

WQ

4. 06

No.

Date 58. 4. 23

厚味のある二次元振動盤の理論

別所

内容

	頁
概要	0
1. 速度ポテンシャルの表現	1
2. 境界条件	4
3. 逆流	6
4. カとモーメント (I)	7
5. " (II)	13
6. 仕事と推力	15-16

附録 A 後流渦ポテンシャル

" B カルマン渦列の推力

" C ラグリー-の定理とブラジウス-の公式

" D 解について

概要

平板翼の振動理論は解析解があって便利であるが厚みがあるとどうなるか特に推力については興味がある。(一次の力についてはあまり問題がないだろう)

厚みがあると加速度ポテンシャルの方法が使えないので少し複雑ではあるが後流渦が一系流と共に流れて行くとなると理論は簡単で特に特異性をサーキュレーションの分布とすると境界値問題は大変簡単である。

力とモーメントについてはそのサーキュレーション分布から簡単に計算出来る。その式は結局クッタ・ジュコフスキーの定理になっている。

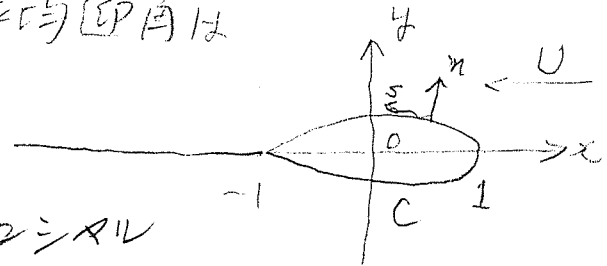
力の相反性は少し複雑であり有用でもないようなので記さなかつた。

最後に後流渦は結局的にカルマニ渦列を形づくって流れて行くであろうからそれを観察すれば推力を見積る事が出来るわけで附録Bに記す。

この式から見れば線型理論による推力は過大に見積っている可能性がある。

1. 速度ポテンシャルの表現

簡単の爲に対称翼を考え、平均迎角は
0 としよう。



厚みがあるので加速ポテンシャル
の方法では後縁渦が面分布する事となり、具合が
悪い。そこで

そこで後縁渦は翼後端から x 軸に沿って
無限後流まで続くものとし、またそれは主流の
速度で流されていくものと仮定しよう。

c 上にも渦分布 $[\gamma(\alpha)e^{i\omega t}]$ があるものとする。

後縁渦は $\kappa[\varepsilon(\alpha)e^{i\omega t}]$ としよう。

c 上の全渦量は

$$\Gamma e^{i\omega t} = \left[\int_c \gamma(\alpha) d\alpha \right] e^{i\omega t}, \quad (1.1)$$

ケルビンの定理により 総渦量は Γ の時間的
変化に等しくなければならぬ。

$$\frac{d}{dt} [\Gamma e^{i\omega t}] = -\varepsilon(-1)e^{i\omega t} \omega \Delta t, \quad (1.2)$$

$$\text{or } i\omega \Gamma = -\varepsilon(-1) \omega, \quad (1.3)$$

2 の端は一樣流 によって行くから

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}\right) [E(x) e^{i\omega t}] = 0, \quad \dots (1.4)$$

よって

$$E(x) = C e^{+i\alpha x}, \quad \alpha = \omega/v, \quad (1.5)$$

(1.3) を代入すると.

$$i\alpha P = -E(-1) = -C e^{-i\alpha}$$

よって

$$C = -i\alpha P e^{i\alpha}$$

$$\text{あるいは} \quad E(x) = -i\alpha P e^{i\alpha + i\alpha x}, \quad \text{for } x < -1; \quad (1.6)$$

$$P = \int_C \gamma(\Omega) dS_\Omega, \quad \dots (1.7)$$

$$\text{区間 } \mathbb{R}^2 \text{ 上 } \gamma \geq 0 \text{ ならば} \quad \phi(P) = \phi_1 + \phi_2, \quad (1.8)$$

$$\phi_1(P) = \frac{1}{2\pi} \int_C \gamma(\Omega) H(P, \Omega) dS_\Omega, \quad \dots (1.9)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{x'=-\infty}^{-1} E(x') H(P, x') dx', \quad (1.10)$$

$$H(P, \Omega) = \tan^{-1} \frac{y - y'}{x - x'}, \quad (1.11)$$

(1.10) に (1.6) を代入すると

$$\phi_2(P) = \mp P \phi_1(P), \quad (1.12)$$

$$\phi_1(P) = -\frac{\alpha}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-1} e^{i\alpha(x'+1)} H(P, x') dx', \quad (1.13)$$

