

# 振動しながら走る平板の運動力について (2次元問題)

別紙正和

1. 速度ポテンシャルと境界条件
2. Reverse flow potential と相反性
3. 力について
4. 境界値問題と変分原理

附録 A 核函数について

" B 離散値

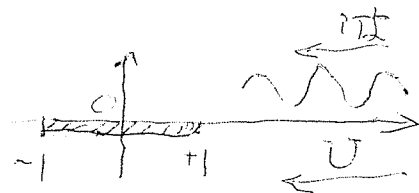
" C 極限の場合

参考文献

|         |       |     |         |
|---------|-------|-----|---------|
| 荒田,     | 逆協論文集 | 89号 | (昭和26年) |
| "       | "     | 92  | (昭和28年) |
| "       | "     | 94  | (29)    |
| Haskind |       |     |         |

1. 速度ポテンシャルと境界条件.

右図の如き座標系をとると  
ベルヌーイの式は



$$\frac{1}{\rho} p(x, y, z) = \phi_t(x, y, t) - U \phi_x(x, y, t) - g y, \quad (1.1)$$

水面変位を  $\eta$  とすると, 水面が連続な水面を形成するとは

$$\frac{D}{Dt} \{ \eta - \eta(x, t) \} = 0, \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u-U) \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y},$$

であるから 高次の項を省略して

$$\phi_y(x, 0, t) = - \left( \frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta(x, t), \quad (1.2)$$

水面では (1.1) は

$$\frac{1}{\rho} p(x, 0, t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi(x, 0, t) - g \eta(x, t), \quad (1.3)$$

上の2式から

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{p(x, 0, t)}{\rho} = \left( \frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \phi(x, 0, t) + g \phi_y(x, 0, t). \quad (1.4)$$

★ 解法の方程式は

$$\begin{aligned} \eta_I(x, t) &= a e^{i K x + i \omega t} \\ &= \frac{1}{g} \left( \frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_I(x, 0, t), \end{aligned} \quad (1.5)$$

$a$  は波片振幅,  $K = \omega_0/g = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$ : 波長,  $\omega_0$  の角周波数  
 $\omega$  は出合角周波数とすると

$$\begin{aligned} \text{さらに} \quad \omega &= K U + \omega_0 = \omega_0^2 \frac{U}{g} + \omega_0 \\ \omega_0 &= \frac{1}{2U} \left\{ -g \pm \sqrt{g^2 + 4 U \omega} \right\} \end{aligned} \quad (1.6)$$

4つの関係があり, 対応する速度ポテンシャルは

$$\phi_I(x, y, t) = \frac{g a}{i \omega_0} e^{K y + i(K x + \omega t)} \quad (1.7)$$

である。

すべての量が正弦的に変化するとして、

$$f_{unc}(x, y, t) \rightarrow \text{Re} \{ f(x, y) e^{i\omega t} \}, \quad (1.8)$$

のようにおけるとする。(この  $f(x, y)$  は左辺のフーリエ変換である)  
 与えられた方程式は、

$$(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \phi(x, 0) - g \eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} p(x) & \text{for } |x| < 1 \\ 0 & \text{for } |x| > 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\phi_y(x, 0) = - (i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \eta(x), \quad (1.10)$$

$$(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x})^2 \phi(x, 0) + g \phi_y(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{2} (i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) p(x) & \text{for } |x| < 1 \\ 0 & \text{for } |x| > 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

のようにする

境界条件は  $x=0$  のように書ける。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{heaving osc.} & \eta_0(x) = h \\ \text{pitching " } & \eta_1(x) = 0 \cdot x \\ \text{diffraction} & \eta_d(x) = -a e^{iKx} \end{array} \right\} \quad (1.12)$$

以下 suffix 0, 1, d は  $x=0$  heaving, pitching, diffraction に属する量を示すものとする。

なお surging osc. に対しては平板では heaving と同じになるが、いづれにしても量的には無視できるので以下考えないことにする。

なお (1.10) からすぐわかるように、

$$\eta(x) = e^{i\omega x/U} \text{ に対して } \phi_y(x, 0) = 0, \quad (1.13)$$

であるから、 $\phi$  が指定されてもこれに対応する解は唯一は不定である。

速度ポテンシャルは

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\rho U} \int_{-\infty}^{\infty} p(x') S(x-x', y) dx', \quad (1.14)$$

$$S(x, y) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{(k-\alpha) e^{ikx}}{A(k)} - \frac{(k+\alpha) e^{-ikx}}{B(k)} \right] e^{ky} dk, \quad (1.15)$$

$$\alpha = \omega/U, \quad \gamma = g/U^2.$$

$$A(k) = (k-\alpha)^2 + i\mu(k-\alpha) - \gamma k,$$

$$B(k) = (k+\alpha)^2 - i\mu(k+\alpha) - \gamma k,$$

9.5.12 かけ 無限後流では、(附録 A)

$$\phi(x, y) \xrightarrow[x \ll -1]{\alpha > \frac{\gamma}{4}} \frac{e^{ky}}{k\mu} \left[ k H(-k) e^{ikx} + \alpha H\left(-\frac{\alpha^2}{k}\right) e^{i\frac{\alpha^2 x}{k}} \right], \quad (1.16)$$

