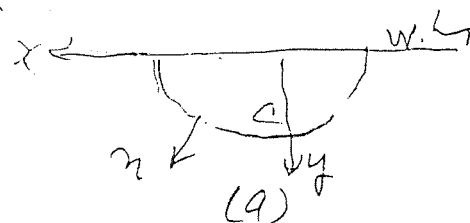
それ故に右図の (a) のような場合は

$$\frac{\partial y}{\partial n} > 0 \quad \text{で} \quad M \geq 0, \quad (2.9.5)$$

となるが (b) のような場合でも

では保証出来ない。

実際このような場合 附加の量か



同になる同は数値方程式がある事はよく知られていて
 して (4) 図の場合は (2.9.2) により m は恒等的に
 0 以外の解を有する一意性は ~~保証~~ される。

以上の証明は Fritz John の証明に略々等しい。

そこで (4) 図のような場合又は没水圧が与えられた
 本になるが、これを ^{今度は} (2.4.1) の境界積分方程式の解の
 一意性の問題とて考えよう。

この積分方程式の核関数は対称で (2.4.5) の
 形とすれば更に自己随伴である。

それ故積分方程式論により、この齊次方程式が
 恒等的に 0 でなければ一意性を有する。

$$\frac{1}{2}\phi(p) + \int_c \phi(q) \frac{\partial S_c}{\partial n} ds_q = 0, \quad \dots (2.9.5)$$

 及び没水圧ではポテンシャル論の同じ問題
 の手法に従って解のない事が証明出来るように
 ある。(Kostyukov)

しかし浮体では特定の同は数で解を有す
 事が太松によって示された。

この問題には厳密計算に解が不定となるので
 Irregular frequency の問題として嫌われている。
 この現象はその周に於ては内部領域の水が
 固有振動を起す事に起因する。

今内部領域の速度ポテンシャルを $\phi_i(p)$ とすると
 (2.2.2) と同様に

$$\int_0^1 \left[\phi_i \frac{\partial S}{\partial n} - \frac{\partial \phi_i}{\partial n} S \right] ds = \phi_i(p) \ln D \quad (2.9.6)$$

$$= 0 \quad \ln D$$

境界条件を $\frac{\partial \phi_i}{\partial n} = 0$ on C , (2.9.7)

として境界積分方程式を作ると今は法線が境界
 外に向いているので結果 (2.9.5) に一致する。

それ故 (2.9.5) は内部の固有値方程式と見なして
 もよい。

(か) (2.9.6) を式より D の外つまり D では

$$\phi_i = 0 \quad \text{on } C \in D, \quad \dots (2.9.8)$$

で $\frac{\partial \phi_i}{\partial n}$ は C の内外で連続故に (2.9.7) により 0,

それ故 (2.2.2) により 固有値数 ϕ_i による外部ポテン
 シヤルは 0 となり、解の一義性は保たれる。

吹出し分布としても同じ周波数で同じ現象があらわれる。

つまり (2.9.7) の条件に対する解であるから、同じ境界条件に対して解が定まらないという事である。

それを解く方法もいろいろ考えられているが、このようにして判断がかわるので計算上厄介な問題である。

この問題が全く出て来ない方法としては 級数展開に基盤をおく Ursell-田口法、領域分割法、Young の方法等があるが最後の方法では別に水面をどこまで考えるかで少々問題が起きる。

2.10 Kramers-Kronig の関係

変換 (1.2.1), (1.2.3) において ω を複素平面で考えよう。
 そうすると $\Im(\omega) < 0$ では $\bar{F}(\omega)$ は正則で, (1.2.5) より

$t=0$ まで $f(t)$ が 0 となるには pole があつてはならない。

$\bar{F}(\omega)$ は ω -平面の下半分で正則である。

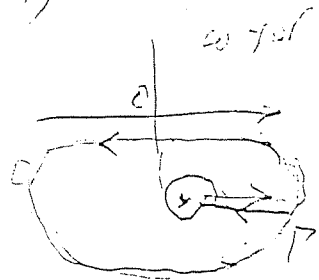
したがってコーシーの定理より

$$\bar{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \oint_P \frac{\bar{F}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (2.10.1)$$

