M-39　於 J.T.T.C (II) 50.1.31

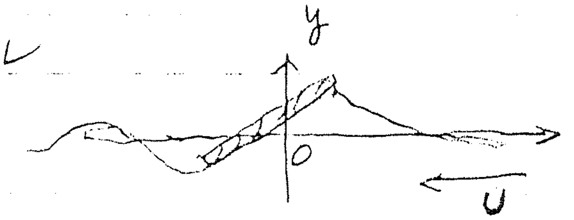
昭和49年10月6日

2次元滑走板における浸水長の変化について
(II. 動揺問題)

別所正利

内容

1, 問題の発端



2次元滑走板の速度ポテンシャルを $\varphi(x,y,t)$, 水面変位を $\zeta(x,t)$ とすると水面の境界条件は

$$\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,0,t) = -\left(\frac{\partial}{\partial t} - U\frac{\partial}{\partial x}\right)\zeta(x,t), \qquad (1)$$

となり板上ではこれが与えられた値にならなければならない。*

単弦振動をしているとして

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x,y,t) &\rightarrow \mathrm{Re}\{\phi(x,y)\,e^{i\omega t}\}\\ \zeta(x,t) &\rightarrow \mathrm{Re}\{\zeta(x)\,e^{i\omega t}\}\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

と書ける時は(1)は

$$\phi_y(x,0) = \left(-i\omega + U\frac{\partial}{\partial x}\right)\zeta(x), \qquad (3)$$

となる。

この(3)を ζ に関する微分方程式として解くと明らかに斉次解

$$\zeta(x) = e^{i\frac{\omega}{U}x}, \quad \cdots \qquad (4)$$

だけ不定となる。

つまり ϕ_y が与えられても $e^{i\omega/U x}$ の定数倍だけ ζ は不定でありこの定数は何處か例えば無限上流側の条件で決めなければならない。

所で参考文献に示されているようにあるいは振動翼の理論でもよく知られているように板上での速度を指定して後端の流出条件を

* 花岡, 造協論文集 89号 P.7-12, (昭和26年講演)
Haskind,

昭和　　年　　月　　日

指定すると圧力分布は一意的に定まる。

従ってこの斉次解も一意的に定まってしまう。つまり特別な場合を除き一般には板上にも(4)の形の振動(これは正弦波の水面変位が速度Uで水と共に移動するだけのものであるが)がある事になる。

実際附録Aに示すようにフルード数無限大の極限でもそうなっていて結局無限上流で水面変位が0となるような場合は板上で与えられた剛体的運動をするような解は一般には存在しない。

逆に与えられた剛体的運動をするようにする為には板上におけるこの斉次解の因子を水面全体から差引いておかねばならない。

そうすると無限上流側における水面変位は0でなくなりこの斉次解分だけ変動がある事になる。

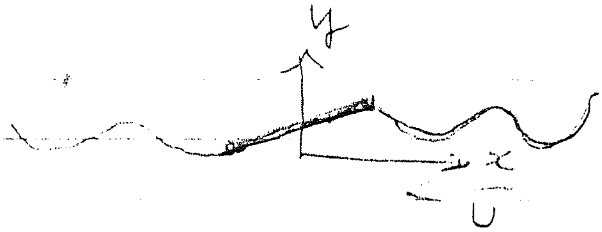
この変動はフルード数無限大の極限では附録Aに示すように入射波(特別な位相の)となるので結局の所板が任意の所定の動揺をする事が出来るのは特定の入射波がある時だけで一般には不可能である事になる。(以下簡単の為にフルード数∞の場合を論ずる)

振動翼理論又は水中翼理論では水面のような特定の面を考える必要はないのでこのような厄介な事は考える必要はなかったのである。

この辺の事情を現象的に考えて見よう。

条件(1.)はよく知られている様に又境界に沿って同じ流体粒子が移動する事を意味している。

従って上述のように特定の入射波がある時に



だけ所定の運動が出来ると言う事は板上に来る流体粒子は上流側では図のように正弦波的に変動している（実際は流れに沿って動いているだけである）事になる。

従って逆に水面が平らならば板の長さは一定ではあり得ず、板の先端附近の水面の上下に応じて浸水長が変動する事になるであろう。

このようにして滑走板の問題は従来の定式化あるいは線型理論では不都合であると言う結論に達する。

なお斉次解(4)は$\omega \to 0$つまり定常問題では定数となりすでによく調べられているように浸水長の変化に対応すると考えてもよいので上の考察によく対応している。*

さてこのような難点を打開するには上述の考察から浸水長の変化を考慮に入れる以外方法がないと考えられるがこの事は滑走板の運動で最も顕著な事は浸水長の大きい変化である事から考えて全く妥当な事である。

この点に関しては幸にポーポイジングに関するOgilvieの研究**がある。

それによるとまず仰角αおよび上下動振幅hが一次の微少量であると仮定すると浸水長の変化量cは（板長を1として）

$$c = O(1) , \qquad (5)$$

* 別所、前報（I 定常問題）

** T.F. Ogilvie, "Instability of Planing Surface" Rep. Univ. of Michigan, No.026, July, 1969.

となる。

この事は物理的にも全く妥当な結論であって何等の異議を差しはさむ余地がない所であるが一方その為に理論の展開が難航となり簡明な結論が得られていないように見える。

そこで少々現実を離れる事には目をつむって、あるいは浸水長の変化が極く小さい場合のみ考える事にして(5)の代わりに

$$c = o(1) \quad , \quad \cdots \quad (6)$$

つまり c は充分小さいものと考えて見よう。

これでも浸水長の変化を全く考えない理論よりは良いであろうし又その定性的傾向は把握出来るであろう。

さて重力がないとして加速度ポテンシャルを導入しておこう。（密度も1とする）

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x,y,t) = \Phi(x,y,t) \quad , \quad (7)$$

そうすると圧力は

$$p(x,t) = \rho\,\Phi(x,-0,t) \quad , \quad -- \quad (8)$$

となる。

簡単の為に板は一定仰角 α で上下揺れのみ行っているとすると境界条件は（Ogilvie 前出）

$$\varphi_y(x,0,t) = \alpha - \dot{h}(t) \quad , \quad \cdots \quad (9)$$

for $-1<x<1+2c$,

(7)により

$$\Phi_y(x,0,t) = -\ddot{h}(t) \quad . \quad \cdots \quad (10)$$

$$\Phi(x,y,t) = \frac{-1}{\pi\rho}\int_{-1}^{1+2c(t)} \frac{p(\xi,t)\,y}{(x-\xi)^2+y^2}\,d\xi \quad , \quad (11)$$

(10), (11) から解 $p(x,t)$ は（流出条件を満たすとして）

$$p(x,t) = \alpha\sqrt{\frac{1+x}{1+2c-x}} - \ddot{h}(t)\sqrt{\frac{1+x}{1+2c-x}}\,(A+Bx+Cx^2), \qquad (12)$$

の形に書ける。　A, B, は任意定数である。
(6) の条件の下では

$$p(x,t) \fallingdotseq \alpha\left\{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - c\frac{\sqrt{1+x}}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$
$$-\ddot{h}\left\{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - c\frac{\sqrt{1+x}}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}\right\}(A+Bx+Cx^2), \qquad (13)$$
$$\text{for } -1 < x \ll (1\pm c),$$

となる。
　ここでさらに h, c が基本周波数で振動する関数であるとして圧力の基本周波数成分のみを考えると，$\ddot{h}(t)c(t)$ は定常成分と倍周波成分になるから出て来なくて．

$$p_1(x,t) = \text{基本周波成分}\{p(x,t)\}$$

$$\fallingdotseq -\alpha c(t)\frac{\sqrt{1+x}}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} - \ddot{h}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,(A+Bx+Cx^2), \qquad (14)$$

結局上下揺れでは浸水長の変化は定常成分と倍周波数成分をつくり出す＊だけで基本周波数成分への貢献は近似的に無視出来るけれど定常滑走に基づく部分で浸水長が変化すると基本周波数成分が出て来る。
（なお (6) を仮定すると右辺第1項は第2項に比して無視すべきであるとも言えるが (5) の意味でこれをとる事にするのである）

＊ 別冊，"浅吃水船の2次元動揺問題"

