

WQ

No.

Date

2次元平板水中音理学

概要

1. 速度ポテンシャル
加(速度ポテンシャル)ヤメ

2. 流れ

$$p(x) = p(x) \dots$$

3. 境界値問題

$$\begin{array}{ccc} \phi & \text{---} & f_0 \\ \psi & \text{---} & p_0 \end{array} \quad \begin{array}{cc} F & D \\ F & D \end{array}$$

4. 可逆定理 (I)

$$\frac{\alpha^2 - K^2}{T \alpha^2}$$

振動

5. 流れ (II) との関係 (五五)

for slow motion から Diffraction

6. エネルギー定理, 仕事減衰率

7. 波中動揺, 近似理論 $K = \frac{\omega}{c}$

7. $h \rightarrow 0$ の極限 Boundary Int. eq.

$$K' - \alpha = \frac{1}{K} (\alpha - K)$$

$$1 - \frac{c^2}{\omega^2} = \frac{d}{\omega^2}$$

$$1 + \frac{c^2}{\omega^2} = \frac{d}{\omega^2} \left(\frac{\alpha}{K} - 1 \right) = \frac{\omega^2}{K^2}$$

附録 A 積分計算

$$\begin{aligned}
 S(x, y) = & \frac{1}{4\pi U} \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{ikx}}{k-\alpha+\mu i} - \frac{e^{-ikx}}{-k+\alpha} \right\} \left\{ e^{-k(y+h)} + e^{-k(h-y)} \right\} dk \\
 & + \frac{i}{2\pi U} \int_0^\infty \left\{ \frac{-k-\alpha}{A(k)} e^{ikx} - \frac{k+\alpha}{B(k)} e^{-ikx} \right\} e^{-k(h-y)} dk, \quad (A.1)
 \end{aligned}$$

for $y < 0$

$$\begin{aligned}
 S_H(x, y) = & \frac{1}{4\pi U^2} \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{ikx}}{(k-\alpha+\mu i)^2} + \frac{e^{-ikx}}{(k+\alpha)^2} \right\} \left\{ e^{-k(y+h)} - e^{-k(h-y)} \right\} dk \\
 & + \frac{i}{2\pi U^2} \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{ikx}}{A(k)} + \frac{e^{-ikx}}{B(k)} \right\} e^{-k(h-y)} dk, \quad (A.2)
 \end{aligned}$$

2.12 μ は $\gamma - 1 - \gamma^2$ の平方根と L , γ と

$$\begin{aligned}
 A(k) &= (k-\alpha)^2 - \gamma k = (k-K+\mu i)(k-K'+\mu i) \\
 B(k) &= (k+\alpha)^2 - \gamma k = (k-\beta)(k-\beta')
 \end{aligned} \quad (A.3)$$

4.12 $\alpha > \frac{\gamma}{2}$ とする

$$\begin{aligned}
 K, K' &= \alpha + \frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\alpha\gamma + \frac{\gamma^2}{4}} \\
 \beta, \beta' &= -\alpha + \frac{\gamma}{2} \pm i\sqrt{\alpha\gamma - \frac{\gamma^2}{4}}
 \end{aligned} \quad (A.4)$$

$$\begin{aligned}
 K &= \omega_0^2 / g, \quad K' = (\omega_0')^2 / g, \\
 C &= g / \omega_0, \quad C' = g / \omega_0' ; \text{ 注意}
 \end{aligned} \quad (A.5)$$

$$\begin{aligned}
 \alpha &= K + \omega_0 / U \\
 \alpha &= K' - \omega_0' / U
 \end{aligned} \quad (A.6)$$

(A.1)の ∇^2 / ∇^2 は、2次のように書くことも出来る。

$$\frac{e^{i\alpha x}}{2\pi U} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{(y+h)}{z^2 + (y+h)^2} - \frac{y-h}{z^2 + (y-h)^2} \right\} e^{-i\alpha z} dz, \quad (A.7)$$

より

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} S(x, h) &= \frac{1}{2\pi U} \left(-\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + h^2} \right) \\ &+ \frac{i\alpha}{4\pi U} \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{i\alpha x}}{h - \alpha + i\eta} + \frac{e^{-i\alpha x}}{h + \alpha} \right) (1 - e^{-2\alpha h}) d\alpha \\ &+ \frac{i}{2\pi U} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{h - \alpha}{A(\alpha)} e^{i\alpha x} - \frac{h + \alpha}{B(\alpha)} e^{-i\alpha x} \right\} e^{-2\alpha h} d\alpha, \quad (A.8) \end{aligned}$$

