

(M. C. 2. 1)

(未完, 含誤)

昭和 50 年 10 月 16 日

排水量型船の波浪中動揺理論について  
(前進速度のある場合)

別所正利

内容

頁

|                  |       |
|------------------|-------|
| 1. 速度ポテンシャルの表現   | 1     |
| 2. 境界値問題と解の種類    | 9     |
| 3. 流れ, 逆時間ポテンシャル | 11    |
| 4. カとモーメント       | 16-18 |

|      |          |           |
|------|----------|-----------|
| 附録 A | 境界条件について | A-1~8     |
| " B  | 変位ポテンシャル | B-1~3     |
| " C  | 力の成分について | C-1~7     |
| " D  | 運動ポテンシャル | D-1~5     |
| " E  | 相反定理     | E-1~4     |
| " F  | " (続)    | F-1~4, 4' |
| " G  | 仕事積分     | G-1~3     |

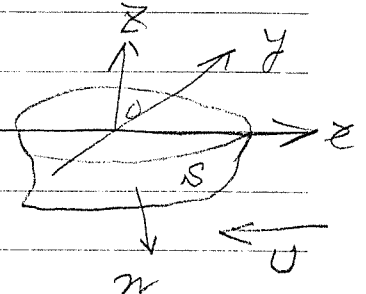
# 1. 速度ポテンシャルの表現

慣性に従って以下基本円周運動の周期運動の部分のみとりあげすべての等は

$\text{Re}[f(x, y, z)e^{i\omega t}]$  の如く書けるものとする。

水面条件は

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi(x, y, 0) = -(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \zeta(x, y, 0) \quad (1)$$



$$(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \phi(x, y, 0) - g \zeta(x, y) = \frac{1}{\rho} p(x, y, 0) \quad (2)$$

但し  $\phi$  は速度ポテンシャル ( $u, v, w = -\nabla \phi$ ),  $\zeta$  は水面上昇量とする。

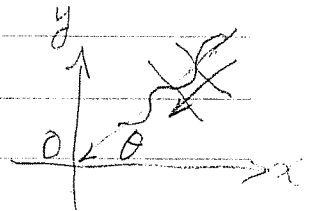
$\zeta$  を消去すると

$$(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x})^2 \phi(x, y, 0) + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = (i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \frac{p(x, y, 0)}{\rho} \quad (3)$$

但し自由表面では  $p=0$  である。

後の便利のため単位波長の平面波のポテンシャルを考えておこう。

$$\begin{aligned} \zeta_I(x, y; \theta) &= \frac{1}{g} (i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \phi_I(x, y, 0; \theta) \\ &= e^{iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} \end{aligned} \quad (4)$$



$z=12$   $K=2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  は長で波の円周波数を  $\omega_0$  とすると  $\omega$  は全円周波数で

$$\begin{aligned} K &= \omega_0^2 / g \\ \omega &= \frac{2\pi}{T_e} = \omega_0 + KU \cos \theta \end{aligned} \quad (5)$$

(4) から

$$\phi_I(x, y, z; \theta) = \frac{g}{\omega \omega_0} e^{Kz + iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} \quad (6)$$

昭和 年 月 日

今  $Q(x, y, z)$  点にある単位電荷によつて  $P(x, y, z)$  点、  
に於けるポテンシャルを次のように定義しよう。

$$S(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - \frac{\gamma}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{kz + i(k(x-x')\cos\theta + (y-y')\sin\theta)u}}{(k^2\omega^2 - \frac{\omega^2}{v^2})^2 - \gamma k + i\pi(k\cos\theta - \frac{\omega}{v})} dk du$$

$$r_1 = PQ, \quad r_2 = P\bar{Q}, \quad \bar{Q} = (x', y', -z'), \quad (7)$$

これより

$$\left[ (i\omega - v \frac{\partial}{\partial x})^2 + \gamma \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] S(P, Q) = (i\omega - v \frac{\partial}{\partial x})^2 \left\{ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right\} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right\}, \quad (8)$$

となるが水面条件を満たしている。

充分遠くでは

$$S(P, Q) \longrightarrow \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + S_W(P, Q), \quad (9)$$

$$S_W(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi - \frac{\pi}{2}} \left[ \phi_I(x, y, z; \kappa, u) \kappa \omega_0 - \phi_I(x, y, z; \kappa', u) \kappa' \omega_0 \right] \times \frac{du}{\sqrt{\gamma^2 + \frac{4\omega\gamma\cos u}{v}}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi + \frac{\pi}{2}} \phi_I(x, y, z; \kappa', u) \kappa' \omega_0' \frac{du}{\sqrt{\gamma^2 + \frac{4\omega\gamma\cos u}{v}}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2} + \varphi}^{\frac{3\pi}{2}} \phi_I(x, y, z; \kappa, u) \frac{\kappa \omega_0 du}{\sqrt{\gamma^2 + \frac{4\omega\gamma\cos u}{v}}} \quad (10)$$

$$x = x - x', \quad y = y - y', \quad z = z + z'.$$

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi.$$

$$\omega > \frac{v\gamma}{4} \text{ の時は } \omega \theta_0 = \frac{\gamma v}{4\omega} \text{ と } [\pi + \theta_0 > u > \pi - \theta_0] \text{ の } \theta_0 \text{ が}$$

昭和 年 月 日

$$\chi \left/ \frac{\chi'}{\chi'} \right. = \frac{\omega}{U} \operatorname{sech} u + \frac{g}{2} \operatorname{sech}^2 u \mp \left( \sqrt{\frac{g^2}{2} \operatorname{sech}^2 u + \frac{\omega^2}{U^2} \operatorname{sech}^2 u} \right) \operatorname{sech} u.$$

$$\omega_0 = \omega - \chi \cosh u, \quad \omega_0' = \frac{\omega}{U} - \chi' \cosh u.$$

22に(10)式の $\phi$ はすべて出会う周波数 $\omega$ になる零素平面はである。

(10)式からさらに定常値は2によって所謂4波系の漸近展開を求める事が出来るか。これはこの并た17おくのか。後で便利なのでこの節に17おく。

さて2の核函数を用いるとグリーン関数の定理により

$$\phi(p) = \iint_{S+H} \left[ \frac{\partial \phi(q)}{\partial n} S(p, q) - \phi(q) \frac{\partial}{\partial n} S(p, q) \right] dS(q), \quad (11)$$

$H$ は水表面とする。

となるが  $H$ 上の積分は自由表面条件(3)と(7)(8)より

$$\left[ (i\omega + U \frac{\partial}{\partial x'})^2 + g \frac{\partial}{\partial z} \right] S(p, q) \Big|_{z'=0} = 0, \quad (12)$$

より

$$\begin{aligned} - \iint_H \left[ \frac{\partial \phi}{\partial z} S - \phi \frac{\partial}{\partial z} S \right] dx' dy' &= \frac{1}{g} \iint_H \left[ S'(p, q) (i\omega + U \frac{\partial}{\partial x'})^2 \phi(q) \right. \\ &\quad \left. - \phi(q) (i\omega + U \frac{\partial}{\partial x'})^2 S(p, q) \right] dx' dy' = \frac{1}{g} \iint_H 2i\omega U \frac{\partial}{\partial x'} (S \phi) dx' dy' \\ &\quad + \frac{U^2}{g} \iint_H \left[ S \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \phi - \phi \frac{\partial^2}{\partial x'^2} S \right] dx' dy' \\ &= \frac{1}{g} \int_C \left[ U^2 \left( S \frac{\partial \phi}{\partial x'} - \phi \frac{\partial}{\partial x'} S \right) - 2i\omega U S \phi \right] dy' = \phi_H, \end{aligned}$$

あらためて

$$\phi_L(p) = \frac{U}{g} \int_C \left[ S(p, Q) (i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \phi(Q) + \phi(Q) (i\omega + U \frac{\partial}{\partial x}) S(p, Q) \right] dy', \quad (13)$$

とみるとこれが所謂線積分項となり (11) は

$$\phi(p) = \phi_S(p) + \phi_L(p), \quad (14)$$

$$\phi_S(p) = \iint_S \left[ \frac{\partial \phi}{\partial n} S - \phi \frac{\partial S}{\partial n} \right], \quad (15)$$

となる。

従来  $\phi_L$  は無視されて来たものであるが造波抵抗理論における重要度から考えて一考に値すると思ふのでこれを残しておきたい。

しかしこの考察では幾分あいまいな点もあるので造波抵抗理論におけると同様没水船の極限として水上船を以下のように扱う。

さて没水体を考えその上面は水平な固体壁  $\bar{H}$  でおおわれているものとしよう。

そしてその上面が限りなく水面に近づいたとしよう。

甲板と自由表面の間には薄い水の膜が残される。

所で  $\bar{H}$  の境界条件はもし上下動ならその振幅を  $h$  とすると

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{\bar{H}} = -i\omega h, \quad (16)$$

となるがここでは水の流(速)は  $x$  方向に一律と考えられる故 (3) が成立ち上式を代入すると

$$(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x})^2 \phi(x, y, 0) = i g \omega h, \quad (17)$$

あるいは  $\zeta$  については

$$(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \zeta(x, y) = -ig\eta h \text{ on } \bar{\Gamma}, \quad (18)$$