このようにして浸水長の変化量と定常仰角に比例する基本周波数成分が派生する事がわかるが(14)式で見るように残念ながら積分不可能な解である。

これはしかし Singular Perturbation の考えからすれば簡単に解釈出来て所謂 far field solution の inner expansion あるいは near field の outer expansion であるとすればよく，near field では

$$\frac{\sqrt{1+x}}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left\{\sqrt{\frac{1+x}{1+\varepsilon-x}} - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right\} \tag{15}$$

の意味にとれば附録Aに見るように容易に積分出来る。

さて Ogilvie は circulation を使って解いているので大分形式は異なるがいづれにしろ適当な線型化を行って最後に板の浸水部の前端の水面変位が常にその板の上下位置に一致する条件（以下 Wagner 条件と呼ぶ）から浸水長変化 $C(t)$ を求める式を導出している。

この Wagner 条件はかなり複雑な Abel 型の積分方程式でもあり，又 Ogilvie の行ったように重力を無視すると定常滑走部分に基づく水面変位は無限大となるのでそれを取り除く操作もありかなり不安が残って来る。

一方 Wagner 条件は結局の所 $C(t)$ を決める条件であるが逆に $C(t)$ が与えられるとどうなるかと言うと Wagner の元の論文からも明らかなように滑走板の形状が平板と異なる事になる。

Wagner, Z.A.M.M. vol 12 (1932)

つまり換言すればWagner条件は一方では板が与えられた形状になっていれば満たされているはずである。
今(15)のような形の解を考えるとすると先端附近でWagner条件を考える事が出来ないのでこの後の解釈を採用して板の先端附近は除いて後の部分で与えられた条件を満たしていればWagner条件も近似的に満たされていると考える事にしよう。
今の場合は最初に述べたように板上で(4)の形の斉次解が残るのであるから(15)の形を含む解をその斉次解の部分が消えるように決めてその$C(t)$が浸水長の変化であるとすればよかろう。
実際には後に見るように結局の所流出条件を満たし且つ板上で(4)になるような(15)の因子を含む解を作って従来の形の解からそれを差引くと言う演算になるので(14)の形で言えば$\alpha C(t)$が問題に応じて波数に応じて定まる。
従って浸水長の変化は定常仰角αに反比例する事になるがこれは物理的に考えても近似的に妥当であろう。
つまり定常仰角が大きければ極端に言って90°なら浸水長の変化はありえない。
そのような場合は排水量型船となる訳であるがこの場合にもよく知れているように定常造波抵抗理論(船型)におけると同様線積分の困難がある*がこれは元々浸水面の変化に起因すると考えられるのでこの考察と同じような方向に処理する方法が考えられよう。

* J.N. Newman, J.S.R., vol 5 (1961)

昭和　　年　　月　　日

以上をまとめると結論

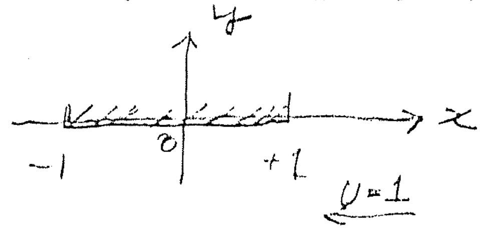
2次元滑走板の線型理論においては浸水長の変化を考えないと任意に与えられる板上の境界条件を満たす事が出来ない。
そして單弦運動では板上に $\exp(\frac{\omega^2}{g}x - i\omega t)$ の定数倍の水面変位が残る。

この結論は3次元でも同様に妥当する。

この難点を克服し且つ線型的取扱いを可能にする試みがこの報告の趣旨である。
その為には浸水長変化は極く僅かであると仮定して所謂 singular eigen solution を一つだけ導入すればよい。
縷々述べて来たようにこの結論に到達する過程は大変長く且つ危険なものであるし、又多くの他の方法が残されている事も理解出来るであろう。
これは一つの試みである。

2. 速度ポテンシャルと境界条件（花岡前出参照）

浸水長2なる平板が水面で動揺しているとし，その基本周波数成分について考えよう。



一様流速度を1とし圧力はρU^2で無次元化すると水面条件は

$$p(x) = \left(i\alpha - \frac{\partial}{\partial x}\right)\phi(x,0) - \gamma\eta(x), \qquad (1)$$

$$\phi_y(x,0) = -\left(i\alpha - \frac{\partial}{\partial x}\right)\eta(x), \qquad (2)$$

ここに $\gamma = gl/U^2$, $\alpha = \omega l/U$, l; 板半長

又ωは波浪中動揺する時は出会円周波数であるが同じωに対して $\alpha > \frac{\gamma}{4}$（以下この場合のみ考える）ならば２つの入射波がある。

一つのは向い波もう一つは追波であるが後者は今は一様流に流されている。

夫々のポテンシャルは振幅を１とすると

$$\left.\begin{aligned} \phi_0(x,y) &= \frac{g}{i\omega_0} e^{Ky+iKx}, \quad K = \omega_0^2/g, \\ \phi_0'(x,y) &= \frac{ig}{\omega_0'} e^{K'y+iK'x}, \quad K' = \alpha^2/K = \omega_0'^2/g, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\omega = \omega_0^2 U/g + \omega_0, \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} \eta_0(x) &= -e^{iKx}, \\ \eta_0'(x) &= e^{iK'x}, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

一般に速度ポテンシャルは

$$\phi_y(x,y) = \int_{-1}^{1} \phi_y(\xi)\, S(x-\xi, y)\, d\xi. \qquad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} S(x,y) &= \frac{i}{2\pi}\int_0^\infty \left[\frac{(k-\alpha)e^{ikx}}{A(k)} - \frac{(k+\alpha)e^{-ikx}}{B(k)}\right]e^{ky}dk, \\ A(k) &= (k-\alpha)^2 - \gamma k + i\mu(k-\alpha), \\ B(k) &= (k+\alpha)^2 - \gamma k - i\mu(k+\alpha), \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

又境界条件は

$$\eta_n(x) = \int_{-1}^{1} p_n(\xi) S_2(x-\xi, 0)\, d\xi. \qquad (8)$$

$$S_2(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[\frac{e^{ikx}}{A(k)} + \frac{e^{-ikx}}{B(k)}\right] k e^{ky} dk, \qquad (9)$$

境界条件としては.

$$\left.\begin{aligned} \eta_n(x) &= \cos n\theta, \quad (x=\cos\theta),\ n=0,1,2\cdots \\ \eta_s(x) &= e^{i\alpha x}, \\ \text{散乱；}\ \eta_d(x) &= -e^{ikx}, \\ \eta_d'(x) &= -e^{ik'x}, \end{aligned}\right\} (10)$$

とし流出条件を満たさない解を大文字で満たすものを小文字で表わす事としよう。

解は一般に次のように展開出来よう。

$$\left.\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{m=0}^\infty \varepsilon_m C_m^n \cos m\theta = \frac{\Phi_n(\theta)}{\sqrt{1-x^2}}, \\ p_n(x) &= \frac{\varphi_n(\theta)}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{m=0}^\infty \varepsilon_m c_m^n \cos m\theta, \end{aligned}\right\} (11)$$

次に一様流れの方向が逆になった時のポテンシャルを定義しよう。

そしてそれらの量に (～) 印を附して記す事にする。

水面条件は.

$$\tilde{p}(x) = -\left(i\alpha + \frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{\varphi}(x,0) - \gamma\tilde{\eta}(x), \qquad (12)$$

$$\tilde{\varphi}_y(x,0) = -\left(i\alpha + \frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{\eta}(x), \qquad (13)$$

$$\tilde{\varphi}(x,y) = \int_{-1}^{1}\tilde{p}(\xi)\tilde{S}(x-\xi,y)\,d\xi, \qquad (14)$$

$$\tilde{\eta}(x) = \int_{-1}^{1}\tilde{p}(\xi)\tilde{S}_2(x-\xi,0)\,d\xi, \qquad (15)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}\tilde{S}(x,y) &= S(-x,y),\\ \tilde{S}_2(x,y) &= S_2(-x,y),\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

境界条件としてその流れと等しい

$$\tilde{\eta}(x) = \eta(x), \quad \cdots \qquad (17)$$

とすると $\eta(x)$ が前後対称ならば

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\eta}(x) &= \eta(-x) = \eta(x),\\ \tilde{p}(x) &= p(-x),\end{aligned}\right\} \cdots (18)$$