無限遠方では (1.9) は

$$\phi_1(p) \doteq \frac{\Gamma}{2\pi} \textcircled{4}(p, 0), \quad \dots (1.14)$$

であり ϕ_2 は附録(A.12) より 上流側では

$$\phi_2 \doteq -\frac{\Gamma}{2\pi} \textcircled{17}(p; -1, 0), \quad \dots (1.15)$$

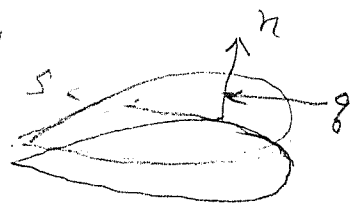
であるから ϕ は 高に doublet ポテンシャルである。

下流側では

$$\phi(p) \doteq -\frac{\Gamma}{2} \operatorname{sgn}(\psi) e^{i\alpha(x+1) - \alpha|\psi|}, \quad \dots (1.16)$$

2. 境界条件

厚味がある時は 平板翼の場合と異なり
定常流れを乱す流れを考慮せねば"
ならない。



今定常流れの表面に沿う流速を g としよう。
前後ゆれ, 上下ゆれ, ねじりゆれの各振巾を X_1, X_2, X_3
とすると 天の境界条件は流れ周面 Γ 上で次のように
与えられる。

$$\psi = -X_1 \left[i\omega y - g \frac{\partial \psi}{\partial s} \right],$$

$$\psi = -X_2 \left[-i\omega x + g \frac{\partial \psi}{\partial s} \right],$$

$$\psi = -X_3 \left[-\frac{i\omega r^2}{2} + \frac{g}{2} \frac{\partial(r^2)}{\partial s} \right],$$

(2.1)

したがって 先ず "定常流れを解かぬば" ならない。
定常流れのポテンシアルも (1.9) の形に与えられる。

$$\phi_0(P) = \frac{1}{2\pi} \int_C \gamma_0(Q) \Omega(P, Q) ds_Q, \quad (2.2)$$

境界条件は

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial n} = -U \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi_0 = -U \psi, \quad (2.3)$$

クッタの流出条件は、後端で

$$\phi_0 / r_{FE} = 0, \quad (2.4)$$

この条件のかわりに 後端の上, 下側で ϕ_0 絶対値
が等しく 符号が反対となるとしてもよい。

このば、

$$|\phi_0| = \phi, \quad (2.5)$$

なる便利な関係がある。

なお ^{周上の}速度成分 (u, v) は

$$\phi = \frac{\partial \phi}{\partial s}$$

$$u = -\frac{1}{2} \frac{\partial x}{\partial s}, \quad v = -\frac{1}{2} \frac{\partial y}{\partial s}, \quad g = -\left(u \frac{\partial x}{\partial s} + v \frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

$$xu + yv = -\frac{1}{2} \frac{\partial (r^2)}{\partial s} \quad (2.6)$$

さて 振動する場合、ポテンシャルは (1.8) によって
与えられかつ ϕ_2 は C_2 で正則であるから、境界
値問題の解法は定常問題の場合と全く同じ
で境界条件が異なるだけである。

流出条件はやはり (2.4) と同じで 後端で
 ϕ の符号が逆に なって いればよい。

(2.1) と (2.6) を使って ϕ の偏微分でかくと 単位振動について

$$\text{say } \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = -i\omega \frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial x} \right)$$

$$\text{here } \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = -i\omega \frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial y} \right)$$

$$\text{plus } \frac{\partial \phi_3}{\partial t} = -i\omega (xy - yx) - \frac{\partial}{\partial t} \left(x \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial y} - y \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial x} \right)$$

(2.7)

3 逆流ポテンシャル

一様流れを逆にした流れを考えると便利であるが平板翼の場合と異なり、先端が丸くなるので物理的には具合が悪い。(クッタの条件が成立するため) いずれにしても後流渦は今度はずまぬ渦にあらわれる。

また当面一様流れはサーキュレーションを含めずものを考えているので定常流れは速度の向きが逆にただけであって、境界条件は(2.1)を逆か二項の符号を変えたもので与えられる。

特に単位振巾の逆流ポテンシャルでは

$$\text{sway} \text{ に対し } \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = - \left[i\omega \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial s} \left(g \frac{\partial x}{\partial n} \right) \right],$$

$$\text{heaving} \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = - \left[i\omega \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial s} \left(g \frac{\partial y}{\partial n} \right) \right]$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial t} = - \left[\right]$$