P を実軸にとり, ω を実軸に

近づけると

$$\frac{1}{2} \bar{F}(\omega) = \frac{P.V.}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{F}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'$$



$$\text{今} \quad \bar{F}(\omega) = \bar{F}_R(\omega) + i \bar{F}_I(\omega), \quad \dots (2.10.2)$$

とすると上式から

$$\bar{F}_R(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{F}_I(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega' \bar{F}_I(\omega') d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}, \quad (2.10.3)$$

$$\bar{F}_I(\omega) = +\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\bar{F}_R(\omega') d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}, \quad \dots (2.10.4)$$

これは Kramers-Kronig の関係と呼ばれる。

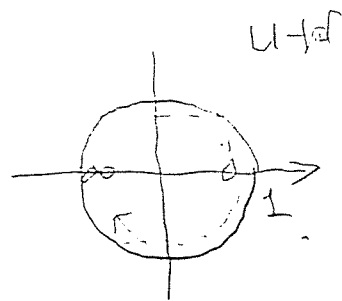
なお $\bar{F}_R(\infty)$ が有限値をとる場合もその値だけ

差引いて $\bar{F}_R(\infty) = 0$ とし考える。

これから $H(\omega)$ の実部虚部のどちらかがわかっていれば
他方が計算出来るわけであるが (2.10.3) または (2.10.4)
の種分は主値をとるので少々面倒である。

そこで今適当な定数 C を選べ

$$u = \frac{iC + \omega}{iC - \omega}, \quad \omega = \frac{C}{i} \frac{1-u}{1+u}, \quad (2.10.5)$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{実軸上では} \quad \omega = C \tan \frac{\theta}{2} \\ \text{とよくと} \quad u = e^{-i\theta} \end{array} \right\} (2.10.6)$$

となり, ω の下半面は u -平面の単位円の内部に
寫像される。

そこで $H(\omega)$ に (2.10.4) のようになればならぬ

故に 実係数 a_n より

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n, \quad \dots (2.10.7)$$

と展開出来る。

よって (2.10.2) のように分解すれば

$$\left. \begin{array}{l} H_C(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta \\ H_S(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin n\theta \end{array} \right\} \dots (2.10.8)$$

のようになる, 実部と虚部の関係は明瞭である。

(2.10.3), (2.10.4) は (2.10.6) の変換をするとポアソソニの
(2-重の公式)
公式と等しい。

計算として左辺は

$$\bar{F}_S(\omega) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \int_{-\pi}^{\pi} \bar{F}_C(\omega) \cos n\theta d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \int_0^{\pi} \bar{F}_C(\omega) \cos n\theta d\theta, \quad (2.10.9)$$

のように実行すればよい。

また $\bar{F}(\omega)$ の対数をとってもやはり

$$\log \bar{F}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \ln u^n, \quad (2.10.10)$$

と展開出来ることを考えるから

$$\begin{aligned} \log \sqrt{\bar{F}_C^2 + \bar{F}_S^2} &= \sum_n \ln \cos n\theta, \\ \tan^{-1} \frac{\bar{F}_S}{\bar{F}_C} &= \sum_n \ln \sin n\theta, \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \log \sqrt{\bar{F}_C^2 + \bar{F}_S^2} \\ \tan^{-1} \frac{\bar{F}_S}{\bar{F}_C} \end{aligned}} \right\} (2.10.11)$$

となり、ゲインと位相も一斉にわかれば伝方がわかる。

いづれにしても $\bar{F}(\omega)$ の実部と虚部は互に独立でない事を知る必要がある。

3. 時間領域の理論

従来時間領域での研究は少ないけれど、動揺振幅が小さくて^{物体}境界の平均位置で境界条件が指定出来る場合は周波数領域の解をフーリエ逆変換すればよく、境界値問題も周波数領域の方が簡便で実績も多く実用的であると考えられる。