となるが この解は、

$$\zeta(x, y) = -gh + f_{\text{func.}}(y) e^{i\frac{\omega}{U}x}, \quad (19)$$

ここで  $f_{\text{func.}}(y)$  は  $y$  の任意の関数である。

つまり浸水船の動力系問題をとくと一船に  $\bar{\Gamma}$  の上には (19) の形の水面変位がある。

この右辺の1項は船と共に水が膜が上下している事を示す。

従って水上船にする為にはこの水をなくするような ( $\zeta=0$  となるような) ポテンシヤルを加えてやればよい。

そこで  $\bar{\Gamma}$  上の圧力分布  $p$  によって与えられるポテンシヤルを次のように導入する。

$$\phi(p) = \frac{1}{r} \iint_{\bar{\Gamma}} p(q) S_p(p, q) dx' dy'. \quad (20)$$

$$S_p(p, q) = \frac{i}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{e^{i(\frac{\omega}{U}x' + i\eta\{(x-x')\cos u + (y-y')\sin u\})}}{(k\cos u - \frac{\omega}{U}) A(k, u)} k dk du \quad (21)$$

$$A(k, u) = (k\cos u - \frac{\omega}{U})^2 + i\eta(k\cos u - \frac{\omega}{U}) - \gamma k$$

$$S_p(p, q) = \frac{1}{2U} (i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) S(p, q) \Big|_{z'=0}.$$

さて今ポテンシヤルをあらためて

$$\phi(p) = \phi_s(p) + \phi_h(p), \quad (22)$$

$$\phi_s(p) = \iint_{S+\bar{\Gamma}} \left[ \frac{\partial \phi_s}{\partial n} S - \phi_s \frac{\partial}{\partial n} S \right] dS, \quad (23)$$

昭和 年 月 日

とき  $\phi_s$  は没水船にあるポテンシャルで

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial n} = \text{given on } S \text{ and } \overline{H} \quad (24)$$

と定義しよう。

$\phi_h$  は (20) による  $\phi_p$  と (23) もしくは (15) の型の  $\phi_s$  を加えて

$$\frac{\partial \phi_h}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S \text{ and } \overline{H}, \quad (25)$$

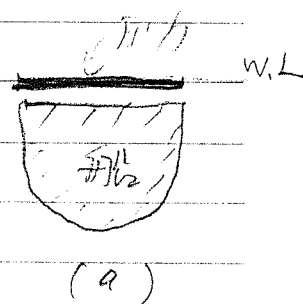
となるようにし 且つ、次にによる水面変位  $\zeta_s, \zeta_h$  の間に

$$\zeta_s(x, y) + \zeta_h(x, y) = 0 \quad \text{on } \overline{H}, \quad (26)$$

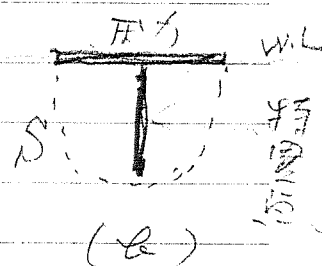
なる関係があるものとする。

このモデルは右図 (a) に対応している。

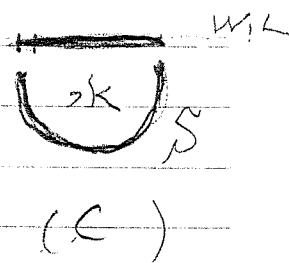
しかしこの構成は勿論自由であつて  
 例へば 薄い船では図 (b) のように  
 船体中心部に特異点を又図 (c)  
 のように船体浸水面に特異点を  
 おいて可なり。



いづれにしても 没水部特異点によつて出来る  $\overline{H}$  上の水面変位が  
 0 になるように 圧力分布をおけば  
 よいわけである。



しかしこの時この圧力分布によつて  $S$  上の  
 境界条件は変化するのて 附加的な  
 特異点を  $S$  上に分布させる必要が  
 ある。



このような誘導では  $\phi$  は必ずしも必要  
 でないように見えるが (26) の条件を満た  
 すのには 不可欠のものである。

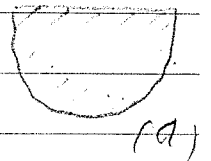
と言うのは 没水船では恐らく法線速度を定  
 める解は一意的に決まる故 水面変位も自然に

決まり、それを与えられたものに等しくすることは不可能であろうから新しく  $\phi$  のようなものを加える必要がある。

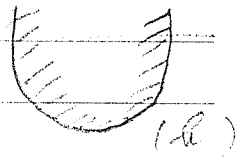
又  $\phi_s$  の  $\bar{\Gamma}$  上の境界条件はどの道 最終の結果には関係ないので 終極には " $\partial\phi/\partial n = 0$ " としてもよいからするとそれは不動の平面となるので 船体に対しては相対的に動く車になる。

実用上は いずれ ストリツコフ法を適用する車になる筈であるが その時は 2 次の問題では 不図 (d) と (e) (f) では 外側のポテンシャルの間に何等の影響もない。と言うのは、水面では、

$$-\omega^2 \phi(y, 0; x) + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad (27)$$

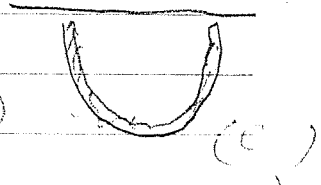


$$\phi(y, z; x) = \int_{S+\bar{\Gamma}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} S - \phi \frac{\partial S}{\partial n} \right) dS, \quad (28)$$



ここは  $S$  は 2 次の動揺問題の核関数とする。  
今図 (a) の  $\bar{\Gamma}$  で：

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \text{constant on } \bar{\Gamma} \quad (29)$$



とすると (27) によつて  $\bar{\Gamma}$  上の  $\phi$  は定まり  $S$  を又 (28) を満たすもの。

$$\phi = \int_S \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} S - \phi \frac{\partial S}{\partial n} \right) dS, \quad (30)$$

となり  $\bar{\Gamma}$  上の境界条件は何等の結果に影響しない。最も  $\omega$  が小さいと (a) (b) の向きの大きな差がある。

昭和 年 月 日

最後に無限遠方では (9) (10) を (23) (20) に代入して

$$\begin{aligned} \phi_s(x, y, z) \rightarrow & \frac{1}{2\pi i} \int_{S+\bar{H}} \frac{\partial \phi_s}{\partial n} ds + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[ \phi_I(x, y, z; \kappa, u) H_s(x, u) \frac{\kappa \omega_0^2}{\sqrt{\kappa^2 + \frac{4\omega_0^2}{\theta} \cos u}} - \phi_{II}(x, y, z; \kappa', u) \frac{\kappa' \omega_0^2}{\sqrt{\kappa'^2 + \frac{4\omega_0^2}{\theta} \cos u}} \right] \times \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[ \phi_I(x, y, z; \kappa', u) H_s(x', u) \frac{\kappa' \omega_0^2}{\sqrt{\kappa'^2 + \frac{4\omega_0^2}{\theta} \cos u}} - \phi_{II}(x, y, z; \kappa, u) \frac{\kappa \omega_0^2}{\sqrt{\kappa^2 + \frac{4\omega_0^2}{\theta} \cos u}} \right] \times \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{\pi}{2}+\varphi}^{\frac{3\pi}{2}+\varphi} \left[ \phi_I(x, y, z; \kappa, u) H_s(x, u) \frac{\kappa \omega_0^2}{\sqrt{\kappa^2 + \frac{4\omega_0^2}{\theta} \cos u}} - \phi_{II}(x, y, z; \kappa', u) \frac{\kappa' \omega_0^2}{\sqrt{\kappa'^2 + \frac{4\omega_0^2}{\theta} \cos u}} \right] du, \quad (31) \end{aligned}$$

101  $\kappa^2 = \kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2$

$$H_s(\kappa, u) = \iint_{S+\bar{H}} \left[ \frac{\partial \phi_s}{\partial n} \phi_I(x, y, z; \kappa, u) - \phi_s \frac{\partial \phi_I}{\partial n} \right] ds, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \phi_p(x, y, z) \rightarrow & \frac{i\omega}{2\pi \kappa u r p} \iint_{\bar{H}} p dx dy' + \\ & + \frac{i}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[ \phi_I(x, y, z; \kappa, u) H_p(x, u) \frac{\kappa \omega_0^2}{\sqrt{\kappa^2 + \frac{4\omega_0^2}{\theta} \cos u}} - \phi_{II}(p; \kappa', u) H_p(x, u) \frac{\kappa' \omega_0^2}{\sqrt{\kappa'^2 + \frac{4\omega_0^2}{\theta} \cos u}} \right] \frac{du}{\sqrt{\kappa^2 + \frac{4\omega_0^2}{\theta} \cos u}} \\ & + \frac{i}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[ \phi_{II}(p; \kappa, u) H_p(x, u) \frac{\kappa \omega_0^2}{\sqrt{\kappa^2 + \frac{4\omega_0^2}{\theta} \cos u}} - \phi_I(p; \kappa', u) H_p(x, u) \frac{\kappa' \omega_0^2}{\sqrt{\kappa'^2 + \frac{4\omega_0^2}{\theta} \cos u}} \right] \frac{du}{\sqrt{\kappa'^2 + \frac{4\omega_0^2}{\theta} \cos u}}, \quad (33) \end{aligned}$$

$$H_p(\kappa, u) = \frac{1}{p} \iint_{\bar{H}} p(x, y) \phi_I(x, y, z; \kappa, u) dx dy, \quad (34)$$

