

昭和50年 / 月 7 日

## 3次元滑走板の動揺問題

別所正利

## 内容

頁

## 序

0

1. 速度ポテンシャルと境界条件

1

2. Reverse Flow Potential

5

3. 相反定理

10

4. 境界値問題について

14

5. カとモーメント

16

6. アスペクト比の大きい場合

20

7. ストリップ法

22~24

附録 A 核関数

(別冊)

" B 誘導速度

B-1~6

## 序

2次元滑走板 (アスペクト比  $\infty$ ) については浸水長の変化を考えないと工合が悪い事は既に示したため、一般に滑走艇はアスペクト比が小さいので3次元影響を考えなければならぬだろう。

本報では3次元滑走板の一般論を展開し境界値問題について考察した。

その際、附録 A において核関数を一重積分表示し数値計算の便をはかった。

又附録 B においてアスペクト比の大きい場合と小さい場合における速度成分を2次元的部分と3次元誘導成分に分離しそれを用いてアスペクト比の大きい場合と小さい場合の差について近似的境界値問題を定式化した。

この内アスペクト比の小さい場合はストリップ法あるいは細長艇理論となる訳であるが今の場合細長艇理論におけると同様 Kutta の流出条件を満たす事が出来ない。

それを満たす為には誘導速度成分を考慮に入れなければならないが従来このような試みは特異積分の難点の為に揚力面理論として行われているものである。

いづれにしてもやはり2次元の場合と同様浸水面積の変化はこの問題に固くは本質的重要性を持つと考えられる。

## 1. 速度ポテンシアルと境界条件

水面変位を  $\zeta(x, y)$  とすると

水面では、

$$\phi_z(x, y, 0, t) = -\left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x}\right) \zeta(x, y, t), \quad (1)$$

$$\frac{1}{\rho} p(x, y, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x}\right) \phi(x, y, 0, t) - g \zeta(x, y), \quad (2)$$

あるいは(2)式から  $\zeta$  を消去して、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \phi(x, y, 0, t) + g \frac{\partial}{\partial z} \phi(x, y, 0, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{p(x, y, t)}{\rho}, \quad (3)$$

船の進行方向と  $\theta$  の角をなす方向からの単位波高の入射波の波高の方程式は、

$$\frac{1}{g} \left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x}\right) \phi_I(x, y, 0; \theta; t) = \zeta_I(x, y; \theta; t)$$

$$= e^{iK(x \cos \theta + y \sin \theta) + i\omega t} \quad (3')$$

波長を  $\lambda$  とすると  $\lambda = 2\pi/K$ , 又波円周波数は  $\omega_0$  とし  $\omega$  は出会円周波数とする。 ( $K = \omega_0^2/g$ )

すると、

$$\frac{2\pi}{\omega} = T_e = \frac{\lambda}{c + U \cos \theta} = \frac{2\pi/K}{\sqrt{gK} + U \cos \theta}$$

$$\omega = \sqrt{gK} + KU \cos \theta = \omega_0 + \frac{\omega_0^2 U}{g} \cos \theta,$$

... (4)

知られる速度ポテンシアルは、

$$\phi_I(x, y, z; \theta; t) = \frac{g}{i\omega_0} e^{Kz + iK(x \cos \theta + y \sin \theta) + i\omega t}, \quad (5)$$

昭和 年 月 日

すべての現象が時間に対して正弦的に振動するものとし

$$f(x, y, z; t) \rightarrow \operatorname{Re} \{ f(x, y, z) e^{i\omega t} \} \quad (6)$$

のように表わされるものとする。 (1), (2), (3), (5) は夫々以下二次の形になるものとする。

ここで  $U=1$  とおき  $\gamma/U^2 = \gamma$ ,  $\omega/U = \alpha$  とする。  
又圧力は  $\rho U^2$  正規化する。

$$(i\alpha - \frac{\partial}{\partial x}) \phi(x, y, 0) - \gamma \zeta(x, y) = p(x, y), \quad (7)$$

$$\phi_z(x, y, 0) = -(i\alpha - \frac{\partial}{\partial x}) \zeta(x, y), \quad (8)$$

$$\left\{ (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x})^2 + \gamma \frac{\partial}{\partial z} \right\} \phi(x, y, 0) = (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x}) p(x, y), \quad (9)$$

$$\zeta_z(x, y) = e^{iK(x\omega_0 + y\alpha_0)} \quad (10)$$

$$\phi_z(x, y, z; K(\theta)) = \frac{\gamma}{i\omega_0} e^{4z + iK(x\omega_0 + y\alpha_0)} \quad (11)$$

このような運動が  $z=0$  における  $F$  上の圧力分布で表わされる時の速度ポテンシャルは

$$\phi(x, y, z) = \iint_F p(\xi, \eta) S(x-\xi, y-\eta, z) dF, \quad (12)$$

と表わされる。

境界条件は二様にかいて

$$\zeta(x, y) = \iint_F p(\xi, \eta) S_z(x-\xi, y-\eta, 0) dF \quad (13)$$

$$\phi_z(x, y, 0) = \iint_F p(\xi, \eta) S_z(x-\xi, y-\eta, 0) dF, \quad (14)$$

昭和 年 月 日

この時(8)から明らかのように、(13)において、

$$\psi(x, y) = e^{i\alpha x} f(y) \quad (15)$$

に対応する解は(14)では不定であるから2次元問題からの類推によりこれは後端の流出条件によって定められる。あるいは圧力として後端で0となるものを考えれば(14)の解は一義的に定まるか一方その解を(13)に代入すると $\psi(x, y)$ は一義的に定まるので $\psi$ が与えられたものとは必ずしも一致しない。この時 $x$ 方向の化熱率は与えられたものと一致しているから結局 $y$ 方向の rise of floor が要なる事になる。

結局(14)だけでは rise of floor に与える境界条件が欠けている。

次に散乱ポテンシャルについての境界条件は

$$\phi_{\alpha\beta}(x, y, 0; K, \theta) = -\left(i\alpha - \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi_{\alpha}(x, y; K, \theta) \quad (16)$$

$$\psi_{\alpha}(x, y; K, \theta) = -\psi_{\beta}(x, y) = -e^{iK(x\cos\theta + y\sin\theta)}$$

としよう。

さて無限遠方では、附録 A §5 により

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi \quad (\varphi > 0) \text{ とし}$$

$$\int_{\Gamma} p(x, y) e^{-iK(x\cos\varphi + y\sin\varphi)} d\Gamma = H(K, \varphi), \quad (17)$$

なる関数を導入して

$$\begin{aligned}
 \phi(x, y, z) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} & \frac{i}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi - \frac{\pi}{2}} \left( \phi_I(x, y, z; \kappa, u) H(\kappa, u) \kappa^2 \right. \\
 & \left. - \phi_I(x, y, z; \kappa', u) H(\kappa', u) \kappa'^2 \right) \frac{du}{\sqrt{\gamma^2 + 4\alpha\gamma\cos u}} \\
 & + \frac{i}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi + \frac{\pi}{2}} \phi_I(x, y, z; \kappa', u) H(\kappa', u) \frac{\kappa'^2 du}{\sqrt{\gamma^2 + 4\alpha\gamma\cos u}} \\
 & + \frac{i}{2\pi} \int_{\varphi + \frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \phi_I(x, y, z; \kappa, u) H(\kappa, u) \frac{\kappa^2 du}{\sqrt{\gamma^2 + 4\alpha\gamma\cos u}}, \quad (18)
 \end{aligned}$$

但し  $(\gamma, \alpha) \neq (0, 0)$  なら  $\omega\theta_0 = \frac{\gamma}{\alpha}$  とし  $\pi + \theta_0 > u > \pi - \theta_0$  ならば積分しない。

$$\text{又} \quad \left. \begin{matrix} \kappa(u) \\ \kappa'(u) \end{matrix} \right\} = \frac{\gamma}{2} \sec^2 u + \alpha \sec u \mp \frac{\sec^2 u}{2} \sqrt{\gamma^2 + 4\alpha\gamma\cos u}, \quad (19)$$

ここで  $\kappa, \kappa'$  は (7) の 2 本根であって  $u > 0$  なら  $\kappa'$   $\kappa(u)$  に対応するのは (19) の  $\kappa'$  に対応するのは  $\kappa$  である。



昭和 年 月 日

散乱ポテンシャルでは.

$$\tilde{\zeta}_d(x, y; \kappa, \theta) = -e^{-i\kappa(x \cos \theta + y \sin \theta)} = \zeta_d(x, y; \kappa, \theta), \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{\phi}_d(x, y, 0; \kappa, \theta) = -\frac{\partial}{\partial z} \tilde{\phi}_I = +\frac{\partial}{\partial z} \bar{\phi}_I = -\frac{\partial}{\partial z} \bar{\phi}_d, \quad (10)$$

と取って (3) の  $T^u$  - 項に Reverse flow の B. C. は

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\zeta}(x, y) &= \bar{\zeta}(x, y) \\ \tilde{\phi}_z(x, y, 0) &= -\bar{\phi}_z(x, y, 0) \end{aligned} \right\} \text{on } F, \quad (11)$$

と取って Direct flow の B. C. に対応させておこう.

無限遠方では.

$$\tilde{H}(\kappa, u) = \iint_{\tilde{\Gamma}} \tilde{\rho}(x, y) e^{i\kappa(x \cos u + y \sin u)} dF, \quad (12)$$

とおいて  $(x + iy = R e^{i\varphi})$ 

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(x, y, z) &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{i}{2\pi} \int_{\varphi - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \tilde{\phi}_I(x, y, z; \kappa, u) \tilde{H}(\kappa, u) \kappa^2 \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\phi}_I(x, y, z; \kappa', u) \tilde{H}(\kappa', u) \kappa'^2 \right\} \frac{du}{\sqrt{\delta^2 + 4\alpha\delta \cos u}} \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \varphi} \tilde{\phi}_I(x, y, z; \kappa', u) \tilde{H}(\kappa', u) \frac{\kappa'^2 du}{\sqrt{\delta^2 + 4\alpha\delta \cos u}} \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int_{\varphi + \frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \tilde{\phi}_I(x, y, z; \kappa, u) \tilde{H}(\kappa, u) \frac{\kappa^2 du}{\sqrt{\delta^2 + 4\alpha\delta \cos u}}, \quad (13) \end{aligned}$$

$F$  領域  $F$  が前後対称ならば "Direct flow と Reverse flow は 流れの方向 だけの差" であるから 物理的な対称性から直ちに.

$\zeta(x) = \bar{\zeta}(-x)$  の場合

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\zeta}(xy) &= \bar{\zeta}(xy) = \zeta(-x) \\ \tilde{\phi}(x, y, z) &= -\bar{\phi}(-x, y, z) \\ \tilde{p}(x, y) &= p(-x, y) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$\zeta(x) = -\bar{\zeta}(-x)$  ならば

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\zeta}(xy) &= \bar{\zeta}(xy) = -\zeta(-x) \\ \tilde{\phi}(x, y, z) &= \bar{\phi}(-x, y, z) \\ \tilde{p}(x, y) &= -p(-x, y) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

となる事がわかるから Reverse flow pot. を別に 解く 必要はない。

しかし  $F$  が前後非対称の場合は船型が 異なる事になるので 別々に 解かねばならない だろう。

そのような一般的な場合には次の関係が成立つ。

今  $\zeta$  に関する積分方程式 §1 (13) §2 (6) から唯一の解を持つとしよう。(この解は §4 に述べるように 流出条件は満たしていないと考えられるので 圧力は 大文字で表わす事にする)

$F$  上の与えられた境界条件  $\zeta$  に対し Reverse flow では (11) のように定義したから §1 (18) と §2 (13) から  $\{\tilde{\phi} + \bar{\phi}\}$  を考えると  $F$  上の水面変位は 0 となるが、上流側にも後流側にも波がある。そこで片方の波を入射波に見立て、散乱ポテンシャルを導入し 解の唯一性を使うと 2 次式を得る。

昭和 年 月 日

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) + \bar{\phi}(x, y, z) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \Phi_a(x, y, z; x, u) \bar{H}(x, u) x^2 \right. \\ & \left. - \Phi_a(x, y, z; x', u) \bar{H}(x', u) x'^2 \right\} \frac{du}{\sqrt{\delta^2 + 4\alpha\delta \cos u}} \\ & + \frac{i}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left\{ \Phi_a(x, y, z; x, u) \bar{H}(x, u) x^2 \right. \\ & \left. + \Phi_a(x, y, z; x', u) \bar{H}(x', u) x'^2 \right\} \frac{du}{\sqrt{\delta^2 + 4\alpha\delta \cos u}}, \quad (1.6) \end{aligned}$$

但し

$$\Phi_a(x, y, z; x, u) = \phi_r(x, y, z; x, u) + \phi_a(x, y, z; x, u), \quad (1.7)$$

あるいは直接圧力について

$$P(x, y) - \bar{P}(x, y) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ P_a(x, y; x, u) \bar{H}(x, u) x^2 - P_a(x, y; x', u) \bar{H}(x', u) x'^2 \right\} \\ & \quad \times \frac{du}{\sqrt{\delta^2 + 4\alpha\delta \cos u}} \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left\{ P_a(x, y; x, u) \bar{H}(x, u) x^2 + P_a(x, y; x', u) \bar{H}(x', u) x'^2 \right\} \\ & \quad \times \frac{du}{\sqrt{\delta^2 + 4\alpha\delta \cos u}}, \quad (1.8) \end{aligned}$$

を得る。

どちらの側の波を入射波と見たてゝかは自由であるから次のような対称的な式も成立つ。

昭和 年 月 日

$$\tilde{\Phi}(\alpha, y, z) + \overline{\Phi}(\alpha, y, z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \tilde{\Phi}_d(\alpha, y, z; \kappa, u) \overline{F}(\kappa, u) \kappa^2 \right. \\ \left. - \operatorname{sgn}(\cos u) \tilde{\Phi}_d(\alpha, y, z; \kappa', u) \overline{F}(\kappa', u) \kappa'^2 \right\} \frac{du}{\sqrt{\delta^2 + 4\alpha \delta \cos u}}, \quad (19)$$

121

$$\tilde{\Phi}_d = \tilde{\Phi}_I + \tilde{\Phi}_d, \quad (20)$$

$$\tilde{P}(\alpha, y) - \overline{P}(\alpha, y) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \tilde{P}_d(\alpha, y; \kappa, u) \overline{F}(\kappa, u) \kappa^2 \right. \\ \left. - \operatorname{sgn}(\cos u) \tilde{P}_d(\alpha, y; \kappa', u) \overline{F}(\kappa', u) \kappa'^2 \right\} \frac{du}{\sqrt{\delta^2 + 4\alpha \delta \cos u}}, \quad (21)$$