2.12

$$H(k) = \frac{1}{\rho U} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{ikx} dx, \quad (1.17)$$

この場合前向きには ほかないような場合のみ考える事とする。

境界条件は (1.9) と (1.10) の二通りの方法がある。(附録)

$$\phi(x, 0) = -U \left( i\alpha - \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta(x) = -\frac{1}{\rho U} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x') dx'}{x-x'} + \frac{1}{\rho U} \int_{-\infty}^{\infty} p(x') S_1(x-x', 0) dx', \quad (1.18)$$

$$\eta(x) = -\frac{1}{\rho g} \int_{-\infty}^{\infty} p(x') S_2(x-x', 0) dx', \quad (1.19)$$

$S_1, S_2$  は共に対数的特異点を有する。

2.2 のように Normalize する事にしよう。

$$\left. \begin{aligned} \phi_0(x, y) &= h \phi(x, y) \\ \phi_1 &= \theta \phi_1 \\ \phi_d &= \frac{g}{\omega_0} \phi_d \end{aligned} \right\} \begin{aligned} p_0 &= \rho g h p_0 \\ p_1 &= \rho g \theta p_1 \\ p_d &= \rho g a p_d \end{aligned} \quad (1.20)$$

こうする  $\eta$  の境界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_0 & \text{は } \alpha \text{ として} \\ \phi_1 & \text{''} \\ \phi_d & \text{''} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} f_0 &= f_0 = 1 \\ f_1 &= f_1 = -\alpha \\ f_d &= f_d = e^{iKx} \end{aligned} \quad (1.21)$$

## 2. Reverse flow potential と相反性

流れの方向を逆にした potential を考えたとおりにして、

$$(i\omega + U \frac{\partial}{\partial x}) \tilde{\phi}(x, 0) - g \tilde{\eta}(x) = \frac{\tilde{p}(x)}{f}, \quad (2.1)$$

$$\tilde{\phi}_y(x, 0) = -(i\omega + U \frac{\partial}{\partial x}) \tilde{\eta}(x), \quad (2.2)$$

$$[(i\omega + U \frac{\partial}{\partial x})^2 + g \frac{\partial}{\partial y}] \tilde{\phi}(x, 0) = \frac{1}{f} (i\omega + U \frac{\partial}{\partial x}) \tilde{p}(x), \quad (2.3)$$

等の条件になる。

$$\tilde{\phi}(x, y) = \frac{1}{fU} \int_{-1}^1 \tilde{p}(x') \tilde{S}(x-x', y) dx', \quad (2.4)$$

と書けるとすれば明らかに

$$\tilde{S}(x, y) = S(-x, y), \quad \dots \dots (2.5)$$

従って

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\eta}(x) &= \eta(-x) \\ \tilde{p}(x) &= p(-x) \\ \tilde{\phi}(x, y) &= \phi(-x, y) \end{aligned} \right\} \dots \dots (2.6)$$

これらの式から直ちに次の相反性が成立つ。

$$\int_{-1}^1 \tilde{p}(x) \tilde{\phi}_y(x, 0) dx = \int_{-1}^1 \tilde{p}(x) \phi_y(x, 0) dx, \quad \dots (2.7)$$

$$\int_{-1}^1 \tilde{p}(x) \tilde{\eta}(x) dx = \int_{-1}^1 \tilde{p}(x) \eta(x) dx, \quad (2.8)$$

これは花田の式、および空室理である。

なお (2.7) 式は  $\int_{-1}^1 \tilde{p} \tilde{\phi}_y dx$  が存在しなければ成立しない。

3. 力 127112

heaving 1253 5 向きの力  $F_{00} = \text{Re } \rho g h f_{00} e^{i\omega t}$   
 "  $\pi - \lambda = \lambda$   $F_{01} = \text{Re } \rho g h f_{01} e^{i\omega t}$   
 pitching 1253 5 向きの力  $F_{10} = \text{Re } \rho g b f_{10} e^{i\omega t}$   
 "  $\pi - \lambda = \lambda$   $F_{11} = \text{Re } \rho g b f_{11} e^{i\omega t}$

(3.1)

1) の 上 下 方 向 張 力 力  $= E_0 = \rho g a e_0 e^{i\omega t}$   
 " " " " "  $E_1 = \rho g a e_1 e^{i\omega t}$  (3.2)