4 カとモーメント

ベルヌーイの定理により圧力は

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} [(\nabla \Phi)^2 - U^2], \quad (4.1)$$

$$\Phi = \bar{\Phi} + \phi; \quad \Phi_0 = Ux + \phi_0, \quad (4.2)$$

ϕ_0 は §2 で定義した定常流れのポテンシヤル,

ϕ は振動ポテンシヤルで今は実数値をもつ時間の関数と考えておく

そうするとカとモーメントは瞬時に々の物体周 C 上で積分して

$$F_j = - \int_C p \frac{\partial x_j}{\partial n} ds, \quad j=1, 2, 3, \quad (4.3)$$

$$x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv y, \quad x_3 \text{ は } \frac{\partial x_3}{\partial n} = x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n}, \text{ on } C \text{ で}$$

C の内部で正則な速度ポテンシヤル, つまり C の内部が水で満たされていて C が一回転する時の水の運動の速度ポテンシヤルである。

さて

$$\int_C \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = \frac{d}{dt} \int_C \bar{\Phi} \frac{\partial x_j}{\partial n} ds + \int_C \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} ds, \quad (4.4)$$

$$\text{2.12 以下 } \frac{\partial}{\partial x_3} \text{ は } \frac{\partial}{\partial x_3} \equiv x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$$

を意味するものとする。

なる関係があるので (4.3) は

$$\frac{F_i}{f} = -\frac{d}{dt} \int_C \bar{\Phi} \frac{\partial \chi_i}{\partial n} ds + \int_C \left[\frac{1}{2} \{ (\chi \bar{\Phi})^2 - 0 \} \frac{\partial \chi_i}{\partial n} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \chi_j} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right] ds, \quad (4.5)$$

と書ける。

この内右辺が1項の積分は

$$\int_C \bar{\Phi} \frac{\partial \chi_i}{\partial n} ds = \int_C \left(\bar{\Phi} \frac{\partial \chi_i}{\partial n} - \chi_j \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right) ds + \int_C \chi_j \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} ds,$$

のように書くと右辺が1項は積分路に)関係なくなり,

が2項については

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} = - \sum_{j=1}^3 \dot{X}_j \frac{\partial \chi_j}{\partial n}, \quad \text{on } C, \quad (4.6)$$

を考慮すると

$$\int_C \chi_j \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} ds = - \sum_{i=1}^3 \dot{X}_i m_{ji}, \quad (4.7)$$

$$\text{但し} \quad m_{ij} = \int_C \chi_i \frac{\partial \chi_j}{\partial n} ds, \quad (4.8)$$

となつて m_{ij} は C が剛体ならば"時空に"関係しない。

よつて $\bar{c}$ を C の平均位置とすると

$$\int_C \bar{\Phi} \frac{\partial \chi_i}{\partial n} ds = \int_{\bar{C}} \left(\bar{\Phi} \frac{\partial \chi_i}{\partial n} - \chi_j \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right) ds - \sum_{i=1}^3 \dot{X}_i m_{ij}, \quad (4.9)^*$$

(4.5) 右辺が2項も積分路に)関係ないから結局

* χ_j は C の内部で調和の関数である事に注意。

$$\begin{aligned} \bar{F}_i/\rho = & \sum_{i=1}^3 \ddot{X}_i m_{ij} - \frac{d}{dt} \int_{\bar{C}} \left(\bar{\Phi} \frac{\partial \chi_i}{\partial n} - \chi_i \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right) ds \\ & + \int_{\bar{C}} \left[\frac{1}{2} \{ (\nabla \bar{\Phi})^2 - U^2 \} \frac{\partial \chi_i}{\partial n} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \chi_i} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right] ds, \quad (4.10) \end{aligned}$$

よいて

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \Big|_{\bar{C}} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{\bar{C}} = - \sum_{i=1}^3 \dot{X}_i \frac{\partial \chi_i}{\partial n} - \sum_{i=1}^3 \dot{X}_i \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \chi_i} \right), \quad (4.11)$$

より

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial n} \Big|_{\bar{C}} = 0$$

よって (4.10) は

$$\begin{aligned} \bar{F}_i/\rho = & - \int_{\bar{C}} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \{ (\nabla \bar{\Phi})^2 - U^2 \} \right] \frac{\partial \chi_i}{\partial n} ds \\ & - \int_{\bar{C}} \left[\frac{d}{dt} \left(\chi_i \sum_{j=1}^3 \dot{X}_j \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_0}{\partial \chi_j \partial \chi_i} \right) + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \chi_i} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right] ds, \quad (4.12) \end{aligned}$$