其後複素量は物理的には時間を逆にした  
時の諸量と考えられるから結局 Reverse flow  
の諸量は散乱ポテンシャルが判れば Direct  
flow のそれから直接計算出来る事になる。

## 3. 相反定理

今

$$f_{jz} = \iint_H P_j(x, y) \tilde{\zeta}_i(x, y) dF, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad (1)$$

$$\tilde{f}_{ji} = \iint_H \tilde{P}_j(x, y) \zeta_i(x, y) dF,$$

$$\left. \begin{array}{l} h_{jz} = - \iint_H P_j(x, y) \tilde{\phi}_{iz}(x, y, a) dF, \\ \tilde{h}_{ji} = - \iint_H \tilde{P}_j \phi_{iz} dF, \end{array} \right\} \quad (2)$$

各積分を導入すると、§1 (13) (14), §2 (5) (7) の表示に §2 (8) の関係を参照して積分順序の変更により、花岡の定理として

$$f_{ji} = \tilde{f}_{ij}, \quad (3)$$

$$h_{ji} = \tilde{h}_{ij}, \quad (4)$$

を得る。

但し (4) についてもは  $\tilde{P}_i, P_j$  が共に流出条件を満たすかあるかは

$$\iint_H \tilde{P}_i P_j dF < \infty \quad (5)$$

でなければならぬ。

さて  $\tilde{\zeta} = \bar{\zeta}$  であるから  $\zeta$  : real ならば

$$f_{jz} = \iint_H P_j \zeta_i dF, \quad \text{for } \zeta \text{ real.} \quad (6)$$

又特に  $\zeta = -\zeta_I + \zeta_d$  とすると

$$f_{jd} = - \iint_H P_j e^{-i\alpha(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} dF = + \iint_H \tilde{P}_j \tilde{\zeta}_d = + \iint_H \tilde{P}_d \zeta_j dF$$

となつて

$$H_j(x, \theta) = - \int_{\tilde{H}} = - \iint_{\tilde{H}} \tilde{P}_d(x, y; x, \theta) \zeta_j(x, y) dF, \quad (17)$$

$$\tilde{H}_j(x, \theta) = - \iint_{\tilde{H}} P_d(x, y; x, \theta) \tilde{\zeta}_j(x, y) dF,$$

$$\begin{aligned} \text{又 } h_{jd} &= + \iint_{\tilde{H}} P_j \frac{\partial \tilde{\phi}_z}{\partial z} dF = -i\omega_0 \iint_{\tilde{H}} P_j e^{-i\kappa(x\omega_0 + y\alpha_0)} dF \\ &= - \iint_{\tilde{H}} \tilde{P}_d \phi_{jz} dF \end{aligned}$$

$$i\omega_0 H_j(x, \theta) = \iint_{\tilde{H}} \tilde{P}_d(x, y; x, \theta) \phi_{jz}(x, y, 0) dF, \quad (18)$$

$$i\omega_0 \tilde{H}_j(x, \theta) = \iint_{\tilde{H}} P_d(x, y; x, \theta) \tilde{\phi}_{jz}(x, y, 0) dF.$$

これから波の強制力  $\kappa$  Ketchin 関数  $\zeta$  により定められる事からわかる事は又 §1 (18), §2 (13) により無限遠方の波高により定められる事からわかるかとの時.

Direct flow の波高からは Reverse flow の波の強制力から定められ又その逆も成立している。

もし  $\tilde{H}$  が前後対称なら §2 (14), (15) の関係から  $H$  と  $\tilde{H}$  の間には簡単な関係がある。

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x, \theta) &= \iint_{\tilde{H}} \tilde{P}(x, y) e^{i\kappa(x\omega_0 + y\alpha_0)} dF = \iint_{x=-\tilde{x}} P(-x, y) e^{i\kappa(x\omega_0 + y\alpha_0)} dF \\ &= \iint P(x', y) e^{-i\kappa(x'\omega_0 - y\alpha_0)} dF = H(x, -\theta), \quad (19) \\ &\quad \text{for } \tilde{\zeta} = \zeta(-x) \text{ real} \end{aligned}$$

$$\tilde{H}(x, \theta) = -H(x, -\theta) \text{ for } \zeta(-x) = -\zeta(x) \text{ i real}$$

があるか一般には §2 の ) の関係を使って

$H_d$  を使って定めなければならぬ。

昭和 年 月 日

エネルギーおよび力に對する 相互定理 について述べよう。

$$\text{今 } \quad = \frac{f_i}{f_j} - \frac{\bar{f}_i}{\bar{f}_j}$$

$$I = \iint_{\bar{H}} \{ p_j(x, y) \tilde{f}_i(x, y) - \bar{p}_i(x, y) \tilde{f}_j(x, y) \} d\bar{H} \quad (10)$$

となる。

$\tilde{f}_i(x, y) = \bar{f}_i(x, y)$  であるから 相互定理より

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\bar{H}} \{ p_j \tilde{f}_i - \bar{p}_i \tilde{f}_j \} d\bar{H} = \iint_{\bar{H}} \{ p_j \tilde{f}_i - \bar{p}_j \tilde{f}_i \} d\bar{H} \\ &= \iint_{\bar{H}} \{ p_j - \bar{p}_j \} \tilde{f}_i d\bar{H} \quad (10') \end{aligned}$$

となる。

§2 (1) を代入して (7) を利用すると

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \tilde{H}_i(x, u) \tilde{H}_j(x, u) x^2 - \tilde{H}_i(x', u) \tilde{H}_j(x', u) x'^2 \right\} \frac{du}{\sqrt{\gamma^2 + 4\alpha\delta \cos u}} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \tilde{H}_i(x, u) \tilde{H}_j(x, u) x^2 + \tilde{H}_i(x', u) \tilde{H}_j(x', u) x'^2 \right\} \frac{du}{\sqrt{\delta^2 + 4\alpha\gamma \cos u}} \quad (11) \end{aligned}$$

を得る。

昭和 年 月 日

同様にして、

$$J = \iint_{\bar{H}} \{ p_j \bar{\phi}_{i2} + \bar{p}_i \phi_{j2} \} dF, \quad (12)$$

と仮定し、

$$J = \iint_{\bar{H}} \{ \bar{p}_i \bar{\tilde{\phi}}_{j2} + p_j \tilde{\phi}_{i2} \} dF = +h_{ji} + \overline{h_{ij}}$$

$$= - \iint_{\bar{H}} \{ \bar{p}_j \bar{\phi}_{i2} + p_i \tilde{\phi}_{j2} \} dF$$

$$= - \iint_{\bar{H}} (p_i - \bar{p}_j) \tilde{\phi}_{i2} dF, \quad \dots (13)$$

以上より

$$h_{ji} + \overline{h_{ij}} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{H}_i^*(\alpha, u) \bar{\tilde{H}}_j(\alpha, u) \frac{\alpha^2 du}{\sqrt{\alpha^2 + 4\alpha\delta\cos u}}$$

$$= \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{H}_i^*(\alpha', u) \bar{\tilde{H}}_j(\alpha', u) \frac{\alpha'^2 \operatorname{sgn}(\cos u) du}{\sqrt{\alpha'^2 + 4\alpha'\delta\cos u}}, \quad (14)$$

$$\tilde{H}_i^*(\alpha, u) = \iint_{\bar{V}} P_d(x, y; \alpha, u) \tilde{\phi}_{i2}(x, y, 0) dF, \quad (15)$$

したがって  $p_i, \bar{p}_j$  等は、流出条件を満足しなければならない。

## 4. 境界値問題について.

$\zeta$  は平均位置からの水面変位であるから  
船底では前後左右動を無視すると.

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} h; \text{ const} & \text{for heave.} \\ \alpha x & \text{for pitch} \\ \alpha y & \text{for roll} \end{cases} \quad \text{on } F \quad (1).$$

のように与えられる.

3.5 → 2

$$\phi(x, y, 0) = \begin{cases} -i\alpha h \\ 0(1 - i\alpha x) \\ -i\alpha y \end{cases} \quad \text{on } F, \quad (2)$$

のように決まる.

これを (13) 又は (14) に代入すれば  $\rho$  の値の積分方程式を得るが 2 次元の場合と同様.

$$\zeta(x, y) = f(y)e^{i\alpha x} \quad \text{on } F, \quad (3)$$

( $f$  arbitrary)

に対する  $\phi(x, y, 0) = 0$  となるので (2) の境界条件では (3) に対応する解だけ不定になる。

しかしこれは  $\rho_{\text{out}}$  Kutla の流出条件を満たすとすると解は一義的に定まる。

従って逆にその解に対応する (3) の成分が残って  $\phi$  は満たされるが  $\zeta$  は満たされないことになる。

この事実は渦旋板の場合下が時間的に変化する車に対応している。

昭和 年 月 日

逆に  $F$  が不変とすると (3) に対応する解を除く  
為には Kutta の流出条件を満たす事は出来  
ない。 排水量型

これが 浅吃水船 に対応する解型と考えられる。

## 5. カルモーンに

| suffix | Motion    | 振幅    |
|--------|-----------|-------|
| 1      | surge     | $X_1$ |
| 2      | sway      | $X_2$ |
| 3      | heave     | $X_3$ |
| 4      | roll      | $X_4$ |
| 5      | pitch     | $X_5$ |
| 6      | yaw       | $X_6$ |
| d      | diffusion | $a$   |

(1)

1, 2, 6 は微小量として無視すると 3, 4, 5 が残る。  
船体の位置は

$$\zeta(x, y) = X_3 + X_4 y + X_5 x, \text{ over } F, \quad (2)$$

と仮定する

$$\zeta_3(x, y) = 1$$

$$\zeta_4 = y$$

$$\zeta_5 = x$$

on  $F$  (3)

の根に要素に別けると、入射、散乱波を加えて一般に

$$\phi(x, y, z) = \sum_{n=3}^{\infty} X_n \phi_n(x, y, z) + a \Phi_a(x, y, z, 0), \quad (4)$$

$$p(x, y) = \sum_{n=3}^{\infty} X_n p_n(x, y) + a p_a(x, y), \quad (5)$$

と仮定する。

運動方程式による  $j$  方向のカルモーンは、

$$F_{ij} = \iint_F p_i(x, y) \zeta_j(x, y) dx dy = \iint_F p_i \tilde{\zeta}_j dx dy = f_{ij} \quad \left. \begin{array}{l} \text{for } i, j = 3, 4, 5 \end{array} \right\} \quad (6)$$

$$F_{ji} = \iint_F p_j \zeta_i dF = \iint_F p_j \tilde{\zeta}_i dF = f_{ji}$$

昭和 年 月 日

相互定理より  $f_{ji} = \tilde{f}_{ji}$  であるから

$$\overline{F_{ji}} = f_{ji} = \overline{\tilde{f}_{ji}} + I$$

$$= \overline{\tilde{F}_{ij}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \tilde{H}_i(x, u) \tilde{H}_j^*(x, u) x^2 - \operatorname{sgn}(\omega \omega u) \tilde{H}_i^*(x', u) \tilde{H}_j(x', u) x \right] \times \frac{du}{\sqrt{\delta^2 + 4\alpha \delta \cos u}}, \quad (7)$$

波の強制力は

$$E_j = \iint_{\Gamma} P_\alpha(x, y) \zeta_j(x, y) dx dy = \iint_{\Gamma} P_\alpha(x, y) \tilde{\zeta}_j d\Gamma, \quad (8)$$

ところが  $P_\alpha$  は流出条件を満たすとすると  $P_\alpha$  に対する  $\zeta$  は定まった函数  $f_3(y)$  となる。

$$\zeta(x, y) = \zeta_0 + f_3(y) e^{i\alpha x}, \quad (9)$$

と仮定して直接  $\tilde{H}_j$  に等しくはならない。

次の定理を用えば

$$\begin{aligned} E_3 &= \frac{1}{-i\alpha} \iint_{\Gamma} P_\alpha \phi_{32}(x, y, 0) d\Gamma = \frac{1}{-i\alpha} \iint_{\Gamma} P_\alpha \tilde{\phi}_{32} d\Gamma \\ &= \frac{\omega_0}{\alpha} \iint_{\Gamma} \tilde{\phi}_3 e^{-i\alpha(x\omega_0 + yx, 0)} d\Gamma = \frac{\omega_0}{\alpha} \tilde{H}_3(x, 0), \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_4 &= \frac{1}{-i\alpha} \iint_{\Gamma} P_\alpha \phi_{42} d\Gamma = \frac{1}{-i\alpha} \iint_{\Gamma} P_\alpha \tilde{\phi}_{42} d\Gamma \\ &= \frac{\omega_0}{\alpha} \tilde{H}_4(x, 0), \quad (11) \end{aligned}$$

$$\alpha^2 x = -\tilde{\phi}_{32} + i\alpha \tilde{\phi}_{52} \quad \text{と仮定する}$$

$$\begin{aligned} E_5 &= \frac{1}{\alpha^2} \iint_{\Gamma} P_\alpha (i\alpha \tilde{\phi}_{52} - \tilde{\phi}_{32}) d\Gamma \\ &= -\frac{\omega_0}{\alpha} \tilde{H}_5(x, 0) - \frac{i\omega_0}{\alpha^2} \tilde{H}_3(x, 0), \quad (12) \end{aligned}$$

昭和 年 月 日

船が  $z$ -方向 に進む仕事の平均値は

$$\overline{D} = \frac{i\omega}{4} \iint_{\Sigma} (p \bar{s} - \bar{p} s) dF. \quad (13)$$

船がのびる仕事は

$$\overline{W} = \frac{1}{4} \iint_{\Sigma} (p \bar{\phi}_z + \bar{p} \phi_z) dF \quad (14)$$

2. 抵抗増加量は

$$\overline{W} = \overline{D} + U \overline{R}, \quad (15)$$

の関係がある。

(2), (14), (15) を代入すると。 ( $a$  は定数とすると)

$$\overline{D} = \frac{i\omega}{4} 2 \sum_{j=1}^5 (X_j \bar{X}_j (t_{ij} - \bar{t}_{ji})) + \frac{i\omega a}{4} \sum_{j=1}^5 (\bar{X}_j E_j - X_j \bar{E}_j), \quad (16)$$

$$\overline{W} = \frac{1}{4} 2 \sum_{j=1}^5 X_j \bar{X}_j (t_{ij} + \bar{t}_{ji}) + \frac{a}{4} \sum_{j=1}^5 (X_j t_{ij} + X_j \bar{t}_{ij}), \quad (17)$$