充分下流側では

$$\begin{aligned} S(x, y) &\doteq \frac{1}{2U} \left\{ e^{i\alpha x} e^{-\alpha(y+h)} + e^{-i\alpha x} e^{-\alpha(h-y)} \right\} \\ &+ \frac{1}{(K'-K)U} \left\{ (K'-\alpha) e^{iK'x + K'(y-h)} + (\alpha - K) e^{iKx + K(y-h)} \right\}, \quad (A.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_H(x, y) &\doteq \frac{1}{2iU^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[h e^{i\alpha x} (e^{-\alpha(h+y)} - e^{-\alpha(h-y)}) \right]_{\alpha=K} \\ &+ \frac{1}{i(K'-K)U^2} \left\{ e^{iK'x + K'(y-h)} - e^{iKx + K(y-h)} \right\}, \quad (A.10) \end{aligned}$$

> k12

$$\tilde{S}(x, y) = S(-x, y), \quad \tilde{S}_H(x, y) = S_H(-x, y), \quad (A.11)$$

と定義すると (A.1), (A.2) から次の関係がある。

$$\tilde{S}(x, y) - S(x, y) = \frac{e^{i\alpha x}}{2U} (e^{-\alpha(y+h)} + e^{-\alpha(y-h)})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(K'-K)U} \left\{ (K'-\alpha) e^{iK'x + K'(y-h)} + (\alpha-K) e^{iKx + K(y-h)} \right\} \quad (A.12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_H(x, y) - S_H(x, y) &= \frac{i}{2U^2} \frac{\partial}{\partial k} \left[k e^{i\alpha x} (e^{-k(h+y)} - e^{-k(h-y)}) \right]_{k=d} \\ &+ \frac{i}{(K'-K)U^2} \left\{ e^{iK'x + K'(y-h)} - e^{iKx + K(y-h)} \right\} \quad (A.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_y(x, -h) + S_y(x, -h) &= \frac{e^{i\alpha x}}{2U} (1 - e^{-2\alpha h}) \\ &+ \frac{1}{U(K'-K)} \left[K'(K'-\alpha) e^{iK'x - 2K'h} + K(\alpha-K) e^{iKx - 2Kh} \right] \quad (A.13) \end{aligned}$$

$$K'-\alpha = \frac{\omega_0'}{U}, \quad \alpha-K = \frac{\omega_0}{U},$$

附録 B

積分

$$I = \int_0^{\infty} \frac{J_n(kx) e^{i\alpha x}}{k - \alpha + i0} dk, \quad \text{for } |X| \leq 1, \quad (B.1)$$

は Miller に よって よく 説明 せられて いる

$$J_n(kx) = \frac{1}{2} \{ H_n^{(1)}(kx) + H_n^{(2)}(kx) \}, \quad (B.2)$$

よって, 積分 路を 複素 平面に よって 行く と

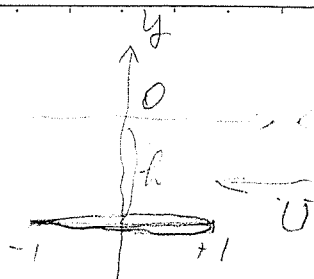
$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[\frac{H_n^{(1)}(im) e^{-mX}}{m + i\alpha} + \frac{H_n^{(2)}(-im) e^{mX}}{m - i\alpha} \right] dm + \pi i H_n^{(2)}(\alpha) e^{i\alpha X}, \quad (B.3)$$

但し 右辺 中 1 項 の 積分 は 原点 の 周り の 半 分 円 曲 線 に 積分 を 含む こと と する。

こう すると Miller に よって 説明 せられて いる よう に 右辺 中 1 項 は α の 巾 級 数 に 展開 される。

1. 速度ポテンシャル

図のように座標系をとるとよく知られている
 ように水面では $\phi(x, 0)$ を水面高位とすれば
 (中と面高にニシヤル)



$$(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \phi(x, 0) - g \eta(x, 0) = 0, \quad (1.1)$$

$$\phi_y(x, 0) = -(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x}) \eta(x, 0), \quad (1.2)$$

$$\text{よって} \quad \left[(i\omega - U \frac{\partial}{\partial x})^2 + g \frac{\partial}{\partial y} \right] \phi(x, 0) = 0, \quad (1.3)$$

水面の揚力を $p(x)$ とする (分布) (Froude number γ)
 附録 A の積分式により次のように表わされる。

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\rho} \int_{-1}^1 p(x') S(x-x', y) dx', \quad (1.4)$$

さらに

$$\frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y) = -(i\omega + U \frac{\partial}{\partial x}) \eta(x, y), \quad (1.5)$$