右辺第1項の被積分関数は $\bar{C}$ 上の圧力であるから
結局 $\bar{C}$ 上の圧力を積分したのと C 上の圧力の積分では
右辺第2項だけの $\frac{1}{3}$ の差があるだけである。

$\bar{F}_j$ は今は $\bar{C}$ のようにサーフェスに注目して
おけば $\bar{C}$ 上の計算出来る。

先ず (4.10) において

$$\bar{L}_j = \int_{\bar{C}} \left(\bar{\Phi} \frac{\partial \chi_j}{\partial n} - \chi_j \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} \right) ds, \quad (4.13)$$

の積分を考慮しよう。

(1.9), (1.12) を参照して。

$$\bar{\Phi} = Ux + \phi_0 + \phi_1 - P_1 \phi_v, \quad (4.14)$$

と表わす。 2.12

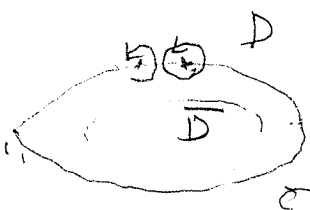
$$\phi_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{C}} \gamma_j \oplus ds, \quad j=0,1, \quad (4.15)$$

$$P_1 = \int_{\bar{C}} \gamma_1 ds$$

ϕ_v は (1.13) の定義による。

(4.14) は $\bar{D}$ で正則であるから, (4.13)

の積分を $\bar{D}$ 内の積分路に沿って行えば 0 となる。



そこで微少サーキュレーション要素 $(\gamma_0 + \gamma_1) ds$ の周りの積分の集りと考えると、右辺第1項を部分積分して

$$\frac{\partial \chi}{\partial n} \sim \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = - \frac{\partial \chi}{\partial s}$$

$$\frac{\partial \chi_3}{\partial n} = - \frac{1}{2} \frac{\partial r^2}{\partial s}$$

なる事を考慮すると

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_{\bar{C}} (\gamma_0 + \gamma_1) y \, ds, \quad I_2 = - \int_{\bar{C}} (\gamma_0 + \gamma_1) x \, ds, \\ I_3 &= - \frac{1}{2} \int_{\bar{C}} (\gamma_0 + \gamma_1) (x^2 + y^2) \, ds, \end{aligned} \right\} (4.16)$$

(4.16) 右辺の各項は 附録 C に示すように、グリーン関数の公式による力であつて、それを $F_j^{(L)}$ と表す事にすると

$$(F_1^{(L)} - i F_2^{(L)})/\rho = i \left[U(P_0 + P_1) - P_1 \int_{\bar{C}} (\gamma_0 + \gamma_1) \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\} ds \right] \quad (4.17)$$

$$F_3^{(L)}/\rho = -U \int_{\bar{C}} (\gamma_0 + \gamma_1) x \, ds - P_1 \int_{\bar{C}} (\gamma_0 + \gamma_1) \left(x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) ds. \quad (4.18)$$

γ_0 は解の初めに関係ない。 γ_1 は基底関数で振動するとすると F_j を 定常分, 基底関数分 流れによる分

その他の部分に

$$F_j = F_j^{(0)} + F_j^{(1)} + F_j^{(2)}, \quad \dots (4.19)$$

の様にわけると

$$F_1^{(0)}/\rho = 0, \quad F_2^{(0)} = -\rho U \vec{e}_0, \quad F_3^{(0)} = -\rho U \int_{\bar{C}} \gamma_0 x \, ds \quad (4.20)$$

$$\bar{F}_1^{(1)}/\rho = \sum_i \ddot{X}_i m_{i1} - \frac{d}{dt} I_1 - P_1 \int_C \gamma_0 \frac{\partial \Phi_V}{\partial y} ds,$$

$$\bar{F}_2^{(1)}/\rho = \sum_i \ddot{X}_i m_{i2} - \frac{d}{dt} I_2 - U P_1 + P_1 \int_C \gamma_0 \frac{\partial \Phi_V}{\partial x} ds, \quad (4.21)$$

$$\bar{F}_3^{(1)}/\rho = \sum_i \ddot{X}_i m_{i3} - \frac{d}{dt} I_3 - U \int_C \gamma_1 x ds - P_1 \int_C \gamma_0 \left(x \frac{\partial \Phi_V}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi_V}{\partial y} \right) ds,$$

$$\bar{F}_1^{(2)}/\rho = - P_1 \int_C \gamma_1 \frac{\partial \Phi_V}{\partial y} ds,$$

$$\bar{F}_2^{(2)}/\rho = P_1 \int_C \gamma_1 \frac{\partial \Phi_V}{\partial x} ds,$$

$$\bar{F}_3^{(2)}/\rho = - P_1 \int_C \gamma_1 \left(x \frac{\partial \Phi_V}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi_V}{\partial y} \right) ds. \quad (4.22)$$