又反対称ならば

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\eta}(x) &= \eta(x) = -\eta(-x),\\ \tilde{p}(x) &= -p(-x),\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

は直観的に明らかであろう。

ここで (16) と (17) から次の相反定理がある。

$$\int_{-1}^{1}p_j(x)\eta_i(x)\,dx = \int_{-1}^{1}p_j(x)\tilde{\eta}_i(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\tilde{p}_i(x)\eta_j(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\tilde{p}_i(x)\tilde{\eta}_j(x)\,dx, \qquad (20)$$

(11) にこれを適用すると

$$C^n_m = \tilde{C}^m_n, \quad \cdots\cdots (21)$$

又(18),(19)から

$$C^n_m = (-)^n \tilde{C}^n_m, \quad \cdots\cdots (22)$$

それ故今

$$R(x,\xi) = \tilde{R}(\xi,x) = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,\eta_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n(\xi)\,\tilde{\eta}_n(x)$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{(1-x^2)(1-\xi^2)}}\sum_{n,m=0}^{\infty} \varepsilon_n \varepsilon_m C^n_m \cos n\theta \cos m\theta, \quad (23)$$

なる関数を考えると

$$\left.\begin{aligned} P_n(x) &= \int_{-1}^{1} \eta(\xi) R(x,\xi)\, d\xi, \\ \tilde{P}_n(x) &= \int_{-1}^{1} \tilde{\eta}(\xi) \tilde{R}(x,\xi)\, d\xi. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (14)$$

のように解が表わされる。

さて一般に積分方程式(8)は $\eta_n(x)$ に対して唯一つの解を持つと考えられるので $P_n(x)$ は $x=\pm 1$ で無限大となる。

それ故後端において流出条件を満たすには $P_s(x)$ を使って

$$P'_n(x) = P_n(x) - \frac{\Phi_n(\pi)}{\Phi_s(\pi)} P_s(x), \quad \cdots (15)$$

としなければならないがそうすると $P'_n(x)$ に対する水面変位 ζ'_n は

$$\left.\begin{aligned} \zeta'_n(x) &= \cos n\theta + B_n e^{i\alpha x}, \\ B_n &= -\Phi_n(\pi) / \Phi_s(\pi), \end{aligned}\right\} \cdots (16)$$

なお　$e^{i\alpha x} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(\alpha) \cos n\theta$,

なる展開があるので

$$P_s(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m C_m^s \cos m\theta = \sum_n \varepsilon_n i^n J_n(\alpha) \sum_m \varepsilon_m C_m^n \frac{\cos m\theta}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$C_m^s = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(\alpha) C_m^n \quad , \quad \cdots (17)$$

$$P_d(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum \varepsilon_m C_m^d \cos m\theta, \quad (\eta_d(x) = -e^{iKx})$$

$$C_m^d = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(K) C_m^n \quad , \quad \cdots (18)$$

$$P_d'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_m \varepsilon_m C_m^{d'} \cos m\theta, \quad (\eta_d'(x) = -e^{-iK'x})$$

$$C_m^{d'} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(K') C_m^n \quad , \quad (19)$$

等を得る。

3. 浸水長の変化

速度は変らないで板の先端で長さが $2c$ だけ長くなったとすると圧力，水面変位は夫々

$$p(x,\alpha,\gamma) \longrightarrow p\left(\frac{x-c}{1+c},\alpha\sqrt{1+c},\gamma\sqrt{1+c}\right),$$

$$\eta(x,\alpha,\gamma) \longrightarrow (1+c)\,\eta\left(\frac{x-c}{1+c},\alpha\sqrt{1+c},\gamma\sqrt{1+c}\right),$$

のように変化するから c が充分小さいとするとその変化は

$$\Delta p(x,\alpha,\gamma) = p\left(\frac{x-c}{1+c},\alpha\sqrt{1+c},\gamma\sqrt{1+c}\right) - p(x,\alpha,\gamma)$$

$$\doteqdot c\left[\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)p(x,\alpha,\gamma) - (1+x)\frac{\partial}{\partial x}p(x,\alpha,\gamma)\right], \quad (1)$$

$$\Delta\eta(x,\alpha,\gamma) \doteqdot c\left[\eta(x,\alpha,\gamma) + \alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma} - (1+x)\frac{\partial}{\partial x}\eta(x,\alpha,\gamma)\right], \quad (2)$$

附録Bで見るようにこのような変化は結局どれか一つの解についてだけ判れば他のものはそれで表わせるから今簡単の為に P_d について考えて見よう。

$$\Delta P_d(x) \doteqdot c\left\{\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}-(1+x)\frac{\partial}{\partial x}\right\}P_d(x), \quad (3)$$

$$\Delta\eta_d(x) \doteqdot c(1-ik)e^{ikx}, \quad (4)$$

となるから特に

$$P_d^*(x) = P_d(x) + \Delta P_d(x), \quad \ldots \quad (5)$$

として

$$c = -\Phi_d(\pi)\Big/\left\{\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)\Phi_d(\pi)+\frac{1}{2}\Phi_d(\pi)\right\}, \quad (6)$$

とおくと，後端の流出条件は満たされ，この時水面変位は

$$\left.\begin{aligned} \eta_d^*(x) &= B_d e^{i\alpha x}, \\ B_d &= 1 + C(1 - iK), \end{aligned}\right\} \cdots (7)$$

となる。

このような解を用いると $\eta(x)$ に $e^{i\alpha x}$ を含まない解は次のように求められる。

$$\left.\begin{aligned} p_n^*(x) &= p_n(x) - \frac{B_n}{B_d} p_d^*(x), \\ \eta_n^*(x) &= \cos n\theta, \end{aligned}\right\} \cdots (8)$$

この演算は suffix d を d' 又は S に置換えて (4),(7) において K を $\alpha K'$ に置換えれば全く同様に成立つが今の場合これが直に散乱圧力となるのでこの方が便利であろう。

4. 係数の変化

今

$$f_{n,m} = \int_{-1}^{1} P_n(x)\,\eta_m(x)\,dx = \pi C_m^n, \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} e_m &= -\int_{-1}^{1} P_d(x)\,\eta_m(x)\,dx = -\pi C_m^d, \\ e'_m &= -\int_{-1}^{1} P'_d(x)\,\eta_m(x)\,dx = -\pi C_m^{d'}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$f^*_{n,m} = \int_{-1}^{1} P^*_n(x)\,\eta_m(x)\,dx\,; \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} e^*_m &= -\int_{-1}^{1} P^*_d(x)\,\eta_m(x)\,dx, \\ e'^*_m &= -\int_{-1}^{1} P'^*_d(x)\,\eta_m(x)\,dx, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

とおくと

$$\int_{-1}^{1} \Delta P_d(x)\,dx = \int_{-1}^{1+2c} P_d\left(\frac{x-c}{1+c}, \alpha\sqrt{1+c}, \gamma\sqrt{1+c}\right)dx - \int_{-1}^{1} P_d(x,\alpha,\gamma)\,dx$$

$$\fallingdotseq \pi c\left\{1 + \alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} + \gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\} A_0^d, \qquad (5)$$

$$\int_{-1}^{1} \Delta P_d(x)\,x\,dx \fallingdotseq \pi c\left[A_0^d + \left\{2 + \alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} + \gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\} A_1^d\right], \qquad (6)$$

等を得るがこれは §3 (3) を代入して部分積分をした式に等しい。

いずれにしても必要なだけ式をかけば

$$\left.\begin{aligned} e^*_0 &= e_0 - \pi c\left\{1 + \alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} + \gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\} A_0^d, \\ e^*_1 &= e_1 - \pi c\left[A_0^d + \left(2 + \alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} + \gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right) A_1^d\right], \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} f_{n0} &= f_{n0} + \frac{B_n}{B_d}\, e_0^* , \\ f_{n,1} &= f_{n,1} + \frac{B_n}{B_d}\, e_1^* , \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