なる関数を導入すると, $\eta(x, y)$ は、流線粒子の $y=0$ 位置からの高位の線型近似値である。

$\eta(x, y)$ は無限に流線 $y=0$ になるとして (1.4) から
 附録 A の積分式により次のように表わされる。

$$\eta(x, y) = \frac{1}{\rho U} \int_{-1}^1 p(x') S_H(x-x', y) dx', \quad (1.6)$$

今 $\eta(x, y)$ の変換を

$$F(k) = \frac{1}{\rho U} \int_{-1}^1 p(x) e^{-ikx} dx, \quad (1.7)$$

と定義し, $\alpha = \frac{\omega}{U} > \frac{\gamma}{4} = \frac{\gamma}{4U}$ とすると上流側では
 ではなく, 無限下流では

$$\phi(x, y) \xrightarrow{x \ll -1} -\frac{U}{2} \bar{H}(\alpha) e^{i\alpha x} \left[e^{-\alpha|y+h|} - e^{-\alpha|y-h|} \right] \\ + \frac{1}{K'-K} \left[(K'-\alpha) e^{iK'x+K'(y-h)} \bar{H}(K') - (K-\alpha) e^{iKx+K(y-h)} \bar{H}(K) \right], \quad (1.8)$$

$$\psi(x, y) \xrightarrow{x \ll -1} -\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[h e^{i\alpha x} \bar{H}(\alpha) (e^{-\alpha|y+h|} - e^{-\alpha|y-h|}) \right]_{K=\alpha} \\ - \frac{i}{K'-K} \left[K' e^{iK'x+K'(y-h)} \bar{H}(K') - K e^{iKx+K(y-h)} \bar{H}(K) \right], \quad (1.9)$$

特に水面では

$$\psi(x, 0) \xrightarrow{x \ll -1} \frac{i}{K'-K} \left[K e^{iKx-Kh} \bar{H}(K) - K' e^{iK'x-K'h} \bar{H}(K') \right], \quad (1.10)$$

2.12 $\alpha = \omega/U$ で K, K' については附録 A 参照.
 なお $|x| < 1$ では, 附録 B に示すように,

$$\eta(x, -h) = \eta^*(x) - \frac{i}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left[h e^{i\alpha x} G^{(1)}(\alpha) (1 - e^{-2\alpha h}) \right], \quad (1.11)$$

$$\phi_y(x, -h) = \phi_y^*(x, -h) + \frac{\omega}{4} e^{i\alpha x} G^{(2)}(\alpha) (1 - e^{-2\alpha h}), \quad (1.12)$$

のように, $e^{i\alpha x}$, $x e^{i\alpha x}$ なる因子をもつものと墨印をつけた
 それを含まないものとのかわきがある。

2-12

$$p(x) = \frac{2i\rho\omega U}{\sin\theta} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\theta, \quad x = \cos\theta, \quad (1.13)$$

とすると コツ42 関数

$$\overline{H}(k) = 2\pi i\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n A_n J_n(k), \quad (1.14)$$

で、これに 2つ

$$G^{(1)(2)}(k) = 2\pi i\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n A_n H_n^{(1)(2)}(k), \quad (1.15)$$

$$\overline{H}(k) = \frac{1}{2} [G^{(1)}(k) + G^{(2)}(k)], \quad (1.16)$$

とすると。

2. 境界値問題

境界条件は平板の振動振幅が $\psi(x, -h)$ で

あると (1.5) により

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, -h) = -(i\omega - \nu \frac{\partial}{\partial x}) \psi(x, -h), \quad (2.1)$$

であり, 特に上下動では振幅と位相とすると

$$\psi_0^* = 1, \quad \phi_0 = -i\omega, \quad (2.2)$$

この解を $\rho_0(x)$ としよう. ϕ_0 の解を ρ_0 とすると.

$$\psi_1^* = \omega x, \quad \phi_1 = \omega x + i\nu, \quad (2.3)$$

次に散乱について考えよう.

まず 零位振幅の入射波を考えると, 右向きに

$$\begin{aligned} \psi_E(x, y; k) &= e^{+ikx + ky} \\ \phi_E(x, y; k) &= \frac{e}{i\omega_0} e^{ikx + ky} \end{aligned} \quad (2.4)$$

よって その散乱ポテンシャルを ϕ_K とおくと境界条件

$$\frac{\partial}{\partial y} \phi_K(x, -h) = -\frac{\partial}{\partial y} \phi_E(x, -h; k), \quad (2.5)$$

したがって

$$\begin{aligned} \psi_E(x, y; k') &= e^{ik'x + ky} \\ \phi_E(x, y; k') &= \frac{ie}{\omega_0} e^{ik'x + ky} \end{aligned} \quad (2.6)$$

