2次元滑走板の基礎理論

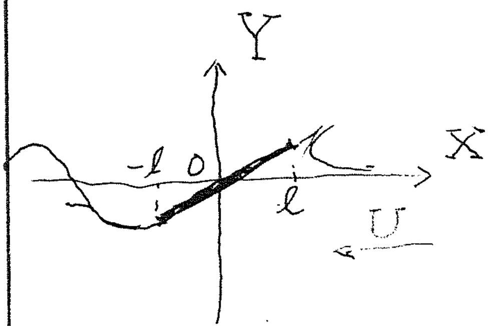
別府正利

昭和44年9月

内容

防衛大学校
機械工学科

1. 速度ポテンシャルと境界条件



左図の座標系を採用し、次の様に無次元化しよう。

$$X = lx,\ Y = ly$$

$$(z = x+iy)$$

$$\frac{p'}{\rho U^2} = p \quad \text{圧力}$$

$\gamma = \frac{gl}{U^2}$, 複素速度ポテンシャル $F(z)$ も無次元化して

$$F(z) = lU f(z)$$

$$\frac{d}{d(X+iY)}F(z) = -u' + iv'$$

$$\frac{df}{dz} = -u + iv, \quad u = \frac{u'}{U},\ v = \frac{v'}{U}$$

のように定義するものとする。

水面の $(-1, 1)$ の区間に圧力 p が作用している時の速度ポテンシャルは

$$f(z) = \varphi + i\psi = \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} p(\zeta)\, S\{\gamma(z-\zeta)\}\, d\zeta, \qquad (1.1)$$

ここに

$$S(\gamma z) = \lim_{\mu\to+0}\int_0^\infty \frac{e^{-ikz}\,dk}{k-\gamma-\mu i} = P.\int_0^\infty \frac{e^{-ikz}\,dk}{k-\gamma} + \pi i\, e^{-i\gamma z}, \qquad (1.2)$$

$$\left(\frac{d}{dz}+i\gamma\right) S(\gamma z) = -\frac{1}{z}, \qquad (1.3)$$

又実部と虚部に分けると、

$$S(z) = S_c(x,y) + i S_s(x,y) \qquad (1.4)$$

$$\left.\begin{aligned} S_c(x,y) &= P.\int_0^\infty \frac{e^{ky}\cos kx}{k-1}\,dk + \pi e^{y}\sin x \\ S_s(x,y) &= -P.\int_0^\infty \frac{e^{ky}\sin kx}{k-1}\,dk + \pi e^{y}\cos x \end{aligned}\right\} \qquad (1.5)$$

(1.1) から

$$\left(\frac{d}{dz}+i\gamma\right)f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{p(\xi)}{\xi-z}d\xi, \qquad \cdots (1.6)$$

であるから

$$\lim_{y\to -0} Re\left[\left(\frac{d}{dz}+i\gamma\right)f(z)\right]=\lim\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}-\gamma\psi\right)$$

$$=\begin{cases} -p(x), & \cdots \text{for } |x|<1 \\ 0, & \cdots \text{for } |x|>0 \end{cases} \qquad (1.7)$$

これは水面条件である。

次に滑走面では次の境界条件が満たされねばならない。つまり

$$\left.\begin{aligned} &\psi(x,0)=-\eta(x) \quad \text{for } |x|<1 \\ &\text{あるいは} \quad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{y=0}=-\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{y=0}=\frac{\partial\eta}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad (1.8)$$

$\eta(x)$ は滑走面のオーダネイトである。

これを (1.1) 式に代入すると次の積分方程式が得られる。

$$\eta(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}p(\xi)\,S_c(\gamma\overline{x-\xi},0)d\xi$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}p(\xi)\left\{\frac{1}{\xi-x}+\gamma S_s(\gamma\overline{x-\xi},0)\right\}d\xi.$$

あるいは

$$\eta(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}p(\xi)\overline{S_c}(\gamma\overline{x-\xi})d\xi+\int_{-1}^{1}p(\xi)\sin(\gamma\overline{x-\xi})d\xi, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}p(\xi)\overline{S_s'}(\gamma\overline{x-\xi})d\xi+\gamma\int_{-1}^{1}p(\xi)\cos(\gamma\overline{x-\xi})d\xi \quad (1.10)$$

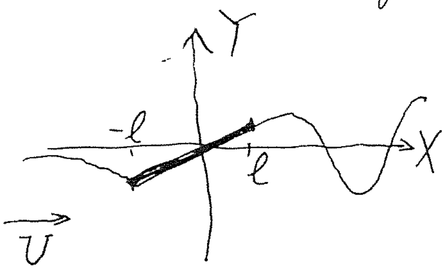
ここに

$$\left.\begin{aligned} &\overline{S_c}(\gamma x)=P.\int_0^{\infty}\frac{\cos kx\,dk}{k-\gamma} \\ &\overline{S_s'}(\gamma x)=-\frac{1}{x}\,\cancel{\ }\,\gamma P.\int_0^{\infty}\frac{\sin kx}{k-\gamma}dk \\ &\text{従って} \quad \overline{S_c}(-\gamma x)=\overline{S_c}(\gamma x),\ \overline{S_s'}(-\gamma x)=-\overline{S_s'}(\gamma x) \end{aligned}\right\}(1.11)$$

(1.9)の解で $\zeta=\mathrm{const.}$ に対応するものは (1.10)では左辺が0となり，所謂斉次解となり，この分だけ解は不定である。 これをさけ，かつ物理的要請を満たすために(1.10)を解くには次の流出条件を附加えると解は一義的に定まる。

$$p(-1)=0 , \qquad \cdots \quad (1.12)$$

2. Reverse flow



次に同じ滑走面に対して流れの方向を逆にした場合のポテンシャルを考えよう。(すべて上に～をつけて表わす) 水面条件は変わらず，波はX軸の前方に出来るので直ちに

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\tilde{p}(\zeta)\,\tilde{S}\{\gamma(z-\zeta)\}\,d\zeta , \qquad \cdots \quad (2.1)$$

ここに

$$\tilde{S}(\gamma z) = \lim_{\mu\to+0}\int_0^\infty \frac{e^{-ikz}\,dk}{k-\gamma+\mu i}$$

$$= P.\int_0^\infty \frac{e^{-ikz}\,dk}{k-\gamma} - \pi i e^{-i\gamma z} = S(\gamma z) - 2\pi i e^{-i\gamma z} , \quad -(2.2)$$

実部虚部にわけると

$$\left.\begin{aligned} \tilde{S} &= \tilde{S}_c + i\tilde{S}_s \\ \tilde{S}_c(\gamma x,\gamma y) &= S_c(-\gamma x,\gamma y) \\ \tilde{S}_s(\gamma x,\gamma y) &= -S_s(-\gamma x,\gamma y) \end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

又

$$\left(\frac{d}{dz}+i\gamma\right)\tilde{S}(\gamma z) = -\frac{1}{z} , \qquad \cdots \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{d}{dz}+i\gamma\right)\tilde{f}(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\tilde{p}(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z} , \qquad (2.5)$$

$$\lim_{y\to-0} Re\left[\left(\frac{d}{dz}+i\gamma\right)\tilde{f}(z)\right] = -\tilde{p}(x) , \qquad (2.6)$$

である。

主流の方向が逆であるので境界条件は符号が変って

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\varphi}(x,0)=\eta(x)\\&\left.\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y}\right|_{y=0}=-\left.\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x}\right|_{y=0}=-\frac{\partial}{\partial x}\eta(x),\end{aligned}\right\}\qquad(2.7)$$

積分方程式は

$$\eta(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\tilde{p}(\xi)\bar{S}_c(\gamma\overline{x-\xi})d\xi+\int_{-1}^{1}\tilde{p}(\xi)\sin(\gamma\overline{x-\xi})d\xi,\qquad(2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\eta(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\tilde{p}(\xi)\bar{S}_s'(\gamma\overline{x-\xi})d\xi+\gamma\int_{-1}^{1}\tilde{p}(\xi)\cos(\gamma\overline{x-\xi})d\xi,\qquad(2.9)$$