しかし物体境界が大きく動く場合や、^{物体が}氷面に突入、脱出する問題などではやはり時間領域の問題を解かざるを得ない。

つまり^{そのような時は}物体境界条件が平均位置で指定出来る所謂非線型となる場合である。

しかしそのような時でも氷面上昇は飛沫のような特別な^{局所的}現象（これは物体のそばで起こる）を除けば一般に小さくて線型化してもよいように考えられる。

以下そのような場合について述べる。

3.1 基本特性

(2.1.1) の核を フーリエ 逆変換 して

$$G(P, Q; t) = -\frac{\delta(t)}{2\pi} \log(r/r') + M(P, \bar{Q}; t), \quad (3.1.1)$$

$$M(P, \bar{Q}; t) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_0^{\infty} \frac{e^{-k_2(y+y')}}{k_2 - K + \mu_i} \cos k_2(x-x') dk_2, \quad (3.1.2)$$

この W は

$$M(x, y; t) = \frac{g}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{gk_2 - \omega^2 + \mu_i} \int_0^{\infty} e^{-k_2 y} \cos k_2 x dk_2, \quad (3.1.3)$$

とも書ける。

$$(3.1.2) \quad \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.1.4)$$

は Dirac の δ 関数である。(3.1.3) を ω について分解すると。

$$M(x, y; t) = \frac{g}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-k_2 y} \cos k_2 x \frac{\sin(\sqrt{g^2 k_2^2 - \mu_i^2} t)}{\sqrt{g^2 k_2^2 - \mu_i^2}} dk_2, \quad \text{for } t > 0$$

$$= 0 \quad \text{for } t < 0 \quad (3.1.5)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - g^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) M(x, y, t) = 0, \quad (3.1.6)$$

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^4 + g^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} M(x, y, t) = 0$$

$$M(x, y; t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} -\frac{g}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^n \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$\rightarrow 0, \quad (3.1.7)$$

すな

$$M(x, y; t) = \frac{g}{\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{i e^{-i\zeta^2}}{\sqrt{g\zeta}} \int_{-\zeta}^{\zeta} e^{iu^2} du \right], \quad (3.1.8)$$

$$\text{但し } \zeta = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{z}} t, \quad z = x + iy,$$

とも書け、これは複素変数のフレネル積分である。

$$M(x, y; t) \xrightarrow{|\frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{z}} t| \gg 1} \frac{g}{\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{i\sqrt{i\pi}}{2\sqrt{g\zeta}} e^{-i\zeta^2} \right], \quad (3.1.9)$$

なお M の共役関数を N とすると

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}, \quad (3.1.10)$$

$$N(x, y, t) = \frac{g}{\pi} \int_0^\infty e^{-k^2 y} \sin kx \frac{\sin \sqrt{g} k t}{\sqrt{g} k} dk, \quad (3.1.11)$$

$$= 0 \quad \text{for } t < 0$$

となり、(3.1.6) の微分方程式を満たす。

又

$$M + iN = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{i\pi z}} e^{-i\zeta^2} \int_{\zeta}^{\infty} e^{iu^2} du, \quad (3.1.12)?$$

なお

$$\int_0^\infty M(x + ut, y; t) dt = -\frac{1}{\pi} \log r - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-k^2 y} \cos kx}{k - \gamma + i0} dk - i e^{-\gamma y - i\gamma x}, \quad (3.1.13)$$

$$\text{但し } \gamma = g/u^2,$$

3.2 速度ポテンシャルの表現

まず速度ポテンシャルは空間と時間数であるから、各瞬間について (2.2.1) が成立つ。

しかし今はこれだけでは何れは境界積分方程式は作れない。
 $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ (これを空間と時間数) について同様な式を作り、併立させて作る事になる。

直接に ϕ を表現するには (2.2.2) を フーリエ変換して (3.1.1) を利用する。

1.2 節で用いた手法で

$$\phi(p, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{C(\tau)} \left[\frac{\partial \phi(q, \tau)}{\partial n} G(p, q, t-\tau) - \phi \frac{\partial G}{\partial n} \right] ds(q), \quad (3.2.1)$$

あるいは G を分割して

$$\begin{aligned} \phi(p, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{C(t)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \right) k_q \frac{r'}{r} ds(q) \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{C(\tau)} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \right] M(p, q, t-\tau) ds(q), \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

なお $t=0$ まで水は静止しているものとする。

すると先ず (3.1.1) より

$$\lim_{t \rightarrow +0} \phi(p, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{C(0)} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \right]_{t=0} k_q \frac{r'}{r} ds, \quad (3.2.3)$$