等を得る。

係数の α, γ による微分については附録Bの関係があるので基本解がわかれば直接微分しなくとも求められる。

昭和　　年　　月　　日

附録A　重力のない場合

1. 極限移行

$\gamma(=g/U^2)$ が充分 0 に近い、つまりフルード数が無限に大きくなると速度ポテンシャルは振動翼の場合に一致するので大分簡単になる。
以下 $\gamma\to 0$ の極限移行を行い更に振動翼の解との一致を確かめよう。

$$\phi(x,y)=\int_{-1}^{1}p(\xi)S(x-\xi,y)\,d\xi, \qquad (1)$$

$$S(x,y)\underset{\gamma\to 0}{=}\frac{i}{2\pi}\int_0^\infty\left[\frac{e^{ikx}}{k-\alpha+\mu i}-\frac{e^{-ikx}}{k-\alpha+\mu i}\right]e^{ky}\,dk, \qquad (2)$$

$$\phi_y(x,0)=\int_{-1}^{1}p(\xi)S_y(x-\xi,0)\,d\xi, \qquad (3)$$

$$S_y(x)\equiv S_y(x,0)=-\frac{1}{\pi x}+i\alpha T(x), \qquad (4)$$

$$T(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\left[\frac{e^{ikx}}{k-\alpha+\mu i}+\frac{e^{-ikx}}{k+\alpha-\mu i}\right]dk, \qquad (5)$$

$$\zeta(x)=\int_{-1}^{1}p(\xi)S_2(x-\xi)\,d\xi, \qquad (6)$$

$$S_2(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\left[\frac{k e^{ikx}}{(k-\alpha+\mu i)^2}+\frac{k e^{-ikx}}{(k+\alpha-\mu i)^2}\right]dk, \qquad (7)$$

部分積分により

$$S_2(x)=-\frac{1}{\pi}+(1+i\alpha x)T(x), \qquad (8)$$

又

$$S_2(x)=T(x)+xS_y(x), \qquad (9)$$

なお

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\alpha\right)S_2(x)=S_y(x), \qquad (10)$$

この内特にSは簡単でpoleにおける留数のみとなり

$$S(x,-0) = \begin{cases} 0 & \text{for } x>0 \\ e^{i\alpha x} & \text{for } x<0 \end{cases} \quad \cdots \quad (11)$$

となる故(1)より

$$\phi(x,-0) = \begin{cases} \int_x^1 p(\xi) e^{i\alpha(x-\xi)} d\xi, & \text{for } x<1, \\ 0 & \text{for } x>1 \end{cases} \quad (12)$$

翼理論では circulation で表現されるが上式をxで微分したものが circulation の半分となっている。

次に

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{p(\xi)}{x-\xi} d\xi, \quad \cdots (13)$$

とおいておくと(5)式から

$$\frac{1}{k-\alpha+\mu i} = \frac{1}{i} \int_0^\infty e^{iu(k-\alpha+\mu i)} du$$

$$\frac{1}{k+\alpha-\mu i} = i \int_0^\infty e^{-iu(k+\alpha-\mu i)} du$$

であるから

$$T(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-i\alpha u} du}{x+u}, \quad (14)$$

となり(3)は

$$\phi_y(x,-0) = -g(x) - i\alpha e^{i\alpha x} \int_{+\infty}^{x} e^{-i\alpha\xi} g(\xi) d\xi, \quad (15)$$

とかける。

次に(8)において(14)を代入すると

$$S_2(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-i\alpha u} \frac{1-i\alpha u}{x+u} du. \quad (16)$$

となる故(6)は

$$\eta(x) = -e^{i\alpha x}\int_{+\infty}^{x} g(\xi)\{1+i\alpha(x-\xi)\}e^{-i\alpha\xi}\,d\xi, \quad (17)$$

(15), (17) の表現は次の関係、

$$\left(i\alpha - \frac{\partial}{\partial x}\right)\phi(x,-0) = p(x), \quad \cdots \quad (18)$$

$$\left(i\alpha - \frac{\partial}{\partial x}\right)\phi_y(x,-0) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{p(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2} = g_x(x), \quad (19)$$

$$\left(i\alpha - \frac{\partial}{\partial x}\right)\eta(x) = -\phi_y(x,-0), \quad (20)$$

を直接積分しても直ちに求まる。

2. 要素解

この節では簡単な応力に対する前節の ϕ_y, χ の具体的表示をもとめておく。

その為にこの節の suffix は以降の節のそれとは無関係である。

さて

$$P_n(x) = \cos n\theta / \sin\theta, \quad x = \cos\theta, \quad (1)$$

とおくと、

$$g_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{P_n(\xi)d\xi}{x-\xi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta\, d\theta}{\mathrm{ch}\, u - \cos\theta}$$

$$= \frac{e^{-nu}}{\sinh u}, \quad x = \cosh u,$$

となるが $g(x)$ については $|x|<1$ では主値をとるべきであるから

$$g_n(x)\Big|_{u=-i\theta} = -\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}, \quad \text{for } |x|<1, \quad (2)$$

特に $g_0 = 0$, $g_1 = -1$, $g_2 = -2x$, $g_3 = 1-4x^2$,

$|x|>1$ では、

$$\left.\begin{aligned} g_n &= g_{1n} + g_{2n}, \\ g_{1n} &= \frac{\mathrm{ch}\, nu}{\mathrm{sh}\, u}, \quad g_{2n} = -\frac{\mathrm{sh}\, nu}{\mathrm{sh}\, u} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

とおくと特に $g_{20} = 0$, $g_{21} = -1$, $g_{22} = -2x$, $g_{23} = 1-4x^2$

となって (2) と一致するから結局上のようにおくと、

$$\left.\begin{aligned} g_{1n}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{for } |x|<1 \\ \mathrm{ch}\, nu/\mathrm{sh}\, u, & \text{for } x>1 \end{cases} \\ g_{2n}(x) &= \begin{cases} -\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta} & \text{for } |x|<1 \\ -\dfrac{\mathrm{sh}\, nu}{\mathrm{sh}\, u} & \text{for } x>1 \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

となって g_{2n} は $|x|\leq 1$ に拘わらず同じ x の多項式である。

さて (1) を前節 (15), (17) に代入すると

$$\phi_{ny}(x) = -g_n(x) - i\alpha\int_{+\infty}^{x} g_n(\xi)\, e^{+i\alpha(x-\xi)}\, d\xi = -g_n - i\alpha I_n, \qquad (5)$$

$$\eta_n(x) = -I_n - \alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} I_n, \qquad (6)$$

$$I_n = e^{i\alpha x}\int_{+\infty}^{x} g_n(\xi)\, e^{-i\alpha\xi}\, d\xi, \qquad (7)$$

以下 $|x|<1$ で考える事にしよう。

I_n は又

$$\left.\begin{aligned} I_n &\equiv I_{1n} + I_{2n}, \\ I_{1n} &= \int_{+\infty}^{x} g_{1n}(\xi)\, e^{i\alpha(x-\xi)}\, d\xi, \quad I_{2n} = \int_{+\infty}^{x} g_{2n}(\xi)\, e^{i\alpha(x-\xi)}\, d\xi \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

とおくと (4) を代入して先ず

$$I_{1n} = -e^{i\alpha x}\int_{0}^{\infty} e^{-i\alpha\,\mathrm{ch}\,u}\,\mathrm{ch}\,nu\,du = \frac{\pi i}{2}(-i)^n H_n^{(2)}(\alpha)\, e^{i\alpha x}, \qquad (9)$$

$H_n^{(2)}$ は第2種 Hankel 関数とする。

又

$$I_{2n} = -\int_{+\infty}^{x} \mathrm{sh}\,nu\; e^{-i\alpha\,\mathrm{ch}\,u}\, du,$$

については一般的な表現は面倒であるが特に

$$\left.\begin{aligned} &I_{2,0} = 0, \quad I_{2,1} = \frac{1}{i\alpha}, \quad I_{2,2} = \frac{2x}{i\alpha} - \frac{2}{\alpha^2}, \\ &I_{2,3} = \frac{i}{\alpha} + \frac{2i}{\alpha^3} - \frac{2}{\alpha^2}x - \frac{4i}{\alpha}x^2, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