流出条件は今度は

$$p(+1)=0,\quad ---\qquad(2.10)$$

である。

さて(2.8)でx,ξの符号を変えると(1.11)によって

$$\eta(-x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\tilde{p}(-\xi)\bar{S}_c(\gamma\overline{x-\xi})d\xi-\int_{-1}^{1}\tilde{p}(-\xi)\sin(\gamma\overline{x-\xi})d\xi,\quad --\ (2.11)$$

となるから(1.9)と比較して

$$\left.\begin{aligned}&\eta(x)=\eta(-x)\ \text{ならば}\quad p(x)=-\tilde{p}(-x)\\&\eta(x)=-\eta(-x)\ \text{ならば}\quad p(x)=\tilde{p}(-x),\end{aligned}\right\}\qquad(2.12)$$

同様に(2.9)と(1.10)を比較してさらに(1.12)と(2.10)を考慮すれば(2.12)の関係は(2.9),(1.10)の解についても成立つ。

3. Reverse Flow Theorem

花岡によれば次の2つの定理が成立つ。

(2.8)に$p(x)$をかけて積分すると$\bar{S}_c$の対称性と(1.9)を考慮して

$$\int_{-1}^{1}p(x)\eta(x)dx=-\int_{-1}^{1}\tilde{p}(\xi)\eta(\xi)d\xi,\quad ---\ (3.1)$$

が成立つ。これはpが流出条件を満足しなくても成立つ。

同様に (2.9) に $p(x)$ をかけて積分すると

$$\int_{-1}^{1} p(x)\frac{\partial \eta}{\partial x}\,dx = \int_{-1}^{1} \tilde{p}(x)\frac{\partial \eta}{\partial x}\,dx, \qquad \cdots (3.2)$$

この場合 積分順序の交換が可能になる為には p, $\tilde{p}$ は共に流出条件を満足していなければならない。(cf. Lax)

今 (1.9), (2.8) の $\eta_n(x) = \cos n\theta$ $(x = -\cos\theta)$ に対応する解を

$$\left.\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{\sin\theta}\sum_{m=0}^{\infty} A_m^n \cos m\theta \\ \tilde{P}_n(x) &= \frac{1}{\sin\theta}\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{A}_m^n \cos m\theta \end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

とおくと (3.1) から

$$\int_{-1}^{1} P_n \eta_m\,dx = -\int_{-1}^{1} \tilde{P}_m \eta_n\,dx$$

なるから

$$\left.\begin{aligned} A_0^0 &= -\tilde{A}_0^0 \\ 2A_0^n &= -\tilde{A}_n^0, \quad A_n^0 = -2\tilde{A}_0^n, \quad n \neq 0 \\ A_m^n &= -\tilde{A}_n^m, \quad n, m \neq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.4)$$

一方 (2.12) から

$$A_m^n = (-)^{n+m+1}\tilde{A}_m^n, \qquad \cdots (3.5)$$

よって

$$\left.\begin{aligned} A_m^0 &= 2(-)^m A_0^m & m \neq 0 \\ A_m^n &= (-)^{n+m} A_n^m, & n, m \neq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

これに対応する流出条件を満足する解を p_n と記す事にし

$$\left.\begin{aligned} p_n(x) &= \frac{1}{\sin\theta}\sum_{m=0}^{\infty} a_m^n \cos m\theta \\ \tilde{p}_n(x) &= \frac{1}{\sin\theta}\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{a}_m^n \cos m\theta \end{aligned}\right\} \qquad (3.7)$$

とおくと その境界条件は

$$\frac{\partial}{\partial x}\eta_n(x) = v_n(x) = -n\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}, \qquad (3.8)$$

流出条件は $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} a_m^n = 0, \quad \sum_{m=0}^{\infty} (-)^m \tilde{a}_m^n = 0, \qquad (3.9)$

先ず (2.12) から

$$a_m^n = (-)^{n+m+1} \tilde{a}_m^n \qquad (3.10)$$

次に (3.2) から

$$m\int_{-1}^{1} P_n \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} dx = n\int_{-1}^{1} \tilde{P}_m \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} dx$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin 2n\theta}{\sin\theta} &= 2\sum_{\mu=0}^{n-1} \cos(2\mu+1)\theta \\ \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} &= 1 + 2\sum_{\mu=0}^{n} \cos 2\mu\theta \end{aligned}\right\}$$

であることを考慮すると、(3.4), (3.6) に対応する関係は

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{(2n+1)}\sum_{\mu=0}^{m} a_{2\mu}^{2n+1} &= \frac{1}{(2m+1)}\sum_{\mu=0}^{n} \tilde{a}_{2\mu}^{2m+1} = \frac{1}{(2m+1)}\sum_{\mu=0}^{n} a_{2\mu}^{2m+1} \\ \frac{1}{2n}\sum_{\mu=0}^{m} a_{2\mu}^{2n} &= \frac{1}{(2m+1)}\sum_{\mu=0}^{n-1} \tilde{a}_{2\mu+1}^{2m+1} = -\frac{1}{(2m+1)}\sum_{\mu=0}^{n-1} a_{2\mu+1}^{2m+1} \end{aligned}\right\} (3.11)$$

の如くなる。

一方 P_n はその成立ちから α_n を常数として

$$\left.\begin{aligned} P_n(x) &= \alpha_n P_0(x) + P_n(x) \\ \tilde{P}_n(x) &= \tilde{\alpha}_n \tilde{P}_0(x) + \tilde{P}_n(x) \end{aligned}\right\} \quad n>0, \qquad (3.12)$$

とも書ける。 α_n は流出条件から次のように定められなければならない。

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n &= -\sum_{m=0}^{\infty} A_m^n \Big/ \sum_{m=0}^{\infty} A_m^0, \\ \tilde{\alpha}_n &= -\sum_{m=0}^{\infty} (-)^m \tilde{A}_m^n \Big/ \sum_{m=0}^{\infty} (-)^m \tilde{A}_m^0, \end{aligned}\right\} \quad (3.13)$$

(2.11) を前2式に代入すれば

$$\tilde{\alpha}_n = (-)^n \alpha_n, \qquad (3.14)$$

この α_n を使って

$$\left.\begin{aligned} a_m^n &= \alpha_n A_m^0 + A_m^n, \\ \tilde{a}_m^n &= \tilde{\alpha}_n \tilde{A}_m^0 + \tilde{A}_m^n, \end{aligned}\right\} \quad (3.15)$$

である。

A4×100

DIRECT COPY SYSTEMS

圧力分布 p_n に対応する水面変位 ζ は (3.12) によって
$\zeta = \alpha_n + \cos n\theta$ となっているから (3.1) と (3.2) を使って

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)\, v_1(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \tilde{p}_1(x)\, v_n(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \tilde{p}_0(x)\,(\alpha_n + \cos n\theta)\, dx$$

となるが この後の2式から α_n は $\tilde{p}_0$, $\tilde{p}_1$ がわかれば求まる事は明らかであって係数の関係で記せば

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{2n} A_0^0 + \frac{1}{2} A_{2n} &= -2n \sum_{\mu=0}^{n-1} a'_{2\mu+1} \\ \alpha_{2n+1} A_0^0 - \frac{1}{2} A^0_{2n+1} &= (2n+1) \sum_{\mu=0}^{n} a'_{2\mu} \end{aligned}\right\} \quad (3.16)$$

特に $n \to \infty$ とすると $A_n^0 \to 0$ と考えられるから

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{n} A_0^0 = \sum_{\mu=0}^{\infty} a'_{2\mu} = -\sum_{\mu=0}^{\infty} a'_{2\mu+1} = \frac{\sigma_1}{2}, \quad (3.17)$$

ここに σ_n は

$$\left.\begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{m=0}^{\infty} (-)^m a_m^n \\ \tilde{\sigma}_n &= \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{a}_m^n = (-)^{n+1} \sigma_n \end{aligned}\right\} \quad (3.18)$$

と定義される量であるが、流出条件から $\sum_{m=0} a_m^n = 0$ であるから

$$\sigma_n = 2 \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}^n = -2 \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1}^n, \quad (3.19)$$