(16)式 右辺 2項は 船が水に対して <sup>船-系内</sup> なる仕事であり  
 2項は 水が船に対して なる仕事である。

従って その和にエネルギー — 4項を加えれば 明らか

$$\overline{D} = 0, \quad (18)$$

となければならぬ。

$$\text{よって} \quad \overline{W} = U \overline{R} \quad (19)$$

昭和 年 月 日

運動方程式は、(総和のみ考えて)

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 M X_3 &= \iint_{\bar{H}} \bar{p} d\bar{H} = X_3 \bar{f}_{33} + X_5 \bar{f}_{53} + a \bar{E}_3 \\
 -\omega^2 I X_5 &= \iint_{\bar{H}} \bar{p} x d\bar{H} = X_3 \bar{f}_{35} + X_5 \bar{f}_{55} + a \bar{E}_5
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \bar{X}_3$$

$$X_3 \bar{X}_3 (\bar{f}_{33} - \bar{f}_{33}) + X_5 \bar{X}_3 \bar{f}_{53} - \bar{X}_5 X_3 \bar{f}_{35} + a (\bar{X}_3 E_3 - X_3 \bar{E}_3) = 0.$$

$$X_3 \bar{X}_5 \bar{f}_{35} - \bar{X}_3 X_5 \bar{f}_{55} + X_5 \bar{X}_5 (\bar{f}_{55} - \bar{f}_{55}) + a (\bar{X}_5 E_5 - X_5 \bar{E}_5) = 0.$$

$$\begin{aligned}
 X_3 \bar{f}'_{33} + X_5 \bar{f}_{53} &= -a E_3 \\
 X_3 \bar{f}_{35} + X_5 \bar{f}'_{55} &= -a E_5
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \bar{f}'_{33} \\ \bar{f}_{55} \end{array}$$

$$X_3 = -\frac{a}{\Delta} (\bar{E}_3 \bar{f}'_{55} - \bar{E}_5 \bar{f}_{53}) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Delta = \bar{f}'_{33} \bar{f}'_{55} - \bar{f}_{35} \bar{f}_{53}.$$

$$X_5 = -\frac{a}{\Delta} (\bar{E}_5 \bar{f}'_{33} - \bar{E}_3 \bar{f}_{35})$$

昭和 年 月 日

# 6. アスファルトの 入きの場合

附録 B に 5)

$$S(x, y) = S^{(1)}(x, y) + S^{(2)}(y, x)$$

$$\phi_2(x, y) = \phi_2^{(1)}(x; 0; y) + \phi_2^{(2)}(y) = \left(\frac{2}{\pi} - i\alpha\right) S^{(1)} \quad (1)$$

$$S^{(1)} = \int_{-l(y)}^{l(y)} p(z; y) S_2(x-z, 0) dz$$

$$S^{(2)} = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \pi(\eta) S_2(x; y-\eta, 0) d\eta \quad (2)$$

$$\pi(\eta) = \int_{-l}^l p(z; \eta) dz,$$

$$\phi_2^{(1)} = \int_{-l}^l p(z; y) S_2(x-z, 0) dz$$

$$\phi_2^{(2)} = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \pi(\eta) S_2(0, y-\eta, 0) d\eta \quad (3)$$

2次元問題の解は\*

$$\int_{-l}^l \begin{Bmatrix} p_0^*(z) \\ p_1^*(z) \end{Bmatrix} S_2^{(1)}(x-z, 0) dz = l \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{x}{l} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$p_n^*(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m C_m^{n*} \frac{\cos m\theta}{m\theta}, \quad \cos \theta = \frac{z}{l},$$

したがって 2次元として

$$p(x, y) = A(y) p_0^*(x) + B(y) p_1^*(x), \quad (5)$$

と置く

\*

昭和 年 月 日

(1) の 2 式より 2 種類の積分方程式が得られる。

近似しない時はどちらかであり今は両方を満たすものかより近似値と言う事になる。

さてこれについて第 2 種と近似解に

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) = & \ell(y)A(y) + \pi \int_{-\beta}^{\beta} \{A(\eta)C_0^{*} + B(\eta)C_0^{!}\} \ell(\eta) S_z(0, y-\eta, 0) d\eta \\ & + x \left[ B(y) + \pi \int_{-\beta}^{\beta} \{A(\eta)C_0^{*} + B(\eta)C_0^{!}\} \ell(\eta) S_{zx}(0, y-\eta, 0) d\eta \right], \end{aligned} \quad (6)$$

と仮定しこれに  $\phi(x, y, 0) = (\frac{\partial}{\partial x} - i\alpha)\zeta(x, y)$  を考慮して  $(\frac{\partial}{\partial x} - i\alpha)$  の微分を行い  $x \rightarrow 0$  とおくと (1) の 2 式をも満足する事になる。

そこで

$$\zeta(x, y) = h + \theta x + \phi y, \quad (7)$$

ならば 2 式は

$$\begin{aligned} h + \phi y &= \ell(y)A(y) + \pi \int_{-\beta}^{\beta} \{A(\eta)C_0^{*} + B(\eta)C_0^{!}\} \ell(\eta) S_z(0, y-\eta, 0) d\eta \\ \theta &= B(y) + \pi \int_{-\beta}^{\beta} \{A(\eta)C_0^{*} + B(\eta)C_0^{!}\} \ell(\eta) S_{zx}(0, y-\eta, 0) d\eta, \end{aligned} \quad (8)$$

とかける。

これに対して、どちらか一方だけとすると

$$\begin{aligned} h + \phi y &= \ell(y)A(y) + \pi \int_{-\beta}^{\beta} A(\eta)C_0^{*} \ell(\eta) S_z d\eta, \\ \theta &= B(y) + \pi \int_{-\beta}^{\beta} B(\eta)C_0^{!} \ell(\eta) S_{zx} d\eta, \end{aligned} \quad (9)$$

となる。

昭和 年 月 日

## 7. ストリップ法

逆に幅が狭い場合はフーリッポフ法もしくは船長船理論である。

同じく附録Bにより

$$\zeta(x, y) = \zeta^{(s)} + \zeta^{(f)} \quad (11)$$

$$\zeta^{(s)} = \int_{-P}^{\beta(x)} p(x, \eta) \zeta_2^{(s)}(y-\eta, 0) d\eta,$$

$$\zeta^{(f)} = \int_{-L}^L \pi(\xi) \zeta_2(x-\xi, 0, 0) d\xi, \quad (12)$$

$$\pi(\xi) = \int_{-P}^{\beta} p(\xi, \eta) d\eta,$$

$$\phi_2(x, y, 0) = \phi_2^{(s)} + \phi_2^{(f)} \quad (13)$$

ストリッポ法では  $\zeta^{(f)}$  を無視してゐるけれども前節の場合と比較すれば採る方がよいように見えるので以下ではこれを考へる事にする。

又今の場合  $\phi_2^{(s)} = -i\alpha \zeta^{(s)}$  となつてゐるが

$$\phi_2^{(s)}(x, y, 0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\alpha\right) \zeta^{(s)}(x, y) \quad (14)$$

と解釋しておく。(1)と(3)は全く同じ故に以下(1)のみ考へる。そして対称性(4)のみ考へる事とす。

$$p(x, \eta) = A(x) p_0(\eta) \quad (15)$$

$$\beta(x) = \int_{-P}^{\beta} p(x, \eta) \zeta_2^{(s)}(y-\eta, 0) d\eta, \quad (16)$$

$$p_0(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m C_m P_m(\cos \theta), \quad \eta = -\cos \theta \quad (17)$$

$$\int_{-P}^{\beta} p_0(\eta) d\eta = \beta C_0$$

とかくと(1)は

$$S(x) = A(x)\beta(x) + \int_{-l}^l A(\beta)\beta(\beta)C^0(\beta)S_2(x-\beta, 0, 0)d\beta, \quad (8)$$

なる積分方程式を得る。

細長船理論では

$$S(x) = S^{(5)}(x) - A(x)\beta(x), \quad (9)$$

としてゐるがこの立場はアスペクト比の大きい場合では、誘導速度を無視する立場になるので今は(8)をとる事にしよう。

所で滑走艇では流出条件を満足せねばならないので

$$p(-l, y) = 0, \quad (10)$$

なる条件を指定しなければならぬ。

$S_2(x, 0, 0)$  はかなり強い特異性を持つので少々とも一丁以上は次のような齊次解を持つだろう。

$$\int_{-l}^l F(\beta)S_2(x-\beta, 0, 0)d\beta = 0, \quad (11)$$

この齊次解に対する  $p^{(5)}(x, y) = 0$  であるからこれは浸水幅変化に対応するものを持つてくれる。

即ち

$$\left. \begin{aligned} \int_{-l}^l P_0(\eta)S_2^{(5)}(y-\eta, 0, 0)d\eta &= 0 \\ \int_{-l}^l P_0(\eta) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

を新しく

$$p(x, y) = A(x)P_0(y) + B(x)P_0(y), \quad (13)$$

とかくと



$$\phi(x, y, z) = \iint_{\bar{H}} P(\bar{z}, \eta) S(x-\bar{z}, y-\eta, z) d\bar{z} d\eta, \quad (1)$$

$$S(x, y) = \iint_{\bar{H}} P(\bar{z}, \eta) S_z(x-\bar{z}, y-\eta, 0) d\bar{z} d\eta, \quad (2)$$

$$\phi_z(x, y, 0) = \iint_{\bar{H}} P(\bar{z}, \eta) S_z(x-\bar{z}, y-\eta, 0) d\bar{z} d\eta, \quad (3)$$

$$S(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{kz + i k(x \cos u + y \sin u)}}{A(k, u)} dk du \quad (4)$$

$$S_z = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{kz + i k(x \cos u + y \sin u)}}{A(k, u)} dk du$$

$$S_z = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{kz + i k(x \cos u + y \sin u)}}{A} dk du,$$

$$k \cos u = p, \quad k \sin u = q, \quad k dk du = dp dq$$

$$A(k, u) = (p - \alpha)^2 + i \mu (p - \alpha) - \gamma \sqrt{p^2 + q^2},$$

$$S = \frac{1}{4\pi^2 i} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{p^2 + q^2} z + i(p x + q y)}}{A} dp dq,$$

$$S_z = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{p^2 + q^2} z + i(p x + q y)}}{A \sqrt{p^2 + q^2}} dp dq,$$

$$S_z = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{p^2 + q^2} z + i(p x + q y)}}{A} (\alpha - p) \sqrt{p^2 + q^2} dp dq,$$

+ X, z

$$S_z(0, y, 0) = \dots$$

昭和 年 月 日

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{y-\beta}^{y+\beta} S(x-z, y-\eta, 0) d\eta = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{-\beta}^{\beta} S(x-z, \eta', 0) d\eta'$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ipx}}{A} (\alpha-p) \frac{\sin q\beta}{q} dp dq$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\alpha-p) e^{ipx}}{(p-\alpha)^2 + i\mu(p-\alpha) - \gamma|p|} dp$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_0^{\infty} \frac{(\alpha-p) e^{ipx}}{A(p)} + \frac{(p+\alpha) e^{-ipx}}{B(p)} \right] dp \quad (6)$$

$$A(p) = (p-\alpha)^2 + i\mu(p-\alpha) - \gamma p$$

$$B(p) = (p+\alpha)^2 + i\mu(p+\alpha) - \gamma p$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{y-\beta}^{y+\beta} S(x-z, y-\eta, z) d\eta = S^{(t)}(x-z, z), \quad (7)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{-\beta}^{\beta} S_2(x-z, y, 0) dy = S_2^{(t)}(x-z, 0),$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{-\beta}^{\beta} S_z(x-z, y, 0) dy = S_z^{(t)}(x-z, 0),$$

$$S_2^{(t)}(x, 0) = (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x}) S^{(t)}(x, 0)$$

昭和 年 月 日

$$\begin{aligned}
 \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^l S(x, y, z) dx &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-p)}{A} l \frac{\sin(lp)}{p} dp dq = S^{(s)}(y, z) \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha l}{\alpha^2 - i\mu\alpha - \delta|q|} d\delta = \frac{i\alpha}{\pi\delta} \int_0^{\infty} \frac{q^2 \cos qy}{q - K + i\mu \frac{\alpha}{q}} dq = S^{(s)}(y, z) \\
 K &= \frac{\alpha^2}{\delta} = \frac{\omega^2}{g}, \quad (8.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^l S_2(x, y, z) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1\delta l}{\alpha^2 - i\mu\alpha - \delta|q|} d\delta = -\frac{1}{\pi\delta} \int_0^{\infty} \frac{q^2 \cos qy}{q - K + i\mu \frac{\alpha}{q}} dq \\
 &= S_2^{(s)}(y, z), \quad (8.2)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^l S_z(x, y, z) dx = S_z^{(s)}(y, z) = -i\alpha S_2^{(s)}(y, z), \quad (8.3)$$

 $\delta \neq 0$

昭和 年 月 日

1) アスペクトレシオが大きい場合

 $\frac{B}{2} \pm L = L$ , 幅  $B$  とすると

$$\phi(x, y, z) = \phi^{(1)} + \phi^{(2)}$$

$$\phi^{(1)} = \int_{y-\rho}^{y+\rho} d\eta \int_{-1}^1 d\zeta p(\zeta, \eta) S(x-\zeta, y-\eta, z) \quad (9)$$

$$\phi^{(2)} = \left( \int_{-\frac{B}{2}}^{y-\rho} + \int_{y+\rho}^{\frac{B}{2}} \right) d\eta \int_{-1}^1 d\zeta p(\zeta, \eta) S(x-\zeta, y-\eta, z)$$

 $\frac{B}{2} \gg \rho \gg 1$  とすると

$$\phi^{(1)} \xrightarrow{\rho \gg 1} \phi^{(1*)}(x, y, z) = \int_{-1}^1 p(\zeta, y) S(x-\zeta, z) d\zeta \quad (10)$$

$$\phi^{(2)} \xrightarrow{\rho \ll B} \phi^{(2*)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left( \int_{-\frac{B}{2}}^{y-\rho} + \int_{y+\rho}^{\frac{B}{2}} \right) \Pi(\eta) S(x, y-\eta, z) d\eta \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\Pi(\eta) = \int_{-1}^1 p(\zeta, \eta) d\zeta \quad (11)$$

$$\text{よって} \quad \phi(x, y, z) \rightarrow \phi^{(1*)}(x, y, z) + \phi^{(2*)}(x, y, z), \quad (12)$$