と計算出来る。

そこで

$$
\left.\begin{aligned}
I_0 &= \frac{i\pi}{2} H_0 e^{i\alpha x}, \quad I_1 = \frac{\pi}{2} H_1 e^{i\alpha x} + \frac{1}{i\alpha}, \\
I_2 &= \frac{\pi}{2i} H_2 e^{i\alpha x} + \frac{2x}{i\alpha} - \frac{2}{\alpha^2}, \\
I_3 &= -\frac{\pi}{2} H_3 e^{i\alpha x} + \frac{i}{\alpha} + \frac{8i}{\alpha^3} - \frac{8}{\alpha^2} x - \frac{4i}{\alpha} x^2,
\end{aligned}\right\} \quad (11)
$$

之れ故

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} I_0 &= \frac{\pi\alpha i}{2} \{ i x H_0 + H_0' \} e^{i\alpha x}, \\
\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} I_1 &= \frac{\pi\alpha}{2} \{ i x H_1 + H_1' \} e^{i\alpha x} + \frac{i}{\alpha}, \\
\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} I_2 &= \frac{\pi\alpha}{2i} \{ i x H_2 + H_2' \} e^{i\alpha x} - \frac{2x}{i\alpha} + \frac{4}{\alpha^2}, \\
\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} I_3 &= -\frac{\pi\alpha}{2} \{ i x H_3 + H_3' \} e^{i\alpha x} - \frac{i}{\alpha} - \frac{24i}{\alpha^3} + \frac{16}{\alpha^2} x + \frac{4i}{\alpha} x^2,
\end{aligned}\right\} \quad (12)
$$

ここに H_n は $H_n^{(2)}(\alpha)$ を意味し又 $H_n' \equiv \frac{d}{d\alpha} H_n^{(2)}(\alpha)$ とする。

よって

$$
\left.\begin{aligned}
\phi_{0y} &= \frac{\pi\alpha}{2} H_0 e^{i\alpha x}, \\
\phi_{1y} &= \frac{\pi\alpha}{2i} H_1 e^{i\alpha x}, \\
\phi_{2y} &= \frac{2i}{\alpha} - \frac{\pi\alpha}{2} H_2 e^{i\alpha x}, \\
\phi_{3y} &= \frac{2}{\alpha^2} + \frac{2ix}{\alpha} + \frac{i\pi\alpha}{2} H_3 e^{i\alpha x},
\end{aligned}\right\} \quad (13)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\eta_0 &= \frac{\pi}{2i} \{ (1 + i\alpha x) H_0 + \alpha H_0' \} e^{i\alpha x}, \\
\eta_1 &= -\frac{\pi}{2} \{ (1 + i\alpha x) H_1 + \alpha H_1' \} e^{i\alpha x}, \\
\eta_2 &= \frac{i\pi}{2} \{ (1 + i\alpha x) H_2 + \alpha H_2' \} e^{i\alpha x} - \frac{2}{\alpha^2}, \\
\eta_3 &= \frac{\pi}{2} \{ (1 + i\alpha x) H_3 + \alpha H_3' \} e^{i\alpha x} + \frac{16i}{\alpha^3} - \frac{8x}{\alpha^2},
\end{aligned}\right\} \quad (14)
$$

昭和　年　月　日

このようにして一般に ϕ_y は x の多項式と $e^{i\alpha x}$ の定数倍として表わされ、ζ は x の多項式と $e^{i\alpha x}$, $xe^{i\alpha x}$ の定数倍として表わされる。

さて振動翼理論では ζ は考えなくともよく ϕ_y のみ考えればよいから、$e^{i\alpha x}$ の因子を除く条件と後端の流出条件との2つ条件式があり、一方 ϕ_{0y}, ϕ_{1y} の2つの解は因子 $e^{i\alpha x}$ しかない いわば斉次解であるので P_0, P_1 は任意となり、上の2条件を満たす為に使われる。

そうして解は一意的に決まる。

我々の場合は更に ζ をも与えられたものに等しくしなければならないが流出条件と ϕ_y が $e^{i\alpha x}$ の因子を持たないとすると上述のように解は決まってしまい、その時上式からわかるように(14)式右辺中括弧中オ1項は消えるが $e^{i\alpha x}$ の因子は残ってしまう。

(これが問題の発端であった)

逆に ζ において $e^{i\alpha x}$, $xe^{i\alpha x}$ の2因子を除く為には2つの斉次解 P_0, P_1 が定まってしまうので Kutta の流出条件を満たす事が出来ない。

3. 解の表現

以下小文字で流出条件を満たす解を大文字でそれを満たさない解を表わす事にし

$$\left.\begin{aligned} &P_n(x)=\frac{1}{\sin\theta}\Phi_n(\theta),\quad p_n(x)=\frac{1}{\sin\theta}\varphi_n(\theta),\\ &\Phi_n(\theta)=\sum_{m=0}A^n_m\cos m\theta,\quad \varphi_n(\theta)=\sum_{m=0}a^n_m\cos m\theta,\end{aligned}\right\}\ (1)\qquad x=\cos\theta$$

とおこう。

ηとの対照は次の如く定義する。

圧力	η
P_S	$e^{i\alpha x}$,
P_0	1,
P_1	x,
p_0	$1+B_0e^{i\alpha x}$,
p_1	$x+B_1e^{i\alpha x}$,

(2).

そうすると前節の結果を使って

$$\left.\begin{aligned} &P_S(x)=\frac{1}{\sin\theta}\left(A^S_0+A^S_1\cos\theta\right),\\ &A^S_0=\frac{2i}{\pi\alpha}H_1\Big/\Delta,\quad \Delta=H_1H_0'-H_0H_1'\\ &A^S_1=\frac{2}{\pi\alpha}H_0\Big/\Delta,\quad \overset{\text{or}}{\Delta}=\frac{1}{\alpha}H_0H_1-H_0^2-H_1^2,\end{aligned}\right\}\ (3)$$

$$\left.\begin{aligned} &p_0(x)=\frac{1}{\sin\theta}\left(A^p_0+A^p_1\cos\theta+A^p_2\cos 2\theta\right),\\ &A^p_0=\frac{\alpha^2}{2\Delta}\left(H_1H_2'-H_2H_1'\right)=-\frac{H_1^2}{\Delta}-\frac{\alpha^2}{2},\\ &A^p_1=\frac{i\alpha^2}{2\Delta}\left(H_2H_0'-H_0H_2'\right)=i\alpha,\\ &A^p_2=-\frac{\alpha^2}{2},\end{aligned}\right\}\ (4)$$

$$P_1(x) = \frac{1}{\sin\theta}\left[A_0' + A_1'\cos\theta + A_2'\cos2\theta + A_3'\cos3\theta\right],$$

$$A_0' = \frac{\alpha}{i\Delta}\Big[$$

$$A_1' = \frac{1}{\Delta}\Big[$$

$$A_2' = -i\alpha\ ,\quad A_3' = -\frac{\alpha^2}{8}\ ,$$

$$\Phi_1(\pi) = \qquad\qquad (5)$$

小文字 p_n との関係は流出条件だけの違い故 (2) のように B_n を定義すると，

$$B_n = -\Phi_n(\pi)/\Phi_s(\pi)\ , \qquad (6)$$

で

$$p_n(x) = P_n(x) + B_n P_s(x),$$

つまり

$$a_m^n = A_m^n + B_n A_m^s\ , \qquad (7)$$

特に

$$p_0(x) = \frac{1}{\sin\theta}\left(a_0^0 + a_1^0\cos\theta + a_2^0\cos2\theta\right),$$

$$a_0^0 = \frac{\alpha^2}{2} - i\alpha C_1(\alpha),$$

ここに $C_1(\alpha) = H_1^{(2)}(\alpha)\Big/\left\{H_1^{(2)}(\alpha) + iH_0^{(2)}(\alpha)\right\}$.