$M(p, \bar{q})$ は物体上, 水面内ル 特異性を有しないから
(3.2.2) は このまゝ (3.2.3) の 初期条件 と 与えられた境界条件
により 境界積分方程式 として 使え 時間をあつて
解いてゆけばよい。

特に 境界 C が 時間 t に 依存しないならば そのフーリエ
変換は (2.2.2) であり, その解から (1.2.19) の ような
イムパルス ポテンシヤル $\phi^p(p; t)$ を求め, それを積分して
(1.2.18) の ように 表現出来る。

(3.2.2) では 境界 C が 動いてもよく Havelock は
これを使って 一般流れのポテンシヤルを導いている。

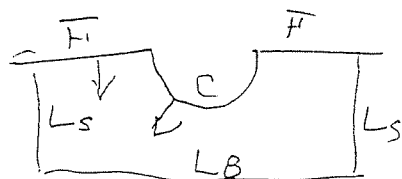
(3.1.13) を用いて (3.2.2) を積分すれば 求められる筈
であるが (3.1.13) の積分の際 対数項があらわれて
線分不定な要素が懸念される。

この点から 所謂 線積分項の問題として 懸念され
てゐる。

元来, 自由水面は 動いてゐるので 何等かの定ま
り が 侵入する 恐れは 常に ある。

ここで各段階において例えば"水量は一定である"という条件を check しておけばよいと考えられる。

今 自由表面および C から
の流量は



$$Q = + \int_{C+H} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = - \int_H \frac{\partial \phi}{\partial y} dx + \int_C \frac{\partial \phi}{\partial n} ds$$

$$= + \int_H \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} dx = \int_C v_n(t) ds, \quad \dots (3.2.4)$$

ガウスの定理より

$$Q = - \int_{Ls+LB} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds, \quad \dots$$

となるが Ls からはいはいだけがでて行くといふのは"平均に
おいて流出量はなく, また LB からも明らかでない。

よって

$$Q = 0$$

ゆえ

$$\int_H \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} dx = + \int_{C(t)} v_n(t) ds, \quad \dots (3.2.5)$$

あるいは + で積分して

$$\int_H [\eta(x, t) - \eta(x, 0)] dx = \int_0^t dt \int_{C(t)} v_n(t) ds, \quad (3.2.6)$$

最前の一様速度で前進する場合では各瞬間で

$$\int_{C(t)} v_n(t) dS = 0, \quad (3.2.7)$$

と考えられるから

$$\int_H \frac{\partial \phi}{\partial y} dx = - \int_H \frac{\partial \phi}{\partial y} dx = [\eta] = 0, \quad (3.2.8)$$

となって、~~無~~限上、下流で $\eta = 0$ とすると、 C から水面を切る点でも $\eta = 0$ とする必要がある、

実際、そのようにして解が確定する。

(3.2.7) は自明のようであるが (3.2.6) のように理解すれば

(3.2.8) は必ずしも 0 でなくともよい。

その時 (3.2.6) で 静止時の水面変位の積分と、

現在のそれには差があることになる。

こゝに アルキメデスの原理の拡張定理があり、~~それは~~
(~~理想化しない実際の水面変位で~~)

はその積分に密度をかけたものが浮力に等しい。

3.3 遠場フラツフ式造波機，入射波

これ以後は再び元に戻って動揺振りは微小量，
物体平均位置は変わらないものとしよう。

速度ポテンシャルは (1.2.16)

$$\phi(p, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \bar{\Phi}(p; \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.3.1)$$

のように書かれ，また

$$\phi(p, t) = \int_0^t v(\tau) \dot{\phi}(p; t-\tau) d\tau, \quad (3.3.2)$$

とも表ける。

遠場では (2.3.1) を (3.3.1) に代入して

$$\phi(p, t) \xrightarrow{p \gg 0} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) H^{\pm}(k) e^{-iky \mp i(kx + i\omega t)} d\omega, \quad (3.3.3)$$

$$2.12 \quad k = \omega|\omega|/g$$

$$H^{\pm}(-k) = \overline{H^{\pm}(k)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{---} \\ -60 \end{array} \right\} \quad (3.3.4)$$