とあくゝ

$$\left. \begin{aligned} f_{ij} &= \int_{-1}^1 P_i f_j dx, \quad \text{for } i, j = 1, 2 \\ e_j &= \int_{-1}^1 P_d f_j dx, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad \dots (3.3)$$

前節の 木同様に  $\sqrt{4} = 2$  と (2.6) の正実条件によりて

$$\begin{aligned} f_{1,0} &= \int_{-1}^1 P_1 f_0 dx = \int_{-1}^1 P_1 \tilde{f}_0 dx = \int_{-1}^1 P_0 \tilde{f}_1 dx \\ &= \int_{-1}^1 P_1 \tilde{f}_0 dx = \int_{-1}^1 P_0 \tilde{f}_1 dx = - \int_{-1}^1 P_0 f_1 dx = -f_{0,1}, \quad (3.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_0 &= \int_{-1}^1 P_0 f_0 dx = \int_{-1}^1 P_0 f_0 dx = \int_{-1}^1 P_0 f_0 dx = \int_{-1}^1 P_0 f_0 dx = \int_{-1}^1 P_0 e^{-ikx} dx \\ &= H_0(-k) \\ e_1 &= \int_{-1}^1 P_1 f_1 dx = - \int_{-1}^1 P_1(x) e^{-ikx} dx = -H_1(k) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} e_0 \\ e_1 \end{aligned}} \right\} \quad (3.5)$$

① ように なって, radiation potential がわかれば <sup>（定数加算計算用）</sup> すべての  
力 が お め ら れ る。

又  $x = -\cos \theta$  とおき

$$f_n = \cos n\theta, \quad \dots (3.6)$$

に 対応する 解を  $P_n = \frac{1}{\sin \theta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta, \quad (3.7)$

と おく と

$$f_d = e^{iKx} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-i)^n J_n(K) \cos n\theta \quad \dots (3.8)$$

で ある から

$$\begin{aligned} P_d &= \frac{1}{\sin \theta} \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cos m\theta \\ b_m &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-i)^n J_n(K) a_n \end{aligned} \quad \left\{ \dots (3.9) \right.$$

の よう に あり

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \frac{\pi}{2} \varepsilon_j a_j^i \\ e_j &= \frac{\pi}{2} \varepsilon_j b_j \end{aligned} \quad \left\{ \dots (3.10) \right.$$

と 与 え ら れ る。

最後 に damping に ついて 考 え て おく。  
その 後 に 2 次の 力の 成分 の 短 部 分 を 考 え よう。

$$I = \frac{1}{P} \int_{-1}^1 (P_i \eta_j - \overline{P_i} \overline{\eta_j}) dx = \frac{2i}{P} \text{Im} \int_{-1}^1 P_i \eta_j dx, \quad (3.11)$$

又 簡 単 の 故 に

$\eta_i, \eta_j$  は  $|x| < 1$  で real,  $\eta_i = \tilde{\eta}_i, \eta_j = \tilde{\eta}_j$  と する と

$$\int P_i \eta_j dx = \int P_i \tilde{\eta}_j dx = \int \overline{P_j} \tilde{\eta}_i dx = \int P_j \tilde{\eta}_i = \int P_j \overline{\eta_i} dx.$$

と なる 故

$$I = \frac{1}{P} \int (P_j \tilde{\eta}_i - \overline{P_i} \eta_j) dx,$$

と なる。

水 面 条件 を 入れ て 成分 毎 に 考 え る と

$$I = \lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-X}^X \left[ \eta_i (i\omega - v \frac{\partial}{\partial x}) \phi_j + \eta_j (i\omega + v \frac{\partial}{\partial x}) \phi_i \right] dx$$

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-X}^X [\phi_j \bar{\phi}_{iy} - \bar{\phi}_i \phi_{jy}] dx \\
 &= \int_0^{y=-\infty} [-\phi_j \bar{\phi}_{ix} + \bar{\phi}_i \phi_{jx}]_{x=-X} dy + \int_{-\infty}^0 [\phi_j \bar{\phi}_{ix} - \bar{\phi}_i \phi_{jx}] dy, \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

然るに 上流側) には  $i$  はなく, 後流側) では (1.16) の  $\rho \chi^{\frac{1}{2}}$  とする,

$$I = \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{(k+\alpha)^2} \left\{ k^2 H_j(-k) \bar{H}_i(-k) + \alpha^2 H_j\left(-\frac{\alpha^2}{k}\right) \bar{H}_i\left(-\frac{\alpha^2}{k}\right) \right\} \right], \quad (3.13)$$

$$\therefore \quad H(-k) = \int_{-1}^1 \frac{\rho(x)}{\rho_0} e^{ikx} dx, \quad (3.14)$$