(Theodorsen's function)

$$a_1^0 = -i\alpha C_1(\alpha),$$

$$a_2^0 = -\frac{\alpha^2}{2},\qquad \varphi_0(\pi) = 0,\ \varphi_0(0) = -2i\alpha C_1(\alpha),$$

$$B_0 = \frac{i\pi\alpha^2}{2}\left[\frac{H_1' + iH_0'}{H_1 + iH_0}H_1 + \frac{2}{\alpha}H_1 - H_0\right],$$

$$\frac{H_1' + iH_0'}{H_1 + iH_0} = -i - \frac{1}{\alpha}C_1(\alpha), \qquad (8)$$

$$P_1(x) = \frac{1}{\sin\theta}\left(a'_0 + a'_1\cos\theta + a'_2\cos 2\theta + a'_3\cos 3\theta\right),$$

$$a'_0 = \frac{i\alpha}{2} + \left(1+\frac{i\alpha}{2}\right)C_1(\alpha),$$

$$a'_1 = \frac{\alpha^2}{8} - \frac{i\alpha}{2} + \left(1+\frac{i\alpha}{2}\right)C_1(\alpha),$$

$$a'_2 = -i\alpha, \quad a'_3 = -\alpha^2/8,$$

$$\varphi_1(\pi) = 0, \quad \varphi_1(0) = -i\alpha + 2\left(1+\frac{i\alpha}{2}\right)C_1(\alpha),$$

$$B_1 = \frac{\pi\alpha}{4}\left[(1+i\alpha)H_0 + \left(i-\alpha-\frac{2}{i\alpha}\right)H_1 + \left(\frac{2}{\alpha}+i\right)H_1C_1(\alpha)\right], \quad (9)$$

B_n の表現は複雑であるが、次の関係から求められる。

$$B_n = \frac{\pi\alpha}{2i}\sum_m a^n_m(-i)^m H_m, \quad \cdots (10)$$

この時

$$\sum_m a^n_m(-i)^m H_m = 0, \quad \cdots (11)$$

（φ_y が $e^{i\alpha x}$ の因子を含まない条件）

であるから (11) を α で微分すると (10) 式は又

$$B_n = -\frac{\pi\alpha}{2i}\sum_m (-i)^m H_m\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}a^n_m\right), \quad (12)$$

と書く事も出来る。

4. 解のα微分

§1 (6) の積分方程式

$$\eta(x) = \int_{-1}^{1} p(\xi) S_2'(x-\xi)\,d\xi \quad \cdots (1)$$

の両辺をαで微分しよう。

§1 の核の積分表示から

$$\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} S_2'(x) = x \frac{\partial}{\partial x} S_2'(x), \qquad (2)$$

を得るから先ず

$$\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \eta(x) = \alpha \int_{-1}^{1} p_\alpha(\xi) S_2'(x-\xi)\,d\xi + \int_{-1}^{1} p(\xi)(x-\xi) \frac{\partial}{\partial x} S_2'(x-\xi)\,d\xi,$$

となるが (1) を x で微分した関係を使うと

$$-x \frac{\partial}{\partial x}\eta(x) + \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}\eta(x) = \alpha \int_{-1}^{1} p_\alpha(\xi) S_2'\,d\xi + \int_{-1}^{1} \xi p(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} S_2'(x-\xi)\,d\xi, \qquad (3)$$

或いは

$$(1-x)\frac{\partial}{\partial x}\eta(x) + \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}\eta(x) = \alpha \int_{-1}^{1} p_\alpha(\xi) S_2'(x-\xi)\,d\xi + \int_{-1}^{1} (\xi-1) p(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} S_2'(x-\xi)\,d\xi,$$

を得る。　但し $\frac{\partial}{\partial \xi} S_2'(x-\xi) = -\frac{\partial}{\partial x} S_2'(x-\xi)$。

この後の式で右辺第2項を部分積分する。

それは $p(-1)=0$ ならば出来て，

$$(1-x)\frac{\partial}{\partial x}\eta(x) + \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}\eta(x) = \int_{-1}^{1} \{\alpha p_\alpha(\xi) + (1-\xi) p_\xi(\xi) - p(\xi)\} S_2'(x-\xi)\,d\xi, \qquad (4)$$

を得る。

これは (1) と同型であるから例えば $p_0(x)$ については

$(1-x)\eta_{0x} + \alpha\,\eta_{0\alpha} = \alpha\,(iB_0 + B_{0\alpha})\,e^{-i\alpha x}$ 故

$$\alpha p_{0\alpha}(x) + (1-x) p_{0x}(x) - p_0(x) = \alpha\,(iB_0 + B_{0\alpha}) P_s(x), \quad (5)$$

なる関係を得る。

同様に $P_1(x)$ については

$(1-x)\,q_{1x} + \alpha\, q_{1\alpha} = 1-x + \alpha(iB_1 + B_{1\alpha})\, e^{i\alpha x}$ となつて、

$$\alpha P_{1\alpha}(x) + (1-x)P_{1x}(x) - P_1(x) = P_0(x) - P_1(x) + \alpha(iB_1 + B_{1\alpha})P_s(x), \quad (6)$$

又 p が流出条件を満たさぬ時は(3)の第1式において例えば

$$\left.\begin{aligned} \xi P_s(\xi) &= \xi P_s(\xi) + aP_s(\xi) + bP_0 - \{aP_s(\xi) + bP_0(\xi)\}, \\ a &= \{\Phi_0(\pi)\Phi_s(0) + \Phi_s(\pi)\Phi_0(0)\} / \{\Phi_s(\pi)\Phi_s(0) - \Phi_0(\pi)\Phi_s(0)\}, \\ b &= 2\Phi_s(\pi)\Phi_s(0) / \{上に同じ\}, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

のようにわけると上式右辺の括弧の中を除く部分は $\xi = \pm 1$ で 0 となるので部分積分が実行出来て、結局

$$\alpha P_{s\alpha}(x) - (a+x)P_{sx}(x) - (1 - i\alpha a)P_s(x) = bP_{0x}(x), \quad (8)$$

なる式を得る。

この式は又 $P_0(x) = P_0(x) + B_0 P_s(x)$, $a - bB_0 = 1$ なる事を考慮すると

$$\alpha P_{s\alpha}(x) - (1+x)P_{sx}(x) + (i\alpha a - 1)P_s(x) = bP_{0x}(x), \quad (9)$$

と書けて これと(5)から

$$\alpha P_{0\alpha}(x) - (1+x)P_{0x}(x) - P_0(x)$$

なる関数が $\alpha P_{s\alpha}(x) - (1+x)P_{sx}(x)$ と $P_s(x)$ の定数倍で表わせる事を示す。

さて最後に(5),(6)を積分すれば次の関係が得られる。

$$\left.\begin{aligned}
\alpha a^{0}_{0\alpha} &= \alpha(iB_0+B_{0\alpha})A^{s}_{0},\\
\alpha a^{0}_{1\alpha}+a^{0}_{1}-2a^{0}_{0} &= \alpha(iB_0+B_{0\alpha})A^{s}_{1},\\
\alpha a^{0}_{2\alpha}+2a^{0}_{2}-4a^{0}_{1}+4a^{0}_{0} &= 0,
\end{aligned}\right\}(10)$$

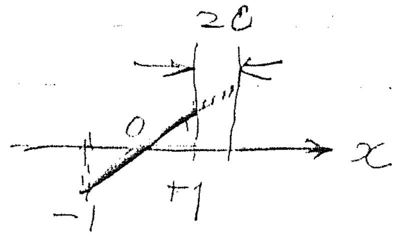
$$\left.\begin{aligned}
\alpha a^{1}_{0\alpha} &= A^{0}_{0}-A^{1}_{0}+\alpha(iB_1+B_{1\alpha})A^{s}_{0},\\
\alpha a^{1}_{1\alpha}+a^{1}_{1}-2a^{1}_{0} &= A^{0}_{1}-A^{1}_{1}+\alpha(iB_1+B_{1\alpha})A^{s}_{1},\\
\alpha a^{1}_{2\alpha}+2a^{1}_{2}-4a^{1}_{1}+4a^{1}_{0} &= A^{0}_{2}-A^{1}_{2},\\
\alpha a^{1}_{3\alpha}+3a^{1}_{3}-6a^{1}_{2}+6a^{1}_{0} &= -A^{1}_{3},
\end{aligned}\right\}(11)$$

今の場合各係数はαの解析関数として与えられているので直接確かめて見る事が出来る筈である。

又実際の係数の微分は直接αで微分する方が簡単である。

5. 長さの変化に対応する解

速度不変として先端で板の長さが $2c$ だけ長くなったとすると圧力、水面変位は夫々



$$p(x,\alpha) \longrightarrow p\left(\frac{x-c}{1+c}, \alpha\overline{1+c}\right),$$

$$\eta(x,\alpha) \longrightarrow (1+c)\,\eta\left(\frac{x-c}{1+c}, \alpha\overline{1+c}\right),$$