したがって定義7と(31)と同様に

$$H_p(\kappa, u) = \frac{1}{p} \iint_{\bar{H}} p(x, y) \phi_{II}(x, y, z; \kappa, u) dx dy, \quad (34')$$

昭和 年 月 日

## 2. 境界値問題と解の種類

附録 A において考察するように 普通の形では高次の項を省略して 定常運動並びに各要素運動の間の干渉はないとして 線形理論を構成することが出来る。

そしてそのような近似の下では 変位ポテンシヤル  $\psi$  を導入すると 便利で その境界条件は A (33) によって与えられるから 速度ポテンシヤルは A (30) によって計算出来る。 (単位振幅の)

さてそれを各要素運動について書くと

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial x_j}{\partial \eta} \quad \text{on } S, \quad j=1,2,3, \quad (1)$$

$x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z$

附録 1 前後ゆれ, 2 左右ゆれ, 3 上下ゆれとする。

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial x_j} = -\left(x_i \frac{\partial x_j}{\partial \eta} - x_k \frac{\partial x_i}{\partial \eta}\right), \quad j=4,5,6, \quad (2)$$

$i=j+1 \bmod(3), \quad k=j+1 \bmod(3)$

Fi 添字 4 横ゆれ, 5 縦ゆれ, 6 船ゆれとする。

そして

$$\phi_j(p) = (i\omega - \nu \frac{\partial}{\partial x_j}) \psi_j(p), \quad (3)$$

として  $\phi_j$  が計算されるものとする。

従って  $\phi_j$  の境界条件は A (32) のようになっている。

これらの所謂 radiation potential の他に入射平面波と散乱波のポテンシヤルを導入する。

入射波は §1 (6) で定義されているから その変位ポテンシヤルは

$$\psi_E(p; K, \theta) = -\frac{1}{K} e^{Kz + iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} \quad (4)$$

昭和 年 月 日

散乱ポテンシャルの境界条件は A (34) となるか  
(1), (2) 等に合すると

$$\frac{\partial \psi_d}{\partial n} = -\frac{\partial \psi_I}{\partial n} \quad \text{on } S, \quad (5)$$

としておく方が便利であろう。

又水線面での境界条件は前節の考察に従い  
§1 (26) とする。

このような条件を合計加える事により線積分  
の問題をさける事とする。

そこでこうすると、

$$\phi_I = (i\omega - iKV\cos\theta)\psi_I = i\omega_0\psi_I, \quad (6)$$

つまり  $\phi_I$  は  $\psi_I$  の定数倍であるからその法線微分も  
又定数倍になる。

それ故解が一義的に定まるならば

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial n} \stackrel{?}{=} -\frac{\partial \phi_I}{\partial n} = -i\omega_0 \frac{\partial \psi_I}{\partial n} = i\omega_0 \frac{\partial \psi_d}{\partial n} \quad ?$$

となるので

$$\phi_d = i\omega_0 \psi_d, \quad \dots \quad (7) \quad ?$$

でなければならぬ。

同様にして

$$\begin{aligned} P_d &\equiv (i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \Phi_d = i\omega_0 (i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) (\psi_I + \psi_d) \\ &= i\omega_0 \Phi_d, \quad \dots \quad (8) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi_d = \frac{\partial}{\partial n} \left[ (i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \psi_d \right] = i\omega \frac{\partial \psi_d}{\partial n} - U \frac{\partial^2 \psi_d}{\partial n \partial x} = i\omega_0 \frac{\partial \psi_d}{\partial n}$$

$$iKV\cos\theta \frac{\partial \psi_d}{\partial n} = U \frac{\partial^2 \psi_d}{\partial n \partial x} //$$

昭和 年 月 日

## 3. 逆流れ, 逆時間 ポテンシャル

1 節の流れは正に一様流れの方向が逆になった流れを考えて逆流れと呼び、すべて  $(\sim)$  FPI によって区別しよう。

水面条件は

$$(i\omega + U \frac{\partial}{\partial x}) \tilde{\phi}(x, y, 0) - g \tilde{\zeta}(x, y) = \frac{1}{\rho} \tilde{p}(x, y), \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{\phi}(x, y, 0) = - (i\omega + U \frac{\partial}{\partial x}) \tilde{\zeta}(x, y), \quad (2)$$

$$\therefore \{ (i\omega + U \frac{\partial}{\partial x})^2 + g \frac{\partial}{\partial z} \} \tilde{\phi}(x, y, 0) = (i\omega + U \frac{\partial}{\partial x}) \frac{\tilde{p}(x, y)}{\rho}, \quad (3)$$

又平面波は

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_E(x, y) &= e^{-i\kappa(x \cos \theta + y \sin \theta)} \\ \tilde{\phi}_E(x, y) &= \frac{g}{i\omega_0} e^{\kappa z - i\kappa(x \cos \theta + y \sin \theta)} \end{aligned} \quad (4)$$

§1 (12) 式の演算子が (3) の左辺のと同じである  
事から直ちに

$$\tilde{S}(p, Q) = S(Q, p), \quad (5)$$

となる事がわかる。

逆流れポテンシャルの表示は

$$\tilde{\phi}(p) = \tilde{\phi}_S(p) + \tilde{\phi}_R(p), \quad (6)$$

$$\tilde{\phi}_S(p) = \iint_{S+\bar{H}} \{ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} \tilde{S}(p, Q) - \tilde{\phi}(Q) \frac{\partial}{\partial n} \tilde{S} \} dS, \quad (7)$$

$$\tilde{\phi}_R = \tilde{\phi}'_R(p) + \tilde{\phi}'_S(p), \quad (8)$$

$\tilde{\phi}'_S$  の表示は  $\phi_S$  と同じ。

昭和 年 月 日

$$\tilde{\phi}_p(p) = \frac{1}{F} \iint_{\bar{F}} \tilde{P} \tilde{S}_p dx dy', \quad (9)$$

$$\tilde{S}_p(p, q) = S_p(q, p), \quad (10)$$

等を得る。

逆流れの境界条件と元のそれとの間には水面条件からわかるように。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\phi}(p)}{\partial n} &= -\frac{\partial \overline{\phi}(p)}{\partial n} \quad \text{on } S \text{ and } \bar{H}, \\ \tilde{\zeta}(x, y) &= \overline{\zeta}(x, y) \quad \text{on } \bar{H}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

なる関係がある。

ここで共役複素値をとる事は  $\phi$  を実時間現象の速度ポテンシャルのフーリエ変換と考えるならば“時間軸を逆にした事に相当する故に逆時間流れと呼ぶ事もある。

時間を全く逆にすると一樣流れの方向も変わる事になるが今は周期運動のみに注目しているので一樣流れの方向は直接関係はない。

それ故以下では逆時間流れを上述のように定義しておく。

無限遠方での展開は  $\S 1$  (31) (33) と同形で夫々の量に逆流れ量とすればよい。

ただし

$$H_s(\mathbf{r}, u) = - \iint_{S \cap \bar{H}} \left[ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} \phi_I - \tilde{\phi} \frac{\partial \phi_I}{\partial n} \right] ds, \quad (12)$$

$$H_p(\mathbf{r}, u) = - \frac{1}{F} \iint_{\bar{F}} \tilde{P} \phi_I dx dy, \quad (13)$$

$$\text{但し } \overline{\phi_I} = -\phi_I$$

昭和 年 月 日

境界値問題は  $\rho^2$  のように 変位 ポテンシヤルで  
表した時に 水面条件等は 速度ポテンシヤル  
等と変りはなす。

即ち 
$$\phi^2 = (i\omega + U \frac{\partial}{\partial x}) \bar{\phi}^2, \quad \dots (14)$$

と定義すると 船体表面では

$$\frac{\partial \phi^2}{\partial n} = - \frac{\partial \bar{\phi}^2}{\partial n}, \quad \dots (15)$$

$$-\frac{1}{2} \bar{\phi}^2|_{z=0} = \zeta^2 = \zeta \rightarrow 0 \text{ on } H$$

である。

さて 逆流ポテンシヤル は元のポテンシヤルと、  
同じ船体表面条件を持ち 波だけが異なる。

即ち 今

$$\phi + \bar{\phi}$$

なる関数を考えると (15) により  $S$  上ではその法線  
速度は 0 であり  $H$  上では 水面変位も 0 (このように  
関数のみ考える) となる、つまり 各次境界条件を  
持ち 無限遠方には 波がある。

それ故 この境界値問題の解が 一義的に  
定まるならば それは 波の入射散乱問題の解  
でなければならぬ。

そこで §1 (31) なる展開を考慮して、

$$\phi + \bar{\phi} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{\Phi}_d(x, y, z; x', u) H(x', u) \frac{x'^2}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} du$$

$$+ \frac{-i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{\Phi}_d(x, y, z; x', u) H(x', u) \frac{x'^2}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} du,$$

(16)

121

$$\Phi_d(p; x, u) = \Phi_I(p; x, u) + \Phi_d(p; x, u), \quad - (17)$$

$$H(x, u) = \iint_{S+\bar{S}} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \bar{\Phi}_I(p; x, u) - \Phi \frac{\partial \bar{\Phi}_I}{\partial n} \right] dS$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{\bar{H}} P(x, y) \bar{\zeta}_I(p; x, u) dx dy, \quad - (18)$$