5. カとモーメント(Ⅱ)

造波理論では 高次の項を除き C 上の圧力を C 上の値

$$\begin{aligned} p/\rho &= \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla \Phi_0 \nabla \phi \\ &\doteq i\omega \phi - \nabla \Phi_0 \nabla \phi \end{aligned} \quad (5.1)$$

で近似し、力は

$$\bar{F}_j/\rho = - \int_C (i\omega \phi - \nabla \Phi_0 \nabla \phi) \frac{\partial x_j}{\partial n} ds, \quad (5.2)$$

で現わされるとしている。

これを (4.12) と替えると (4.12) 右辺が 2 項だけ異なる。^{従って} この項は 高次の項と考えられ、又それは仕事をしないようにあるから 減衰を考慮する時は 上式で ~~も~~ 同じになる。

そこで $\nabla \Phi_0 \nabla \phi = \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \frac{\partial \phi}{\partial n} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial s} \frac{\partial \phi}{\partial s}$, $\frac{\partial \Phi_0}{\partial n} = 0$,
 であるから (5.2) 右辺が 2 項を 部分積分すると、

$$\bar{F}_j/\rho = - \int_C \phi \left[i\omega \frac{\partial x_j}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial s} \frac{\partial x_j}{\partial n} \right) \right] ds, \quad (5.3)$$

但し $\frac{\partial \Phi_0}{\partial s} \Big|_{T.E.} = 0$ とする。

(2.1), (2.7) を見ると 結局

$$\bar{F}_i / \rho = - \int_{\bar{c}} \phi \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial n} ds, \quad (5.3)$$

$$\text{但し} \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial n} = -i\omega \frac{\partial \chi_j}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \bar{\phi}_0}{\partial \chi_j} \right)$$

あるいは $\bar{\phi}$ の逆流れでは

$$\frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial n} = - \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial n}, \quad (5.4)$$

であるから

$$\bar{F}_i / \rho = \int_{\bar{c}} \phi \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial n} ds, \quad (5.5)$$

6. 仕事, 減衰, 推力

一周期の間に与える平均の仕事 W は

$$W = \frac{\omega}{4\pi} \sum_{j=1}^3 (\bar{F}_j \bar{X}_j - \bar{F}_j X_j) \quad , \quad \dots (6.1)$$

(5.3) を上式に代入して

$$\phi = \sum_{j=1}^3 X_j \phi_j \quad , \quad \dots (6.2)$$

を考慮すると

$$\frac{W}{\rho} = \frac{\omega i}{4} \int_C \left(\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} - \bar{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds, \quad (6.3)$$

(1.8), (1.12) より

$$\phi = \phi_1 - P \phi_2$$

(6.3) をグリーンの定理により 後流端 H

と L の積分に変換すると

また (1.16) より

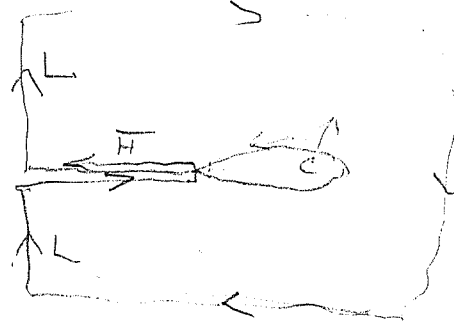
$$\frac{i}{4} \int_L \left(\phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} - \bar{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dy = \frac{|P|^2}{8\alpha} \quad , \quad \dots (6.4)$$

$$\frac{i}{4} \int_H \left(\Delta \phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} - \Delta \bar{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx \quad , \quad \dots (6.5)$$

(A-12) より

$$\Delta \phi = \left[\phi \right]_{y=0}^{y=\pi} = -P e^{i\alpha(x+1)} \quad , \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi_1}{\partial y} - P \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \quad \text{etc}$$



$$\frac{i}{4} \int \left[e^{i\alpha(x+1)} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} - e^{-i\alpha(x+1)} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] dx$$

$$= \frac{\alpha}{4\pi} \int_{-\infty}^1 \int_{-\infty}^1 \frac{\cos \alpha(x-x')}{x-x'} dx dx' = 0, \quad \dots (6.7)$$