のように変化するから c が充分小さいものとすると

$$\Delta p(x,\alpha) = p\left(\frac{x-c}{1+c}, \alpha\overline{1+c}\right) - p(x,\alpha)$$

$$\fallingdotseq c\left[\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}p(x,\alpha) - (1+x)\frac{\partial}{\partial x}p(x)\right], \quad (1)$$

$$\Delta\eta(x,\alpha) = (1+c)\,\eta\left(\frac{x-c}{1+c}, \alpha\overline{1+c}\right) - \eta(x,\alpha)$$

$$\fallingdotseq c\left[\eta(x,\alpha) + \alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\eta(x,\alpha) - (1+x)\frac{\partial}{\partial x}\eta(x,\alpha)\right], \quad (2)$$

となる。

特に $P_s(x)$ については

$$\Delta P_s(x) = c\{\alpha P_{s\alpha}(x) - (1+x)P_{sx}(x)\}, \quad (3)$$

$$\Delta\eta_s(x) = c\,(1-i\alpha)\,e^{i\alpha x}, \quad (4)$$

ここで $\eta_s = e^{i\alpha x}$ であるから特に

$$c = -\Phi_s(\pi)\Big/\left\{\alpha\Phi_{s\alpha}(\pi) + \frac{1}{2}\Phi_s(\pi)\right\}, \quad (5)$$

と選んで

$$P_s^*(x) = P_s(x) + \Delta P_s(x)$$

$$= P_s(x) + c\{\alpha P_{s\alpha}(x) - (1+x)P_{sx}(x)\}, \quad (6)$$

(c は(5)式)

なる圧力分布は後端における流出条件を満たしている。(勿論前端で積分不可能!)

そして

$$\left.\begin{aligned} \eta_s^*(x) &= B_s e^{i\alpha x}, \\ B_s &= 1 + c(1-i\alpha) = 1 - \frac{(1-i\alpha)\Phi_s(\pi)}{\alpha\Phi_{s\alpha}(\pi) + \frac{1}{2}\Phi_s(\pi)}, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

この圧力分布を用いると§3に述べたようにその中に $e^{i\alpha x}$ の成分が出て来ないようにする事が出来る。つまり例えば $p_0(x)$ では

$$p_0^*(x) = p_0(x) - \frac{B_0}{B_s} p_s^*(x), \qquad (8)$$

とおけば §3 (2)から明らかなように

$$\eta_0^*(x) = 1, \qquad (9)$$

同様にして

$$\left.\begin{aligned} p_1^*(x) &= p_1(x) - \frac{B_1}{B_s} p_s^*(x), \\ \eta_1^*(x) &= x, \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

6. 力とモーメントの変化

力とモーメントについて次の記号を定めよう。

上下ゆれ
- 振幅　$h e^{i\omega t}$,
- 揚力　$F_{0,0} = \mathcal{R}_e \rho U^2 h l f_{0,0} e^{i\omega t}$,
- モーメント　$F_{0,1} = \mathcal{R}_e \rho U^2 h l^2 f_{0,1} e^{i\omega t}$,

（lは半板長）

縦ゆれ
- 振幅　$\theta e^{i\omega t}$,
- 揚力　$F_{1,0} = \mathcal{R}_e \rho U^2 h l f_{1,0} e^{i\omega t}$,
- モーメント　$F_{1,1} = \mathcal{R}_e \rho U^2 h l^2 f_{11} e^{i\omega t}$,

又今の場合入射波の波数はαとなる（重力がなくなるので波速は0となる）ので$P_s(x)$は散乱圧力となる。

そこで

散乱による力は
- 入射波振幅　$e^{i\alpha x + i\omega t}$,
- 揚力　$E_0 = \mathcal{R}_e \rho U^2 l e_0 e^{i\omega t}$,
- モーメント　$E_1 = \mathcal{R}_e \rho U^2 l^2 e_1 e^{i\omega t}$,

となる。

さて

$$\left.\begin{aligned} f_{0,0} &= \int_{-1}^{1} P_0(x)\,dx = \pi a_0^0, \\ f_{0,1} &= \int_{-1}^{1} P_0(x)\,x\,dx = \frac{\pi}{2} a_1^0, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} f_{1,0} &= \int_{-1}^{1} P_1(x)\,dx = \pi a_0^1, \\ f_{1,1} &= \int_{-1}^{1} P_1(x)\,x\,dx = \frac{\pi}{2} a_1^1, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} e_0 &= -\int_{-1}^{1} P_s(x)\,dx = -\pi A_0^s, \\ e_1 &= -\int_{-1}^{1} P_s(x)\,x\,dx = -\frac{\pi}{2} A_1^s, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

(1), (2) において p_0, p_1 が z に $e^{i\alpha x}$ の因子を持たない時の力、(3) においては後端の流出条件を満たす時の力は前節の結果を用いて

$$f_{0,0}^* = \int_{-1}^{1} p_0^*(x)\,dx, \quad f_{0,1}^* = \int_{-1}^{1} p_0^*(x)\,x\,dx, \quad (4)$$

$$f_{1,0}^* = \int_{-1}^{1} p_1^*(x)\,dx, \quad f_{1,1}^* = \int_{-1}^{1} p_1^*(x)\,x\,dx, \quad (5)$$

$$e_0^* = -\int_{-1}^{1} p_s^*(x)\,dx, \quad e_1^* = -\int_{-1}^{1} p_s^*(x)\,x\,dx, \quad (6)$$

と定義しておくと結局 Δp_s の積分が出来れば上の諸量は求まる。

所で

$$\int_{-1}^{1} \Delta p_s(x)\,dx = \int_{-1}^{1+2c} p_s\left(\frac{x-c}{1+c}, \alpha\overline{1+c}\right)dx - \int_{-1}^{1} p_s(x,\alpha)\,dx.$$

と考えられるから結局

$$\int_{-1}^{1} \Delta p_s(x)\,dx \fallingdotseq \pi c\left\{A_0^s + \alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}A_0^s\right\}; \quad (7)$$

となるがこれは前節(3)式右辺第2項を部分積分した時の結果に等しい。

同様にして

$$\int_{-1}^{1} \Delta p_s(x)\,x\,dx \fallingdotseq \int_{-1}^{1+2c} p_s\left(\frac{x-c}{1+c}, \alpha\overline{1+c}\right)x\,dx - \int_{-1}^{1} p_s(x,\alpha)\,x\,dx$$

$$\fallingdotseq \pi c\left\{A_0^s + A_1^s + \frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha}A_1^s\right\}, \quad (8)$$

よって前節の諸式を(4)(5)(6)に代入して先づ

$$e_0^* - e_0 = -\pi c\left\{A_0^s + \alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}A_0^s\right\},$$
$$e_1^* - e_1 = -\pi c\left\{A_0^s + A_1^s + \frac{\alpha}{2}A_{1\alpha}^s\right\}, \quad (9)$$

ここに c は §5 (5) によるものとする。

次に

$$f_{00}^* - f_{00} = +\frac{B_0}{B_s}e_0^*,$$
$$f_{0,1}^* = f_{0,1} + \frac{B_0}{B_s}e_1^*, \quad (10)$$

$$f_{1,0}^* = f_{10} + \frac{B_1}{B_s}e_0^*,$$
$$f_{1,1}^* = f_{1,1} + \frac{B_1}{B_s}e_1^*, \quad (11)$$

7. 後続波の振幅

§1 (7) 式で $x \to -\infty$ とすると pole を考えて

$$S_2(x) = -i\alpha e^{i\alpha x} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left\{ \frac{m e^{mx}}{(m-i\alpha)^2} \right\} dm, \qquad (1)$$

を得る故

$$S_2(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -i\alpha e^{i\alpha x}, \qquad (2)$$

よって §1 (6) より

$$\eta(x) = \int_{-1}^{1} p(\xi) S_2(x-\xi)\, d\xi$$

$$\xrightarrow[x\to-\infty]{} -i\alpha \bar{F}(\alpha) e^{i\alpha x}, \qquad (3)$$

$$\bar{F}(\alpha) = \int_{-1}^{1} p(\xi) e^{-i\alpha\xi}\, d\xi, \qquad (4)$$

となる。

特に

$$\bar{F}_s(\alpha) = \int_{-1}^{1} p_s(x) e^{-i\alpha x}\, dx = \pi \left[A_0^s J_0(\alpha) - i A_1^s J_1(\alpha) \right]$$

$$= \frac{2i}{i\alpha\Delta}\{ H_1 J_0 - H_0 J_1 \} = \frac{2}{\alpha\Delta}\{ Y_0 J_1 - Y_1 J_0 \}$$

$$= \frac{4}{\pi\alpha^2\Delta}, \quad \Delta = H_1 H_0' - H_0 H_1', \qquad (5)$$