同様にして

$$\zeta(x, y) \rightarrow \zeta^{(1*)}(x, y) + \zeta^{(2*)}(y, x)$$

$$\zeta^{(1*)}(x, y) = \int_{-1}^1 p(\zeta, y) S_2(x-\zeta, 0) d\zeta \quad (13)$$

$$\zeta^{(2*)}(y, x) = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \Pi(\eta) S_2(x, y-\eta, 0) d\eta \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\phi_z(x, y, 0) \rightarrow \phi_z^{(1*)}(x, y, 0) + \phi_z^{(2*)}(x, y, 0)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \phi^{(1*)}(x, y, 0) + \phi^{(2*)}(x, y, 0) \right\} \Big|_{z=0} \quad (14)$$

昭和 年 月 日

ii) アスベクトルから、いさゝく場合

$L \geq L$ ,  $\phi_B B=2$ ,  $L \gg 2L \gg B$  とし

$$\phi = \phi^{(1)} + \phi^{(2)}$$

$$\phi^{(1)} = \int_{-1}^1 d\eta \int_{x-L}^{x+L} d\tilde{z} p(\tilde{z}, \eta) S(x-\tilde{z}, y-\eta, z), \quad (15)$$

$$\phi^{(2)} = \left( \int_{-\frac{L}{2}}^{x-L} + \int_{x+L}^{\frac{L}{2}} \right) d\tilde{z} \int_{-1}^1 d\eta p(\tilde{z}, \eta) S(x-\tilde{z}, y-\eta, z),$$

とあく

$$\phi^{(1)} \rightarrow \phi^{(1s)} = \int_{-1}^1 p(x, \eta) S^{(1s)}(y-\eta, z) d\eta,$$

$$\phi^{(2)} \rightarrow \phi^{(2s)} = \lim_{L \rightarrow 0} \left( \int_{-\frac{L}{2}}^{x-L} + \int_{x+L}^{\frac{L}{2}} \right) \Pi(\tilde{z}) S(x-\tilde{z}, 0, z) d\tilde{z}, \quad (16)$$

$$\Pi(\tilde{z}) = \int_{-1}^1 p(\tilde{z}, \eta) d\eta, \quad (17)$$

よって

$$\phi \rightarrow \phi^{(1s)} + \phi^{(2s)}, \quad (18)$$

同様にして

$$S(x, y) \rightarrow S^{(1s)}(x, y) + S^{(2s)}(x, y),$$

$$S^{(1s)}(x, y) = \int_{-1}^1 p(x, \eta) S_2^{(1s)}(y-\eta, 0) d\eta, \quad (19)$$

$$S^{(2s)}(x, y) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \Pi(\tilde{z}) S_2(x-\tilde{z}, 0, 0) d\tilde{z},$$

$$\phi_2(x, y, 0) \rightarrow \phi_2^{(1s)}(x, y, 0) + \phi_2^{(2s)}(x, y, 0), \quad (20)$$

昭和 年 月 日

(8.1~3) は  $\sigma$  の 充分大値... とした成立式である。

ゆえに  $\sigma \rightarrow 0$  の時は 著しく直さねばならぬ。

その後に (1) に代えて

$$e^{i\alpha z} \int_{\Gamma} p(\xi, \eta) e^{-i\alpha \xi} d\xi = \mu(\xi, \eta), \quad (21)$$

有界関数を導入しよう。

すると

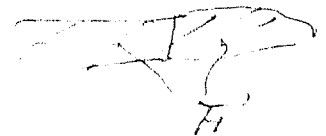
$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - i\alpha\right) \mu(\xi, \eta) = p(\xi, \eta), \quad (21')$$

と列を

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\alpha\right) S(x, y, z) = G(x, y, z), \quad (22)$$

とすると (1) は

$$\phi = \iint_{\Gamma'} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - i\alpha\right) \mu(\xi, \eta) S(x-\xi, y-\eta, z) d\xi d\eta$$



$$= \int d\eta \left\{ \int_0^1 \mu(\xi, \eta) S(x-\xi, y-\eta, z) d\xi \right\} - \int \mu(\xi, \eta) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + i\alpha\right) S d\xi$$

$$= \iint_{\Gamma'} \mu(\xi, \eta) G(x-\xi, y-\eta, z) d\xi d\eta, \quad (23)$$

(A.4) により

$$G(x, y, z) = \frac{z}{2\pi y^3} - \sigma \nabla_z^2(x, y, z), \quad (22')$$

$\sigma \rightarrow 0$  とすると 右辺の 2 項も 0 に tend する。

よって 前と同じ  $\sigma$  とすると 同じ結果となるから  
この 2 項を  $\rightarrow 0$  とし無視すると

$$\phi(x, y, z) = \phi^{(1)}(x, y, z) + \phi^{(2)}(x, y, z), \quad (24)$$

$$\phi^{(1)}(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\mu(x, \eta) z}{(y-\eta)^2} d\eta, \quad (25)$$

$$\phi^{(2)}(x, y, z) = \iint \mu(\xi, \eta) G(x-\xi, y-\eta, z) d\xi d\eta, \quad (26)$$

昭和50年 / 月 8 日

“3次元滑走板の動揺問題”  
(別冊)

別所正利

附録 A 核関数

内容

|                                                       | 頁      |
|-------------------------------------------------------|--------|
| 1. 定義                                                 | 1      |
| 2. 積分表示                                               | 5      |
| 3. $S, S_2, S_3$ の表現                                  | 12     |
| 4. 定常点                                                | 16     |
| 5. 無限遠方での積分表示                                         | 20     |
| 6. $S(0, y, 0), S(x, 0, 0)$ 等の表示                      | 23     |
| 7. 極限の場合 ( $\omega \rightarrow 0$ )                   | 26     |
| 8.     "           "       ( $U \rightarrow 0$ )      | 28     |
| 9.     "           "       ( $\gamma \rightarrow 0$ ) | 30-30. |

昭和 年 月 日

## 1. 定義

$$\left\{ (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x})^2 + \gamma \frac{\partial}{\partial z} \right\} T(x, y, z) = - \frac{z}{2\pi r^3}, \quad (1)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$(i\alpha - \frac{\partial}{\partial x}) T(x, y, z) = S(x, y, z), \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} T(x, y, z) = -S_2(x, y, z), \quad (3)$$

$$(i\alpha - \frac{\partial}{\partial x}) S(x, y, z) - \gamma S_2(x, y, z) = - \frac{z}{2\pi r^3}, \quad (4)$$

$$\frac{z}{r^3} = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} e^{kz + i k(x \cos u + y \sin u)} k dk du, \quad z < 0.$$

$$T(x, y, z) = \lim_{\mu \rightarrow +0} \frac{-1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{kz + i k(x \cos u + y \sin u)}}{A(k, u)} k dk du, \quad (5)$$

$$A(k, u) = (k \cos u - \alpha)^2 + i\mu(k \cos u - \alpha) - \gamma k, \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} T(x, -y, z) &= T(x, y, z) \\ S(x, -y, z) &= S(x, y, z) \\ S_2(x, -y, z) &= S_2(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$A(k, u) = \cos^2 u \{k - \kappa(u)\} \{k - \kappa'(u)\}, \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa(u) \\ \kappa'(u) \end{aligned} \right\} = \frac{\gamma}{2} \sec^2 u + (\alpha - \frac{i\mu}{2}) \sec u \mp \sqrt{\alpha \gamma \cos u + \frac{\gamma^2}{4}} \sec u,$$

昭和 年 月 日

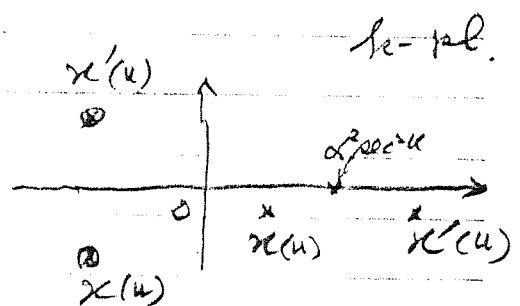
i)  $\alpha > \frac{\gamma}{\mu}$  ならば pole は

a)  $\frac{\pi}{2} > u > -\frac{\pi}{2}$  ならば  
pole は右半面 (右半面)

b)  $\frac{3\pi}{2} > u > \frac{\pi}{2}$  ならば  
 $\cos \theta_0 = \frac{\gamma}{\mu \alpha}$  として

$\pi + \theta_0 > u > \pi - \theta_0$  の間では 上図 左半面

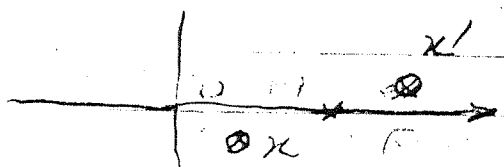
その他の区間では 右半面 下図



ii)  $\alpha < \frac{\gamma}{\mu}$  ならば

a)  $\frac{\pi}{2} > u > -\frac{\pi}{2}$  ならば 右半面 実軸の下

b)  $\frac{3\pi}{2} > u > \frac{\pi}{2}$  ならば 右半面 下図

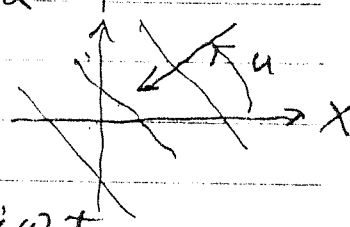


pole の位置決定について  $\mu$  のみでは大変複雑であるので、下記のように群速度を考え、それからその方向の二流流の分速度より大きいものは上流側に流れるとすればより一層明確になる。

そこで静止座標系  $(X, Y)$  を導入すると  
 $u$ -方向からの入射波で 出会う周波数  $\gamma$   
となるのは

$$X = x + ut, \quad Y = y \quad \text{とする}$$

$$e^{i\gamma(x \cos u + y \sin u) + i\omega t} = e^{i\gamma(X \cos u + Y \sin u) + i\omega_0 t}$$



$$\omega_0 = \omega - \gamma U \cos u, \quad \dots \quad (9)$$

( $\omega_0 > 0$  ならば)

昭和 年 月 日

$\omega_0 = \sqrt{gk}$  なる故 上式から ( $\alpha = \omega/U$ ,  $\gamma = g/U^2$  として)

$$\frac{\omega_0}{\sqrt{g}} = \sqrt{k} = \frac{-\sqrt{\gamma} \pm \sqrt{\gamma + 4\alpha \cos u}}{2 \cos u}$$

を得るがこれを (8) と較べると.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega_0}{\sqrt{g}} &= \sqrt{\kappa(u)} = \frac{1}{2 \cos u} [\sqrt{\gamma + 4\alpha \cos u} - \sqrt{\gamma}] \\ \frac{\omega'_0}{\sqrt{g}} &= \sqrt{\kappa'(u)} = \frac{-1}{2 \cos u} [\sqrt{\gamma + 4\alpha \cos u} + \sqrt{\gamma}] \end{aligned} \right\} (10)$$

となる。

又流速は  $C = g/\omega_0$ ,  $C' = g/\omega'_0$  であるから

$$\left. \begin{aligned} \frac{U \cos u}{C(u)} &= \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{4\alpha}{\gamma} \cos u} - 1 \right] \\ \frac{U \cos u}{C'(u)} &= -\frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{4\alpha}{\gamma} \cos u} + 1 \right] \end{aligned} \right\} (11)$$

となる。

これらの流速の進行方向は  $\omega_0, \omega'_0$  の正負に応じて決まるがそれをまとめると以下の表になる

| i) $\alpha > \frac{\gamma}{4}$ の場合        |             | 流速    | $\omega_0$ | 群速度は $U \cos u$ より |
|-------------------------------------------|-------------|-------|------------|--------------------|
| a) $\cos u > 0$                           | $\kappa(u)$ | 下流側   | +          | 大又小さい              |
|                                           | $\kappa'$   | 上     | -          | 小                  |
|                                           | $\kappa$    | 上     | +          | 大                  |
|                                           | $\kappa'$   | 上     | +          | 小                  |
| b) $-\frac{\gamma}{4\alpha} < \cos u < 0$ | $\kappa$    | } はない |            |                    |
|                                           | $\kappa'$   |       |            |                    |
| c) $\cos u < -\frac{\gamma}{4\alpha}$     | $\kappa$    | } はない |            |                    |
|                                           | $\kappa'$   |       |            |                    |
| ii) $\alpha < \frac{\gamma}{4}$           |             |       |            |                    |
| a) $\cos u > 0$                           | $\kappa$    | 下     | +          | 大                  |
|                                           | $\kappa'$   | 上     | -          | 小                  |
| b) $\cos u < 0$                           | $\kappa$    | 上     | +          | 大                  |
|                                           | $\kappa'$   | 上     | +          | 大                  |

昭和 年 月 日

この上流側に進むにつれて、流速が  $U \cos u$  より大なるものか、上流側に進むにつれて、流速の pole の位置はどのように選べばよい。

さて (5) において (7) を使って、次の積分を求めたい。

$$\overline{T(-x, y, z)} - T(x, y, z) = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} e^{kz + ik(x \cos u + y \sin u)} \left\{ \frac{1}{A(k, u)} - \frac{1}{A(\bar{k}, u)} \right\} dk du$$

これらの pole における留数のみと等しいから、

$$\overline{T(-x, y, z)} - T(x, y, z) = \frac{+i}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{e^{kz + ik(x \cos u + y \sin u)}}{\sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \alpha^2 \cos^2 u}} \frac{1}{\chi(u)} - \frac{e^{k'z + ik'(x \cos u + y \sin u)}}{\chi'(u)} \right] du$$

$$+ \frac{i}{4\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[ \frac{e^{kz + ik(x \cos u + y \sin u)}}{\chi(u)} + \frac{e^{k'z + ik'(x \cos u + y \sin u)}}{\chi'(u)} \right] \frac{du}{\sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \alpha^2 \cos^2 u}}$$

$$= \frac{i}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{e^{kz + ik(x \cos u + y \sin u)}}{\chi(u)} - \frac{e^{k'z + ik'(x \cos u + y \sin u)}}{\chi'(u)} \right] \frac{1}{\sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \alpha^2 \cos^2 u}} du$$

$$+ \int \frac{e^{kz - i(x \cos u + y \sin u)}}{\chi(\pi - u)} + \frac{e^{k'z + i(x \cos u + y \sin u)}}{\chi'(\pi - u)} \frac{1}{\sqrt{\frac{\delta^2}{4} - \alpha^2 \cos^2 u}} du,$$

--- (12)