よって 0 となる。

$$\frac{i}{4} \int_{\Gamma} (\Delta \phi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} - \Delta \bar{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y}) dx$$

$$= \frac{i}{4} P \bar{P} \int_{-\infty}^1 \left(e^{i\alpha(x+1)} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} - e^{-i\alpha(x+1)} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx, \quad (6.8)$$

あるいは (1.9) を代入して積分の順序を変更すると

$$= \frac{P \bar{P}}{4\alpha} \int_{\bar{C}} \left(\bar{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \right) ds, \quad (6.9)$$

$$\therefore \frac{W}{P} = \frac{U P \bar{P}}{8\alpha} + \frac{U P \bar{P}}{4} \int_{\bar{C}} \left(\bar{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \right) ds, \quad (6.10)$$

一方 (4.22) より推力 T は、

$$T/P = + \frac{P \bar{P}}{4} \int_{\bar{C}} \left(\gamma \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} + \bar{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) ds, \quad (6.11)$$

(6.4) は 後流 に 出て 行く 水の 運動 エネルギー である。

$$E/P = \frac{U}{8} P \bar{P}, \quad \dots (6.12)$$

$$W = E + T U, \quad (6.13)$$

附録 A 後流渦のポテンシャル

$$\tan \theta = \frac{y-y'}{x-x'}, \quad R^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2$$

$$\frac{\partial \textcircled{11}}{\partial x} = - \frac{\partial \textcircled{11}}{\partial x'} = \frac{-(y-y')}{R^2}, \quad \frac{\partial \textcircled{11}}{\partial y} = - \frac{\partial \textcircled{11}}{\partial y'} = \frac{x-x'}{R^2}$$

$$\phi_v = \frac{i\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{-1} e^{i\alpha(x'+1)} \textcircled{11}(P; x', 0) dx', \quad \dots (A.1)$$

部分積分して

$$\phi_v(P) = \frac{1}{2\pi} \textcircled{11}(P; -1, 0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-1} e^{i\alpha(x'+1)} \frac{y}{(x-x')^2 + y^2} dx', \quad (A.2)$$

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{x+iy} - \frac{1}{x-iy} \right),$$

$$I = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-1} e^{i\alpha(x'+1)} \frac{y}{(x-x')^2 + y^2} dx' = - \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{-1} e^{i\alpha(x'+1)} \left(\frac{1}{(x-x') + iy} - \frac{1}{(x-x') - iy} \right) dx'$$

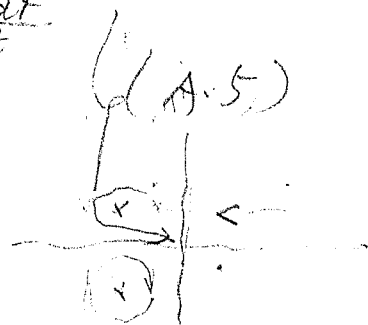
$$= \frac{1}{4\pi i} [J_1 - J_2] \quad (A.3)$$

$$J_1 = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{i\alpha(x'+1)}}{(x-x') + iy} dx', \quad J_2 = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-i\alpha(x'+1)}}{(x-x') + iy} dx' \quad (A.4)$$

$$J_1 = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{i\alpha u}}{(x+1-u) + iy} du = e^{i\alpha(x+1) - \alpha y} \int_{x+1+iy}^{\infty + iy} \frac{e^{i\alpha t}}{t} dt \quad (A.5)$$

$$J_2 = e^{-i\alpha(x+1) + \alpha y} \int_{x+1+iy}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha t}}{t} dt$$

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= e^{i\alpha(x+1) - \alpha y} \int_{i\alpha(x+1+iy)}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \\ J_2 &= e^{-i\alpha(x+1) + \alpha y} \int_{-i\alpha(x+1+iy)}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \end{aligned} \right\} \text{for } (x+1) > 0, \quad (A.6)$$



Exponential Integral

$$E_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad [\arg z] < \pi, \quad (A.7)$$

を $\frac{1}{z} \lambda \gamma$ と

$$J_1 = e^{i\alpha(x+1) - \alpha y} E_1\{i\alpha(x+1) - \alpha y\}$$

$$J_2 = e^{-i\alpha(x+1) + \alpha y} E_1\{-i\alpha(x+1) + \alpha y\}$$

(A.6')