とも書ける。ここで更に (3.11) において $m \to \infty$ とすると

$$\left(\frac{1}{2n+1}\right) \frac{\sigma_{2n+1}}{2} = \lim_{m\to\infty} \left[\frac{\alpha_{2m+1}}{2m+1} \sum_{\mu=0}^{n} A^0_{2\mu} + \frac{\sum_{\mu=0}^{n} A^{2m+1}_{2\mu}}{2m+1} \right]$$

$$\frac{1}{2n} \frac{\sigma_{2n}}{2} = -\lim_{m\to\infty} \left[\frac{\alpha_{2m+1}}{2m+1} \sum_{\mu=0}^{n-1} A^0_{2\mu+1} + \frac{\sum_{\mu=0}^{n-1} A^{2m+1}_{2\mu+1}}{2m+1} \right]$$

となり 右辺第2項はやはり 0 になると考えられるから (3.17) によって

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma_{2n}}{2n} &= -\frac{\sigma_1}{A_0^0} \sum_{\mu=0}^{n-1} A^0_{2\mu+1} = \frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{A}_0^0} \sum_{\mu=0}^{n-1} \tilde{A}^0_{2\mu+1} \\ \frac{\sigma_{2n+1}}{2n+1} &= \frac{\sigma_1}{A_0^0} \sum_{\mu=0}^{n} A^0_{2\mu} = \frac{\tilde{\sigma}_1}{\tilde{A}_0^0} \sum_{\mu=0}^{n} \tilde{A}^0_{2\mu} \end{aligned}\right\} \quad (3.20)$$

が得られる。 これを積分表示すると

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1}{\pi A_0^0}\int_{-1}^{1}\tilde{P}_0(x)\, v_n(x)\, dx , \quad \cdots (3.21)$$

α_n の場合も同じように表示すると

$$\alpha_n A_0^0 = \int_{-1}^{1}\tilde{P}_0(x)\cos n\theta\, dx - \int_{-1}^{1}\tilde{P}_1(x)\, v_n(x)\, dx , \quad \cdots (3.22)$$

となる。

最後に $\zeta = \cos\gamma x, \sin\gamma x$ に対する(1.9)の解を夫々次のようにおこう。

$$\left.\begin{aligned} P_c(x) &= \frac{1}{\sin\theta}\sum_{m=0}^{\infty} A_m^c \cos m\theta \\ P_s(x) &= \frac{1}{\sin\theta}\sum_{m=0}^{\infty} A_m^s \cos m\theta \end{aligned}\right\} \quad (3.23)$$

すると

$$\left.\begin{aligned} \cos\gamma x &= \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n (-)^n J_{2n}(\gamma)\cos 2n\theta , \\ \sin(\gamma x) &= -2\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n J_{2n+1}(\gamma)\cos(2n+1)\theta , \end{aligned}\right\} \quad (3.24)$$

ただし $\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = 2 \ \text{for}\ n > 0$

であるから P_n を加え合せて

$$\left.\begin{aligned} A_m^c &= \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n (-)^n J_{2n}(\gamma) A_m^{2n} \\ A_m^s &= -2\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n J_{2n+1}(\gamma) A_m^{2n+1} \end{aligned}\right\} \quad (3.25)$$

が得られるが、これは(3-6)によって

$$\left.\begin{aligned} A_0^c &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n (-)^n J_{2n} A_{2n}^0 \\ A_0^s &= \sum_{n=0}^{\infty}(-)^n J_{2n+1} A_{2n+1}^0 \\ A_m^c &= 2(-)^m \sum_{n=0}^{\infty}(-)^n J_{2n} A_{2n}^m \\ A_m^s &= 2(-)^m \sum_{n=0}^{\infty}(-)^n J_{2n+1} A_{2n+1}^m \quad m \neq 0 \end{aligned}\right\} \quad (3.26)$$

又流出条件を満足する解 p_c, p_s は

$$
\left.
\begin{aligned}
p_c(x) &= \frac{1}{\sin\theta}\sum_{m=0}^{\infty} a_m^c \cos m\theta = \alpha_c P_0(x) + P_c(x) \\
p_s(x) &= \frac{1}{\sin\theta}\sum_{m=0}^{\infty} a_m^s \cos m\theta = \alpha_s P_0(x) + P_s(x)
\end{aligned}
\right\} \quad (3.27)
$$

とおくと、(3.25)と同様に

$$
\left.
\begin{aligned}
a_m^c &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-)^n J_{2n}(\gamma)\, a_m^{2n} \\
a_m^s &= -2\sum_{n=0}^{\infty} (-)^n J_{2n+1}(\gamma)\, a_m^{2n+1}
\end{aligned}
\right\} \quad (3.28)
$$

はすぐわかる。

$\alpha_c, \alpha_s, \sigma_c, \sigma_s$ は (3.22), (3.21) によって

$$
\left.
\begin{aligned}
\alpha_c A_0^0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \bar{P}_0(x)\cos\gamma x\, dx + \frac{\gamma}{\pi}\int_{-1}^{1} \bar{P}_1(x)\sin\gamma x\, dx, \\
\alpha_s A_0^0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \bar{P}_0(x)\sin\gamma x\, dx - \frac{\gamma}{\pi}\int_{-1}^{1} \bar{P}_1(x)\cos\gamma x\, dx,
\end{aligned}
\right\} \quad (3.29)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_c A_0^0 &= -\frac{\gamma\sigma_1}{\pi}\int_{-1}^{1} \bar{P}_0(x)\sin\gamma x\, dx \\
\sigma_s A_0^0 &= \frac{\gamma\sigma_1}{\pi}\int_{-1}^{1} \bar{P}_0(x)\cos\gamma x\, dx
\end{aligned}
\right\} \quad (3.30).
$$

このようにして p_c, p_s は P_n がすべてわかれば求められる。(勿論(1.9)を直接解いて求めてもよい) 以下これらを散乱ポテンシャルと呼ぶ。

4. 揚力，モーメント抗力

揚力をL，船首上げモーメントをM，圧力抵抗 D_p，造波抵抗 D_w，飛沫抵抗 D_s とすると

$$D_p = D_w + D_s$$

$$\frac{L}{\rho U^2 l} = C_L = \int_{-1}^{1} p(x)\, dx. \quad (4.1)$$

$$C_M = \frac{M}{\rho U^2 l^2} = \int_{-1}^{1} p(x)\, x\, dx. \quad (4.2)$$

$$C_{D_p} = \frac{D_p}{\rho U^2 l} = \int_{-1}^{1} p(x)\frac{\partial \zeta}{\partial x}\, dx \quad (4.3)$$

又

$$\frac{D_W}{\rho U^2 l} = C_W = \frac{\frac{\rho g}{4} a^2}{\rho U^2 l} = \frac{\gamma}{4}\left(\frac{a}{l}\right)^2 , \qquad (4.4)$$

ここに a は 後続波の半振巾

$$\frac{D_S}{\rho U^2 l} = C_S = \frac{\frac{\pi}{4}\rho U^2 l \sigma^2}{\rho U^2 l} = \frac{\pi}{4}\sigma^2 , \qquad \cdots (4.5)$$

ここに

$$\sigma = \lim_{x \to 1}\left\{ p(x)\sqrt{2(1-x)} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty}(-)^n a_n , \qquad \cdots (4.6)$$

ただし $p(x) = \frac{1}{\sin\theta}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta$ とする.