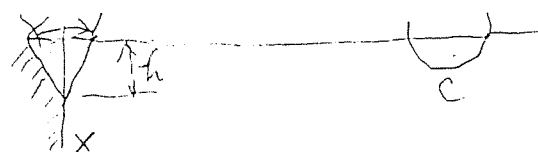
特に水面変位は

$$\zeta(x, t) = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{y=0} \xrightarrow{\quad} -\frac{1}{2\pi g} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) H^{\pm}(k) e^{\mp i(kx + i\omega t)} \omega d\omega, \quad (3.3.5)$$

具体例として水槽端のフラツフ式造波機を考えよう。

周波数領域で (2.2.2) より

$$\bar{\Phi}(p, \omega) = 2 \int_C \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds, \quad (3.3.6)$$



$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \begin{cases} (1 - \frac{y}{h}) & \text{for } 0 < y < h \\ 0 & \text{for } y > h \end{cases} \quad (3.3.7)$$

(2.3.2) のフツチニ関するは 今ば x の 面 の 方 向 の は だ け 必 要 で

$$\begin{aligned} H_F(k) &= -2 \int_0^h e^{-ikX} e^{-ky} (1 - \frac{y}{h}) dy \\ &= -\frac{2}{k} e^{-ikX} \left[1 - \frac{1 - e^{-kh}}{kh} \right] \\ &\equiv e^{-ikX} H_F(k) \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

と お い て お く と (3.3.5) に よ り x の 面 方 向 に 送 る は は

$$\psi_F(x, t) \rightarrow -\frac{10}{2\pi g} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) H_F(k) e^{-ik(x-x) + i\omega t} \omega d\omega, \quad (3.3.9)$$

2 点 を 重 疊 経 分 に 送 丁 と

$$\psi_F(x, t) \rightarrow \int_0^{\infty} v(\tau) W(x, t-\tau) d\tau, \quad (3.3.10)$$

$$W(x, t) = -\frac{1}{2\pi g} \int_{-\infty}^{\infty} H_F(k) e^{-ik(x-x) + i\omega t} \omega d\omega, \quad (3.3.11)$$

7" 2 点 は ϕ^8 の 作 る は 2" 有 る。

一般に x の正方向から入ってくる波は (3.3.9) の形とす。

今これを

$$\zeta_w(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{iKx + i\omega t} d\omega, \quad (3.3.12)$$

と表わす事にすると速度ポテンシャルは

$$\phi_w(x, t) = \frac{g}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-iKy + iKx + i\omega t} \frac{d\omega}{\omega}, \quad (3.3.13)$$

となる。

この速度ポテンシャルによる位では

$$A(\omega) = -\frac{g}{\omega} U(\omega) H_F(K) e^{-iKx}, \quad (3.3.14)$$

で (3.3.12) に代入して $x=0$ とすると

$$\zeta_w(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.3.15)$$

であるから $A(\omega)$ は 原点における水面変位のフーリエ変換

と考えられる。

$$\text{今} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{iKx + i\omega t} d\omega = \int_0^{\infty} \cos(Kx + \omega t) d\omega$$

$$= D(x, t), \quad (3.3.16)$$

とかくと

$$\zeta_w(x, t) = - \int_0^{\infty} \zeta_w(0, \tau) D(x, t-\tau) d\tau, \quad (3.3.17)$$

と表わされ、 D は フレネル積分で表わされる。

3.4 カとモーメント, 可逆定理

i モードの速度振動 $\dot{U}_i(\omega)$ なる強制振による j モード

一般力 F_{ij} は (2.5.1) をフーリエ変換して

$$F_{ij}(t) = \frac{\rho_i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \dot{U}_i(\omega) f_{ij}(\omega) d\omega, \quad \dots (3.4.1)$$

より j モードの速度振動 $\dot{U}_j(\omega)$ で i モードの一般力は

$$\bar{F}_{ji}(t) = \frac{i\rho_j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \dot{U}_j(\omega) f_{ij}(\omega) d\omega, \quad (3.4.2)$$

したがって

$$\dot{U}_{ij}(\omega) = \int_0^{\infty} \dot{U}_i(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (3.4.3)$$

で今

$$\bar{F}_{ij}(t) = \frac{\rho_j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_{ij}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.4.4)$$