但し右辺が 2 項で  $|\cos u| > \frac{\delta}{4\alpha}$  となる範囲は積分しないものとする。

後節の積分表示に合せる為には

$$\sec u = \cosh t$$

とあり、(5)(6)と(8)を交換して

$$\left. \begin{aligned} m_1(t) &= \int \chi(u) \cos u \\ m_1'(t) &= \int \chi'(u) \cos u \\ m_2(t) &= \int -\chi(\pi-u) \cos(\pi-u) \\ m_2'(t) &= \int \chi'(\pi-u) \cos(\pi-u) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

となる故

$$\overline{T(-x, y, z)} - T(x, y, z)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{chtdt}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}ch^2t + \alpha\gamma ch t}} \left[ e^{m_1(t)(ix+zcht+iysh t)} - e^{m_1'(t)(ix+zcht+iysh t)} \right] \\ &+ \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{chtdt}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}ch^2t - \alpha\gamma ch t}} \left[ e^{m_2(t)(-ix+zcht+iysh t)} + e^{m_2'(t)(-ix+zcht+iysh t)} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

とも表わせる。

$$\text{なお} \quad m_1'(t) = \frac{\alpha^2}{m_1(t)}, \quad m_2'(t) = \frac{\alpha^2}{m_2(t)}$$

である。

なお、右辺の2項の積分は前同様  
 $\gamma < 4\alpha$  の場合  $ch t < 4\alpha/\gamma$  の区間は  
 除くものとする。

## 2. 積分表示、

前節(7) (12) の関係があるので、この節では  $x, y$ 、  
 真正なるものとして考察する。

§1 (5) において  $u$  に關する積分を 2 つに分けて

$$T = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} du \int_0^\infty k dk \left\{ \frac{e^{ikx \cosh u + iky \sinh u}}{A(k, u)} + \frac{e^{-ikx \cosh u}}{A(k, \pi - u)} \right\}$$

と書き更に  $k \cosh u = m$ ,  $\cosh u = \cosh v$  と変数を  
 変えると  $dk = \cosh v \, dm$ ,  $\cosh u \, du = dv$  故

$$T = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^\infty \cosh v \, dv \int_0^\infty m \, dm \left[ \frac{e^{m\{z \cosh v + iy \sinh v\} \cosh v}}{C(m, v)} + \frac{e^{-imx}}{D(m, v)} \right], \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} C(m, v) &= (m - \alpha)^2 + i\mu(m - \alpha) - \gamma m \cosh v, \\ D(m, v) &= (m + \alpha)^2 - i\mu(m + \alpha) - \gamma m \cosh v, \end{aligned} \right\} (2)$$

この  $m$  に關する積分を 1 項, 2 項に分けて  
 夫れ

$$\left. \begin{aligned} (m - \alpha)^2 &= \gamma m \cosh t \\ (m + \alpha)^2 &= \gamma m \cosh t \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

のように  $t$  に關する積分に変えよう。

第 1 項については  $m \in [0, \infty)$  の区間に對し

$0 < m < \alpha_0 \equiv \alpha(0)$  及び  $\infty > t > 0$  として

$$m_1(t) \equiv m = \alpha + \frac{\gamma}{2} \cosh t - \sqrt{\alpha \gamma \cosh t + \frac{\gamma^2}{4} \cosh^2 t}, \quad (4)$$

$\alpha_0 < m < \alpha$  では  $m$  はやはり上式で与えられるが

$t$  は虚値で  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}i$  となる。

$\alpha_0 < m < \alpha$  及び  $0 < t < \frac{\pi}{2}i$  として

$$m'_1(t) \equiv m = \alpha + \frac{\gamma}{2} \cosh t + \sqrt{\alpha \gamma \cosh t + \frac{\gamma^2}{4} \cosh^2 t}, \quad (5)$$

$m > \alpha_0$  及び  $0 < t < \infty$  となる。

昭和 年 月 日

\* 2H<sub>2</sub> 12 11 21 2\*  $\alpha > \gamma$  ならば

$$\alpha > m > 0 \text{ 12 21 1 } \quad ch^{-1} \frac{4\alpha}{\gamma} \leq t < \infty \text{ 21}$$

$$m_2(t) \equiv m = \frac{\gamma}{2} ch t - \alpha - \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} ch^2 t - \alpha \gamma ch t}, \quad (6)$$

$$\infty > m > \alpha \text{ 12 21 1 } \quad \infty > t > ch^{-1} \frac{4\alpha}{\gamma} \text{ 21}$$

$$m_2(t) \equiv m = \frac{\gamma}{2} ch t - \alpha + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} ch^2 t - \alpha \gamma ch t}, \quad (7)$$

\*  $\alpha < \gamma$  ならば

$$x_\pi \equiv x(\pi) > m > 0 \text{ 12 21 1 } \quad 0 < t < \infty \text{ 21 (6) 式}$$

$$\alpha > m > \gamma_\pi \text{ 12 21 1 } \quad 0 < t < i \cos^{-1} \frac{4\alpha}{\gamma} \text{ 21 (6) 式}$$

$$x'_\pi = x'(\pi) > m > \alpha \text{ 12 21 1 } \quad i \cos^{-1} \frac{4\alpha}{\gamma} > t > 0 \text{ 21 (7)}$$

$$m > \gamma_\pi \text{ 12 21 1 } \quad \infty > t > 0 \text{ 21 (7) 式}$$

$$\begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= \frac{\gamma}{2} sh t + \frac{\frac{\gamma^2}{4} ch t sh t + \frac{\alpha \gamma}{2} sh t}{\sqrt{\alpha \gamma ch t + \frac{\gamma^2}{4} ch^2 t}} \\ \frac{dm'_1}{dt} &= \frac{+ \gamma sh t}{2\sqrt{\alpha \gamma ch t + \frac{\gamma^2}{4} ch^2 t}} \begin{Bmatrix} -m_1 \\ m'_1 \end{Bmatrix}, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \frac{dm_2}{dt} \\ \frac{dm'_2}{dt} \end{aligned} \right\} &= \frac{\gamma}{2} sh t + \frac{\frac{\gamma^2}{4} ch t sh t + \frac{\alpha \gamma}{2} sh t}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} ch^2 t - \alpha \gamma ch t}} \\ &= \frac{+ \gamma sh t}{2\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} ch^2 t - \alpha \gamma ch t}} \begin{Bmatrix} -m_2 \\ m'_2 \end{Bmatrix}, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \frac{e^{m(2\cosh v + i y \sinh v)} + i m x \left(\frac{\pi i}{2}\right)}{C(m, v)} &= -\gamma \int_0^{\infty} \frac{e^{m_1(t)} \sinh t \, dt}{2\delta (ch t - ch v) \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} ch^2 t + \alpha \delta ch t}} \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2} i \rightarrow 0}^{\infty} \frac{e^{m_1'(2\cosh v + i x + i y \sinh v)} m_1'(t) \sinh t \, dt}{(ch t - ch v) \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} ch^2 t + \alpha \delta ch t}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \frac{e^{m(2\cosh v - i x + i y \sinh v)}}{D(m, v)} &= \frac{1}{2} \int_{ch \frac{1}{\gamma} \delta}^{\infty} \frac{e^{m_2(2\cosh v - i x + i y \sinh v)} m_2(t) \sinh t \, dt}{(ch t - ch v) \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} ch^2 t - \alpha \delta ch t}} \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{ch \frac{1}{\gamma} \delta}^{\infty} \frac{e^{m_2'(2\cosh v - i x + i y \sinh v)} m_2'(t) \sinh t \, dt}{(ch t - ch v) \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} ch^2 t - \alpha \delta ch t}},
 \end{aligned}$$

for  $\alpha > \gamma$ 

$\gamma < \delta$  ならば 積分の下限を  $i\omega \frac{\gamma}{\delta}$  とする。

よって (1) より

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{-1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ch v \, dv}{ch t - ch v} \left[ \int_{-\frac{\pi}{2} i}^{\infty} \frac{e^{m_1(t)} \sinh t \, dt}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} ch^2 t + \alpha \delta ch t}} \right] e^{m_1(i x + 2\cosh v + i y \sinh v)} \\
 &+ e^{m_1'(2\cosh v + i x + i y \sinh v)} m_1'(t) \left\{ \int_{ch \frac{1}{\gamma} \delta}^{\infty} \frac{e^{m_2(t)} \sinh t \, dt}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} ch^2 t - \alpha \delta ch t}} \right\} \\
 &+ e^{m_2(2\cosh v - i x + i y \sinh v)} m_2(t) + e^{m_2'(2\cosh v - i x + i y \sinh v)} m_2'(t) \left. \right\} \quad (10)
 \end{aligned}$$

昭和 年 月 日

さてまず (11) に おいて

$$z = -\rho \sin \delta, \quad y = \rho \cos \delta, \quad (11)$$

$$\text{とかくと } z \operatorname{ch} v + i y \operatorname{sh} v = i \rho \operatorname{sh}(v + i \delta),$$

$$\text{となし } v = u + i \omega \text{ とかくと}$$

$$z \operatorname{ch} v + i y \operatorname{sh} v = -\rho \operatorname{ch} u \sin(\delta + \omega) + i \rho \operatorname{sh} u \cos(\delta + \omega)$$

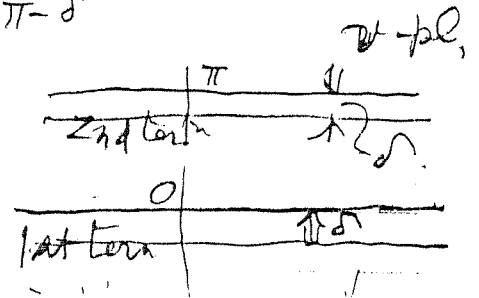
となるから  $v$ - $pl$  の積分路は  $\pi \geq \delta + \omega \geq 0$  の間で任意に変形してよい。

$$\text{そこで } 1 \text{ 項 } 12 \text{ については } \omega = -\delta$$

$$\text{ } 2 \text{ 項 } 12 \text{ については } \omega = \pi - \delta$$

とすると 積分は 2 つの内の

旧数取と新しい積分路の上の積分となる。



$$T = T_R + T_S, \quad (12)$$

$$T_S = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{ch}(u - i\delta) du \int_0^{\infty} \frac{e^{imx + im\rho \operatorname{sh} u}}{C(m, u - i\delta)} - \frac{e^{-imx}}{D(m, u + i\pi - i\delta)} m dm$$

となるが右辺 2 項 12 において  $m \rightarrow -m$  とすると

$$C(m, u - i\delta) = D(-m, u + i\pi - i\delta)$$

となっているから 結果

$$T_S = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{ch}(u - i\delta) du \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{im(x + \rho \operatorname{sh} u)}}{C(m, u - i\delta)} m dm, \quad (13)$$

を得る。

これに  $m$ -pl.  $z$  を積分しよう。

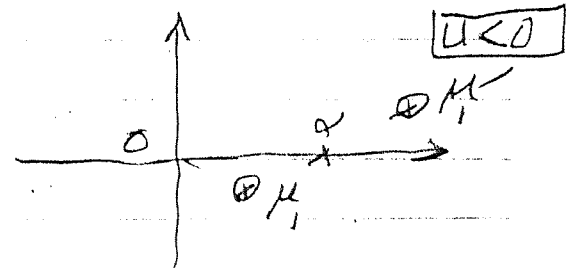
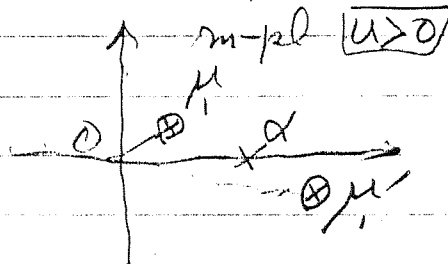
$m$ -pl. の pole は

$$(m-\alpha)^2 + i\mu(m-\alpha) - \gamma \operatorname{sh}(u-i\delta) = 0$$

4 根故 (4) (5) による  $m_1, m_1'$  を使って

$$\left. \begin{aligned} \mu_1(u) &= m_1(u-i\delta) \\ \mu_1'(u) &= m_1'(u-i\delta) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$\mu_1, \mu_1' = \alpha^2$  であり、 $\mu_1, \mu_1'$  は  $\alpha$  に近づくにつれて互に反対方向にあり、 $u \rightarrow \pm\infty$  で  $\mu_1' \rightarrow \gamma \operatorname{ch} u$  となる。故に結局  $m$ -pl.  $z$  は図の様な位置になる。



上記図より各積分は

$x + \rho \operatorname{sh} u > 0$  ならば " 上 半面 に 回 け る "

$x + \rho \operatorname{sh} u < 0$  " 下 " " "

これによって各々の留数をとれば " ( $x > 0$ )

$$T_s = \frac{-i}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(u-i\delta) du}{(\mu_1 - \mu_1')} e^{i\mu_1(x + \rho \operatorname{sh} u)} \mu_1'(u)$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{ch}(u-i\delta) du}{\mu_1 - \mu_1'} e^{i\mu_1'(x + \rho \operatorname{sh} u)} \mu_1(u)$$

$$T = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{-u_0} \frac{\operatorname{ch}(u-i\delta) du}{\mu_1 - \mu_1'} e^{i\mu_1(x + \rho \operatorname{sh} u)} \mu_1(u), \quad (15)$$

$$\operatorname{sh} u_0 = \frac{x}{\rho}, \quad \mu_1 - \mu_1' = m_1 - m_1' =$$

$$= -2\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} \operatorname{ch}^2(u-i\delta) + \alpha \gamma \operatorname{ch}(u-i\delta)}$$

昭和 年 月 日

次に (12) の  $T_R$  については  $v$ -pl. の pole は (10) より

$v = \pm$  であるが、元に戻ってその位置を調べると夫々

少し差があるため 1 項では

$$\text{ch } v = \frac{1}{2m} \{ (m-\alpha)^2 + 2(m-\alpha)\mu i + \alpha^2 \}$$

であるから

i)  $\kappa_0 > m > 0$  実軸の下 右半面

上 左半面

ii)  $\kappa'_0 > m > \kappa_0$  虚軸上

iii)  $m > \kappa'_0$  実軸の上 右半面

下 左半面

2 項では

$$\text{ch } v = \frac{1}{2m} \{ (m+\alpha)^2 - i\mu(m+\alpha) \}$$

常に 右半面で 実軸下  
左 上

留数は

$$\frac{1}{\text{ch } t - \text{ch } v} \xrightarrow{v \rightarrow \pm} \frac{1}{\text{ch } t - \text{ch } v} = \frac{1}{(v-t)\text{sh } t} \xrightarrow{v \rightarrow \pm} \frac{1}{(v \pm t)\text{sh } t}$$