たが $E_1(z) \xrightarrow{|z| \gg 1} \frac{e^{-z}}{z}, \quad (A.8)$

$x+1 < 0$ のときは $y \leq 0$ とする

$y > 0$ のときは

$$J_1 = 2\pi i e^{i\alpha(x+1) - \alpha y} + e^{i\alpha(x+1) - \alpha y} \int_{x+1+iy}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

$$= 2\pi i e^{i\alpha(x+1) - \alpha y} + e^{i\alpha(x+1) - \alpha y} E_1\{i\alpha(x+1) - \alpha y\}, \quad (A.9)$$

$$J_2 = e^{-i\alpha(x+1) + \alpha y} E_1\{-i\alpha(x+1) + \alpha y\}$$

$y < 0$ のときは

$$J_1 = e^{i\alpha(x+1) - \alpha y} E_1\{i\alpha(x+1) - \alpha y\}$$

$$J_2 = -2\pi i e^{-i\alpha(x+1) + \alpha y} + e^{-i\alpha(x+1) + \alpha y} E_1\{-i\alpha(x+1) + \alpha y\}$$

(A.10)

また $|x+1| < 0$ ならば

$$I = \frac{e^{i\alpha(x+1) - \alpha y}}{2} + \frac{1}{4\pi i} \left[e^{i\alpha(x+1) - \alpha y} E_1\{-\alpha y + i(x+1)\} - e^{+i\alpha(x+1) + \alpha y} E_1\{\alpha y - i(x+1)\} \right],$$

for $y > 0$

$$I = -\frac{e^{i\alpha(x+1) + \alpha y}}{2} + \frac{1}{4\pi i} \left[e^{i\alpha(x+1) - \alpha y} E_1\{-\alpha y + i(x+1)\} - e^{i\alpha(x+1) + \alpha y} E_1\{\alpha y - i(x+1)\} \right],$$

for $y < 0$.

また $|x+iy| \gg 1$ ならば $x+1 < 0$ ならば (A.11)

$$\phi_v(p) \doteq \frac{1}{2\pi} H(p; -1, 0) + \frac{\log(y)}{2} e^{i\alpha(x+1) - \alpha|y|}, \quad (A.12)$$

推力は (B.1) の符号をかえらむで

$$T = \frac{\rho D^2 h}{\ell} (-V + 2u) - \frac{\rho D^2}{2\pi \ell} \quad , \quad \dots \quad (B.8)$$

$u/V \geq 2.526$ で始めて推力となる。

$$C_T = \frac{T}{\frac{\rho}{2} V^2 c} = \frac{\ell}{c} \left[0.628 \frac{u^2}{V^2} - 1.587 \frac{u}{V} \right] \quad , \quad (B.9)$$

c は弦長とする。

$$\frac{u}{V} = \frac{\omega \ell}{2\pi V} = \frac{\omega c}{2V} \cdot \frac{\ell}{\pi c} = \alpha \frac{\ell}{\pi c}$$

α : reduced frequency

$$C_T = \alpha \left(\frac{\ell}{c} \right)^2 \left[0.636 \left(\frac{\alpha \ell}{c} \right) - 1.505 \right] \quad , \quad (B.10)$$

ℓ を測定すれば 推力が求まることになる。

附録 C ラグリー の定理 と フラジウス の公式

ラグリー の定理 では、カとモーメントは、

$$\left. \begin{matrix} X \\ Y \end{matrix} \right\} = \rho \int_C \left[\frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial n} \right) - \left(\frac{\Phi_x}{\Phi_y} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] ds, \quad (C.1)$$

$$M = \rho \int_C \left[\frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \rho x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n} \right. \\ \left. - \frac{\partial \Phi}{\partial n} \left(x \frac{\partial \Phi}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right] ds, \quad (C.2)$$

$$\text{今 } \Phi + i\Psi = F(z), \quad \dots \dots (C.3)$$

各点の速度成分のポテンシャルを等入し、(C.1)より

$$X = \rho \int_C \left[\frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 dy - \Phi_x [\Phi_x dy - \Phi_y dx] \right] \\ = \rho \int_C \left[\Phi_x \Phi_y dx - \frac{1}{2} (\Phi_x^2 - \Phi_y^2) dy \right] \quad -y$$

$$Y = \rho \int_C \left[-\frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 dx - \Phi_y (\Phi_x dy - \Phi_y dx) \right] \\ = \rho \int_C \left[-\Phi_x \Phi_y dy + \frac{1}{2} (\Phi_x^2 - \Phi_y^2) dx \right], \quad *$$

$$\therefore X - iY = \frac{\rho i}{2} \int_C [\Phi_x^2 - \Phi_y^2 + 2i \Phi_x \Phi_y] dz \\ = \frac{i\rho}{2} \int_C \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 dz, \quad \dots \dots (C.4)$$