また  $\bar{\Phi}_I = -\Phi_I, \bar{\zeta}_I = \zeta_I$  であるから, これらを上式に代入すると

$$H(x, u) = - \iint_{S+\bar{S}} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \tilde{\Phi}_I - \Phi \frac{\partial \tilde{\Phi}_I}{\partial n} \right] dS$$

$$= - \frac{1}{2} \iint_{\bar{H}} P(x, y) \tilde{\zeta}_I dx dy, \quad - (18')$$

となるから  $\bar{H}$  上  $\tilde{\zeta} = +\zeta = 0$ ,  $\frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \zeta}{\partial z}$  となるものとするに式は,

$$H(x, u) = - \iint_S \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \tilde{\Phi}_I - \Phi \frac{\partial \tilde{\Phi}_I}{\partial n} \right] dS, \quad (18'')$$

さらに相反定理により

$$H(x, u) = - \iint_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} \tilde{\Phi}_d dS, \quad - (19)$$

を得る

(16) は 逆流れポテンシャルの共役値つまり逆流れで組つた逆時間の速度ポテンシャルと元のポテンシャルの和は散乱ポテンシャルだけになる事を示す重要な関係式である。

昭和 年 月 日

さて船が前後左右対称ならば"物理的に"考えて、  
この関係がある事は明らかである。

つまり船体表面条件が前後対称ならば

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n_j}(x, y, z) = \frac{\partial \phi_j}{\partial n_j}(-x, y, z)$$

$$\phi_j(x, y, z) = -\phi_j(-x, y, z), \quad \left. \begin{array}{l} (20) \\ \dots \end{array} \right\}$$

又前後反対称ならば

$$\phi_j(x, y, z) = \phi_j(x, y, z) \quad \dots (21)$$

実際には  $\phi_j$  は対称成分と非対称成分を含むので  
これについて上の関係が成立つ。

その  $\phi_j$  について考えると便利である。

又一般に船の前後の非対称性は僅かなもの  
であるので前後部の平均面を考えて境界条件  
は平均面上で満たすようにしても今の近似度  
と変わらない。

その場合は境界条件を対称部分と反対称  
部分に別ければ上の関係が成立って大変便利  
である。

## 4. カとモーメント,

附録Cで考察したように、静水圧分を除く  
 同相的力 運動  $i$  による  $j$  方向の力はモーメントの

$$F_{ij} = + \rho e^{i\omega t} \iint_S p_i \frac{\partial \psi_i}{\partial n} dS, \quad (1)$$

$$\text{但し } p_i = (i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \phi_i, \quad (2)$$

そこで今

$$f_{ij} = \iint_S p_i \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial n} dS, \quad (3)$$

なる量を定義すると  $j=1 \sim 6$  に對しては

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial n} = - \frac{\partial \psi_i}{\partial n} = - \frac{\partial \psi_j}{\partial n}, \quad (4)$$

であるから

$$F_{ij} = - \rho f_{ij} e^{i\omega t}, \quad (1')$$

となる。

所で附録E (8) により

$$f_{ij} = \iint_S \phi_i \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial n} dS, \quad (5)$$

であるがこれは附録Dでハミルトンの原理から導いた力の式 (21) に一致する。

又相反定理により直ちに

$$f_{ij} = f_{ji} \equiv \iint_S \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} dS, \quad (6)$$

を得る。

昭和 年 月 日

これらの関係は前節の最後に考察したように船が前進対称とすると大変有用な関係となる。

次に波の強制力について、

$$E_j = \rho a e^{i\omega t} \iint_S P_d \frac{\partial \psi_j}{\partial n} dS, \quad \dots (7)$$

$$P_d = (i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \Phi_d, \quad \dots (8)$$

$a$ : 波振幅。

と与えられるから同様に所録 E (8) により、

$$\begin{aligned} \iint (i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \Phi_d \frac{\partial \psi_j}{\partial n} dS &= - \iint P_d \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial n} dS \\ &= - \iint \tilde{\Phi}_j \frac{\partial \Phi_d}{\partial n} dS = - \iint \Phi_d \frac{\partial \tilde{\Phi}_j}{\partial n} dS \end{aligned}$$

同様に

$$\iint_S (i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \Phi_d \frac{\partial \psi_j}{\partial n} dS = - \iint \Phi_d \frac{\partial \tilde{\Phi}_j}{\partial n} dS$$

とある故 §3 (19) により

$$\begin{aligned} \iint_S P_d \frac{\partial \psi_j}{\partial n} dS &= - \iint_S P_d \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial n} dS = \iint_S \Phi_d \frac{\partial \tilde{\Phi}_j}{\partial n} dS \\ &= - \tilde{H}_j(x, 0), \quad \dots (9) \end{aligned}$$

よって (7) は

$$E_j = - \rho a e^{i\omega t} \tilde{H}_j(x, 0), \quad (10)$$

とて  $\tilde{H}_j$  は §3 (18) のように与えられるので再録する。

昭和 年 月 日

$$H_j^{\sim}(n, \theta) = - \iint_S \left[ \frac{\partial \phi_i^{\sim}}{\partial n} \phi_j^{\sim} - \phi_i^{\sim} \frac{\partial \phi_j^{\sim}}{\partial n} \right] dS, \quad (11)$$

と書けてこれは  $\phi_j^{\sim}$  なる運動によって生ずる  
i 位の振幅に比例する。

これが 振動の定式でハスキントの公式  
の一例である場合の振動である。

昭和 年 月 日

# 附録A 境界条件について

排水量型の船の船体表面条件については、動揺振幅が微小であるとし2次以上の項を無視するとしても定常流れとの干渉項が出て来るので大変複雑になる。

しかし船は一般に細長いので定常流れによる攪乱速度も微小であるし又そのような干渉項を考えると大変理論が複雑となるので最終的にはその項を無視した。

ここではしかしそれを考えに入れて, Timman & Newman に従って境界条件について考えて見よう。

空間に固定した座標を  $X=(x, y, z)$ , 船に固定した座標を  $X'=(x', y', z')$  とすると

$$X' = X - \alpha e \quad \dots (1)$$

ここに  $\alpha$  は微小変位振幅ベクトルで、時間的に単振動をしているものとして式はその実部をとるものとする。(以下同様)

従って今各要素振幅を  $X_j$  とすると

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \lambda + \Theta x^R \\ R &\equiv (x, y, z) \\ \lambda &\equiv (X_1, X_2, X_3) \\ \Theta &\equiv (X_4, X_5, X_6) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

以下下添字は次のような意味にとる。

- |            |            |
|------------|------------|
| 1 ... 前後ゆれ | 4 ... 横ゆれ  |
| 2 ... 左右 " | 5 ... 縦揺 " |
| 3 ... 上下   | 6 ... 船揺 " |

Timman, Newman; J.S.R., March 1962

昭和 年 月 日

船体表面の方程式は

$$F(\mathbf{x}') = 0 \quad (3)$$

と表わされるものとし流体速度は

$$-\nabla\Phi = \mathbf{V}(\mathbf{x}) - e^{i\omega t} \nabla\phi(\mathbf{x}) \quad (4)$$

と表わされるものとする。

ことに  $\mathbf{V}$  は定常流れの速度場で右辺第2項は動揺項で  $\mathbf{x}$  に比例するものとする。

船体表面条件はよく知られているように

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + (\nabla\Phi) \cdot (\nabla\Phi) = 0 \text{ on } S(t) \quad (5)$$

$S(t)$  は各瞬間の船体表面を意味するものとする。  
 以下

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial t} &= \frac{\partial\Phi}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial t} \\ &= -i\omega (\mathbf{x}' \cdot \nabla') \Phi e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{但し } \nabla' \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'} \right)$$

とない  $\nabla'\Phi$  は  $S(t)$  上の法線  $\mathbf{n}'$  の方向成分に  
 比例する故 (5) 式は

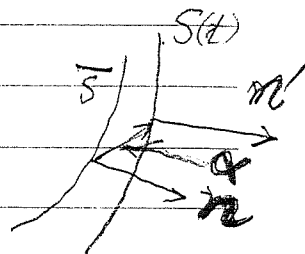
$$\frac{\partial\Phi}{\partial n'} = - \frac{\partial}{\partial t} \left[ (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{n}') e^{i\omega t} \right] \text{ on } S(t) \quad (7)$$

とかける。

この右辺は正に船体表面の法線方向速度である。又これは船体が僅かに変位してもその影響は高次の微小量となって無視出来る。

昭和 年 月 日

線型理論では更に2点を船体表面の平均位置  $\bar{S}$  での法線速度に換算する。(  $\bar{S}$  の法線を  $n$  とする )



$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = (\nabla \Phi) \cdot n'$$

であるから、その際には位置が  $\alpha$  だけ変わる影響と  $n'$  が  $n$  に変わる影響も考えに入れねばならない。

$$V \doteq (V)_{\text{mean}} + (\alpha \cdot \nabla) V e^{i\omega t} \quad (8)$$

であるから (4) に代入すると (以下  $V$  はその平均値を示す)

$$-\nabla \Phi \doteq V + [(\alpha \cdot \nabla) V - \nabla \phi] e^{i\omega t}, \quad (9)$$

となり、又

$$n' = n + (\theta \times n) e^{i\omega t}, \quad (10)$$

であるから、結局、

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{S(x)} &= [V + [(\alpha \cdot \nabla) V - \nabla \phi] e^{i\omega t}] \cdot [n + (\theta \times n) e^{i\omega t}] \\ &\doteq V \cdot n + [V \cdot (\theta \times n) + (\alpha \cdot \nabla) V \cdot n - (\nabla \phi) \cdot n] e^{i\omega t}, \\ &= -\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\bar{S}} + [V \cdot (\theta \times n) + (\alpha \cdot \nabla) V \cdot n] e^{i\omega t}, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\text{但し } -\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\bar{S}} = V \cdot n - (\nabla \phi) \cdot n e^{i\omega t}, \quad (12)$$