となり, これは 後流に出る行く波のエネルギーである。

4. 境界値問題の変分原理  
 関数  $\phi$  は  $\psi$  に 境界値問題 の 変分方程式 (1.18) (1.19) と 等価 である。

$$F = \int_1' [p\tilde{\psi} + \tilde{p}v - p\phi] dx, \quad \dots (4.1)$$

$$G = \int_1' [p\tilde{f} + \tilde{p}f - p\eta] dx, \quad \dots (4.2)$$

第1  $[F] = \int_1' p\tilde{v} dx, \quad v = \phi, \quad \dots (4.3)$

$$[G] = \int_1' p\tilde{f} dx, \quad f = \eta, \quad \dots (4.4)$$

従って 1 節で述べたように (4.1) では  $p$  は trailing edge で 0 にならなければならぬ (Kutta の条件) か、(4.2) では 必ずしも そうでなくてよい。

それに対応して  $\phi_y = 0$  となるような解  $\eta = e^{i\alpha x}$  は (4.4) で求められ、この解だけ不定となり Kutta の条件を 満たす 数 に 使われる わけである。

# 附録 A 核函数 について

$$\phi(x, y) = \frac{1}{PU} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x') S(x-x', y) dx', \quad (1)$$

とすると

$$S(x, y) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[ \frac{k-\alpha}{A(k)} e^{ikx} - \frac{k+\alpha}{B(k)} e^{-ikx} \right] e^{ky} dk, \quad (2)$$

ここで

$$\begin{aligned} A(k) &= (k-\alpha)^2 + i\mu(k-\alpha) - \gamma k, \\ B(k) &= (k+\alpha)^2 - i\mu(k+\alpha) - \gamma k, \\ \alpha &= \omega/U, \quad \gamma = \sigma/U^2 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{U^2} \left[ (i\omega - U \frac{\partial}{\partial x})^2 - \mu(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) + \gamma \frac{\partial}{\partial y} \right] S(x, y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \left[ (k-\alpha) e^{ikx} - (k+\alpha) e^{-ikx} \right] e^{ky} dk \\ &= -\frac{1}{\pi} (-i\alpha + \frac{\partial}{\partial x}) \int_0^{\infty} e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{\pi} (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x}) \frac{(-y)}{x^2 + y^2}, \quad (4) \end{aligned}$$

(3) の (2) 式を分解すると次のようになる。

$$\begin{aligned} A(k) &= (k-a_1)(k-a_2) \\ B(k) &= (k-b_1)(k-b_2) \end{aligned} \quad (5)$$

根はまた

$$\begin{aligned} a_1, a_2 &= \frac{1}{2} (\gamma + 2\alpha \pm \sqrt{\gamma^2 + 4\alpha\gamma}) \\ b_1, b_2 &= \frac{1}{2} (\gamma - 2\alpha \pm \sqrt{\gamma^2 + 4\alpha\gamma}) \end{aligned} \quad (6)$$

であるが、入射波の波数  $k$  を導入すると、同様にすると

$$\alpha = K + \sqrt{K}\gamma, \quad (7)$$

右辺係数があるから、これを  $K$  について解くと

$$\sqrt{K} = \frac{1}{2} \{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4\alpha\gamma}\}, \quad K = \frac{1}{4} \{2\alpha + \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4\alpha\gamma}\}$$

複号の内一はとれないから、系を (8)

$$a_1 = K, \quad \text{従って} \quad a_2 = \alpha^2/K, \quad (8)$$

同様に (7) に代して

$$\alpha = \beta + i\sqrt{\beta}\gamma, \quad (9)$$

また  $\beta$  を導入すると

$$b_1 = -\beta, \quad b_2 = -\alpha^2/\beta = -\bar{\beta}, \quad \text{と置く。} \quad (10)$$

(3)における小さな正数 $\mu$ の存在を考慮してその $k$ -plane上の位置を調べると次の通りである。

i)  $\alpha > \frac{\gamma}{4}$  ならば、船の後方には波があり、 $B$ 波は右側領域である。

高速船の場合、実際問題としては船がこの範囲にあるので、以下ではこの場合のみ考える。

数値的範囲は

$$\gamma: 0.1 \sim 2, \quad (Fr = 0.5 \sim 2), \quad \delta = \frac{1}{2Fr^2}$$

$$K: 0.6 \sim 3, \quad (N_L = 1 \sim 5), \quad K = \pi \left( \frac{L}{\lambda} \right)$$

よって  $\alpha: 0.8 \sim 5$  の程度である。

$$(\alpha = K + iK\delta)$$

ii)  $\alpha = \frac{\gamma}{4}$  ならば、 $k_1, k_2$  は double pole となり無限大となる限界速度である。

iii)  $\alpha > 4\alpha$  の時  $k_2$  は  $\omega$  (速度は  $U$  より大きくなり)、前進方向に波がある。

よって  $x \gg 1$  では

$$S(x, y) \xrightarrow[x \gg 1]{\alpha > \frac{\gamma}{4}} O\left(\frac{1}{r}\right), \quad (11)$$