Blasius の式 と なる。

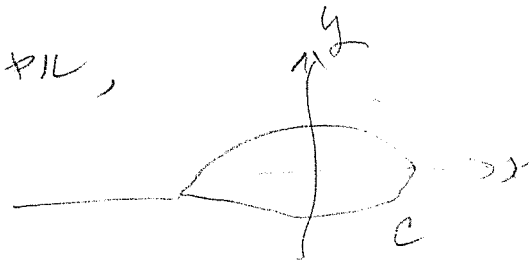
同様に

$$M = \operatorname{Re} \left[-\frac{\rho}{2} \int_C \left(\frac{d\bar{H}}{dz} \right)^2 z dz \right], \quad \dots (C.5)$$

$$\text{今 } \bar{H}(z) = Uz + f_1(z) + f_2(z), \quad \dots (C.6)$$

とし f_1 は C 上の渦によるポテンシャル,

f_2 は 主流渦のもつとしよう。



$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma \log(z-z') ds, \quad (C.7)$$

$$f_1(z) \xrightarrow{|z| \gg 1} \frac{P}{2\pi i} \log z, \quad \left\{ \begin{array}{l} P = \int_C \gamma ds \end{array} \right. \quad (C.8)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\bar{H}}{dz} \right)^2 &= (U + f_1' + f_2')^2 = U^2 + 2Uf_1' + 2Uf_2' \\ &\quad + 2f_1'f_2' + f_1'^2 + f_2'^2, \end{aligned} \quad (C.9)$$

$$\begin{aligned} \int_C \left(\frac{d\bar{H}}{dz} \right)^2 dz &= 2PU + 2 \int_C f_1' f_2' dz \\ &= 2PU + 2 \int_C \gamma \frac{df_2}{dz} dz, \end{aligned} \quad \dots (C.10)$$

$$\int_C \gamma \left(\frac{d\bar{H}}{dz} \right)^2 dz = 2U \int_C \gamma z dz + \frac{P^2}{2\pi i} + 2 \int_C \gamma z \frac{df_2}{dz} dz, \quad (C.11)$$

附録 D 解について

速度ポテンシャルは (1.8), (1.9), (1.12) より

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \int_C \gamma \Theta ds - \Gamma \phi_v, \quad (D.1)$$

今

$$\frac{\partial}{\partial h} \left[\frac{1}{2\pi} \int_C \gamma_j \Theta ds \right] = - \frac{\partial \chi_j}{\partial h}, \quad j=1,2,3, \quad (D.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial h} \left[\frac{1}{2\pi} \int_C \gamma_{j+3} \Theta ds \right] = - \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \chi_j} \right), \quad j=1,2,3 \quad (D.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial h} \left[\frac{1}{2\pi} \int_C \gamma_v \Theta ds \right] = \frac{\partial [\phi_v]}{\partial h}, \quad (D.4)$$

の解 γ_j が求まると

前節中の解 γ_s は

$$\left. \begin{aligned} \gamma_s &= i\omega \gamma_1 + \gamma_4 + \Gamma_s \gamma_v \\ \gamma_h &= i\omega \gamma_2 + \gamma_5 + \Gamma_h \gamma_v \\ \gamma_p &= i\omega \gamma_3 + \gamma_6 + \Gamma_p \gamma_v \end{aligned} \right\} \quad (D.5)$$

上式は

縦方向は

$$\Gamma_s = \int_C \gamma_s ds, \quad \Gamma_h = \int_C \gamma_h ds, \quad \Gamma_p = \int_C \gamma_p ds, \quad (D.6)$$

γ_j は $j=1 \sim 6$ に対し実数値をとるが γ_v は複素数値である

(D.5)と (D.6)に代入すると

$$\vec{P}_S = i\omega \vec{P}_1 + \vec{P}_4 + \vec{P}_5 \vec{P}_V$$

$$\vec{P}_H = i\omega \vec{P}_2 + \vec{P}_5 + \vec{P}_H \vec{P}_V$$

$$\vec{P}_P = i\omega \vec{P}_3 + \vec{P}_6 + \vec{P}_P \vec{P}_V$$

即ち

$$\vec{P}_S = \frac{i\omega \vec{P}_1 + \vec{P}_4}{1 - \vec{P}_V}$$

$$\vec{P}_H = \frac{i\omega \vec{P}_2 + \vec{P}_5}{1 - \vec{P}_V}$$

$$\vec{P}_P = \frac{i\omega \vec{P}_3 + \vec{P}_6}{1 - \vec{P}_V}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{P}_i &= \int_C \vec{x}_i ds. \\ \vec{P}_V &= \int_C \vec{x}_V ds \end{aligned} \right\} \quad (D.7)$$