これ故 (7) と合せて最終的に

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\bar{S}} = -i\omega (\alpha \cdot n) e^{i\omega t} + [V \cdot (\theta \times n) + (\alpha \cdot \nabla) V \cdot n] e^{i\omega t}, \quad (13)$$

昭和 年 月 日

(12) 式の  $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})$  は定常分であるから 動揺成分のみについて

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_S = -i\omega(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n}) + [\mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{n}) + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{V}) \mathbf{V}] \cdot \mathbf{n} \quad (14)$$

を得る。

$$\text{なお} \quad \mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{n}) = -[(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) \boldsymbol{\alpha}] \cdot \mathbf{n} \quad (15)$$

なる恒等式が成立つ故これは Timman 等の論文と一致する。

細長い船, 薄い船では  $\mathbf{V} \equiv (U, 0, 0)$  と考えてよいか上式は

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_S = -i\omega(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n}) + U \left( \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial x} \cdot \mathbf{n} \right), \quad \left. \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial x} = (0, \alpha_6, -\alpha_5) \right\} \quad (16)$$

となり, この近似では右辺第2項の前進速度の影響分は船首, 船尾ゆれによる流線方向の変化分のみとなってしまう。

平たい船, 薄い船の線型理論でもこの他に船体表面の曲率の影響が入ってくるのでこの近似はあまり良くないだろう。

(線型理論では曲率も又小さく考えるのか? 妥当であろうからそこで厳密に言うならこれでも良いと言える)

そこで (14) 式を少しく変形して見よう。

さて (14) 右辺第2項は

$$-[(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) \boldsymbol{\alpha}] \cdot \mathbf{n} = [(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \boldsymbol{\alpha}] \cdot \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n})$$

であるが 今流線に沿って距離  $s$  を測るとすると  $\mathbf{V}$  は流線の切線であるから

昭和 年 月 日

$$\nabla \cdot \nabla = g \frac{\partial}{\partial s}, \quad g = |\mathbf{V}|,$$

$$[(\nabla \cdot \nabla) \mathbf{n}] \cdot \boldsymbol{\alpha} = \left[ g \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} \right] \cdot \boldsymbol{\alpha}$$

であるが (15) からわかるように、

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} = \frac{\mathbf{S}}{R} = \frac{g_n}{g} \mathbf{S}, \quad (17)$$

ここに  $R$  は 断面長 面の流線に沿った方向の曲率半径とする。  $\mathbf{S}$  は流線のセノ線の単位ベクトル、  
 すると  $\frac{g_n}{g} = \frac{1}{R}$ 、  $g_n/g = R$  の倒数がある。  
 したがって、

$$[(\nabla \cdot \nabla) \mathbf{n}] \cdot \boldsymbol{\alpha} = g_n (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{S}), \quad (18)$$

次に (14) 右辺の3項は、今  $\mathbf{n}$  と  $\mathbf{S}$  に直交する単位ベクトル  $\boldsymbol{\epsilon}$  を導入して

$$\mathbf{n} = \mathbf{S} \times \boldsymbol{\epsilon} \quad (19)$$

と定義しておくと  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$  なる関係を使う。

$$[(\nabla \cdot \nabla) \mathbf{V}] \cdot \mathbf{n} = \left[ (\boldsymbol{\epsilon} \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s}) - (\mathbf{S} \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}) \right] \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad (20)$$

なる関係を得る。

ここで 右 (15) より (これは流線の主、副法線)

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s} = g_s \mathbf{S} - g_v \mathbf{V}, \quad (21)$$

又 右 (16) より

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = g_t \mathbf{S} + g_k \boldsymbol{\epsilon}, \quad (22)$$

ここで  $K$  は流線が  $\boldsymbol{\epsilon}$  方向に広がる割合で

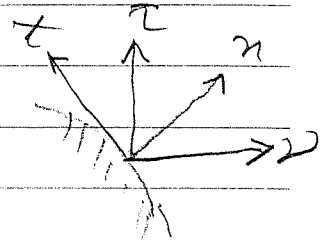
今仮に流線は  $\psi = \text{const.}$  の線とすると ( $\mathbf{S}$  上で)

$$K = \frac{d\psi}{dt} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{dt}{d\psi} \right), \quad (23)$$

\* Bessho "On stream line; Proc. 11th I.T.T.C., 1966

昭和 年 月 日

のように書ける。

しかと  $g_n = 0$  で右図の関係がある  
ため

$$[(\alpha \cdot v) v] \cdot n = -g_s (\alpha \cdot n) - g_2 (v \times v) \cdot \alpha \\ - g_K (\alpha \cdot n)$$

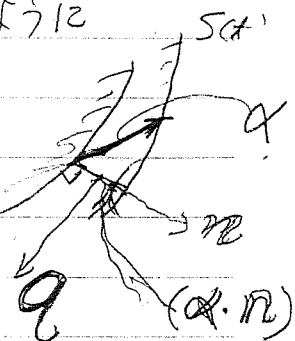
$$= -g_n (\alpha \cdot s) - (g_s + g_K) (\alpha \cdot n), \quad (24)$$

こめらを(14)に代入すると、

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_s = -i\omega (\alpha \cdot n) - (v \cdot v) (\alpha \cdot n) \\ - (g_s + g_K) (\alpha \cdot n) \\ = -i\omega (\alpha \cdot n)$$

$$- \frac{d\gamma}{dt} \frac{\partial}{\partial s} \left[ g \frac{dt}{d\gamma} (\alpha \cdot n) \right], \quad \dots (25)$$

を得る。

右辺の2項は右図から理解出来るように  
船体が変位する時  $s(t)$  と  $s$  に含まれた  
1回の水の流束を排除する項である。3次元の時は流線のなかる影響  $\frac{dt}{d\gamma}$  を含んでいる。この式で定常流れの攪乱速度を  
無視するとその時は  $dt/d\gamma = 1$  と考え  
られるため

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_s = [-i\omega + U \frac{\partial}{\partial s}] (\alpha \cdot n), \quad \dots (26)$$

そのような時は又  $ds \equiv dx$  と考えられるため  
同じ近似で

昭和 年 月 日

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_S = (-i\omega + U \frac{\partial}{\partial x})(\alpha \cdot m), \quad (27)$$

を得る。

この式からは (16) と異なり 極限として 平たい船, 薄い船の境界条件に一致する。

さてもう一度 前に戻って (25) で定常値問題の解を考えてみよう。

Timman 等に従って 今この問題のノイマン関数  $N(x, x')$  があるとすると次のように書けるだろう。

$$\phi(x) = \iint_S \left\{ +i\omega(\alpha \cdot m) + \frac{d\psi}{dt} \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{d\psi}{dt}(\alpha \cdot m) \right] \right\} \cdot N(x, x') dS(x'), \quad (28)$$

ここで  $dS = ds dt$  であるから 右辺中 2 項を  $s$  について 部分積分し  $\phi$  が一個で表わされると,

$$\phi(x) = \iint_S \{ i\omega - v \cdot \nabla \} N(x, x') (\alpha \cdot m) dS, \quad (29)$$

となり 前等の得た式に一致する。

この式で又 定常流れの擾乱成分を無視すると,

$$\phi(x) = (i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \psi(x), \quad (30)$$

$$\psi(x) = \iint_S (\alpha \cdot m) N(x, x') dS, \quad (31)$$

と書けるが この式で法線微分をとると,

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_S = -i\omega(\alpha \cdot m) + U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad (32)$$

となり (16), (25) と又少し異なる。

昭和 年 月 日

しかし船が細長いとして  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \div \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)$  とすれば (27) に一致する。

いづれにしても細長船では (26)(27) と (32) の差は高次の微小量である。

そこで (32) を採用すると速度ポテンシャルは (30) のように書けて 4 なる関数を求めれば "単純な演算" で求められ、その 4 は (31) のように境界条件として

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_5 = -(\alpha \cdot 12), \quad (33)$$

を持っていりて大変簡単である。

又勿論極限として平たい又は薄い船の式に一致する。

そこで本文では (30) 以下の表現を用いることにする。

最後に散乱問題 について考えて見よう。

発散問題と異なる所は先づ (4) において  $\phi$  に入射波  $\phi_i$  と散乱ポテンシャル  $\phi_d$  が含まれる。

その他は全く変わらないから例えは (14) の境界条件において 右辺には  $\phi_i$  も  $\phi_d$  も出て来ない故 結局

$$\frac{\partial}{\partial x} (\phi_i + \phi_d) = 0 \quad \text{on } 5, \quad (34)$$

とおけばよい。

この場合 (27), (31) の右辺が 2 項のような一様速度の影響が表面にはないが  $\psi$  はそれは  $\phi_i$  にそれが含まれている (線型理論的に)。

つまり  $\phi_i$  は明らかに 4 の関数となっていて (30) の形にかけるとな 4 をもっている。

しかし (34) の形から定常流れとの干渉項はない事になる。



昭和 年 月 日

つまり (1) で定義した 関数の gradient は  $(\infty, y, z)$  にあった流体粒子が  $(x, y, z)$  の点に来た時の変位量の線型近似値である。