下流側では

$$S(x, y) \xrightarrow[x \ll -1]{\alpha > \frac{\gamma}{4}} \frac{1}{K + \alpha} \left[ K e^{iKx + Ky} + \alpha e^{i\left(\frac{\alpha^2}{K}\right)x + \left(\frac{\alpha^2}{K} + K\right)y} \right], \quad (12)$$

よって

$$\phi(x, y) \xrightarrow[x \gg 1]{\alpha > \frac{\gamma}{4}} O\left(\frac{1}{r}\right), \quad (13)$$

$$\phi(x, y) \xrightarrow[x \ll -1]{\alpha > \frac{\gamma}{4}} \frac{1}{K + \alpha} \left[ K H(-K) e^{iKx + Ky} + \alpha H\left(-\frac{\alpha^2}{K}\right) e^{i\left(\frac{\alpha^2}{K}\right)x + i\alpha^2 y K + \frac{\alpha^2}{K} y} \right], \quad (14)$$

$$\therefore H(k_2) = \frac{1}{\rho U} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{p}(x) e^{ik_2 x} dx, \quad (15)$$

となる。

22

$$S_j(x, y) = -\frac{x}{\pi(x^2 + y^2)} + S_1(x, y) \quad (16)$$

と  $S_1$  をおくと

$$S_j(x, y) = \frac{i}{2\pi} \int_0^\infty \left[ \frac{(x+ik_2)x^2}{A} e^{ik_2 x} + \frac{(x-ik_2)x^2}{B} e^{-ik_2 x} \right] e^{ky} dk_2 \quad (17)$$

$$(ix - \frac{\partial}{\partial x}) S_j(x, y) = \frac{-y}{\pi(x^2 + y^2)} + S_2(x, y) \quad (18)$$

$$S_2(x, y) = \frac{\delta}{2\pi} \int_0^\infty \left[ \frac{k_2}{A} e^{ik_2 x} + \frac{k_2}{B} e^{-ik_2 x} \right] dk_2 \quad (19)$$

で  $S_j$  から  $\delta$  の条件は 次の 2 形式となる。

$$\phi_j(x, 0) = -U(ix - \frac{\partial}{\partial x}) \eta(x) = -\frac{1}{PQ} \int_{-1}^1 \frac{P(x')}{x-x'} dx' + \frac{1}{PQ} \int_{-1}^1 P(x') S_j'(x-x', 0) dx' \quad (20)$$

$$\eta(x) = \frac{P(x)}{PQ} - \frac{U}{Q} (ix - \frac{\partial}{\partial x}) \phi_j(x, 0) = -\frac{1}{PQ} \int_{-1}^1 P(x') S_2(x-x', 0) dx' \quad (21)$$

$S_j, S_1, S_2$  の  $k_2$  に関する式を部分分数に展開すると

$$\frac{1}{A(k_2)} = \frac{1}{a_1 - a_2} \left( \frac{1}{k_2 - a_1} - \frac{1}{k_2 - a_2} \right) = \frac{K}{\alpha^2 - K^2} \left( \frac{1}{k_2 - \alpha^2/K} - \frac{1}{k_2 - K} \right)$$

$$\frac{1}{B(k_2)} = \frac{1}{b_1 - b_2} \left( \frac{1}{k_2 - b_1} - \frac{1}{k_2 - b_2} \right) = \frac{\beta}{\alpha^2 - \beta^2} \left( \frac{1}{k_2 + \alpha^2/\beta} + \frac{1}{k_2 + \beta} \right)$$

で  $S_j$  から

$$\frac{k_2 - x}{A} = \frac{1}{K+x} \left[ \frac{\alpha}{k_2 - \alpha^2/K} + \frac{K}{k_2 - K} \right]$$

$$\frac{k_2 + x}{B} = \frac{1}{\beta+x} \left[ \frac{\beta}{k_2 + \beta} + \frac{\alpha}{k_2 + \alpha^2/\beta} \right]$$

$$\frac{(x+ik_2)k_2 - x^2}{A} = \frac{1}{K(x+K)} \left[ \frac{\alpha^3}{k_2 - \alpha^2/K} + \frac{K^3}{k_2 - K} \right]$$

$$\frac{(x-ik_2)k_2 + x^2}{B} = \frac{1}{\beta(\beta+x)} \left[ \frac{\beta^3}{k_2 + \beta} + \frac{\alpha^3}{k_2 + \alpha^2/\beta} \right]$$

$$\frac{\delta k_2}{A} = \left( \frac{\alpha - K}{\alpha + K} \right) \left[ \frac{K}{k_2 - K} - \frac{\alpha^2 \beta}{k_2 - \alpha^2/K} \right]$$

$$\frac{\delta k_2}{B} = \left( \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right) \left[ \frac{\beta}{k_2 + \beta} - \frac{\alpha^2 \beta}{k_2 + \alpha^2/\beta} \right]$$