のように簡単になる。

同様にして

$$\bar{F}_0(\alpha) = \int_{-1}^{1} p_0(x) e^{-i\alpha x}\, dx = \frac{2}{H_1 + i H_0}, \qquad (6)$$

$$F_1(\alpha)=\frac{4(1-i\alpha)}{i\alpha(H_1+i|H_0)}\simeq\int_{-1}^{1}P_1(x)e^{-i\alpha x}dx\,,\qquad(7)$$

ここに

$$\int_{-1}^{1}\Delta P_s(x)e^{-i\alpha x}dx=\int_{-1}^{1+2c}P_s\left(\frac{x-c}{1+c},\alpha\overline{1+c}\right)e^{-i\alpha x}dx-\int_{-1}^{1}P_s(x,\alpha)e^{-i\alpha x}dx$$

$$=(1+c)\int_{-1}^{1}P_s(\xi,\alpha\overline{1+c})e^{-i\alpha(1+c)\xi-i\alpha c}d\xi-\int_{-1}^{1}P_s(x,\alpha)e^{-i\alpha x}dx$$

$$=(1+c)e^{-i\alpha c}F_s(\alpha\overline{1+c})-F_s(\alpha)\doteqdot$$

$$\doteqdot c\left[(1-i\alpha)F_s(\alpha)+\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}F_s(\alpha)\right]\,,\quad\cdots(8)$$

それなら. §5(5),(6),(7) によって

$$F_s^*(\alpha)=\int_{-1}^{1}P_s^*(x)e^{-i\alpha x}dx=F_s(\alpha)+c\left[(1-i\alpha)F_s+\alpha F_{s\alpha}\right]$$

$$=B_sF_s(\alpha)+c\alpha\frac{d}{d\alpha}F_s(\alpha)\,,\quad\cdots(9)$$

従って

$$\left.\begin{aligned}F_0^*(\alpha)&=\int_{-1}^{1}P_0^*(x)e^{-i\alpha x}dx=F_0(\alpha)-\frac{B_0}{B_s}F_s^*(\alpha)\,,\\F_1^*(\alpha)&=\int_{-1}^{1}P_1^*(x)e^{-i\alpha x}dx=F_1(\alpha)-\frac{B_0}{B_s}F_s^*(\alpha)\,,\end{aligned}\right\}(10)$$

となる。

附録 B　解の α, γ 微分

§2 (8) を再録すると

$$\eta(x) = \int_{-1}^{1} p(\xi)\, S_2(x-\xi)\, d\xi \,, \qquad \cdots\cdots \qquad (1)$$

であるが、後に示すように

$$\left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma}\right) S_2(x) = x \frac{\partial}{\partial x} S_2(x) \,, \qquad (2)$$

なる関係があるので (1) の両辺を α, γ で微分すると、

$$\left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma}\right) \eta(x) = \int_{-1}^{1} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma}\right) p(\xi)\, S_2(x-\xi)\, d\xi$$

$$+ \int_{-1}^{1} p(\xi)\, (x-\xi) \frac{\partial}{\partial x} S_2(x-\xi)\, d\xi \,,$$

となるから (1) および (1) の両辺を x で微分した関係を使うと上式から

$$\left\{\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - x \frac{\partial}{\partial x}\right\} \eta(x) = \int_{-1}^{1} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma}\right) p(\xi)\, S_2(x-\xi)\, d\xi$$

$$+ \int_{-1}^{1} p(\xi)\, \xi \frac{\partial}{\partial \xi} S_2(x-\xi)\, d\xi \,, \qquad (3)$$

を得る。

特に　$p(-1) = 0$ の時は少し変形して部分積分すると

$$\left\{\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + (1-x) \frac{\partial}{\partial x}\right\} \eta(x) = \int_{-1}^{1} \left\{\left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi}(1-\xi)\right\} p(\xi) \times$$

$$\times\, S_2(x-\xi)\, d\xi \,, \qquad (4)$$

となる。

附録C 核の微分

昭和　　年　　月　　日

§2(7)を再録すれば

$$S_2(x) \equiv S_2(x,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[\frac{e^{ikx}}{A(k)} + \frac{e^{-ikx}}{B(k)}\right] k\,dk\,, \quad (1)$$

について

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} + \gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right) S_2(x) = x\frac{\partial}{\partial x} S_2(x)\,, \quad (2)$$

の関係を証明したい。

先ず

$$\left.\begin{aligned} A(k) &= k^2-(2\alpha+\gamma)k+\alpha^2 = (k-K)(k-K')\,,\\ B(k) &= k^2+(2\alpha-\gamma)k+\alpha^2 = (k-\beta)(k-\beta')\,, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} \left.\begin{matrix}K\\K'\end{matrix}\right\} &= \alpha+\frac{\gamma}{2}\mp\sqrt{4\alpha\gamma+\gamma^2}\,,\\ \left.\begin{matrix}\beta\\\beta'\end{matrix}\right\} &= -\alpha+\frac{\gamma}{2}\mp\sqrt{\gamma^2-4\alpha\gamma}\,, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

とおいて

$$\left.\begin{aligned} \alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} &= \alpha K_\alpha\frac{\partial}{\partial K} + \alpha K'_\alpha\frac{\partial}{\partial K'}\\ \gamma\frac{\partial}{\partial\gamma} &= \gamma K_\gamma\frac{\partial}{\partial K} + \gamma K'_\gamma\frac{\partial}{\partial K'} \end{aligned}\right\}$$

であり微分を実行すると

$$\left.\begin{matrix}\alpha K_\alpha+\gamma K_\gamma\\ \alpha K'_\alpha+\gamma K'_\gamma\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}K\\K'\end{matrix}\right\} \quad\cdots \quad (5)$$

同様に

$$\left.\begin{matrix}\alpha\beta_\alpha+\gamma\beta_\gamma\\ \alpha\beta'_\alpha+\gamma\beta'_\gamma\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\beta\\\beta'\end{matrix}\right\}\,, \quad (6)$$

となる事から結局

$$\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} + \gamma\frac{\partial}{\partial\gamma} = K\frac{\partial}{\partial K} + K'\frac{\partial}{\partial K'} = \beta\frac{\partial}{\partial\beta} + \beta'\frac{\partial}{\partial\beta'}\,, \quad (7)$$

となる。

次に部分分数に展開すると

$$\frac{k}{A(k)} = \frac{1}{K-K'}\left(\frac{K}{k-K} + \frac{-K'}{k-K'}\right),$$

$$\frac{k}{B(k)} = \frac{1}{\beta-\beta'}\left(\frac{\beta}{k-\beta} - \frac{\beta'}{k-\beta'}\right),$$

故これを(7)を使って微分すると

$$\left.\begin{aligned}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)\frac{k}{A} &= \frac{1}{K-K'}\left\{\frac{K^2}{(k-K)^2} - \frac{K'^2}{(k-K')^2}\right\}\\ \left(\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)\frac{k}{B} &= \frac{1}{\beta-\beta'}\left\{\frac{\beta^2}{(k-\beta)^2} - \frac{\beta'^2}{(k-\beta')^2}\right\}\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

所で k について部分積分すると

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{K-K'}\int_0^\infty\left\{\frac{K^2}{(k-K)^2} - \frac{K'^2}{(k-K')^2}\right\}e^{ikx}\,dk &= ix\int_0^\infty \frac{k^2}{A}e^{ikx}\,dk,\\ \frac{1}{\beta-\beta'}\int_0^\infty\left\{\frac{\beta^2}{(k-\beta)^2} - \frac{\beta'^2}{(k-\beta')^2}\right\}e^{ikx}\,dk &= -ix\int_0^\infty \frac{k^2}{B}e^{-ikx}\,dk\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

となる事がわかるので (1) の両辺に $\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)$ なる演算を施こせば明らかに (2) が成立つ。