散乱ポテンシャル $\phi_{K'}$ の境界条件は

$$\frac{\partial}{\partial y} \phi_{K'}(x, -h) = -\frac{\partial}{\partial y} \phi_E(x, -h; k'), \quad (2.7)$$

従来の方法では (114) の各項を y で微分したものに
上記の境界条件を代入して 積分方程式を作り それを
解く事により 圧力分布 p が求められる。

この際 解が一意的に定まる為には クツタの条件

$$p(-1) = 0, \quad (12-8)$$

が必要である。

一方 与えられた $\psi(x, -1)$ に対し (1.6) を境界積分
方程式と見なす事も出来る筈で、この時は附録 A
からわかるように 核関数は対称特性を有するので
 $p(x)$ は一意的に定まり、クツタの条件を入れる余地は
残されていない、つまりこの解は (12.8) を満たさない
ので 今後 そのような解は 肩符 (*) をつけて区別
しよう。

このように 考えて来ると 同じ境界条件に対して 見当上
異なる解が出て来るように思われるが、これは (11)
からわかるように ϕ_y が与えられても ψ は e^{ix} なる因子
だけ不定になる事である。

よって今 $P_I^*(x), P_J^*(x)$ から次の境界条件に対する解とし、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_I}{\partial y} = 0, \quad \eta_I &= e^{i\alpha x} \\ \frac{1}{i} \frac{\partial \phi_J}{\partial y} = i\alpha e^{i\alpha x}, \quad \eta_J &= \frac{i\alpha}{1-x} e^{i\alpha x} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

~~さらに η^* に対する解を p^* とすると η に対する解 p は~~

~~$$p = p^* + \frac{i}{4} P_I^*(x) \frac{\partial}{\partial k} [k G^{(2)}(k) (1 - e^{-2kh})]_{k=\alpha} - \frac{i}{4} P_J^*(x) G^{(2)}(\alpha) (1 - e^{-2\alpha h}), \quad (2.10)$$~~

(1.11) より ϕ_J から $e^{i\alpha x}$ なる因子を含まないならば

$$G^{(2)}(\alpha) = 0, \quad (2.11)$$

またさらに $k^* = 0$ に対する解は $p^* = 0$ であるから

$$G_I^{(2)}(\alpha) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial k} [k G_I^{(2)}(k) (1 - e^{-2kh})]_{k=\alpha} = 4i, \quad (2.12)$$

$$G_J^{(2)}(\alpha) (1 - e^{-2\alpha h}) = 4i, \quad \frac{\partial}{\partial k} [k G_J^{(2)}(k) (1 - e^{-2kh})]_{k=\alpha} = 0, \quad (2.13)$$

p から (1.13) のように展開された とすると

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad \delta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n, \quad \dots \quad (2.13)$$

と定義し, 次の条件は $\delta = 0$ とする。

後の便利のため ϕ_I, ϕ_S の一次結合で $\phi_S, \phi_\alpha, \phi_H$ を定義しておく。

$$\frac{\partial \phi_S}{\partial y} = 0, \quad \eta_S = -\frac{i\alpha}{4} \frac{dG_S^{(2)}}{d\alpha} \Big|_\alpha (1 - e^{-2\alpha\eta}) e^{i\alpha X}, \quad (2.14)$$

~~$$\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial y} = i\alpha e^{i\alpha X}, \quad \eta_\alpha = -\frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[e^{i\alpha X} (1 - e^{-2\alpha\eta}) e^{i\alpha X} \right], \quad (2.15)$$~~

~~$$\frac{\partial \phi_H}{\partial y} = i\alpha e^{i\alpha X}, \quad \eta_H = -\frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[e^{i\alpha X} (1 - e^{-2\alpha\eta}) e^{i\alpha X} \right], \quad (2.16)$$~~

まず ϕ_S については (2.8) と (2.14) を比較して、明らかに

$$p_I = \frac{\alpha}{4i} G_S^{(2)'}(\alpha) (1 - e^{-2\alpha\eta}) p_S, \quad \dots \quad (2.15)$$

である。したがって (2.13) による σ, δ について

$$\begin{pmatrix} \sigma_I \\ \delta_I \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{4i} G_S^{(2)'}(\alpha) (1 - e^{-2\alpha\eta}) \begin{pmatrix} \sigma_S \\ \delta_S \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