一方 (1.9) で $x \to -\infty$ とおくと.

$$\eta(x) \longrightarrow 2\int_{-1}^{1} p(\xi)\sin\gamma(x-\xi)\,d\xi$$
$$= \frac{1}{i}\int_{-1}^{1} p(\xi)\left\{ e^{i\gamma x - i\gamma\xi} - e^{-i\gamma x + i\gamma\xi} \right\} d\xi$$

であるから

$$\left(\frac{a}{l}\right)^2 = 4\left\{ F_c^2(\gamma) + F_s^2(\gamma) \right\}$$

よって

$$C_W = \gamma\left\{ F_c^2 + F_s^2 \right\} = \gamma\,|F(\gamma)|^2 , \qquad \cdots (4.7)$$

ただし

$$F_c(\gamma) + iF_s(\gamma) = F(\gamma) = \int_{-1}^{1} p(x)e^{i\gamma x}\,dx , \qquad (4.8)$$

さて (3.2) によれば (4.1), (4.2) は.

$$C_L = -\int_{-1}^{1} p_1(x)\frac{\partial \eta}{\partial x}\,dx , \qquad \cdots\cdots (4.9)$$

$$C_M = 4\int_{-1}^{1} p_2(x)\frac{\partial \eta}{\partial x}\,dx , \qquad \cdots (4.10)$$

であるから p_1 と p_2 つまり平板と camber のついた板の解が判れば揚力もモーメントも出て来る。(Flax, Munk の定理)

一方 (3.1) によれば

$$C_L = -\int_{-1}^{1} \tilde{P}_0(x)\,\eta(x)\,dx \quad , \qquad \cdots \quad (4.11)$$

$$C_M = \int_{-1}^{1} \tilde{P}_1(x)\,\eta(x)\,dx \quad , \qquad (4.12)$$

となり, P_0, P_1 がわかればよい事になる。

圧力抵抗についてはこのような便利な式はないが、各成分については次のようになる。

飛沫については (3.21) によって

$$\sigma = \frac{\sigma_1}{\pi A_0^2} \int_{-1}^{1} \tilde{P}_0(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} dx \,, \qquad \cdots \quad (4.13)$$

となって P_0 がわかればよく、波については (3.23), (3.27) によって Reverse flow Theorem を適用すれば (4.8) から

$$\overline{F}(\gamma) = \frac{1}{i\gamma} \int_{-1}^{1} \left[\tilde{P}_c(x) + i \tilde{P}_s(x) \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} dx$$

$$= -\int_{-1}^{1} \left\{ \tilde{P}_c(x) + i \tilde{P}_s(x) \right\} \eta(x)\,dx \,, \qquad \cdots \quad (4.14)$$

となって P_c, P_s がわかればよい。

なお (4.8) 式から $\gamma \to 0$ の時は

$$\overline{F}(\gamma) \fallingdotseq \int_{-1}^{1} P(x)\,dx + i\gamma \int_{-1}^{1} P(x)\,x\,dx + O(\gamma^2)$$

$$\fallingdotseq C_L + i\gamma C_M \,, \qquad \cdots \quad (4.15)$$

となる。一般に Lift と Moment は予め与えられた量であるので高速においては造波抵抗係数は (4.7) から必らず γ のオーダーであって、これより小さくする事は出来ない。

実際波のない滑走面は排水量が高速で非常に小さい。(予論)

次に飛沫をなくするには (4.13) で σ を 0 となるように滑走面を作ればよい。この時 C_L, C_M は (4.9), (4.10) から

$$C_L = -\int_{-1}^{1} \tilde{P}_1(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} dx \,, \qquad (4.16)$$

$$C_M = \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} \tilde{P}_2(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} dx \,, \qquad (4.17)$$

for $\sigma = 0$

で与えられる。

5. 境界値問題

前節で見たように滑走問題のみを扱うためには P_1, P_2, P_c, P_s, P_0 もしくは P_0, P_1, P_c, P_s を求めればよいが以下この問題について考えよう。

さて次の積分を導入しよう。

$$I = \int_{-1}^{1}\{p(x) - \tilde{p}(x)\}\eta(x)\,dx + \iint_{-1}^{1}\tilde{p}(x)p(\xi)S_c(\gamma\overline{x-\xi})\,dx\,d\xi, \quad \cdots (5.1)$$

$$J = \int_{-1}^{1}\{p(x) + \tilde{p}(x)\}\frac{\partial\eta}{\partial x}\,dx - \iint_{-1}^{1}\tilde{p}(x)p(\xi)S_s'(\gamma\overline{x-\xi})\,dx\,d\xi, \quad (5.2)$$

ただし
$$S_s'(\gamma x) = \frac{1}{x} + \gamma S_s(\gamma\overline{x-\xi})$$

そして $\tilde{p}$ が $\delta\tilde{p}$ だけ変化すると

$$\left.\begin{aligned} \delta I &= -\int_{-1}^{1}\delta\tilde{p}\,dx\left[\eta(x) - \int_{-1}^{1}p(\xi)S_c\,d\xi\right], \\ \delta J &= \int_{-1}^{1}\delta\tilde{p}\,dx\left[\frac{\partial\eta}{\partial x} - \int_{-1}^{1}p(\xi)S_s'\,d\xi\right], \end{aligned}\right\} \quad (5.3)$$

となるから I, J が停留値をとる事と (1.9), (1.10) の境界条件とは等価である。

そしてその極値は

$$[I] = \int_{-1}^{1}p(x)\eta(x)\,dx, \quad \cdots (5.4)$$

$$[J] = \int_{-1}^{1}p(x)\frac{\partial\eta}{\partial x}\,dx. \quad (5.5)$$

である。ここで J の変分問題では p が流出条件を満足するようにとらなければならない（Flax）。

積分方程式 (1.9) の核 S_c は対数特異点を有する弱特異型であるから唯一解を有する事は明らかであるが (1.10) は特異型であって Homogeneous sol. を有するから別条件を附加えなければ解は定まらない。

$[J]$ は揚抗である。$[I]$ の力学的意味は (1.7) と (1.8) から

$$[I] = \int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - \gamma\psi\right)\psi\,dx = \int_{-1}^{1}\psi\frac{\partial\psi}{\partial y}\,dx - \gamma\int_{-1}^{1}\psi^2\,dx$$

で表わされる。

ここでは P_n を求める必要があるので I を用いて考えよう。
φをフーリエ展開すれば 結局 3節の P_n がわかれば よい事になるが、この形で (5.1) の積分を行って変分原理を適用する事は 結局 (1.9) をフーリエ展開して問題を解く事に等しい。

さて P_n を (3.3) のように展開すると (1.9) は、

$$\cos n\theta = \sum_{m=0}^{\infty}(-)^m A^n_{2m}\left\{ C_{2m}(\gamma,x) + \pi J_{2m}(\gamma)\sin\gamma x \right\} - \sum_{m=0}^{\infty}(-)^m A^n_{2m+1}\left\{ S_{2m+1}(\gamma,x) - \pi J_{2m+1}(\gamma)\cos\gamma x \right\}, \quad \cdots(5.6)$$

ここに

$$C_n(\gamma,x) + i S_n(\gamma,x) = P.\int_0^{\infty}\frac{J_n(t)e^{ixt}}{t-\gamma}dt, \quad (5.7)$$

(Squire)

今

$$C_{n,m} = P.\int_0^{\infty}\frac{J_n(t)J_m(t)}{t-\gamma}dt, \quad \cdots\cdots(5.8)$$

なる積分を導入すれば

$$\left.\begin{aligned} C_{2n,2m} &= \frac{(-)^m}{\pi}\int_0^{\pi} C_{2n}(\gamma,x)\cos 2m\theta\, d\theta = C_{2m,2n}, \\ C_{2n+1,2m+1} &= \frac{(-)^{m+1}}{\pi}\int_0^{\pi} S_{2n+1}(\gamma,x)\cos(2m+1)\theta\, d\theta \end{aligned}\right\} \quad (5.9) \quad \cancel{(5.10)}$$

なお

$$\int_0^{\pi} C_{2n}(\gamma,x)\cos(2m+1)\theta\, d\theta = \int_0^{\pi} S_{2m+1}\cos 2m\theta\, d\theta = 0, \quad (5.10)$$

であるから、(5.6) の両辺に $\cos\mu\theta$ をかけて積分すると μ が偶奇に従って次の2組の方程式群が生まれる。

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos n\theta\cos 2\mu\theta\, d\theta &= \sum_{m=0}^{\infty}(-)^{m+\mu}A^n_{2m}C_{2m,2\mu} + \pi\sum_{m=0}^{\infty}(-)^{m+\mu}A^n_{2m+1}J_{2m+1}J_{2\mu} \\ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos n\theta\cos(2\mu+1)\theta\, d\theta &= \sum_{m=0}^{\infty}(-)^{m+\mu}A^n_{2m+1}C_{2m+1,2\mu+1} - \pi\sum_{m=0}^{\infty}(-)^{m+\mu}A^n_{2m}J_{2m}J_{2\mu+1} \end{aligned}\right\} \cdots(5.11)$$