これら二つを分ける。

$$\begin{aligned} E(ax) &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{k-a} dk = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{k+a} dk = e^{iax} \int_0^{\infty} \frac{e^{-iu}}{u} du \quad \text{for } x > 0 \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{k+a} dk - 2\pi i e^{iax} \quad \text{for } x < 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$a$  は正で少し実軸の下。つまり,  $a_1, a_2$  の場合である。

$$\begin{aligned} E(b_1 x) &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{k-b_1} dk = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{k+b_1} dk = E(b_1 x) \quad \text{for } x > 0 \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{k+b_1} dk + 2\pi i e^{-ib_1 x} \quad \text{for } x < 0 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} E(b_2 x) &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{k-b_2} dk = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{k+b_2} dk - 2\pi i e^{-ib_2 x} \quad \text{for } x > 0 \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{k+b_2} dk \quad \text{for } x < 0 \end{aligned} \quad (25)$$

これらを使うと

$$S(x, 0) = \frac{i}{2\pi} \left[ \frac{1}{K\alpha} \left\{ K E(Kx) + \alpha E\left(\frac{\alpha^2 x}{K}\right) \right\} - \frac{1}{\alpha + \beta} \left\{ \beta E(-\beta x) + \alpha E\left(-\frac{\alpha^2 x}{\beta}\right) \right\} \right] \quad (26)$$

$\alpha\beta = \bar{\beta}$

$$S_1(x, 0) = \frac{i}{2\pi} \left[ \frac{1}{\alpha + K} \left\{ K^2 E(Kx) + \frac{\alpha^2}{K} E\left(\frac{\alpha^2 x}{K}\right) \right\} + \frac{1}{\alpha + \beta} \left\{ \beta^2 E(-\beta x) + \frac{\alpha^3}{\beta} E\left(-\frac{\alpha^2 x}{\beta}\right) \right\} \right] \quad (27)$$

$$S_2(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\alpha K}{\alpha + K} \left\{ K E(Kx) - \frac{\alpha^2}{K} E\left(\frac{\alpha^2 x}{K}\right) \right\} + \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \left\{ \beta E(-\beta x) - \bar{\beta} E\left(-\frac{\alpha^2 x}{\beta}\right) \right\} \right] \quad (28)$$

$E$  の数値の表の第 1 列の数値は  $x = -\cos\theta$  とおくと次のようにになる。

$$e^{ikx} = e^{-ik\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-i)^n J_n(k) \cos n\theta$$

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = 2 \quad \text{for } n > 1$$

で表すから

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} E(ax) \cos n\theta d\theta = i^n \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx} J_n(k) dk}{k-a} = i^n C_n(ax), \quad (29)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} E(b\overline{x-x'}) \cos n\theta d\theta = (-i)^n \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikx} J_n(k) dk}{k-b} = (-i)^n C_n(bx), \quad (30)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} C_n(ax) \cos m\theta d\theta = (-i)^m \int_0^{\infty} \frac{J_n(k) \overline{J_m(k)} dk}{k-a} = (-i)^m C_{n,m}(a), \quad (31)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} C_n(bx) \cos m\theta d\theta = i^m \int_0^{\infty} \frac{\overline{J_n(k)} J_m(k) dk}{k-b} = i^m C_{n,m}(b), \quad (32)$$

# 附録 B 雑録

## i) 境界条件の変形

$\nu=1$ ,  $P/F$  を  $p$  と書き 流れ函数  $\psi$  を導入すると境界条件は

$$(i\alpha - \frac{\partial}{\partial x})\phi(x,0) - \gamma\psi(x) = \begin{cases} p(x) & \text{for } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{for } |x| > 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\psi(x,0) = -\phi_x(x,0) = (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x})\eta(x), \quad (2)$$

となる。

ここで  $p(x)$  を下半面で正則な函数で  $|x| > 1$  で 0 となる函数と考えるとその共軛函数は、

$$q(x, \frac{1}{2}) = \frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-1}^1 \frac{p(x')}{x' - x} dx', \quad (3)$$

で与えられる。

そこで (1) を変形して

$$(i\alpha - \frac{\partial}{\partial x})^2 \phi(x,0) - \gamma\psi_x = (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x})p(x), \quad (4)$$

と (2) の共軛函数を考えると

$$(i\alpha - \frac{\partial}{\partial x})^2 \psi(x,0) + \gamma\phi_x(x,0) = (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x})q(x,0), \quad (5)$$

となる。

(4) を  $x$  で微分すると

$$(i\alpha - \frac{\partial}{\partial x})\phi_x(x,0) - \gamma\psi_x(x) = p_x(x), \quad (6)$$

(5) と (6) から  $\phi_x$  を消去すると

$$\begin{aligned} (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x})^3 \psi(x,0) + \gamma^2 \psi_x(x) &= \\ &= \left\{ (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x})^2 + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x} \right\} \eta(x) = -\gamma p_x(x) + (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x})^2 q_x(x,0), \end{aligned} \quad (7)$$

を得る。

これは Haselgrove の解法のものである。

ii) 波無し分布について.