である。

p_S は $\phi_S = 0$ なる条件で決まるとすると元来定数だけ不定であるから、 η を定める意に次のように定めてある。

$$\sigma_S = 1, \quad \text{つまり, } -p_I \equiv \sigma_I p_S, \quad (2.17)$$

$$\eta = \frac{e^{i\alpha X}}{1 - e^{-2\alpha\eta}} = e^{i\alpha X} \left(\frac{\alpha}{4i} G_S^{(2)'}(\alpha) (1 - e^{-2\alpha\eta}) \right)^{-1}$$

次に P_α に対する境界条件は P_J と同じであるから

$$\frac{1}{i} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial y} = i\alpha e^{i\alpha y}, \quad \dots (2.18)$$

かつこの条件を満たすものとする。

$$\begin{aligned} \text{つまり} \quad P_\alpha(x) &= P_J(x) - \frac{\delta_J}{\delta_S} P_S(x), \\ \delta_\alpha &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \dots (2.19) \end{array} \right\}$$

$$\text{よって} \quad \psi_\alpha(x) = i\alpha x e^{i\alpha x} - \frac{\delta_J}{\delta_S} \psi_S(x), \quad \dots (2.20)$$

ψ_S は (2.14) で与えられる。

同様に P_H は

$$F_H(\alpha) = \frac{2i}{1 - e^{-2\alpha h}}, \quad G_H^{(D)}(\alpha) = 0, \quad \dots (2.21)$$

となるように決める。また (2.11), (2.12) により

$$P_H(x) = P_J(x) - \frac{G_J^{(D)}(\alpha)}{G_I^{(D)}(\alpha)} P_I(x), \quad \dots (2.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial h} \left[h G_H^{(D)}(h) (1 - e^{-2\alpha h}) \right]_\alpha = - \frac{G_J^{(D)}(\alpha)}{G_I^{(D)}(\alpha)} (4i), \quad (2.23)$$

実際には ϕ の境界条件で P を求めるとすれば

P_α, P_S を求めるのが最も便利であるから式(1)

$$P_H(x) = P_\alpha(x) - \frac{G_\alpha^{(D)}(\alpha)}{G_S^{(D)}(\alpha)} P_S(x), \quad \left. \begin{array}{l} \dots (2.24) \end{array} \right\}$$

$$\frac{\delta_J}{\delta_S} = \frac{G_J^{(D)}(\alpha)}{G_S^{(D)}(\alpha)} = - \frac{G_\alpha^{(D)}(\alpha)}{G_S^{(D)}(\alpha)}$$

$$\text{よって} \quad \psi_H(x) = \psi_\alpha(x) - \frac{G_\alpha^{(D)}(\alpha)}{G_S^{(D)}(\alpha)} \psi_S(x)$$

3. 逆流.

一様流れの方向を逆にしたものを逆流と呼び、その

諸量に $(\sim)$ 印を付すものとする。 (1.1) ~ (1.3) は

$$(i\omega + U \frac{\partial}{\partial x}) \tilde{\phi}(x, 0) - g \tilde{\eta}(x, 0) = 0, \quad (3.1)$$

$$\tilde{\phi}_y(x, 0) = -(i\omega + U \frac{\partial}{\partial x}) \tilde{\eta}(x, 0), \quad (3.2)$$

$$[(i\omega + U \frac{\partial}{\partial x})^2 + g \frac{\partial}{\partial y}] \tilde{\phi}(x, 0) = 0, \quad (3.3)$$

となり元の流れで x の符号を変えただけの関係となる。

したがって圧力分布

$$\tilde{p}(x) = p(-x), \quad \dots (3.4)$$

と表わす"明瞭に"

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\phi}(x, y) &= \phi(-x, y) \\ \tilde{\phi}_y(x, y) &= \phi_y(-x, y) \\ \tilde{\eta}(x, y) &= \eta(-x, y) \end{aligned} \right\} (3.5)$$

であり、さらに

$$\tilde{p}(x) = i \frac{2\pi\omega U}{g} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_n \cos n\theta, \quad x = \frac{g}{\omega} \theta, \quad (3.6) \quad \begin{matrix} \text{左} \\ * \text{前段と} \\ \text{right} \end{matrix}$$

と展開すれば (3.4) より (1.3) と比べて

$$\tilde{A}_n = (-1)^n A_n \quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{\sigma} = \sum (-1)^n \tilde{A}_n &= 0 \\ \tilde{\delta} = \sum \tilde{A}_n &= \delta \end{aligned} \right\} (3.7)$$

またフツ42) 変数は

$$\tilde{H}(\eta) = \frac{1}{\rho U^2} \int_{-\infty}^{\eta} \tilde{p}(x) e^{i k x} dx, \quad \dots (3.8)$$