この右辺は A^n_{2m}, A^n_{2m+1} の各群に分かれているので 次のようにすると 元数半分で2組の方程式に分かれる。
(しかし後に見るように 方程式の数は ふえる)

A4×100

DIRECT COPY SYSTEMS

(1.9)において x に関し，偶函数と奇函数の部分を分けて考えよう。そして肩に c と附したものを偶、s と附したものを奇函数の部分としよう。

$$
\left.\begin{aligned}
p(x) &= p^c(x) + p^s(x) \\
q(x) &= q^c(x) + q^s(x) \\
F^c + iF^s &= \int_{-1}^{1} p^c \cos\gamma x\, dx + i\int_{-1}^{1} p^s \sin\gamma x\, dx
\end{aligned}\right\} \quad (5.12)
$$

と記すと，(1.9)は次の2式に分かれる。

$$
\left.\begin{aligned}
q^c(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} p^c(\xi)\, S_c(\gamma x-\xi)\, d\xi - F^s \cos\gamma x \\
q^s(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} p^s(\xi)\, S_c(\gamma x-\xi)\, d\xi + F^c \sin\gamma x
\end{aligned}\right\} \quad (5.13)
$$

両式右辺第2項は第1項に直接関係しないので、これは次のように分解出来る。

今
$$
\left.\begin{aligned}
p^c &= \overline{p^c} + \overline{\overline{p^c}}\, F^s \\
p^s &= \overline{p^s} - \overline{\overline{p^s}}\, F^c
\end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (5.14)
$$

とおけば (5.13) は

$$
q^J(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \overline{p^J}(\xi)\, S_c(\gamma x-\xi)\, d\xi, \quad J = c \text{ or } s, \quad (5.15)
$$

$$
\left.\begin{matrix}\cos\gamma x \\ \sin\gamma x\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \left\{\begin{matrix}\overline{\overline{p^c}} \\ \overline{\overline{p^s}}\end{matrix}\right\} S_c\, d\xi, \quad \cdots \quad (5.16)
$$

のように4つの方程式に分かれるが F^c, F^s は(5.12)の最後の式があるので次の関係が成立せねばならぬ。

(5.14)から

$$
F^c = \overline{F^c} + \overline{\overline{F^c}}\, F^s
$$

$$
F^s = \overline{F^s} - \overline{\overline{F^s}}\, F^c
$$

この両式から F^c, F^s は次のように定められる。

$$F^c = \frac{\overline{F^c} + \overline{\varphi^c}\,\overline{F^s}}{1+\overline{\varphi^c}\,\overline{\varphi^s}}$$
$$F^s = \frac{\overline{F_s} - \overline{\varphi^s}\,\overline{F^c}}{1+\overline{\varphi^c}\,\overline{\varphi^s}} \qquad \cdots \quad (5.17)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}\overline{F^c}+i\overline{F^s} &= \int_{-1}^{1}\overline{p^c}\cos\gamma x\,dx + i\int_{-1}^{1}\overline{p^s}\sin\gamma x\,dx,\\ \overline{\varphi^c}+i\overline{\varphi^s} &= \int_{-1}^{1}\overline{\rho^c}\cos\gamma x\,dx + i\int_{-1}^{1}\overline{\rho^s}\sin\gamma x\,dx\end{aligned}\right\} \quad (5.18)$$

そこで解の手順は先ず (5.15), (5.16) の 4つの方程式を解き，$\overline{p_c}, \overline{p_s}, \overline{\rho_c}, \overline{\rho_s}$ を得それから (5.18), (5.17) によって F^c, F^s をもとめこれを (5.14) に代入すれば p^c, p^s が求められる事になる。これらの積分方程式は準特異型でかつ対称核であるから解は一義的に定まり，$\gamma=0$ に対する解は $p=0$ である。又最初に考えた変分問題に変換するには次の積分を考えればよい。

$$\overline{I} = 2\int_{-1}^{1} p\eta\,dx - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} p(x)p(\xi)\,\overline{S_c}(\gamma\,\overline{x-\xi})\,dx\,d\xi, \quad (5.1')$$

さてあらためてフーリエ展開して解く事を考えよう。
$\eta = \cos 2\theta$ とおき変換

$$\left.\begin{aligned}\overline{p^c_n} &= \frac{1}{\sin\theta}\sum_{m=0}^{\infty}\overline{A^n_{2m}}\cos 2m\theta, & \overline{p^s_n} &= \frac{1}{\sin\theta}\sum_{m=0}^{\infty}\overline{A^n_{2m+1}}\cos(2m+1)\theta\\ \overline{\rho^c} &= \frac{1}{\sin\theta}\sum_{m=0}^{\infty}\overline{B_{2m}}\cos 2m\theta, & \overline{\rho^s} &= \frac{1}{\sin\theta}\sum_{m=0}^{\infty}\overline{B_{2m+1}}\cos(2m+1)\theta\end{aligned}\right\} (5.19)$$

とおくと．先づ n に関わりなく (5.16) は次式になる。

$$\left.\begin{aligned}J_{2m}(\gamma) &= \sum_{\mu=0}^{\infty}(-)^{\mu}\,\overline{B_{2\mu}}\,C_{2m,2\mu}\\ J_{2m+1}(\gamma) &= \sum_{\mu=0}^{\infty}(-)^{\mu}\,\overline{B_{2\mu+1}}\,C_{2m+1,2\mu+1}\end{aligned}\right\} \quad m=0,1,2,\cdots \quad (5.20)$$

次に (5.15) は n の偶奇に従って次のようになる。

$$\frac{\delta_{2n-2m}}{\varepsilon_n} = (-)^m \sum_{\mu=0}^{\infty} (-)^\mu \overline{A^{2n}_{2\mu}}\, C_{2m,2\mu}$$

$$\overline{A^{2n}_{2\mu+1}} = 0 \qquad m = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\frac{\delta_{n-m}}{2} = (-)^m \sum_{\mu=0}^{\infty} (-)^\mu \overline{A^{2n+1}_{2\mu+1}}\, C_{2m+1,2\mu+1} \qquad (5.21)$$

$$\overline{A^{2n+1}_{2\mu}} = 0 \qquad m = 0, 1, 2, \cdots$$

$(\delta_{n-m} = 0 \quad n \neq m$, $\delta_0 = 1)$

$\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$ for $n > 0$

これらの方程式がとけると

$$\overline{\varphi^c} = \pi \sum_{m=0}^{\infty} (-)^m \overline{B_{2m}} J_{2m}(\gamma)$$

$$\overline{\varphi^s} = -\pi \sum_{m=0}^{\infty} (-)^m \overline{B_{2m+1}} J_{2m+1}(\gamma) \qquad (5.22)$$

$$\overline{F^c_{2n}} = \pi \sum_{m=0}^{\infty} (-)^m \overline{A^{2n}_{2m}} J_{2m}(\gamma)$$

$$\overline{F^s_{2n+1}} = -\pi \sum_{m=0}^{\infty} (-)^m \overline{A^{2n+1}_{2m+1}} J_{2m+1}(\gamma) \qquad (5.23)$$

$$\overline{F^s_{2n}} = \overline{F^c_{2n+1}} = 0$$

が求められ，(5.17)により F^c, F^s がわかりそれから(5.14)によって元の解が得られる事になる。

n のすべての値についての解が求められるならば $\overline{p^c}$ $\overline{p^s}$ は3節同様次のようになる.

$$\overline{p^c}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-)^n J_{2n}(\gamma) \overline{p^c_{2n}}(x)$$

$$\overline{p^s}(x) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n J_{2n+1}(\gamma) \overline{p^s_{2n+1}}(x)$$