また (10) より

$$T_R = -\frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{ch } t \, dt}{\sqrt{\frac{x^2}{4} \text{ch}^2 t + \alpha \text{ch } t}} \left\{ \begin{aligned} & \frac{m_1(zx + z\text{ch } t + iy\text{sh } t)}{m_1(t)} - \frac{m'_1(zx + z\text{ch } t + iy\text{sh } t)}{m'_1(t)} \\ & + \frac{m_2(z\text{ch } t - iy\text{sh } t - ix)}{m_2(t)} + \frac{m'_2(z\text{ch } t - iy\text{sh } t - ix)}{m'_2(t)} \end{aligned} \right\}$$

(16)

昭和 年 月 日

(15) により  $u - i\delta = 1 \times \delta i c \gamma$ 

$$T_s = \frac{+i}{4\pi} \int_{-i\delta}^{\infty - i\delta} \frac{ch t dt}{\sqrt{\frac{\delta^2}{4} ch^2 t + \alpha \delta ch t}} e^{im_1(t) \{x + p \alpha h(t + i\delta)\}} m_1(t)$$

$$\rightarrow \frac{i}{4\pi} \int_{-u_0 - i\delta}^{-i\delta} \frac{ch t dt}{\sqrt{\frac{\delta^2}{4} ch^2 t + \alpha \delta ch t}} e^{im'_1(t) \{x + p \alpha h(t + i\delta)\}} m'_1(t)$$

$$\rightarrow \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty - i\delta}^{-u_0 - i\delta} \frac{ch t dt}{\sqrt{\frac{\delta^2}{4} ch^2 t + \alpha \delta ch t}} e^{im_1(t) \{x + p \alpha h(t + i\delta)\}} m_1(t) \quad (15')$$

$$\left. \begin{array}{l} m_1(t) \\ m'_1(t) \end{array} \right\} = \alpha + \frac{\delta}{2} ch t \mp \sqrt{\alpha \delta ch t + \frac{\delta^2}{4} ch^2 t}$$

$$m_1 m'_1 = \alpha^2$$

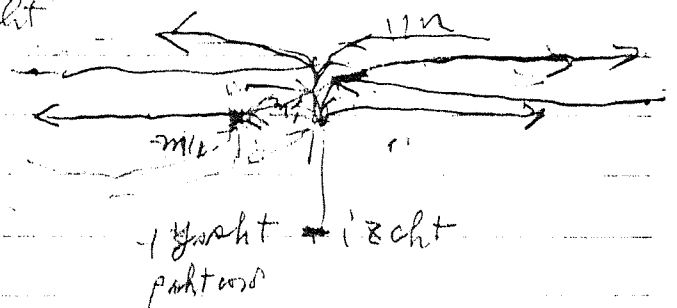
$$m_1 + m'_1 = 2\alpha + \delta ch t$$

$$\left. \begin{array}{l} m_2 \\ m'_2 \end{array} \right\} = \frac{\delta}{2} ch t - \alpha \mp \sqrt{\frac{\delta^2}{4} ch^2 t - \alpha \delta ch t}$$

$$m_2(t + \pi i) = -m'_1(t)$$

$$m'_2(t + \pi i) = -m_1(t)$$

合計



$$T = \frac{-i}{4\pi} \int_{-u_0 - i\delta}^{-i\delta} \frac{ch t dt}{\sqrt{\frac{\delta^2}{4} ch^2 t + \alpha \delta ch t}} e^{im_1(t) \{x + p \alpha h(t + i\delta)\}} m_1(t)$$

$$+ \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{-u_0 - i\delta} \frac{ch t dt}{\sqrt{\frac{\delta^2}{4} ch^2 t + \alpha \delta ch t}} e^{im'_1(t) \{x + p \alpha h(t + i\delta)\}} m'_1(t)$$

$$- \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\alpha - \frac{14\alpha}{\delta}} \frac{ch t dt}{\sqrt{\frac{\delta^2}{4} ch^2 t + \alpha \delta ch t}} \left\{ e^{im_2(t) \{-x + p \alpha h(t + i\delta)\}} m_2 + e^{im'_2(t) \{-x + p \alpha h(t + i\delta)\}} m'_2 \right\}$$

$$4\alpha < \delta \text{ ならば } \int \left| ch - \frac{14\alpha}{\delta} \right| > 0$$

(16)

(17) により  $\alpha + \frac{\delta}{2} ch t \mp \sqrt{\alpha \delta ch t + \frac{\delta^2}{4} ch^2 t}$ 

3.  $S, S_2, S_2$  の表現

これらは §1 (2), (3) で定義されるから 同(5)の表示から積分表示を作り 前節同様の討論で  $T$  と同様の表示を得る事が出来るが その際  $m_2$  に対する積分については 注意が必要で  $T$  とは少し異なる点がある。

しかし §2 (17) を直接微分すれば 簡単に次のようになる。

その際 積分の上限  $0$  を  $(-u_0 - i\delta)$  となつてゐる点が一応厄介であるが 実行すると

$$T = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{-u_0 - i\delta} \frac{ch t dt}{\sqrt{\frac{x^2}{4} ch^2 t + \alpha sch t}} \left\{ m_1 e^{im_1(-x+y sch t - iz ch t)} - m_1' e^{im_1'(\dots)} \right\} \\ + \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{ch^{-1} \frac{\alpha}{\delta}} \frac{ch t dt}{\sqrt{\frac{x^2}{4} ch^2 t - \alpha sch t}} \left\{ e^{im_2(-x+y sch t - iz ch t)} m_2 + e^{im_2'(\dots)} m_2' \right\}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{2\pi i} ch(u_0 + i\delta) \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{-u_0 - i\delta} \frac{ch t dt}{\sqrt{\quad}} \left\{ e^{im_1(\dots)} m_1^2 - e^{im_1'(\dots)} m_1'^2 \right\} \\ \rightarrow \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{ch^{-1} \frac{\alpha}{\delta}} \frac{ch t dt}{\sqrt{\quad}} \left\{ e^{im_2(\dots)} m_2^2 + e^{im_2'(\dots)} m_2'^2 \right\}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{2\pi i} ch(u_0 + i\delta) \frac{\partial}{\partial z} (u_0 + i\delta) \\ + \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{-u_0 - i\delta} \frac{ch^2 t dt}{\sqrt{\quad}} \left\{ e^{im_1(\dots)} m_1^2 - e^{im_1'(\dots)} m_1'^2 \right\} \\ + \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{ch^{-1} \frac{\alpha}{\delta}} \frac{ch^2 t dt}{\sqrt{\quad}} \left\{ e^{im_2(\dots)} m_2^2 + e^{im_2'(\dots)} m_2'^2 \right\}, \quad (3)$$

昭和 年 月 日

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = & \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \operatorname{ch}(u_0 + i\delta) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\} + \frac{1}{2\pi} \left\{ 2\alpha + \delta \operatorname{ch}(u_0 + i\delta) \right\} \operatorname{ch}(u_0 + i\delta) \frac{\partial u_0}{\partial x} \\
& + \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{u_0 - i\delta} \frac{\operatorname{ch} t dt}{\sqrt{+}} \left\{ \ell_{m_1}^{im_1(\cdot)} - \ell_{m_1'}^{im_1'(\cdot)} \right\} \\
& + \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{-\operatorname{ch} \frac{1}{\delta}} \frac{\operatorname{ch} t dt}{\sqrt{-}} \left\{ \ell_{m_2}^{im_2(\cdot)} + \ell_{m_2'}^{im_2'(\cdot)} \right\}, \quad (4)
\end{aligned}$$

222"  $\operatorname{sh} u_0 = \frac{x}{\rho}, \quad y = \rho \cos \delta, \quad z = -\rho \sin \delta, \quad (5)$   
 でありから

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(u_0 + i\delta) &= \frac{1}{\rho^2} (ry - ixz), \\
\operatorname{sh}(u_0 + i\delta) &= \frac{1}{\rho^2} (xy - izr), \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \operatorname{ch}(u_0 + i\delta) \\ \operatorname{sh}(u_0 + i\delta) \end{aligned}} \right\} = (6)
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(u_0 + i\delta) \frac{\partial u_0}{\partial x} &= \frac{y}{\rho^2} - \frac{ixz}{\rho^2 r}, \\
\operatorname{ch}(u_0 + i\delta) \frac{\partial}{\partial x} (u_0 + i\delta) &= \frac{1}{ir\rho^4} (ry - ixz)^2, \\
\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \operatorname{ch}(u_0 + i\delta) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\} &= \frac{z}{ir\rho^3}, \\
\operatorname{ch}^2(u_0 - i\delta) \frac{\partial u_0}{\partial x} &= \frac{1}{\rho^4 r} (ry - ixz)^2,
\end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \operatorname{ch}(u_0 + i\delta) \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \operatorname{ch}(u_0 + i\delta) \frac{\partial}{\partial x} (u_0 + i\delta) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \operatorname{ch}(u_0 + i\delta) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\} \\ \operatorname{ch}^2(u_0 - i\delta) \frac{\partial u_0}{\partial x} \end{aligned}} \right\} = (7)$$

これらの関係から見て

$$\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x} - i\alpha \right)^2 + \gamma \frac{\partial}{\partial z} \right\} T = - \frac{z}{2\pi r^3}, \quad (8)$$

より中からわかるから直接的にこの積分表示、  
 からわかる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{xz}{p^2 r} \right) = \frac{z}{p^2 r} - \frac{xz^2}{p^2 r^3} = \frac{z}{r^3}$$

A-14

昭和 年 月 日

± 2

$$S = (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x}) T = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{xz}{p^2 r} + \frac{iy}{p^2} \right)$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{-u_0-i\delta} \frac{chtdt}{\sqrt{+}} \left\{ e^{im_1(\alpha)} - e^{im'_1(\alpha-m'_1)} \right\}$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{-\frac{ch+2\alpha}{\delta}} \frac{chtdt}{\sqrt{-}} \left\{ e^{im_2(\alpha+m_2)} + e^{im'_2(\alpha+m'_2)} \right\}, \quad (9)$$

$$S_2 = -T_2 = \frac{(ry-ixz)^2}{2\pi p^4 r}$$

$$- \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{-u_0-i\delta} \frac{ch^2 t dt}{\sqrt{+}} \left\{ e^{im_1(\alpha)} - e^{im'_1(\alpha)} \right\}$$

$$- \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{-\frac{ch+4\alpha}{\delta}} \frac{ch^2 t dt}{\sqrt{-}} \left\{ e^{im_2(\alpha)} + e^{im'_2(\alpha)} \right\}, \quad (10)$$

12/12

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{xz}{p^2 r} + \frac{iy}{p^2} \right) = \frac{x}{p^2 r} + \frac{2xz^2}{p^4 r} - \frac{xz^2}{p^2 r^3} - \frac{2iyz}{p^4}$$

$$\frac{chtd}{\sqrt{+}} \left\{ m_1(\alpha-m_1) - m'_1(\alpha-m'_1) \right\} \Big|_{t=-u_0-i\delta} \frac{\partial}{\partial z} (-u_0-i\delta) = -2 chtd(\alpha+\gamma chtd) \Big|_{t=-u_0-i\delta} \frac{\partial}{\partial z} (u_0+i\delta)$$

$$= \frac{2i}{r p^4} (ry-ixz)^2 \left\{ \alpha + \frac{\gamma}{p^2} (ry-ixz) \right\}, \quad \dots (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{\rho^2 r} \right) = \frac{1}{\rho^3}$$

A-15

$$\frac{1}{\rho^3} = \frac{1}{\rho^3}$$

昭和 年 月 日

$$\begin{aligned} \sqrt{z} = & \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{x}{\rho^2 r} \left( 1 - \frac{z z^2}{\rho^2} - \frac{z^2}{r^2} \right) - \frac{2i y z}{\rho^4} \right. \\ & \left. + \frac{i \alpha}{\rho^4 r} (r y - i x z)^2 + \frac{i x}{\rho^6 r} (r y - i x z)^3 \right] \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{-u_0 - i\delta} \frac{ch^2 t dt}{\sqrt{+}} \left\{ e^{i m_1(\cdot)} e^{m_1^2(\alpha - m_1)} - e^{i m_1'(\cdot)} e^{m_1'^2(\alpha - m_1')} \right\} \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{-ch - \frac{1}{8} \alpha} \frac{ch^2 t dt}{\sqrt{-}} \left\{ e^{i m_2(\cdot)} e^{m_2^2(\alpha + m_2)} + e^{i m_2'(\cdot)} e^{m_2'^2(\alpha + m_2')} \right\}, \quad (12) \end{aligned}$$

これはすべて  $x, y > 0$  に対する表現である。  
 夫々の負値に対しては

$$\sqrt{\left. \begin{matrix} (x, -y, z) \\ S_2 \\ S_2 \end{matrix} \right\}} = \sqrt{\left. \begin{matrix} (x, y, z) \\ S_2 \\ S_2 \end{matrix} \right\}}, \quad (13)$$

$x$  の負値に対しては  $\sqrt{\cdot}$  (12) と同様な式が成立するので、これから求められ、上式等でも積分範囲を夫々

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{-u_0 - i\delta} \text{の } \frac{ch^2 t}{\sqrt{+}} \text{に} \int_{-u_0 - i\delta}^{\infty} \\ & \int_{-\infty}^{-ch - \frac{1}{8} \alpha} \text{の } \frac{ch^2 t}{\sqrt{-}} \text{に} \int_{ch - \frac{1}{8} \alpha}^{\infty} \end{aligned}$$

とあつたものを計算すればよい事になる。

昭和 年 月 日

## 4 定常点

これらの核関数は無限遠方では4つの波系となり簡単な漸近表示が出来る\*。

又上流側には §1 (13), §2 (17) の表現で  $m_2(t)$  に対応する波系がある。

従って §2 (17) では  $x > 0$  なので  $m_2$  に対応する定常点のみこの積分範囲の中にあるべきで他の波系に対する定常点は §1 (13) の方になければならない。

以下  $\delta = 0$  ( $z = 0$ ) とおいてこの点を確かめて見よう。(  $y > 0$  とする )

これらの位相関数は

$$f_1(t) = m_1(t)(x + y \sinh t)$$

$$f_1'(t) = m_1'(t)(x + y \sinh t)$$

$$f_2(t) = m_2(t)(-x + y \sinh t)$$

$$f_2'(t) = m_2'(t)(-x + y \sinh t)$$

(1)

§2 (8), (9) によつて

$$f_{1x} = m_1 \left[ - \frac{(x + y \sinh t) \cosh t}{\sqrt{c^2 t^2 + \frac{g^2}{c^2} \cosh^2 t}} + y \cosh t \right],$$

$$f_{1t}' = m_1' \left[ \frac{(x + y \sinh t) \sinh t}{\sqrt{c^2 t^2 + \frac{g^2}{c^2} \cosh^2 t}} + y \sinh t \right],$$

$$f_{2x} = m_2 \left[ - \frac{(-x + y \sinh t) \cosh t}{\sqrt{c^2 t^2 - \frac{g^2}{c^2} \cosh^2 t}} + y \cosh t \right],$$

$$f_{2t}' = m_2' \left[ \frac{(-x + y \sinh t) \sinh t}{\sqrt{c^2 t^2 - \frac{g^2}{c^2} \cosh^2 t}} + y \sinh t \right],$$

(2)

\* 花岡, J. Z. K. vol. 93 (昭和48年発表)

昭和 年 月 日

$\beta > 2$  定常点 は 未 だ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{1}{\text{sh}t} \left[ \text{cht} \sqrt{\text{ch}^2t + \frac{4\alpha}{\beta} \text{cht}} - \text{sh}^2t \right], \text{ for } m_1, \\ \frac{x}{y} &= \frac{-1}{\text{sh}t} \left[ \text{cht} \sqrt{\text{ch}^2t + \frac{4\alpha}{\beta} \text{cht}} + \text{sh}^2t \right], \text{ for } m_1', \\ \frac{x}{y} &= \frac{1}{\text{sh}t} \left[ \text{sh}^2t - \text{cht} \sqrt{\text{ch}^2t - \frac{4\alpha}{\beta} \text{cht}} \right], \text{ for } m_2, \\ \frac{x}{y} &= \frac{1}{\text{sh}t} \left[ \text{sh}^2t + \text{cht} \sqrt{\text{ch}^2t - \frac{4\alpha}{\beta} \text{cht}} \right], \text{ for } m_2'. \end{aligned} \right\} (3)$$

そこで §1 (12) の表現に 戻 して .