前項と同じくその変位ベクトルを  $\alpha$  で示すと

$$\left. \nabla \psi(x) \right|_{\infty} = -\alpha, \quad \dots (4)?$$

となる。

それ故 その法線成分は

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = -(\alpha \cdot n), \quad \dots (5)$$

と成つて A (33) に一致する。

そういう款でこの  $\psi$  を以下変位ポテンシャルと呼ぼう。

このような関数を導入する最大のメリットは上述のように境界条件を指定するのが線型有りに簡単で直観的である事であり、さらにこれから線型演算 (30) で直ちに速度ポテンシャルが求まり、こうして得られた速度ポテンシャルの境界条件は A 項? 見たように線型的には所謂変位影響をも含む事である。

なお  $\phi$  と  $\psi$  は A (30) の関係にあるので水面条件は全く  $\phi$  のそれと同じになる。

もう少し説明する為には最も簡単な例を考えよう。

2次元定常流れでは (1) 式は

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{U} \int_{-\infty}^x \phi(x', y) dx', \quad \dots (6)$$

となる。(  $\psi$  は流れ関数  $\psi$  と区別する為に大文字とした )

昭和 年 月 日

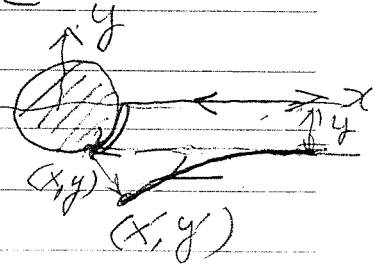
(4)式は

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \phi(x, y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^x \frac{\partial \phi}{\partial y} dx = -\frac{1}{\rho} \int \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \left. \begin{aligned} &= \frac{1}{\rho} \psi(x, y) \end{aligned} \right\} (7)$$

となつて速度ポテンシャルと流れ関数のある点 $(x, y)$ における値は夫々無限上流側 $(-\infty, y)$ にあつた流体粒子の線型的変位量であると言う事が出来る。(対称)

例には「物体周上に点 $(x, y)$ を考えると最初x軸上の無限遠方にあつた流体粒子のy方向への変位は確かに $(-\frac{1}{\rho} \psi)$ であつて上式に一致するが上式での中、 $\psi$ はむしろ別の $(x', y')$ 点と $(x, y)$ 点との差を意味すると考えられる。



それ故(7)は勿論正確な変位量ではないがこのような極端な場合でも注意して取扱へば「大変正確なものである事がわかる」。

昭和 年 月 日

# 附録C 力の積分について

ベルヌーイの定理より圧力は

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} - g z - \frac{1}{2} [(\nabla \Phi)^2 - 1], \quad (1)$$

ここで  $\Phi(x, y, z, t) = \Phi_0(x, y, z) + \varphi(x, y, z, t), \quad (2)$

のように定常成分と変動成分にわけられるとしよう。  
定常成分については又

$$\begin{aligned} \Phi_0(x, y, z) &= Ux + \varphi_0(x, y, z) \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} &= 0 \quad \text{on } \bar{S}, \end{aligned} \quad (3)$$

$\bar{S}$  は船の平均位置における表面。

のようにかけて  $\varphi_0$  は無限遠で正則な擾乱ポテンシヤルで、細い船、船殻、船甲板、船底では  $\varphi$  が同様に小さいものと考えられる。

又

$$\varphi(x, y, z, t) = \operatorname{Re} \{ \phi(x, y, z) e^{i\omega t} \}, \quad (4)$$

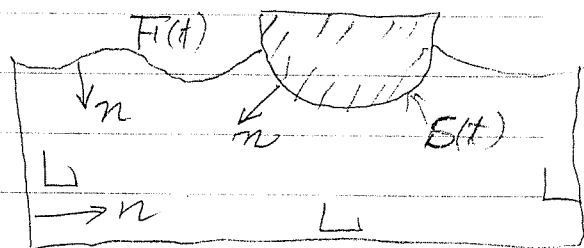
と仮定するものとする。

$S(t), \bar{H}(t)$  を変化する船体表面、自由表面とすると、船に働く力およびモーメントは、

$$\mathbf{F} = - \int_{S(t)} p \mathbf{n} dS$$

$$= - \int_{S(t) + \bar{H}(t)} p \mathbf{n} dS, \quad (5)$$

$$\mathbf{M} = - \int_{S + \bar{H}} p (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS, \quad (6)$$



昭和 年 月 日

自由表面では圧力は 0 とするのでこのように書ける。  
 さて今運動量の時間微分を考えよう。  
 (運動量そのものは無限大となる。)

$$I = \frac{d}{dt} \iiint_D \nabla \Phi d\tau, \quad d\tau = dx dy dz, \quad (7)$$

$$J = \frac{d}{dt} \iiint_D (\mathbf{r} \times \nabla) \Phi d\tau, \quad (8)$$

よく知られた積分によつて、

$$I = \iiint_D \nabla \Phi_+ d\tau + \iint_{S+H+L} \nabla \Phi (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (9)$$

$$J = \iiint_D (\mathbf{r} \times \nabla) \Phi_+ d\tau + \iint_{S+H+L} (\mathbf{r} \times \nabla) \Phi (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (10)$$

ここに  $\boldsymbol{\alpha}$  は  $S(t)$  の移動量で  $(\cdot)$  はその時間微分を意味する。(L は動かさないと考える)  
 それ故に S, H 上では、

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi = + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n}) \quad (11)$$

又

$$\iiint_D \nabla \Phi d\tau = - \iint_{S+H+L} \Phi \mathbf{n} dS,$$

$$\iiint_D (\mathbf{r} \times \nabla) \Phi d\tau = - \iint_{S+H+L} \Phi (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS,$$

であるから

$$I = - \frac{d}{dt} \iint_{S+H+L} \Phi \mathbf{n} dS = - \iint_{S+H+L} \left[ \Phi_+ \mathbf{n} - \nabla \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] dS, \quad (12)$$

$$J = - \frac{d}{dt} \iint_{S+H+L} \Phi (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS = - \iint_{S+H+L} \left[ \Phi_+ \mathbf{r} \times \mathbf{n} - (\mathbf{r} \times \nabla) \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] dS, \quad (13)$$

昭和 年 月 日

これらの式の右辺  $\Phi_{+12}$  (1) を代入し、

$$\left. \begin{aligned} \int_{S+F+L} \left[ \epsilon \nabla \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 n \right] dS &= 0, \\ \int_{S+F+L} \left[ (\nabla \times \nabla) \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \nabla \times \nabla \right] dS &= 0, \end{aligned} \right\} (14)$$

なる等式を利用すると運動量の時空微分が  
おしむモーメントとなる事がわかる。ここで (12), (13) の後の等式を利用して L の境界は  
固定して置いてそこで  $\alpha = 0$  である事を利用すると、

$$\left. \begin{aligned} \int_{S+F} \Phi n dS &= \frac{d}{dt} \int_{S+F} \Phi n dS + \int_{S+F} \nabla \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS, \\ \int_{S+F} \Phi \nabla \times \nabla dS &= \frac{d}{dt} \int_{S+F} \Phi \nabla \times \nabla dS + \int_{S+F} (\nabla \times \nabla) \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS, \end{aligned} \right\} (15)$$

となるので (5), (6) に (1) を代入して更に (15) を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} F &= \frac{d}{dt} \int_{S+F} \Phi n dS + \int_{S+F} \left[ \nabla \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 n \right] dS \\ &= g \int_{S+F} x n dS, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} M &= \frac{d}{dt} \int_{S+F} \Phi (\nabla \times \nabla) dS + \int_{S+F} \left[ (\nabla \times \nabla) \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \nabla \times \nabla \right] dS \\ &= g \int_{S+F} x (\nabla \times \nabla) dS, \end{aligned} \quad (17)$$

を得る。

\* Wehausen; Handbuch der Physik Bd 9

\*\* 月尾; 60周年記念双書  
\*\*\* M. H. ... "Hydrodynamics"

これらの式の右辺第2項は  $\vec{E}$  の散逸から生じる項であるが、このまゝでは、また定数項となる。

即ち

$$\iint_{S+\bar{H}} \vec{E} \cdot \vec{m} dS = \iint_{S+\bar{H}} \vec{E} \cdot \vec{m} dS + \iint_{\bar{H}} \nabla \Phi \cdot d\vec{r}$$

であつて  $\bar{H}$  での  $\vec{E}$  は  $\vec{E} = 0$  であるから

$$\iint_{S+\bar{H}} \vec{E} \cdot \vec{m} dS = [0, 0, \nabla] \quad (18)$$

となる。  $\nabla$  は 平均位置 排水量。

右辺第2項において  $\vec{E}$  は 種分面は任意に選べる事が出来て (14) を用ゐれば "無限遠方の種分面" 上にとる事が出来るし、又逆に特定点の周りにとれば "ラグリー" 公式を得る。

又運動が周期的とすれば "右辺第1項は一周期間 積分すれば" 消えるから、おおよそ  $\gamma$  の内の定常成分は右辺第2項から出て来る。

さて 右辺第2項は

$$\iint_{S+\bar{H}} \vec{m} dS = 0, \quad \iint_{S+\bar{H}} \vec{m} \times \vec{m} dS = 0$$