とおくと可逆定理 (2.5.4) により

$$F_{ij}(t) = \int_0^t \dot{U}_i(\tau) \bar{F}_{ij}(t-\tau) d\tau = \int_0^t \dot{U}_i(\tau) \bar{F}_{ji}(t-\tau) d\tau \quad (3.4.5)$$

$$\bar{F}_{ji}(t) = \int_0^t \dot{U}_j(\tau) \bar{F}_{ji}(t-\tau) d\tau, \quad (3.4.6)$$

となり $\bar{F}_{ij}(t) = \bar{F}_{ji}(t)$ より $\dot{U}_i(t) = \dot{U}_j(t)$, (3.4.7) を得る。

これは又 2つ以上の物体の間に成立つ事は 2.5節で述べた通りである。

波強制力に於いても、入射はかゝ (3.3.12) のように表わされたとすれば (2.5.7) を逆変換して、

$$E_j(t) = -\frac{pq}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) H(k) e^{i\omega t} d\omega, \quad \dots (3.4.8)$$

ならば

$$E_j^{\delta}(t) = -\frac{pq}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(k) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.4.9)$$

なる関数を導入し、(3.3.15) を考慮すると

$$\bar{E}_j(x) = \int_0^{\infty} \gamma_{\omega}(0, \tau) \bar{E}_j^{\delta}(t-\tau) d\tau, \quad (3.4.10)$$

これを又 (3.3.17) を使って 任意の点 x の位置により表現する事も出来る。

可逆性の観点からは (3.4.8) と (3.3.5) を較べて

$$-pqA(\omega) = \frac{\omega}{g} U(\omega) e^{fikx}, \quad \dots (3.4.11)$$

ならば

$$\gamma(x, t) \Big|_{t \gg 1} \doteq \bar{E}_j(x), \quad (3.4.12)$$

これが非定常の場合のハスキットの定常値である。

3.5 エネルギー

浮体が時刻 t までに及ぶ仕事は 静水圧を除いて

$$W(t) = - \int_0^t dt \int_C p \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = - \rho \int_0^t dt \int_C \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds, \quad (3.5.1)$$

グリーン定理と水面条件から

$$\begin{aligned} - \rho \int_C \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds &= \rho \iint_D \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \nabla \phi \, dx \, dy - \rho \int_H \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial y} \, dx \\ &= \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \iint_D (\nabla \phi)^2 \, dx \, dy + \frac{\rho g}{2} \frac{d}{dt} \int_H \eta^2 \, dx, \\ &= \frac{d}{dt} (T + V), \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

特に

$$W(t) = [T + V]_{t=0}^t \quad (3.5.3)$$

こゝに T は運動エネルギー, V はポテンシャルエネルギー

特に

$$W(\infty) = - \rho \int_0^\infty dt \int_C \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds$$

$$= - \frac{\rho}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \, d\omega \int_C \overline{\Phi(\omega)} \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial n} ds$$

$$= \frac{\rho}{2\pi i} \int_0^\infty \omega \, d\omega \left[\int_C \left(\overline{\Phi(\omega)} \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial n} - \overline{\Phi} \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial n} \right) ds \right], \quad (3.5.4)$$

となるから (2.6.3) (2.6.4) により これは放射波のみ

持ち去るエネルギーとなる。

フーリエ変換の定理は

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t+\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) \overline{F_2(\omega)} e^{-i\omega\tau} d\omega, \quad (3.55)$$

であるから 3.3.5) × 3.3.12) より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta_w(x, \tau) \eta_w(x, t+\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \overline{A(\omega)} e^{-i\omega t} d\omega, \quad (3.56)$$

これは 波 統計 でよく知られた関係で コレログラム

の フーリエ変換は エネルギー スペクトル 密度に 等しい 事
を示す。

同様な式が (3.3.5) に対しても 成立つ。

3.6 運動方程式と過渡応答

簡単な系にと下ゆれを考へよう。

運動方程式は周は数面で見えるのが簡単で

今入射波が (3.3.12) で与えられるならば 1 はの力は (3.4.8)

のようにあるから

$$(-\omega^2 M + i\omega B)Y = +i\omega^2 f_{ij} Y + i\omega A(\omega)H(k)$$

$$\text{今 } Z(\omega) = i\omega M - \frac{i\omega B}{\omega} - i\omega f_{ij}, \quad (3.6.1)$$