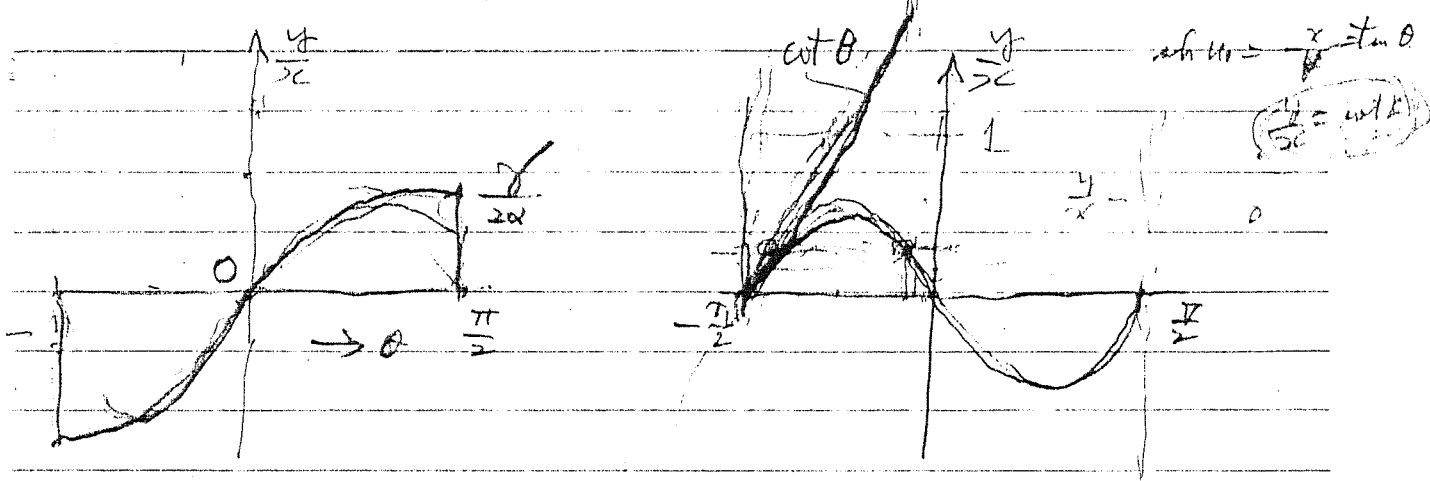
$$\text{cht} = \sec \theta, \quad \text{sh}t = \tan \theta, \quad (4)$$

と おく と  $\theta$  は 左 の 要素 間 の 進 行 方 向 と なる .  
 そう する と (3) は .

$$\left. \begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1 + \frac{4\alpha}{\beta} \cos \theta} - \sin^2 \theta}, \text{ for } m_1, \\ \frac{y}{x} &= \frac{-\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1 + \frac{4\alpha}{\beta} \cos \theta} + \sin^2 \theta}, \text{ for } m_1', \\ \frac{y}{x} &= \frac{-\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{4\alpha}{\beta} \cos \theta} - \sin^2 \theta}, \text{ for } m_2, \\ \frac{y}{x} &= \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{4\alpha}{\beta} \cos \theta} + \sin^2 \theta}, \text{ for } m_2'. \end{aligned} \right\} (5)$$

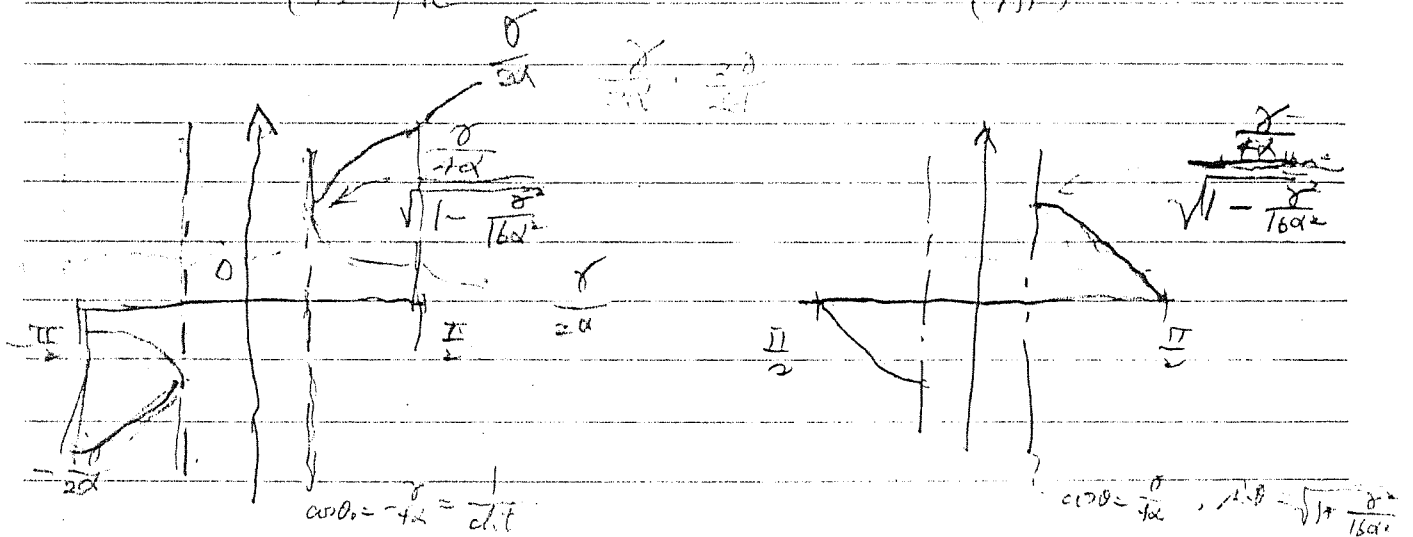
昭和 年 月 日

これらの値を模式的に図示すれば



for  $m_1$   
(A<sub>2</sub>)

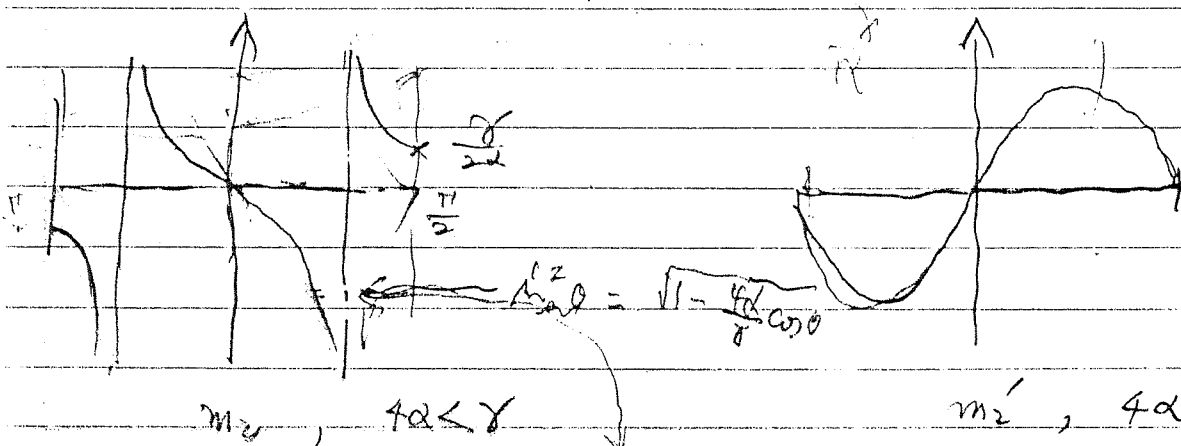
for  $m_1'$   
(A<sub>1</sub>)



$m_2, 4\alpha > \gamma$   
(B<sub>2</sub>)

$m_2', 4\alpha > \gamma$   
(B<sub>1</sub>)

$$\frac{y}{2\alpha} \cos \theta = \frac{x}{2\alpha} \sin \theta \quad \frac{y}{2\alpha} \cos \theta = \frac{x}{2\alpha} \sin \theta \quad \cos \theta = \frac{x}{y} \quad \sin \theta = \frac{y}{x}$$



$m_2, 4\alpha < \gamma$

$m_2', 4\alpha < \gamma$

$$1 - \frac{\cos \theta}{2} = \sin^2 \theta$$

昭和 年 月 日

結果 定常点は

 $m_1$  (範囲の  $A=112$ ) に対して  $\theta > 0$  ( $t > 0$ ) のとき $m_1'$  ("  $A_1$  ") "  $\theta < 0$  ( $t < 0$ ) のとき把あきかこのとき  $\Gamma$  の積分範囲は $\theta < -40$  ,  $\phi_{40} = \frac{\pi}{4} = \tan \theta_0$  故 $-\frac{\pi}{2} < \theta < -\theta_0$  の範囲には定常点はない。 $m_2$  ("  $B_2$  ") に対して  $4\alpha > \gamma$  では  $\theta > 0$  のとき $4\alpha < \gamma$  では  $\theta < 0$  に一点 $m_2'$  ("  $B_1$  ") に対しては  $4\alpha > \gamma$  のとき  $\theta > 0$  に一点 $4\alpha < \gamma$  "  $\theta > 0$  に二点

となり結果 §2 (17) の場合の積分範囲内には  
 $4\alpha < \gamma$  の場合  $m_2$  のみ定常点を有する  
 本になり、この表現は物理的に首肯しう  
 るものである事がわかる。



昭和 年 月 日

$$\left. \begin{aligned} \omega_0(u) &= \alpha - \kappa \cos u \\ \omega_0' &= \alpha - \kappa' \cos u \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \omega_0^2 &= \gamma \kappa \\ \omega_0'^2 &= \gamma \kappa' \end{aligned} \quad (5)$$

$$\phi_{\text{I}}(x, y, z; \kappa, u) = \frac{\gamma}{i\omega_0} e^{i\kappa z + i\kappa(x \cos u + y \sin u)} \quad (6)$$

$$\frac{\kappa \cos^2 u}{\kappa - \kappa'} = \frac{-1}{\sqrt{\gamma^2 + 4\alpha\gamma \cos u}}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi - \frac{\pi}{2}} \left\{ \phi_{\text{I}}(x, y, z; \kappa, u) \kappa^2 - \phi_{\text{I}}(x, y, z; \kappa', u) \kappa'^2 \right\} \frac{du}{\sqrt{\gamma^2 + 4\alpha\gamma \cos u}} \\ &+ \frac{i}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi + \frac{\pi}{2}} \phi_{\text{I}}(x, y, z; \kappa', u) \kappa'^2 \frac{du}{\sqrt{\gamma^2 + 4\alpha\gamma \cos u}} \\ &+ \frac{i}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2} + \varphi}^{\frac{3\pi}{2}} \phi_{\text{I}}(x, y, z; \kappa, u) \kappa^2 \frac{du}{\sqrt{\gamma^2 + 4\alpha\gamma \cos u}} \quad (7) \end{aligned}$$

$$-4\alpha > \gamma \text{ の時は } \cos \theta_0 = \frac{\gamma}{4\alpha} < 1$$

$$[\pi + \theta_0 > u > \pi - \theta_0]$$

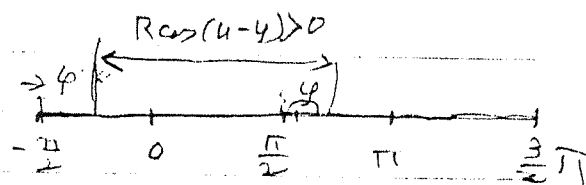
の間は積分しない。

昭和 年 月 日

$$\tilde{S}(x, y, z) = \frac{i}{4\pi^2 z} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{kz - i k(x \cos u + y \sin u)} (k \cos u - \alpha) - k \, dk \, du}{A(k, u)}$$

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi$$

$$x \cos u + y \sin u = R \cos(\varphi - u)$$



$$\tilde{S}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2} + \varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{kz}}{x - x'} du \left\{ e^{x(x \cos u - \alpha)} - e^{x'(x' \cos u - \alpha)} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \varphi} \frac{e^{kz}}{x - x'} du \, e^{x(x \cos u - \alpha)}$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2} + \varphi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{kz}}{x' - x} du \, e^{x'(x' \cos u - \alpha)}$$

$$= \frac{i}{2\pi} \int_{\varphi - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \tilde{\phi}_E(x, y, z; x, u) x^2 - \tilde{\phi}_E(x, y, z; x', u) x'^2 \right\} \frac{du}{\sqrt{8z^2 + 4\alpha x \cos u}}$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \varphi} \tilde{\phi}_E(x, y, z; x, u) \frac{x^2 du}{\sqrt{8z^2 + 4\alpha x \cos u}}$$

$$+ \frac{i}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2} + \varphi}^{\frac{3\pi}{2}} \tilde{\phi}_E(x, y, z; x', u) \frac{x'^2 du}{\sqrt{8z^2 + 4\alpha x \cos u}}, \quad (8)$$