と定義すると、 $\tilde{H}(\eta) = H(\eta), \quad (3.9)$

$$\tilde{G}^{(i)}(k) = G^{(i)}(k), \quad i=1,2, \quad (3.10)$$

2. さらに要素モードの運動については、

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_j(x, -t) &= \rho_j(x, -t) \\ \tilde{\eta}(x, -t) &= \eta^*(x, -t) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

と定義する事にしよう。

逆流れは仮想的な流れであるから、どのように定義しても別に一般性を損うと云う事ではな~~く~~、前報では2通りの定義の場合をあげたが、ここではこの場合のみに限る事にする。

さて

$$\tilde{\Phi}(t, y) = \frac{1}{P} \int_{-1}^1 \tilde{\rho}(x') \tilde{\eta}^2(x-x', y) dx' \quad (3.12)$$

のように表現する事にし、(1.4), (3.12)を ∇_{2A} 微分して加え合わせ (A.13) を用いると

$$\begin{aligned} \frac{1}{U} \left\{ \phi(x, -t) + \tilde{\Phi}(x, t) \right\} &= \frac{1}{PU} \int_{-1}^1 (P - \tilde{P}) \eta_j dx \\ &+ \frac{e^{i\alpha x}}{2} (1 - e^{-2\alpha t}) \overline{H(\alpha)} \\ &+ \frac{1}{U(K-K)} \left[\omega_0 K' e^{-2K' t + iK' x} \overline{F(K')} + \omega_0 K e^{-2K t + iK x} \overline{H(K)} \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

要素モードに ついて (3.11) が成立するように (7) をおけば

(7) の左辺は 0 となる。

しかしこれは元の ~~積分方程式~~ ^{境界値問題} と同型であるから、適切な条件をいけば一端の条件を指定すれば解は定まる。

2.2 2 節 の 終 り で 導 入 し た p_α, p_β と 散 乱 解 R, R' を 用 り る と

$$p(x) - \overline{p}(x) = \frac{(1 - e^{-2\alpha h})}{2i\alpha} \overline{H(x)} p_\alpha(x) - \frac{\sigma}{\delta_s} p_\beta(x) + \frac{i}{K' - K} \left[K \overline{H(x)} R(x) e^{-Kx} + K' \overline{H(x')} R'(x) e^{-K'x} \right], \quad (3.14)$$

この式は p_α' についても成立するから、 p_β については

$$\frac{p_\beta(x)}{\delta_s} - \overline{p}_\beta(x) = \frac{(1 - e^{-2\alpha h})}{2i\alpha} \overline{F_s(x)} p_\alpha(x) + \frac{i}{K' - K} \left[K F_s(x) R(x) e^{-Kx} + K' F_s(x') R'(x) e^{-K'x} \right], \quad (3.15)$$

この式と p_α についての (3.14) 式から p_α と p_β がわかっていけば、その線型結合によって R, R' が表わされる故に散乱問題は解く必要がない。

4. 可逆定理

花岡の定理によれば

$$\int_{-1}^1 p(x) \tilde{\phi}_y(x, -h) dx = \int_{-1}^1 \tilde{p}(x) \phi_y(x, -h) dx + \Delta \quad (4.1)$$

$$\int_{-1}^1 p(x) \tilde{\eta}(x, -h) dx = \int_{-1}^1 \tilde{p}(x) \eta(x, -h) dx \quad (4.2)$$

(4.1) は 更に クツタの条件を

$$\Delta = \int_{-1}^1 p(x) \tilde{p}(x, -h) dx$$

満たしてあげれば $\Delta = 0$ である。

$$\Delta = \pi \rho U^2 \left[\tilde{\phi} \tilde{\phi} - \phi \phi \right] \quad (3.11)$$

$$(4.2)$$

まず (4.1) より, (2.2), (2.3) を用いて 場力 L , モーメント M は

$$L = \int_{-1}^1 p dx = \frac{i}{\omega} \int_{-1}^1 p \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial y} dx = \frac{i}{\omega} \int_{-1}^1 \tilde{p}_1 \frac{\partial \phi}{\partial y} dx \quad (4.4)$$

$$M = \int_{-1}^1 p x dx = \frac{-1}{\omega} \int_{-1}^1 p \left\{ \tilde{\phi}_{2y} + \frac{U}{\alpha} \tilde{\phi}_{1y} \right\} dx = \frac{-1}{\omega} \int_{-1}^1 \left\{ \tilde{p}_2 + \frac{1}{\alpha} \tilde{p}_1 \right\} \frac{\partial \phi}{\partial y} dx \quad (4.5)$$