であるから

$$\overline{B_{2m}} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-)^n J_{2n}(\gamma) \overline{A^{2n}_{2m}}$$

$$\overline{B_{2m+1}} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n J_{2n+1}(\gamma) \overline{A^{2n+1}_{2m+1}} \qquad (5.24)$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{\varphi c} &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-)^n J_{2n}(\delta)\,\overline{F^c_{2n}} \\ \overline{\varphi s} &= -2\sum_{n=0}^{\infty} (-)^n J_{2n+1}(\delta)\,\overline{F^s_{2n+1}}\end{aligned}\right\} \quad (5.25)$$

なお (5.15) から 明らかに

$$\int_{-1}^{1} \overline{P_n} \cos m\theta \, dx = \int_{-1}^{1} \overline{P_m} \cos n\theta \, dx \quad , \quad \cdots (5.26)$$

なる可逆性があるから次のような関係がある。

$$2\,\overline{A^{2n}_0} = \overline{A^0_{2n}} \;, \quad \overline{A^{2n}_{2m}} = \overline{A^{2m}_{2n}} \;, \quad n, m \neq 0 \;, \quad (5.27)$$

最後に (5.14) の形で書くと次のようになる

$$\left.\begin{aligned} P^c_{2n}(x) &= \overline{P^c_{2n}}(x) + \overline{P^c}(x)\,F^s_{2n} \\ P^s_{2n}(x) &= -\overline{P^s}(x)\,F^c_{2n} \\ P^c_{2n+1}(x) &= \overline{P^c}(x)\,F^s_{2n+1} \\ P^s_{2n+1}(x) &= \overline{P^s_{2n+1}}(x) - \overline{P^s}(x)\,F^c_{2n+1}\end{aligned}\right\} \quad (5.28)$$

$$\left.\begin{aligned} F^c_{2n} &= \frac{\overline{F^c_{2n}}}{1+\overline{\varphi c}\,\overline{\varphi s}} \;, \quad F^s_{2n} = \frac{-\overline{\varphi s}\,\overline{F^c_{2n}}}{1+\overline{\varphi c}\,\overline{\varphi s}} \\ F^c_{2n+1} &= \frac{\overline{\varphi c}\,\overline{F^s_{2n+1}}}{1+\overline{\varphi c}\,\overline{\varphi s}} \;, \quad F^s_{2n+1} = \frac{\overline{F^s_{2n+1}}}{1+\overline{\varphi c}\,\overline{\varphi s}}\end{aligned}\right\} \quad (5.29)$$

よって

$$\left.\begin{aligned} A^{2n}_{2m} &= \overline{A^{2n}_{2m}} + F^s_{2n}\,\overline{B_{2m}} \\ A^{2n}_{2m+1} &= -F^c_{2n}\,\overline{B_{2m+1}} \\ A^{2n+1}_{2m} &= F^s_{2n+1}\,\overline{B_{2m}} \\ A^{2n+1}_{2m+1} &= \overline{A^{2n+1}_{2m+1}} - F^c_{2n+1}\,\overline{B_{2m+1}}\end{aligned}\right\} \quad (5.30)$$

6. 係数 $C_{n,m}$ とその近似値

(5.8) で定義した $C_{n,m}$ について再び考え、その漸化式と $\gamma\to 0$ における近似値をもとめよう。

まず (5.8) をもう一度かくと

$$C_{n,m} = P.\int_0^\infty \frac{J_n(t)J_m(t)}{t-\gamma}dt, \quad \cdots (6.1)$$

で (5.9), (5.10) は

$$\left.\begin{aligned} C_{2n,2m} &= \frac{(-)^m}{\pi}\int_0^\pi C_{2n}(\gamma,x)\cos 2m\theta\, d\theta, \\ C_{2n+1,2m+1} &= \frac{(-)^{m+1}}{\pi}\int_0^\pi S_{2n+1}(\gamma,x)\cos\overline{2m+1}\theta\, d\theta \end{aligned}\right\} (6.2)$$

なり

$$C_n(\gamma,x)+iS_n(\gamma,x) = P.\int_0^\infty \frac{J_n(t)e^{ixt}}{t-\gamma}dt, \quad (6.3)$$

一方

$$\left.\begin{aligned} C_{2n}(\gamma,x) &= \frac{(-)^n}{\pi}\int_0^\pi S_c(\gamma\overline{x-\xi})\cos 2n\vartheta\, d\vartheta \\ S_{2n+1}(\gamma,x) &= \frac{(-)^{n+1}}{\pi}\int_0^\pi S_c(\gamma\overline{x-\xi})\cos\overline{2n+1}\vartheta\, d\vartheta \\ \xi &= -\cos\vartheta \end{aligned}\right\} (6.4)$$

ここに

$$S_c(\gamma x) = P.\int_0^\infty \frac{\cos kx}{k-\gamma}dk, \quad \cdots (6.5)$$

従って (6.2) に (6.4) を代入すれば

$$\left.\begin{aligned} C_{2n,2m} &= \frac{(-)^{n+m}}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi S_c(\gamma\overline{x-\xi})\cos 2n\theta\cos 2m\vartheta\, d\theta\, d\vartheta \\ C_{2n+1,2m+1} &= \frac{(-)^{n+m}}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi S_c(\gamma\overline{x-\xi})\cos(2m+1)\vartheta\cos(2n+1)\theta\, d\theta\, d\vartheta \end{aligned}\right\} (6.6)$$

次に漸化式を作ろう。(6.1) において

$$J_{n-1}(t)+J_{n+1}(t) = \frac{2n}{t}J_n(t)$$

なる漸化式があるから

$$C_{n,m-1} + C_{n,m+1} = 2m\, P_i \int_0^\infty \frac{J_n J_m\, dt}{t(t-\gamma)}$$

$$= \frac{2m}{\gamma}\left(C_{n,m} - \varepsilon_{n,m}\right) , \quad \cdots (6.7)$$

ここに $\varepsilon_{n,m} = \int_0^\infty \frac{J_n(t) J_m(t)}{t} dt = \varepsilon_{m,n} = \frac{2 \sin\left(\frac{n-m}{2}\pi\right)}{\pi(n^2-m^2)}$

特に $\varepsilon_{n,m} = \frac{\delta_{n-m}}{n+m}$ for $(n-m)$ even $\Big\}$ (6.8)

これを3つ並べて

$$C_{n,m-2} + C_{n,m} = \frac{(2m-2)}{\gamma}\left(C_{n,m-1} - \varepsilon_{n,m-1}\right)$$

$$C_{n,m-1} + C_{n,m+1} = \frac{2m}{\gamma}\left(C_{n,m} - \varepsilon_{n,m}\right)$$

$$C_{n,m} + C_{n,m+2} = \frac{(2m+2)}{\gamma}\left(C_{n,m+1} - \varepsilon_{n,m+1}\right)$$

これから $C_{n,m-1}, C_{n,m+1}$ を消去すると.

$$\frac{\gamma}{2m-2} C_{n,m-2} + \left(\frac{\gamma}{2m-2} + \frac{\gamma}{2m+2} - \frac{2m}{\gamma}\right) C_{n,m} + \frac{\gamma}{2m+2} C_{n,m+2}$$

$$= -\left[\varepsilon_{n,m-1} + \varepsilon_{n,m+1} + \frac{2m}{\gamma}\varepsilon_{n,m}\right], \quad (6.9)$$

なる漸化式を得る。

従って原理的には $C_{0,0}$, $C_{0,1}$, $C_{1,1}$ が求められれば逐次 $C_{n,m}$ が計算出来る訳である。

なお $\varepsilon_{n,m}$ は次表のようになる

m \ n	1	2	3	4	5	6
0	$2/\pi$	0	$-2/9\pi$	0	$2/25\pi$	0
1	$1/2$	$2/3\pi$	0	$-2/15\pi$	0	$2/35\pi$
2		$1/4$	$2/5\pi$	0	$-2/21\pi$	0
3			$1/9$	$2/7\pi$	0	$-2/27\pi$
4				$1/16$	$2/9\pi$	0
5					$1/25$	$2/11\pi$
6						$1/36$