水面条件の operator は

$$L \equiv (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x})^2 + \cancel{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \quad (8)$$

この adjoint は

$$L^* \equiv (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x})^2 - \cancel{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \quad (9)$$

reverse flow の水面条件のは.

$$\tilde{L} \equiv (i\alpha + \frac{\partial}{\partial x})^2 + \cancel{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \quad (10)$$

その adjoint は

$$\tilde{L}^* \equiv (i\alpha + \frac{\partial}{\partial x})^2 - \cancel{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \quad (11)$$

従って

$$\begin{aligned} \cancel{\gamma} L L^* &= (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x})^4 - \cancel{\gamma}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ &= (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x})^4 + \cancel{\gamma}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (12) \end{aligned}$$

$$\tilde{L} \tilde{L}^* = (i\alpha + \frac{\partial}{\partial x})^4 - \cancel{\gamma}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} = (i\alpha + \frac{\partial}{\partial x})^4 + \cancel{\gamma}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (13)$$

となり,

水面は一般的なつまり, A, B 4波系の消える圧力分布  
は

$$p(x) = L \tilde{L}^* \tilde{L} L^* \mu(x) \quad (14)$$

$$\mu(\pm 1) = \mu'(\pm 1) = \dots = \mu^{(n)}(\pm 1) = 0$$

なる形で与えられる。

すなわち

$$\begin{aligned} L L^* \tilde{L} \tilde{L}^* &= \left\{ (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x})^2 + i\gamma \frac{\partial}{\partial x} \right\} \left\{ (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x})^2 - i\gamma \frac{\partial}{\partial x} \right\} \\ &\quad \times \left\{ (i\alpha + \frac{\partial}{\partial x})^2 + i\gamma \frac{\partial}{\partial x} \right\} \left\{ (i\alpha + \frac{\partial}{\partial x})^2 - i\gamma \frac{\partial}{\partial x} \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

と書けるから

$$L L^* \tilde{L} \tilde{L}^* = \tilde{L} \tilde{L}^* \quad (16)$$

とおいいて

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\equiv \left\{ (i\alpha + \frac{\partial}{\partial x})^2 - i\gamma \frac{\partial}{\partial x} \right\} \left\{ (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x})^2 + i\gamma \frac{\partial}{\partial x} \right\} \\ &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \alpha^2 \right)^2 + (2\alpha + \gamma) \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \dots (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^* &\equiv \left\{ (i\alpha + \frac{\partial}{\partial x})^2 + i\gamma \frac{\partial}{\partial x} \right\} \left\{ (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x})^2 - i\gamma \frac{\partial}{\partial x} \right\}, \\ &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \alpha^2 \right)^2 + (2\alpha + \gamma) \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} e^{ikx} &= (k^2 + \alpha^2)^2 - (2\alpha + \gamma) k^2 = (k^2 + \alpha^2 - \overline{2\alpha + \gamma} k)(k^2 + \alpha^2 + \overline{2\alpha + \gamma} k) \\ \mathcal{L}^* e^{ikx} &= (k^2 + \alpha^2)^2 - (2\alpha + \gamma) k^2 = (k^2 + \alpha^2 - \overline{2\alpha + \gamma} k)(k^2 + \alpha^2 + \overline{2\alpha + \gamma} k) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{つまり } \mathcal{L} e^{ikx} &= B(k) B(-k) \\ \mathcal{L}^* e^{ikx} &= A(k) A(-k) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. \quad (19)$$

となっている。

従って  $A$  は  $i$  を消すことは

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \mathcal{L}^* \mu(x) \\ \mu(\pm 1) &= \mu'(\pm 1) = \mu''(\pm 1) = \mu'''(\pm 1) = 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. \quad (20)$$

とすればよい。

これらの  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{L}^*$ ,  $\mathcal{L}\mathcal{L}^*$  は real な operator であり、それによる  $\rho$  は複素数となる。