(前報と ϕ の定義が置っている)この場力 L および モーメントは

$$\begin{aligned} L_E &= \int_{-1}^1 p_K(x) dx = \frac{i}{\omega} \int_{-1}^1 p_K(x) \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial y} dx = \frac{i}{\omega} \int_{-1}^1 \tilde{p}_1 \phi_{Ky} dx \\ &= i \frac{\omega_0}{\omega} \int_{-1}^1 \tilde{p}_1 e^{iKx - Kh} dx = i \frac{\omega_0}{\omega} \rho U^2 F_1(K) e^{-Kh} \quad (4.6) \end{aligned}$$

$$M_E = \int_{-1}^1 p_K(x) x dx = \frac{\omega_0}{\omega} \rho U^2 \left[F_2(K) + \frac{1}{\alpha} F_1(K) \right] e^{-Kh} \quad (4.7)$$

✓ 2.12

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_I(\alpha) &= \frac{1}{\rho U^2} \int_{-1}^1 \bar{p}_I(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\rho U^2} \int_{-1}^1 \bar{p}_I^*(x) \tilde{\eta}(x, -h) dx, \\ \bar{F}_I^*(\alpha) &= \frac{1}{\rho U^2} \int_{-1}^1 \bar{p}_I^*(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{1}{\rho U^2} \int_{-1}^1 \bar{p}_I^*(x) \tilde{\eta}^*(x, -h) dx, \end{aligned} \right\} (4.8)$$

(1.12) と (4.8)

(2.10) の式を代入して

$$\begin{aligned} \bar{F}(\alpha) - \bar{F}^*(\alpha) &= -\frac{i}{4} \bar{F}_I^*(\alpha) \frac{\partial}{\partial h} \left[h G^{(2)}(\alpha) (1 - e^{-2\alpha h}) \right]_{h=\alpha} \\ &\quad - \frac{i}{4} \bar{F}_J^*(\alpha) G^{(2)}(\alpha) (1 - e^{-2\alpha h}), \end{aligned} \quad (4.9)$$

よって

$$\bar{F}_J^*(\alpha) = \alpha \frac{\partial}{\partial h} \bar{F}_I^*(h) \quad (4.10)$$

$$\alpha \frac{\partial}{\partial h} \bar{F}_I(h) \Big|_{h=\alpha} = \frac{i\alpha}{\rho U^2} \int_{-1}^1 \bar{p}_I(x) e^{+i\alpha x} x dx = \frac{i}{\rho U^2} \int_{-1}^1 \bar{p}_I^*(x) \tilde{\eta}(x, -h) dx \quad (4.11)$$

$$\alpha \frac{\partial}{\partial h} \bar{F}_I^*(h) \Big|_{h=\alpha} = \frac{i\alpha}{\rho U^2} \int_{-1}^1 \bar{p}_I^*(x) e^{i\alpha x} x dx = \frac{i}{\rho U^2} \int_{-1}^1 \bar{p}_I^*(x) \tilde{\eta}^*(x, -h) dx$$

$$\alpha \frac{\partial}{\partial h} (\bar{F}(h) - \bar{F}^*(h)) \Big|_{h=\alpha} = -\frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial h} \left[h \bar{F}_J^*(h) G^{(2)}(h) (1 - e^{-2\alpha h}) \right]_{h=\alpha} \quad (4.12)$$

(4.9), (4.12) に (4.11) と (2.11) の式を代入して

$$\bar{F}(\alpha) - \bar{F}^*(\alpha) = -\frac{i\alpha}{4} G^{(2)'}(\alpha) \bar{F}_I^*(\alpha) (1 - e^{-2\alpha h}), \quad (4.9')$$

$$\alpha \frac{\partial}{\partial h} (\bar{F}(h) - \bar{F}^*(h)) \Big|_{h=\alpha} = -\frac{\alpha}{4i} G^{(2)'}(\alpha) \bar{F}_J^*(\alpha) (1 - e^{-2\alpha h}), \quad (4.12')$$

〔

次に (4.9') と (4.12') に変数を入れ替えて相加して

No. 13

Date

$$\overline{F}_I^{\downarrow}(K) = \frac{1}{P_0^{\downarrow}} \int_{-1}^1 p_I^{\downarrow} \psi_{K'}^{\downarrow} dx = \int_{-1}^1 p_K^{\downarrow} \psi_{K'}^{\downarrow} dx = \overline{F}_{K'}^{\downarrow}(K)$$

$$\overline{F}_K^*(K') = \overline{F}_{K'}^{\downarrow}(K)$$

5. 各 2×4 -座標の間の積分

(3.15)の両辺に $e^{i\alpha x}$ をかけ積分すると

$$\begin{aligned} \overline{H(\alpha)} - \overline{H(\alpha)} &= \frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\epsilon (1 - e^{-2\alpha h}) \overline{H_I^*}(\alpha) \left\{ G^{(1)}(\alpha) - \overline{G^{(2)}(\alpha)} \right\} \right]_{\alpha=\alpha} \\ &\quad + \frac{i}{\alpha - k} \left\{ K' \overline{H(k)} \overline{H_k^*}(\alpha) e^{-2k'h} - K \overline{H(k)} \overline{H_k^*}(\alpha) e^{-2K'h} \right\} \end{aligned}$$