と考えられるから (2) および (3) により

$$\begin{aligned} \iint_{S+\bar{H}} \left[ \nabla \Phi \cdot \frac{\partial \vec{m}}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 m \right] dS &= \iint_{S+\bar{H}} \left[ \quad \quad \quad \right] dS \\ &= \iint_{S+\bar{H}} \left[ \nabla \Phi_0 \cdot \frac{\partial \vec{m}}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \Phi_0)^2 m \right] dS + \iint_{S+\bar{H}} \left[ \nabla \varphi \cdot \frac{\partial \vec{m}}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 m \right] dS \\ &\quad + \iint_{S+\bar{H}} \left[ \nabla \Phi_0 \cdot \frac{\partial \vec{m}}{\partial t} - (\nabla \Phi_0 \cdot \nabla \varphi) m \right] dS, \quad (19) \end{aligned}$$

\* 丸尾 前頁

昭和 年 月 日

エーメント について同様な式が成立つ。

(16), (17) の右辺第 1 項も  $\bar{S}, \bar{H}$  上の他で表現すれば グリーン の定理より

$$\frac{d}{dt} \iint_{\bar{S}+\bar{H}} \Phi m dS = \iint_{\bar{S}+\bar{H}} \varphi_e m dS - \frac{d}{dt} \iint_{\bar{S}+\bar{H}} \nabla \Phi (\alpha \cdot m) dS, \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt} \iint_{\bar{S}+\bar{H}} \Phi m \times m dS = \iint_{\bar{S}+\bar{H}} \varphi_e m \times m dS - \frac{d}{dt} \iint_{\bar{S}+\bar{H}} \nabla \Phi (\alpha \cdot m) dS,$$

(参照係数で)

こゝで  $\varphi_0$  が  $O(1)$  と仮定すると Timman 等の言うように正確に力の中心  $\varphi_0^2$  の order の項が入ってきて大変複雑になるので以下  $\varphi_0$  は  $\varphi$  と同程度とする。

又 (19) において右辺第 3 項は平均すれば 0 と考えられる。

それ故 先ず 時間平均を極限で示す本とすると、

$$\begin{aligned} \overline{F} &= \rho \iint_{\bar{S}+\bar{H}} \left[ \nabla \Phi_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \Phi_0)^2 m \right] dS - \rho g \iint_{\bar{S}+\bar{H}} z m dS \\ &+ \rho \iint_{\bar{S}+\bar{H}} \left[ \nabla \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 m \right] dS, \quad \dots (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{M} &= \rho \iint_{\bar{S}+\bar{H}} \left[ (\nabla \times \nabla) \Phi_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \Phi_0)^2 m \times m \right] dS \\ &- \rho g \iint_{\bar{S}+\bar{H}} z (m \times m) dS \end{aligned}$$

$$+ \rho \iint_{\bar{S}+\bar{H}} \left[ (\nabla \times \nabla) \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 m \times m \right] dS, \quad (22)$$

$$\frac{d}{dt} \iint_{\bar{S}+\bar{H}} \Phi m dS = \dots$$

昭和 年 月 日

右辺第1項は 平水中を定速度で走る時の定常力である。

又第2項は 静水力学的水力である。

第3項は 周期運動が誘起する定常力であつて これらの式はそれらが互に独立である事を示す。

周期的な力については、それを下添字で示す事にし、(16), (17)に (19), (20)を代入し、水面条件を線型化して

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - g\zeta - \nabla \Phi_0 \nabla \varphi - \frac{1}{2}(\nabla \Phi_0^2 = 1) = 0 \quad (23)$$

であるが  $\zeta$  は又 定常成分と 動揺成分に分かれて

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta$$

$$g\zeta_0 + U \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0$$

のようにおく事とすると

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - g\zeta - \nabla \Phi_0 \nabla \varphi = 0$$

$$\text{or } \frac{\partial \varphi}{\partial t} - g\zeta - U \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

を代入すると 結局

$$F_p = -\rho \iint_{S+} [\varphi_t - \nabla \Phi_0 \nabla \varphi] m dS + \rho g \iint_S \zeta m dS, \quad (26)$$

$$M_p = -\rho \iint_{S+} [\varphi_t - \nabla \Phi_0 \nabla \varphi] r \times m dS + \rho g \iint_S \zeta (r \times m) dS,$$

を得るから 22で

$$\nabla \Phi_0 \nabla \varphi \doteq U \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (27)$$

\* 凡例

としても今の近似では同じ近似となる。

これらの式は最初から(5)(6)式で圧力として、  
静水圧を除き

$$p + \rho g z = \rho \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \nabla \Phi_0 \cdot \nabla \varphi \right]$$

$$\text{or} = \rho \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right], \quad (25)$$

を代入して(5)上で積分したものと同一である。

昭和 年 月 日

# 付録 D 運動ポテンシャル

ハミルトンの最小作用の原理によれば"運動"は次のような変分式を満たす。

$$\int_0^\infty dt [\delta L^{(1)} + A^{(1)}] = 0, \quad (1)$$

ここで  $L$  は運動ポテンシャル又はラグランジアンと呼ばれる。

$$L^{(1)} = T^{(1)} - V^{(1)} \quad (2)$$

と与えられ  $A$  は仮想仕事で外力を  $F_j$ , 仮想変位を  $\delta X_j$  とすると

$$A^{(1)} = \sum_j F_j^{(1)} \delta X_j^{(1)}, \quad (3)$$

と与えられる。

運動が周期的であるとすると、あるいは周期数面では  $t$  のフーリエ変換を角周波数  $\omega$  で示すことにするとフーリエ変換の定理により (1) は

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega [\delta L^{(\omega)} + A^{(\omega)}] = 0, \quad (4)$$

と書く事が出来る。(線形系として)

従って単一周期の運動ならは"特に

$$\delta L^{(\omega)} + A^{(\omega)} = 0, \quad (5)$$

となる。

そこで先ず (3) から

$$A^{(\omega)} = \sum_j F_j^{(\omega)} \overline{\delta X_j^{(\omega)}}, \quad (6)$$

以下に補足は諸要素の値を示す。

ここで (2) より

$$L^{(\omega)} = T^{(\omega)} - V^{(\omega)} \quad (7)$$

昭和 年 月 日

$$T^{(w)} = \frac{\rho}{2} \iiint_V \nabla \phi \cdot \nabla \bar{\phi} d\tau,$$

$$V^{(w)} = \frac{\rho g}{2} \iint_{S+\bar{H}} \zeta \bar{\zeta} dx dy,$$

(8)

以下周波数面のみで考えるので肩符<sup>(w)</sup>はとって記す事にする。又無限遠方極平面上の積分は消える。

さて(8)よりグリーンの定理によって、

$$\frac{1}{\rho} L = -\frac{1}{2} \iint_{S+\bar{H}} \phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} dS - \frac{g}{2} \iint_{S+\bar{H}} \zeta \bar{\zeta} dx dy, \quad (9)$$

と $z=12$   $S$ と $\bar{H}$ は時間と共に動いている表面である。そこでこれらを平均面 $S$ および平均水面( $z=0$ )  $\bar{H}$ 上の他で近似し高次の項を省略すると先づ $\bar{H}$ 上で

$$\begin{aligned} \iint_{\bar{H}} \phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} dS + g \iint_{\bar{H}} \zeta \bar{\zeta} dx dy &= - \iint_{\bar{H}} \left[ \phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} - g \zeta \bar{\zeta} \right] dx dy \\ &= \iint_{\bar{H}} \left[ \phi (+i\omega + U \frac{\partial}{\partial x}) \bar{\zeta} - (i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \phi \bar{\zeta} \right] dx dy. \end{aligned}$$

$$= -U \int_C \phi \bar{\zeta} dy, \quad \dots \dots \dots (10)$$

と $z=12$   $C$ は船体と $\bar{H}$ の交線であつてこの項のみ系統積分項である。

しかし本文 §1(2)のような速度ポテンシャルを採用する事にするとこの項はなくなつて 0となる。

$S$ 上では

$$\iint_S \phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} dS = \iint_S \phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} dS, \quad \dots \dots \dots (11)$$

昭和 年 月 日

ポテンシャルエネルギー— について  $\bar{S}$  の オフセットを  $z$ .  
 $S$  の 下に 変位 量を  $\Delta z$  とすると

$$\left. \begin{aligned} \bar{S} &= z + \Delta z, \\ \Delta z &= X_3 + X_4 y + X_5 x \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

であるから

$$\begin{aligned} -\frac{L_S}{\sqrt{g}} &= -\frac{1}{2} \iint_S \bar{S} \, dx \, dy = \frac{1}{2} \iint_S [\bar{z}^2 + z(\Delta z + \Delta \bar{z}) + \Delta z \Delta \bar{z}] \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_S \bar{z}^2 \, dx \, dy + \operatorname{Re} \iint_S z [X_3 + X_4 y + X_5 x] \, dx \, dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint_S [X_3 \bar{X}_3 + X_4 \bar{X}_4 y^2 + X_5 \bar{X}_5 x^2 \\ &\quad + (X_3 \bar{X}_4 + \bar{X}_3 X_4) y - (X_3 \bar{X}_5 + \bar{X}_3 X_5) x \\ &\quad + (X_4 \bar{X}_5 + \bar{X}_4 X_5) xy] \, dx \, dy. \\ &= -\frac{1}{2} L_2 + \left[ -X_3 \frac{1}{2} + X_5 \frac{1}{2} - \bar{X}_3 \frac{1}{2} + \bar{X}_5 \frac{1}{2} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} [X_3 \bar{X}_3 A_w + X_4 \bar{X}_4 I_y + X_5 \bar{X}_5 I_x \\ &\quad - (X_3 \bar{X}_5 + \bar{X}_3 X_5) f A_w], \quad (13) \end{aligned}$$