昭和 年 月 日

6.  $S(0, y, 0)$ ,  $S(x, 0, 0)$  等の表現  
 を §3 の諸式より  $x=z=0$  の時は.

$$T(0, y, 0) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^0 \left\{ e^{im_1 y \text{sh} t} - e^{im_1' y \text{sh} t} \right\} \frac{ch t dt}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} ch^2 t + \alpha \delta ch t}} \\ + \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{-ch^{-1} \frac{4\alpha}{\gamma}} \left\{ e^{im_2 y \text{sh} t} + e^{im_2' y \text{sh} t} \right\} \frac{ch t dt}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} ch^2 t - \alpha \delta ch t}}, \quad (1)$$

$$S(0, y, 0) = \frac{1}{2\pi y} \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \left\{ e^{im_1 y \text{sh} t} - e^{im_1' y \text{sh} t} \right\} \frac{ch t dt}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} ch^2 t + \alpha \delta ch t}} \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{-ch^{-1} \frac{4\alpha}{\gamma}} \left\{ e^{im_2 y \text{sh} t} + e^{im_2' y \text{sh} t} \right\} \frac{ch t dt}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} ch^2 t - \alpha \delta ch t}}, \quad (2)$$

$$S_2(0, y, 0) = \frac{1}{2\pi y} \\ + \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \left\{ e^{im_1 y \text{sh} t} - e^{im_1' y \text{sh} t} \right\} \frac{ch^2 t dt}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} ch^2 t + \alpha \delta ch t}} \\ + \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{-ch^{-1} \frac{4\alpha}{\gamma}} \left\{ e^{im_2 y \text{sh} t} + e^{im_2' y \text{sh} t} \right\} \frac{ch^2 t dt}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} ch^2 t - \alpha \delta ch t}}, \quad (3)$$

$$S_z(0, y, 0) = \frac{i(\alpha + \gamma)}{2\pi y} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \left\{ e^{im_1 y \text{sh} t} - e^{im_1' y \text{sh} t} \right\} \frac{ch^2 t dt}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} ch^2 t + \alpha \delta ch t}} \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{-ch^{-1} \frac{4\alpha}{\gamma}} \left\{ e^{im_2 y \text{sh} t} + e^{im_2' y \text{sh} t} \right\} \frac{ch^2 t dt}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} ch^2 t - \alpha \delta ch t}}, \quad (4)$$

昭和 年 月 日

これらの式は  $y > 0$  に対するもので  $y < 0$  に対してはこれらの式はすべて  $y$  に置き偶関数として定義される。

又  $x=0$  ですべて連続であり jump 等はない。

次に もう一つの極限として  $y=z=0$  の場合を考えよう。

この時  $\delta$  も  $\delta \rightarrow 0$  (つまり  $\delta=0$ ) として後極限移行するものとする。

§1 の諸式より

$$S(x, 0, 0) = (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x}) T(x, 0, 0), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} S_2(x, 0, 0) &= \frac{1}{\delta} (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x}) S(x, 0, 0) \\ &= \frac{1}{\delta} (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x})^2 T(x, 0, 0), \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3(x, 0, 0) &= -\frac{1}{\delta} (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x})^3 S(x, 0, 0) \\ &= -\frac{1}{\delta} (i\alpha - \frac{\partial}{\partial x})^3 T(x, 0, 0), \quad (7) \end{aligned}$$

であるから  $T(x, 0, 0)$  がわかれば上の演算によりすべて求まる。

そこで §2 (17) において、右辺が 1 項の積分は、上限が  $-\infty$  となるけれど  $m'(t)$  について

$$I = \int_{-\infty}^{-u_0} \frac{cl+dt \cdot m'(t)}{\sqrt{\frac{x^2}{4} cl^2 + t^2} cl+dt} e^{if(t)}, \quad (8)$$

$$f(x) = m'(t)(x + y cl+dt)$$

とあって  $y \rightarrow 0$  の時、部分積分で漸近値を求めると

$$I = \frac{2}{i\gamma x} \quad (8')$$

を得る。

一方  $m_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$  となるので  $m_1$  の方の積分は 0 となる。

よって、

$$T(x, 0, 0) = \frac{1}{2\pi\gamma x} + \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{-\frac{c_0 + 4x}{\gamma}} \left\{ e^{-i\gamma m_2(t)} + e^{-i\gamma m_2'(t)} \right\} \frac{c_0 + dt}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} c_0^2 + \gamma^2 c_0^2 t}} \quad \text{for } x > 0, \quad (9)$$

を得る。

$x < 0$  には  $2\pi\gamma x$  は  $\frac{1}{2\pi\gamma x}$  として、

$$T(-x, 0, 0) = \overline{T(x, 0, 0)}$$

$$= \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{-i\gamma m_1(t)} - e^{-i\gamma m_1'(t)} \right\} \frac{c_0 + dt}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} c_0^2 + \gamma^2 c_0^2 t}} \\ - \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ e^{-i\gamma m_2(t)} + e^{-i\gamma m_2'(t)} \right\} \frac{c_0 + dt}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} c_0^2 + \gamma^2 c_0^2 t}}, \quad (10)$$

と与えられる。

但しこの最後の項は  $c_0 + 4x < 0$  の場合は積分しない ( $4x > 0$  の場合)。

昭和 年 月 日

7. 極限の場合  $\frac{1}{2}$ , ( $\omega \rightarrow 0$ ; 定常問題)

$$\alpha \rightarrow 0$$

$$A(k, u) \rightarrow k^2 \omega^2 u + i \mu k \omega u - k \gamma \quad \dots (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} x(u) \\ x'(u) \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\gamma}{2} \sec u - \frac{i \mu}{2} \sec u + \frac{\gamma}{2} \sec^2 u.$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \gamma \sec^2 u - \frac{i \mu}{2} \sec u \end{array} \right\} \dots (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} m_1(t) \\ m_1'(t) \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \gamma \cosh t \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} m_2 \\ m_2' \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m_1 \\ m_1' \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \gamma \cosh t \end{array} \right\}, \quad \dots (3)$$

$$T(x, y, z) = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\omega} \frac{e^{\gamma(z + i y \sin u) \sec u} du}{k^2 \omega^2 u + i \mu k \omega u - \gamma} \quad \dots (4)$$

$$T(x, y, z) \sim + \frac{1}{\pi} O_{-2}^{(1)}(\gamma x, \gamma y, -\gamma z), \quad (5)^*$$

$$\overline{T(x, y, z)} = T(x, y, z), \quad \text{実関数}, \quad (6)$$

$$T(-x, y, z) - T(x, y, z) = \frac{-2}{\pi} P_{-2}(\gamma x, \gamma y, -\gamma z), \quad (7)^*$$

$$= \frac{\pm 1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\gamma(z + i y \sin u) \sec u} \sin(\gamma x \sec u) \sec^2 u du, \quad (8)$$

\* M. Bessho, M.D.A., vol. 4, No. 2, 1964.

§2 (17) 51)  $x, y > 0$  12371

$$T = \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-u_0 - i\delta} e^{i\gamma \text{cht} (x + y \text{akt} - i\gamma \text{cht})} \text{cht} dt$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{+\frac{\pi}{2}i} e^{i\gamma \text{cht} (x + y \text{akt} - i\gamma \text{cht})} \text{cht} dt$$

$$t = \pi i + v$$

(9)  $\frac{\gamma}{2\pi}$ 

§3 (9), (10), (12) 51)

$$S = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\gamma^2}{\rho^2 \gamma} + \frac{i\gamma}{\rho^2} \right)$$

$$+ \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{-u_0 - i\delta} e^{i\gamma \text{cht} (x + y)} \text{ch}^2 t dt$$

$$+ \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\frac{\pi}{2}i} e^{i\gamma \text{cht} (-x + y)} \text{ch}^2 t dt$$

(10)

$$S_2 = \frac{(\gamma y - i\gamma x)^2}{2\pi \rho^4 \gamma}$$

$$+ \frac{\gamma^2}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-u_0 - i\delta} e^{i\gamma \text{cht} (x + y)} \text{ch}^3 t dt$$

$$+ \frac{\gamma^2}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\frac{\pi}{2}i} e^{i\gamma \text{cht} (-x + y)} \text{ch}^3 t dt$$

(11)

$$S_2 = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\gamma}{\rho^2 \gamma} \left( 1 - \frac{2\gamma^2}{\rho^2} - \frac{\gamma^2}{\gamma^2} \right) - \frac{2i\gamma^2}{\rho^4} + \frac{i\gamma}{\rho^6 \gamma} (\gamma y - i\gamma x)^3 \right]$$

$$+ \frac{\gamma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{-u_0 - i\delta} e^{i\gamma \text{cht} (x + y)} \text{ch}^4 t dt$$

$$+ \frac{\gamma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\frac{\pi}{2}i} e^{i\gamma \text{cht} (-x + y)} \text{ch}^4 t dt$$

(12)

昭和 年 月 日

8. 極限の場合 ( $U=0, \gamma \rightarrow \infty$ )

$$\left. \begin{array}{l} x(u) \\ x'(u) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} +K \\ \gamma \sec u \rightarrow \infty \end{array} \right\}, \quad K = \frac{\omega^2}{g} = \frac{g^2}{g}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\gamma \cos u + \frac{g^2}{4}} \sec u &= \frac{\gamma}{2} \sec u \sqrt{1 + \frac{4g}{\gamma} \cos u} = \frac{\gamma}{2} \sec u \left[ 1 + \frac{2g}{\gamma} \cos u + \frac{16}{8} \frac{g^2}{\gamma^2} \cos^2 u \right] \\ &= \frac{\gamma}{2} \sec u + g \sec u - \frac{g^2}{\gamma} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} m_1(t) \\ m_1'(t) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{K}{cht} \\ \gamma cht \rightarrow \infty \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} m_2(t) \\ m_2'(t) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} K/cht \\ \gamma cht \rightarrow \infty \end{array} \right\} \quad (3)$$

となり  $m_1', m_2'$  (2) 及び (3) 種分は平均において 0 となり

$$\begin{aligned} [\gamma T]_{0 \rightarrow \infty} &= \frac{K}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iK(x \frac{dt}{cht} + y \frac{dt}{cht} - i\gamma t)} \\ &\quad + \frac{K}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\frac{\pi i}{2} + K\gamma + iK(\frac{x}{cht} + y \frac{dt}{cht}))} \frac{dt}{cht} \quad (4) \end{aligned}$$

をうる。

今  $cht = \sec u, \quad sht = \tan u$  とおくと、

$$\begin{aligned} \gamma T \Big|_{\gamma \rightarrow \infty} &= \frac{K}{2\pi i} e^{K\gamma} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{iK(x \cos u + y \sin u)} e^{du} \\ &\quad + \frac{K}{2\pi i} e^{K\gamma} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-iK(x \cos u + y \sin u)} e^{du}, \end{aligned}$$

故に  $x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0 = -\gamma,$

昭和 年 月 日

3  $x = R \cos \varphi$ ,  $y = R \sin \varphi$  とおく.

$$\gamma T \Big|_{r \rightarrow \infty} = \frac{K}{2\pi i} e^{Kz} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\theta_0} e^{iKR \cos(u-\varphi)} du$$

$$- \frac{K}{2\pi i} e^{Kz} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-i\infty} e^{-iKR \cos(u+\varphi)} du, \quad \dots (5)$$

$$= \frac{K}{2\pi i} e^{Kz} \int_{\varphi}^{-\theta_0} e^{iKR \cos(u-\varphi)} du$$

$$+ \frac{K}{2\pi i} e^{Kz} \int_{-\varphi}^{-i\infty} e^{-iKR \cos(u+\varphi)} du, \quad \dots (5)$$

次の積分は

$$\int_{\varphi}^{-\theta_0} e^{iKR \cos(u-\varphi)} du = \int_0^{\cos^{-1} \frac{i2}{R}} e^{iKR \cos t} dt$$

$$= \frac{\pi}{2} \{ J_0(KR) - i H_0^{(2)}(KR) \} + i \int_0^{-\frac{\pi}{2} - \frac{i2}{R}} e^{-KR \cosh u} du, \quad (6)$$

次の積分は

$$\int_{-\varphi}^{-i\infty} e^{-iKR \cos(u+\varphi)} du = i \int_0^{\infty} e^{-iKR \cosh t} dt = \frac{\pi}{2} H_0^{(2)}(KR), \quad (7)$$

よって

$$\gamma T \Big|_{r \rightarrow \infty} = \frac{K}{4} e^{Kz} \{ H_0^{(2)}(KR) - Y_0(KR) \} + \frac{K}{2i} e^{Kz} H_0^{(2)}(KR) + \frac{K}{2\pi i} e^{Kz} \int_0^{-\frac{\pi}{2} - \frac{i2}{R}} e^{-KR \cosh u} du, \quad (8)^*$$

\* 別冊; 防大理工学研究报告 3巻2号 昭和40年

9. 極限の場合 ( $\gamma \rightarrow 0$ )

$$\left. \begin{aligned} m_1(t) &\doteq m_1'(t) = \alpha \\ m_2(t) &\doteq m_2'(t) = -\alpha \\ m_1'(t) - m_1(t) &= 2\sqrt{\frac{\gamma^2 c^2 t^2}{4} + \alpha^2 c^2 t} \doteq \gamma c t \end{aligned} \right\} (11)$$

となるからこの場合は大変複雑で、§3の積分表示から直接極限值を求める事は出来なかった。

それは  $\gamma \rightarrow 0$  に移行する時の極限が大変複雑なためであるからこの事は  $\gamma = \alpha = 0$  の時の式 §6(9) を見てよくわかるであろう。

勿論 §1 の定義式において、直接  $\gamma \rightarrow 0$  とすれば直ちに求まって。

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\alpha\right) S(x, y, z) = \frac{z}{2\pi\gamma^3}, \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\alpha\right) T(x, y, z) = -S(x, y, z), \quad (3)$$

$$S_2(x, y, z) = -\frac{z}{2z} T(x, y, z), \quad (4)$$

等となり

$$S(x, y, z) = \frac{i}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{kz + i k(x \cos u + y \sin u)}}{k \cos u - \alpha + i\epsilon} dk du, \quad (5)$$

となるから(2)から直接

$$S(x, y, z) = \frac{z e^{i\alpha x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha z}}{\{(\alpha - \xi)^2 + y^2 + z^2\}^{\frac{3}{2}}} d\xi, \quad (6)^*$$

をうる。

\* C. E. Watkins & others; NACA, Report 1234