次に $\gamma \to 0$ とすると

$$S_c(\gamma x) \doteqdot -\log\{\gamma C|x|\} - \frac{\pi}{2}\gamma|x| + O(\gamma^2) \qquad \cdots(6\text{-}10)$$

$\log C = .57721$ オイラー常数

であり

$$-\log|x-\xi| = \log 2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta \cos n\vartheta}{n}$$

と

$$\int_0^{\pi}|\cos\theta-\cos\vartheta|\cos n\vartheta\, d\vartheta .$$

$$= \begin{cases} \cos\theta\,(\pi-2\theta)+2\sin\theta & \text{for } n=0 \\ \left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\sin 2\theta}{2} & \text{for } n=1 \\ \frac{1}{n}\left[\frac{\sin(n-1)\theta}{n-1}-\frac{\sin(n+1)\theta}{n+1}\right] & ;\ \text{for } n\geq 2 \end{cases} \qquad (6.11)$$

であるから (6.2) によって $\gamma \to 0$ の時

$$\left.\begin{aligned} C_0(\gamma,x) &\doteqdot \log\left(\frac{2}{\gamma C}\right) - \gamma\left\{\sin\theta + \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\theta\right\} \\ -S_1(\gamma,x) &\doteqdot \cos\theta + \frac{\gamma}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\frac{\sin 2\theta}{2}\right\}, \\ (-)^n C_{2n}(\gamma,x) &\doteqdot \frac{\cos 2n\theta}{2n} - \frac{\gamma}{4n}\left\{\frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1}-\frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1}\right\} \\ (-)^{n+1}S_{2n+1}(\gamma,x) &\doteqdot \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1} - \frac{\gamma}{2(2n+1)}\left\{\frac{\sin 2n\theta}{2n}-\frac{\sin(2n+2)\theta}{2n+2}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (6.12)$$

(6.2) に代入して積分すれば

$$\left.\begin{aligned} C_{0,0} &\doteqdot \log\left(\frac{2}{\gamma C}\right) - \frac{4}{\pi}\gamma \\ (-)^m C_{0,2m} &\doteqdot -\frac{4\gamma}{\pi(4m^2-1)^2} \qquad m>0 \\ C_{2n,2n} &\doteqdot \frac{1}{4n} + \frac{4\gamma}{\pi(16n^2-1)}, \qquad n>0 \\ (-)^{n+m} C_{2n,2m} &\doteqdot -\frac{4\gamma}{\pi\left[1+16(n^2-m^2)^2-8(n^2+m^2)\right]}, \qquad n\neq m\neq 0 \end{aligned}\right\} \quad (6.13)$$

$$\left.\begin{aligned} C_{2n+1,2n+1} &\doteqdot \frac{1}{4n+2} + \frac{4\gamma}{\pi(4n+1)(4n+3)}, \\ (-)^{n+m} C_{2n+1,2m+1} &\doteqdot -\frac{4\gamma}{\pi\{4n^2-(2m+1)^2\}\{(2n+2)^2-(2m+1)^2\}}. \end{aligned}\right\} \quad (6.13)$$

後で必要なので次の和を求めておこう。

(6.12)から

$$\left.\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}(-)^n 2n\, C_{2n}(\gamma,x) &\doteqdot \sum_{n=1}^{\infty}\cos 2n\theta - \frac{\gamma}{2}\sin\theta \\ \sum_{n=0}^{\infty}(-)^{n+1}(2n+1)\, S_{2n+1}(\gamma,x) &\doteqdot \sum_{n=0}^{\infty}\cos(2n+1)\theta - \frac{\gamma}{2}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (6.14)$$

これに $\cos m\theta$ をかけて積分すると定義式から

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-)^{n+m}(2m)\, C_{2n,2m} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2n\theta\, d\theta \sum_{m=1}^{\infty}(-)^m 2m\, C_{2m}(\gamma,x)$$

$$\left.\begin{aligned} &\doteqdot \begin{cases} -\dfrac{\gamma}{\pi} & \cdots \text{ for } n=0 \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\gamma}{\pi(4n^2-1)} & \text{for } n>0. \end{cases} \\ &\sum_{m=0}^{\infty}(-)^{n+m}(2n+1)\, C_{2n+1,2m+1} \doteqdot \frac{1}{2}+\frac{\gamma}{\pi(2n+1)^2} \end{aligned}\right\} \quad (6.15)$$

7. 高速の場合の近似解

γの一乗のオーダー迄考え前節の近似値を用いて近似解をもとめよう。

つまり(5.21)の解をγのオーダー迄で考えればよい訳であるが、$C_{m,\mu} = O(\gamma)$ $(m\neq\mu)$ であるのでまず$O(\gamma)$の量を省略すれば直ちに

$$\left.\begin{aligned} \bar{A}_0^0 &\doteqdot \frac{1}{C_{00}}, \quad \bar{A}_{2n}^0 \doteqdot 0 \\ \bar{A}_m^m &\doteqdot \frac{1}{2C_{m,m}} \doteqdot m, \quad \bar{A}_n^m \doteqdot 0 \ (n\neq m) \end{aligned}\right\} \quad (7.1)$$

これを (5.21) に代入して $O(\gamma^2)$ 以上の項を省略すれば

$$
\left.
\begin{aligned}
&\overline{A_0^0} \doteqdot \frac{1}{C_{00}}, \quad \overline{A_{2n}^0} \doteqdot -\frac{(-)^n C_{0,2n}}{C_{00}C_{2n,2n}}, \\
&\overline{A_{2n}^{2n}} \doteqdot \frac{1}{2C_{2n,2n}}, \quad \overline{A_{2m}^{2n}} \doteqdot \frac{(-)^{n+m+1}C_{2n,2m}}{2C_{2n,2n}C_{2m,2m}}, \\
&\overline{A_{2n+1}^{2n+1}} \doteqdot \frac{1}{2C_{2n+1,2n+1}}, \quad \overline{A_{2m+1}^{2n+1}} \doteqdot \frac{(-)^{n+m+1}C_{2n+1,2m+1}}{2C_{2n+1,2n+1}C_{2m+1,2m+1}}.
\end{aligned}
\right\} \quad (7.2)
$$

なお $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \overline{A_{2n}^0} \doteqdot \frac{1}{C_{00}}\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n C_{0,2n}}{C_{2n,2n}}\right] \doteqdot \frac{1}{C_{00}}\left[1-2\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n(2n)C_{0,2n}\right]$

$$
\doteqdot \frac{1}{C_{00}}\left(1+\frac{2}{\pi}\gamma\right) \qquad \text{--- (7.3)}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} \overline{A_{2m}^{2n}} &\doteqdot \frac{1}{2C_{2n,2n}}\left[(-)^{n+1}\frac{C_{0,2n}}{C_{00}} + 1 + 4n\,C_{2n,2n} + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-)^{n+m+1}\,2n\,C_{2n,2m}\right] \\
&\doteqdot \frac{1}{2C_{2n,2n}}\left[(-)^{n+1}\frac{C_{0,2n}}{C_{0,0}} + 4n\,C_{2n,2n} - \frac{2\gamma}{\pi(4n^2-1)}\right] \\
&\doteqdot \frac{1}{2C_{2n,2n}}\left[1 + (-)^{n+1}\frac{C_{02n}}{C_{00}} + \frac{2\gamma}{\pi}\left\{\frac{8}{16n^2-1} - \frac{1}{4n^2-1}\right\}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\text{--- (7.4)}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} \overline{A_{2m+1}^{2n+1}} &\doteqdot \frac{1}{2C_{2n+1,2n+1}}\left[1 + (4n+2)C_{2n+1,2n+1} - 2\sum_{m=0}^{\infty}(-)^{n+m}(2m+1)C_{2n+1,2m+1}\right] \\
&\doteqdot \frac{1}{2C_{2n+1,2n+1}}\left[(4n+2)C_{2n+1,2n+1} - \frac{2\gamma}{\pi(2n+1)^2}\right] \\
&\doteqdot \frac{1}{2C_{2n+1,2n+1}}\left[1 + \frac{2\gamma}{\pi}\left\{\frac{8n+4}{(4n+1)(4n+3)} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right\}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\text{--- (7.5)}
$$