(5.1)

をうる。

$$\phi = \phi + \cancel{\phi}$$

$$\int (\cancel{\phi} e^{-i\alpha x} \int \delta \epsilon \frac{dy}{dx}) dx$$

$$\phi \phi = \int \phi [-i\alpha \phi + \delta]$$

$$\int \phi \phi_y dx = - \int \phi \phi_x dx$$

$$\int \phi \phi_x = \int \delta \left(\phi - i\alpha \frac{\phi}{\phi_x} \right)$$

$$\begin{aligned} \int \phi_y (i\alpha \phi + \phi_x) dx &\quad \phi_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = i\alpha \phi + \phi_x = \phi_x \\ &= -i\alpha \phi + \int (i\alpha \phi + \phi_y) \phi_x dx \\ &\quad \equiv \end{aligned}$$

$$\eta = \int \phi_x e^{i\alpha x} dx$$

また ρ が クツタ の 条件 を 満たす ならば ρ の 立端 条件 を
(1.13) の 関係 から

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad \delta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n = 0 \quad (2.14)$$

を 定義 し、 さらに

$$\rho^* = \frac{2i\rho\omega U}{\pi\omega\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^* \cos n\theta \quad (2.15)$$

は ついて は

$$\sigma^* = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^*, \quad \delta^* = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n^* \quad (2.16)$$

と おくと (2.10) より

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^* \\ \delta^* \end{pmatrix} - \frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\Gamma^{(2)}(\alpha) (1 - e^{-2\alpha h}) \right]_{\alpha=\alpha} \begin{pmatrix} \sigma_J^* \\ \delta_J^* \end{pmatrix} \\ - \frac{i}{4} \Gamma^{(2)}(\alpha) (1 - e^{-2\alpha h}) \begin{pmatrix} \sigma_J^* \\ \delta_J^* \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}
 \overline{\psi^*}(x, -h) - \psi^*(x, -h) &= \frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial k} \left[B(1 - e^{-2kh}) \right] e^{ikx} \left\{ G^{(1)}(h) - \overline{G^{(2)}(h)} \right\} \\
 &+ \frac{i}{k' - k} \left[K' \overline{F}(k') e^{ik'x - 2k'h} - K \overline{F}(k) e^{ikx - 2kh} \right] \\
 &+ \frac{1}{F} \int_{-1}^1 \left\{ \overline{\tilde{p}_\alpha} - p_\alpha \right\} S(x, x', -h) dx' = 0, \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

したがって (2.9) で定義した角波 P_I^*, P_J^* と散乱角波 $P_K^*, P_{K'}^*$ を使うと上式から

$$\begin{aligned}
 p(x) - \overline{\tilde{p}(x)} &= \frac{i}{4} P_I^*(x) \frac{\partial}{\partial k} \left[B(1 - e^{-2kh}) \right] \left\{ G^{(1)}(h) - \overline{G^{(2)}(h)} \right\} \\
 &+ \frac{i}{4} P_J^*(x) (1 - e^{-2kh}) \left\{ G^{(1)}(x) - \overline{G^{(2)}(x)} \right\} \\
 &+ \frac{i}{k' - k} \left\{ K' \overline{F}(k') e^{-K'h} P_{K'}^*(x) - K \overline{F}(k) e^{-Kh} P_K^*(x) \right\}, \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

よって P_I^*, P_J^* については

$$\begin{aligned}
 -\overline{\tilde{p}_I^*}(x) &= \frac{i}{4} P_I^*(x) \frac{\partial}{\partial k} \left[B(1 - e^{-2kh}) G_I^{(1)}(h) \right] \\
 &+ \frac{i}{4} P_J^*(x) (1 - e^{-2kh}) G_I^{(1)}(x) + \text{wave Term}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\overline{\tilde{p}_J^*}(x) &= \frac{i}{4} P_I^*(x) \frac{\partial}{\partial k} \left[B(1 - e^{-2kh}) G_J^{(1)}(h) \right] \\
 &+ \frac{i}{4} P_J^*(x) (1 - e^{-2kh}) G_J^{(1)}(x) + \text{wave Term}
 \end{aligned}$$