つまり  $\rho$  によって位相が変化するから、くねくねと曲がらなければならぬわけである。

即ち一般に剛体的に運動するとはなし分断はない事になる。  
 real な  $\rho$  に代わる必要はないので、次のようにしてよい。

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \mathcal{L} \tilde{\mu}(x) \\ \mu(\pm 1) &= \mu'(\pm 1) = \mu''(\pm 1) = \mu'''(\pm 1) = 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. \quad (21)$$

$$\text{位相 } \mathcal{L} \tilde{\mu} \equiv \left\{ (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x})^2 + i\gamma \frac{\partial}{\partial x} \right\} \left\{ (i\alpha + \frac{\partial}{\partial x})^2 - i\gamma \frac{\partial}{\partial x} \right\}, \text{ となる。}$$

## 附録 C 極限の場合

i)  $\omega \rightarrow 0$  ( $\alpha \rightarrow 0$ )

$$S(x, y) = \frac{i}{2\pi} \int_0^\infty \left[ \frac{e^{ikx}}{k - \alpha + \mu i} - \frac{e^{-ikx}}{k - \alpha - \mu i} \right] e^{ky} dk, \quad (1)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x} + \gamma \frac{\partial}{\partial y} \right) S(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right), \quad (2)$$

となり、振動のない滑走平板の potential に一致する。

ii)  $\omega \rightarrow 0$  ( $\gamma \rightarrow \infty$ ,  $\alpha^2/\gamma \Rightarrow \omega^2/\gamma = K$ )

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} S(x, y) &= \frac{+i}{2\pi} \int_0^\infty \left[ \frac{-\omega e^{ikx}}{\omega^2 - i\mu\omega - \gamma k} - \frac{\omega e^{-ikx}}{\omega^2 - i\mu\omega - \gamma k} \right] e^{ky} dk, \\ &= \frac{i\omega}{\pi\gamma} \int_0^\infty \frac{e^{ky} \cos kx}{k - K + i\mu\omega/\gamma} dk, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\omega} \left( -\omega^2 + \gamma \frac{\partial}{\partial y} \right) S(x, y) = \frac{\omega}{\pi i} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right), \quad (4)$$

となり、前進深度のない場合に一致する。

iii)  $\gamma \rightarrow 0$  (フルード数無限大)フルード数が無限に大きいと考えてもよいし、又重力の定数  $g \rightarrow 0$  と考えてもよい。かゝる流れに於ても振動波の1場合になるはずである。

$$S(x, y) = \frac{i}{2\pi} \int_0^\infty \left( \frac{e^{ikx}}{k - \alpha + \mu i} - \frac{e^{-ikx}}{k + \alpha - \mu i} \right) e^{ky} dk, \quad (5)$$

$$\left( i\alpha - \frac{\partial}{\partial x} \right) S(x, y) = - \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)}, \quad (6)$$

従つて  $\alpha = 1$  とすると。

$$\phi(x, y) = \frac{1}{P} \int_{-1}^1 p(x') S(x-x', y) dx' \quad (7)$$

$$(i\alpha - \frac{\partial}{\partial x}) \phi(x, y) = \frac{p(x)}{P} \quad (8)$$

となる。

さて (5) において  $k = \rho l$  の pole は

(5) のように なって いるので

$x > 0$  ならば " 上 " の pole は消えるよう

に積分路を 変えられ,  $x < 0$  ならば  $k = \alpha - \mu i$  における Residue のみ 残るから

$$S(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{for } x > 0 \\ e^{i\alpha x} & \text{for } x < 0 \end{cases} \quad (9)$$

次に

$$S_y(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y} S(x, y) + i\alpha T(x, y) \quad (10)$$

$$T(x, y) = \int_{-\infty}^x S_y(x', y) dx' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{ikx}}{k - \alpha + \mu i} + \frac{e^{-ikx}}{k + \alpha + \mu i} \right) e^{ky} dk \quad (11)$$

7" があるから,  $\pm \frac{2}{\pi} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\mu}$  は

$$\begin{aligned} \phi_y(x, 0) &= \frac{1}{P} \int_{-1}^1 p(x') S_y(x-x', 0) dx' \\ &= -\frac{1}{P\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(x')}{x-x'} dx' + \frac{i\alpha}{P} \int_{-1}^1 p(x') T(x-x', 0) dx' \quad (12) \end{aligned}$$

$x$  を (12) の左辺に代入する (12) 式に  $x > 0$

$$\int_{-1}^1 \phi_y(x, 0) dx = \frac{1}{P} \int_{-1}^1 p(x') T(x-x', 0) dx' - \frac{1}{P} \int_{-1}^1 p(x') T(-1-x', 0) dx' \quad (13)$$

この 2 式 から

$$(i\alpha - \frac{\partial}{\partial x}) \int_{-1}^1 \phi(x, 0) dx = \frac{1}{\pi P} \int_{-1}^1 \frac{p(x')}{x-x'} dx' - \frac{1}{P} \int_{-1}^1 p(x') T(-1-x', 0) dx' \quad (14)$$

右辺の 2 項は 定数であるから, 2 の解は 直ちに求まる。