但し 船は 左右 対称 とする。

$z \geq 0$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \iint_S \bar{z}^2 \, dx \, dy &= -\frac{1}{2} L_2 \\ \iint_S z \, dx \, dy &= -\frac{1}{2} \\ \iint_S z y \, dx \, dy &= \iint_S y \, dx \, dy = \iint_S x y \, dx \, dy = 0. \end{aligned} \right\} (14)$$

$$\int z x dx dy = - \nabla L_x.$$

$$\left. \begin{aligned} \iint dx dy &= A_w, \quad \iint y^2 dx dy = I_y, \quad \iint x^2 dx dy = I_x, \end{aligned} \right\} (15)$$

$$\iint x dx dy = f A_w,$$

となる故 系方程式 (9) は  $\phi$  と  $\beta$  (22) のようなものを用いるならば (13) の  $L_s$  を使って

$$\frac{1}{P} L = - \frac{1}{2} \iint_S \phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} dS + \frac{1}{P} L_s, \quad (16)$$

となる。

そこで更に本文  $\beta$  のような各要素運動 (今は radiation potential を考えて) によって

$$\phi = \sum_{j=1}^6 X_j \phi_j, \quad (17)$$

と表わされるならば  
(16)

$$\frac{1}{P} L = - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \overbrace{X_i X_j}^{(X_i X_j)} \iint_S \phi_i \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial n} dS + \frac{L_s}{P}, \quad (18)$$

となり  $L_s$  も (13) のように  $X_j$  の 2 次形式となっているから 最終的に  $L$  の変分をとって (18) を考慮し (15) に代入すると。

$$F_j = F_j^{(4)} + F_j^{(5)}, \quad (19)$$

$F_j^{(5)}$  は 音波に力学的力

$$F_1^{(5)} = F_2^{(5)} = F_6^{(5)} = 0, \quad (20)$$

昭和 年 月 日

$$F_3^{(5)} = -\nabla + X_3 A_w - X_5 f A_w,$$

$$F_4^{(5)} = X_4 I_y,$$

$$F_5^{(5)} = l_x \nabla + X_5 I_x - X_3 f A_w,$$

(20)

702/14 B

$$F_j^{(6)} = - \sum_{i=1}^6 X_i \iint_S \phi_i \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial n} dS, \quad \dots (21)$$

昭和 年 月 日

# 附録 E 相反定理

本文 §2 で考えたような速度ポテンシャルを 2 つ考えて次の積分を考えよう。

$$L_{ij} = \iiint_D \nabla \phi_i \cdot \nabla \tilde{\phi}_j \, d\tau + \iint_{\bar{H}} \zeta_i \tilde{\zeta}_j \, dx \, dy, \quad \dots (1)$$

グリーン の 定理により

$$\begin{aligned} L_{ij} &= - \iint_S \phi_i \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial n} \, dS + \iint_{\bar{H}} \left[ \tilde{\phi}_i \frac{\partial \phi_j}{\partial z} + g \zeta_i \tilde{\zeta}_j \right] \, dx \, dy \\ &= - \iint_S \phi_i \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial n} \, dS + \iint_{\bar{H}} \left[ \phi_i (i\omega + U \frac{\partial}{\partial x}) \tilde{\zeta}_j - \tilde{\zeta}_j (i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \phi_i \right] \, dx \, dy \\ &= - \iint_S \phi_i \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial n} \, dS, \quad \dots (2) \end{aligned}$$

となる。

ここで  $\phi_i, \tilde{\phi}_j$  は本文 §1 (22) のような構成を持ち §1 (26) の条件を満足するものとする。

こうする事によって 所謂 流積分項が消えて簡単になる。

先づ上の誘導からわかるように、あるいは (1) から見えるように  $\phi_i, \tilde{\phi}_j$  を入れかえても同じである故、

$$\iint_S \phi_i \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial n} \, dS = \iint_S \tilde{\phi}_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \, dS, \quad (3)$$

を得る。

これが花岡の 2 定理である\*。

さてここで本文 §2 (3) で導入した速度ポテンシャル  $\psi$  を導入するとこれについても (3) と同じ定理が成立する事は明らかである。

\* 花岡

昭和 年 月 日

121

$$P_i = (i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \phi_i, \quad \dots (9)$$

とする。これは加減速ポテンシヤルである。

$P_i$  は又 圧力の近似値でもあるから 附録 C (26) によつてこれは力又はモーメントとなる。

次にこれは又 附録 D によつて導入した力又はモーメントの式にも一致する。

圧力を (9) で近似する時は 紐表船を仮定しているのと同じ近似で (7) は成立つからこれらの式の間に矛盾はない。

又 3 グラニシヤンによる力の導入の時も高次の項は省略されているのでこれらはすべて大體において同等の近似度をもつものと考えることが出来る。相反定理は 普遍は (8) の形で書かれ

$$\iint_S P_i \frac{\partial \psi_i}{\partial n} dS = \iint_S \bar{P}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial n} dS, \quad \dots (10)$$

と与えられる。

次に花岡の力/定理は

$$\iint_S P_i \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dS = \iint_S \bar{P}_i \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dS, \quad \dots (11)$$

と書かれるが 証明は大體同じで ここで紐表船を仮定して (7) と同様な等式

$$\iint_S \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dS = - \iint_S \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dS, \quad (12)$$

が成立つ事を仮定しなければならぬ。

前出花岡

昭和 年 月 日

$$\iint_S \psi_i \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial n} dS = \iint_S \tilde{\psi}_j \frac{\partial \psi_i}{\partial n} dS, \quad \dots (4)$$

$$\left( \begin{aligned} \phi_i &= (i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \psi_i \\ \tilde{\phi}_i &= (i\omega + U \frac{\partial}{\partial x}) \tilde{\psi}_i \end{aligned} \right)$$

あるいは又

$$\iint_S \phi_i \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial n} dS = \iint_S \tilde{\psi}_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dS, \quad \dots (5)$$

よって

$$\iint_S \phi_i \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial x} dS = \iint_S \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dS, \quad (6)$$

それゆゑ (5) に  $i\omega$  を (6) に  $U$  をかけて辺々相加すると、再び (3) を得る。

次に、グリーン関数の定理により

$$\begin{aligned} & \iint_S \left[ \phi_i \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_j}{\partial x \partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial n} \right] dS \\ &= \iiint_D \left[ \nabla \phi_i \cdot \nabla \tilde{\psi}_j + \nabla \phi_i \cdot \nabla \tilde{\psi}_j \right] d\tau + \iint_{\bar{A}} \left[ \phi_i \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_j}{\partial x^2} + \phi_{ix} \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial x} \right] dy \\ &= - \iint_S (\nabla \phi_i \cdot \nabla \tilde{\psi}_j) dy dz, \quad \dots (7) \end{aligned}$$

を得る故 船が細長ければ"近似的に

$$\iint_S \phi_i \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_j}{\partial x \partial x} dS = - \iint_S \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial n} dS, \quad \dots (7')$$

を得る。

これを (2) に代入すると、

$$L_{ij} = - \iint_S \phi_i \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial n} dS = - \iint_S \phi_i \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial n} dS, \quad \dots (8)$$

最後に (10) に  $i\omega$  をかけて (11) から 逆々 相引くと.

$$U \iint_S p_i \frac{\partial}{\partial n} \tilde{\varphi}_{ix} dS = -U \iint_S \tilde{p}_i \frac{\partial}{\partial n} \varphi_{ix} dS, \quad (13)$$

を得る。

あるいは (8) を利用すると.

$$-U \iint_S \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l} \frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial n} dS = U \iint_S \frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial x_l} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS, \quad (14)$$

となす。(13)(14) は又等しい。

昭和 年 月 日

## F 相反定理 (続)

§4 (3) で導入した量  $f_{ij}$  に対して次の量を導入しよう。

$$h_{ij} = \iint_S p_i \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial n} dS = - \iint_S p_i \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial n} dS, \quad (1)$$

$$r_{ij} = \iint_S \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial n} dS, \quad (2)$$

そうすると  $\frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial n} = (i\omega + \nu \frac{\partial}{\partial x}) \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial n}$  なるが

$$h_{ij} = i\omega f_{ij} = -\nu r_{ij}, \quad (3)$$

なる関係がある。

この節では  $f_{ij}$  の虚部、つまり減衰 係数 として式により  $r_{ij}$  の実部の項に付随する等式について検討する。

これは、§3 (16) の表示から容易に得られる。さて、まず

$$\begin{aligned} f_{ij} - \bar{f}_{ji} &= \iint_S \left[ \phi_i \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial n} - \bar{\phi}_j \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial n} \right] dS \\ &= - \iint_S \left[ \phi_i \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial n} - \bar{\phi}_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right] dS, \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{ij} + \bar{h}_{ji} &= \iint_S \left[ p_i \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial n} + \bar{p}_j \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial n} \right] dS \\ &= - \iint_S \left[ p_i \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial n} + \bar{p}_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right] dS, \quad (5) \end{aligned}$$