とおくと

$$i\omega Y Z = -i\omega A(\omega)H(k), \quad (3.6.2)$$

となり

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= -i\omega \frac{A(\omega)}{Z(\omega)} H(k), \\ y(t) &= \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\omega)}{Z(\omega)} H(k) e^{+i\omega t} d\omega, \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

をうる。

また 1 はがなく 従って (3.6.2) の右辺が 0 となる。

$$\text{最初 } y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad (3.6.4)$$

として、つまり 押さえていて $t=0$ で放すならば

$$Y(\omega)/y_0 = \frac{Z(\omega) + i\omega B/\omega}{i\omega Z(\omega)}, \quad (3.6.5)$$

$$y(t)/y_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z(\omega) + i\omega B/\omega}{\omega Z(\omega)} e^{+i\omega t} d\omega,$$

この時は (3.3.5) によって、浮体と離れた所の水面変位

$$\zeta(x, t) \Rightarrow -\frac{PB}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H^*(k)}{\omega Z(\omega)} e^{-ikx + i\omega t} d\omega, \quad (3.6.6)$$

$$U(\omega) = i\omega Y - Y_0$$

それ故に式は (3.6.3) において $A(\omega) = 1$ つまりパルス波を浮体に与えた時の浮体の上下ゆれに等しい。

今度はパルス波を起して浮体の運動をフーリエ変換して波浪中の応答周数を実験的に求めまいるか、上式によれば発散性によって求まる事になる。

また上式を ω の大きい所で漸近展開すると

$$\zeta(x, t) \xrightarrow{\frac{gt^2}{4x} \gg 1} \frac{B Y_0 g^{\frac{3}{2}} t^2}{4\sqrt{2\pi} x^{\frac{5}{2}}} \operatorname{Re} \left[\frac{H^*\left(\frac{g^{\frac{1}{2}} t}{4x^{\frac{1}{2}}}\right)}{Z\left(\frac{g^{\frac{1}{2}} t}{4x^{\frac{1}{2}}}\right)} e^{\frac{i g t^2}{4x}} \right], \quad (3.6.7)$$

となる。

つまり波浪の時間的変化の envelope は波浪中の周数応答になっている。

参考文献

- 1) 造船協会 60周年記念双書 水2巻
- 2) Stoker, J. J. "Water Waves" The mathematical theory with applications, Interscience Publishers, New York, 1957
- 3) Wehausen, J. V. & Laitone "Surface Waves" Handbuch der Physik Bd. 9, Springer, 1960
- 4) Havelock, T. H. "Collected Papers"
- 5) Courant und Hilbert, "Methoden der Mathematischen Physik" Bd. 1 & 2, Springer, 1931
- 6) Morse and Feshbach, "Methods of Theoretical Physics" Part I & II, McGraw-Hill, 1953
- 7) Bergman & Schiffer "Kernel functions and Elliptic Equations in Mathematical Physics" Academic Press, 1953
- 8) Titchmarsh, E. C. "Introduction to the theory of Fourier Integrals" 2nd. ed. Oxford, 1937
- 9) Kellogg, O. D., "Foundation of Potential theory" New York, 1929
- 10) Witham, G. B., "Linear and Nonlinear Waves" John-Wiley & Sons, 1973.

耐航性シムポジウム Text.

東京国教大

- B1) "波の中の船の横揺れ運動の理論について" 及び同種報
防大理工学研究报告 第3巻1号昭和40年5月, 第3巻3号, 昭和41年
- B2) "船体運動のイタリス応答とその発散について"
同上 第11巻2号, 昭和48年9月
- B3) "On the Theory of Wave-Free Ship Forms"
防大英文要報, vol. 7, No. 1, June, 1967
- B4) "On Boundary Value Problems of an Oscillating
Body Floating on Water." 同上 vol. 8, No. 1, Oct. 1968
- B5) "水面で動揺する二次元平板に働く流体力について" 及び同種報
関西造船協会誌 154号昭和49年, 163号昭和51年, 小松 茂著
- B6) "逆時間速度ポテンシャルについて"
同上 159号 昭和50年
- B7) "変位ポテンシャルについて"
同上 169号 昭和53年
- B8) "水の波の理論における内部問題について"
西部造船会報 57号 昭和54年, 経塚 茂著