(5.22), (5.23), (5.24) 等において γ のオーダー迄とると、

$$\overline{B_0} \doteqdot \overline{A_0^0}, \quad \overline{B_1} \doteqdot -\gamma \overline{A_1^1}, \quad \overline{B_{2m}} \doteqdot \overline{A_{2m}^0}, \quad \overline{B_{2m+1}} \doteqdot -\gamma \overline{A_{2m+1}^1}, \quad (7.6)$$

$$\overline{\varphi_c} \doteqdot \pi \overline{B_0} \doteqdot \pi \overline{A_0^0}, \quad \overline{\varphi_s} \doteqdot -\frac{\pi}{2}\gamma \overline{B_1} \doteqdot \frac{\pi}{2}\gamma^2 \overline{A_1^1} \doteqdot 0, \quad (7.7)$$

$$\left.\begin{aligned} &\overline{F_0^c} \doteqdot \pi \overline{A_0^0}, \quad \overline{F_0^s} = 0, \quad \overline{F_{2n}^c} \doteqdot \pi \overline{A_0^{2n}}, \quad \overline{F_{2n}^s} = 0 \\ &\overline{F_{2n+1}^c} = 0, \quad \overline{F_{2n+1}^s} \doteqdot -\frac{\pi}{2}\gamma \overline{A_1^{2n+1}}, \end{aligned}\right\} (7.8)$$

よって

$$\left.\begin{aligned} &F_{2n}^c \doteqdot \overline{F_{2n}^c} \doteqdot \pi \overline{A_0^{2n}}, \quad F_{2n}^s \doteqdot 0 \\ &F_{2n+1}^c \doteqdot 0, \quad F_{2n+1}^s \doteqdot -\frac{\pi}{2}\gamma \overline{A_1^{2n+1}} \end{aligned}\right\} (7.9)$$

$$\left.\begin{aligned} &A_{2m}^{2n} \doteqdot \overline{A_{2m}^{2n}}, \quad A_{2m+1}^{2n} \doteqdot \pi\gamma \overline{A_0^{2n}} \overline{A_{2m+1}^1} \\ &A_{2m}^{2n+1} \doteqdot -\frac{\pi}{2}\gamma \overline{A_1^{2n+1}} \overline{A_{2m}^0}, \quad A_{2m+1}^{2n+1} \doteqdot \overline{A_{2m+1}^{2n+1}} \end{aligned}\right\} (7.10)$$

又

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}^0 \doteqdot \sum_{m=0}^{\infty} \overline{A_{2m}^0} \doteqdot \overline{A_0^0}\left(1+\frac{2}{\pi}\gamma\right) \\ &\sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}^0 \doteqdot \pi\gamma \overline{A_0^0} \sum_{m=0}^{\infty} \overline{A_{2m+1}^1} \doteqdot \pi\gamma \overline{A_0^0}\overline{A_1^1}\left[1+\frac{2\gamma}{3\pi}\right] \end{aligned}\right\} (7.11)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \overline{A_{2m}^{2n}} \doteqdot \sum_{m=0}^{\infty} \overline{A_{2m}^{2n}} \doteqdot \overline{A_{2n}^{2n}}\left[1+\frac{2\gamma}{\pi}\left\{\frac{8}{16n^2-1}-\frac{1}{4n^2-1}\right\} + (-)^{n+1} C_{0,2n}/C_{00}\right]$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}^{2n} \doteqdot -\frac{\pi}{2}\gamma \overline{A_0^{2n}} \sum_{m=0}^{\infty} \overline{A_{2m+1}^1} = O(\gamma^2) \quad (7.12)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}^{2n+1} \doteqdot -\frac{\pi}{2}\gamma \overline{A_1^{2n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \overline{A_{2m}^0} = -\frac{\pi}{2}\gamma \overline{A_1^{2n+1}}\overline{A_0^0}\left(1+\frac{2}{\pi}\gamma\right) \\ &\sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}^{2n+1} \doteqdot \overline{A_{2n+1}^{2n+1}}\left[1+\frac{2}{\pi}\gamma\left\{\frac{8n+4}{(4n+1)(4n+3)}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right\}\right] \end{aligned}\right\} (7.13)$$

8, 高速の場合の近似解 (Camber 付平板)

前節迄の近似値を用いると、

$$\alpha_1 = -\frac{\sum_m A^1_m}{\sum_m A^0_m} \doteqdot -\frac{\overline{A^1_1}\left(1+\frac{2}{3\pi}\gamma - \frac{\pi}{2}\gamma\overline{A^0_0}\right)}{\overline{A^0_0}\left(1+\frac{2}{\pi}\gamma+\pi\gamma\right)}\ , \qquad (8.1)$$

$$\sigma_1 = 2\left(\sum_m A^1_{2m} + \alpha_1\sum_m A^0_{2m}\right) \doteqdot -2\overline{A^1_1}\frac{\left(1+\frac{14}{3\pi}\gamma\right)}{1+\left(\frac{2}{\pi}+\pi\right)\gamma}\ , \qquad (8.2)$$

$$\overline{A^1_1} \doteqdot \frac{1}{1+\frac{8}{3\pi}\gamma}\ ,\quad \overline{A^0_0} = \frac{1}{\lg\left(\frac{2}{\gamma C}\right) - \frac{4}{\pi}\gamma}\ , \qquad (8.3)$$

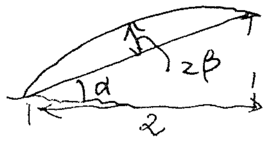
$$\left.\begin{aligned} \frac{C_{L1}}{\pi} &= a^1_0 = \alpha_1 A^0_0 + A^1_0 \doteqdot \alpha_1\overline{A^0_0} - \frac{\pi}{2}\gamma\overline{A^0_0}\,\overline{A^1_1} = -\frac{\overline{A^1_1}\left(1+\frac{2}{3\pi}\gamma\right)}{1+\left(\frac{2}{\pi}+\pi\right)\gamma}\ , \\ -\frac{2C_{M1}}{\pi} &= a^1_1 = \alpha_1 A^0_1 + A^1_1 \doteqdot \overline{A^1_1} + \pi\gamma\overline{A^0_0}\,\overline{A^1_1}\alpha_1 \doteqdot \frac{\overline{A^1_1}\left(1+\frac{2}{\pi}\gamma\right)}{1+\left(\frac{2}{\pi}+\pi\right)\gamma} \end{aligned}\right\} \qquad (8.4)$$

$$\alpha_2 = \frac{-1}{A^0_0}\left[\frac{A^0_2}{2} + 2a^1_1\right] \doteqdot \frac{-\left[2\overline{A^1_1}\left(1+\frac{2}{\pi}\gamma\right) + \frac{8}{9\pi}\gamma\overline{A^0_0}\right]}{\overline{A^0_0}\left\{1+\left(\frac{2}{\pi}+\pi\right)\gamma\right\}}\ , \qquad (8.5)$$

$$\sigma_2 = -\frac{2\sigma_1}{A^0_0}A^0_1 \doteqdot -2\pi\gamma\sigma_1\overline{A^1_1} \doteqdot \frac{4\pi\gamma\overline{A^1_1}^2\left(1+\frac{8}{3\pi}\gamma\right)}{1+\left(\frac{2}{\pi}+\pi\right)\gamma}\ , \qquad (8.6)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{C_{L2}}{\pi} &= a^2_0 = \alpha_2 A^0_0 + A^2_0 \doteqdot -\frac{\cancel{2\pi\gamma\overline{A^1_1}^2}\ 2\overline{A^1_1}\left(1+\frac{2}{\pi}\gamma\right)}{1+\left(\frac{2}{\pi}+\pi\right)\gamma} \\ -\frac{2C_{M2}}{\pi} &= a^2_1 = \alpha_2 A^0_1 + A^2_1 \doteqdot -\frac{2\pi\gamma\overline{A^1_1}^2}{1+\left(\frac{2}{\pi}+\pi\right)\gamma}\ , \end{aligned}\right\} \qquad (8.7)$$

そこで今　図のような Camber をもつ滑走面を考えると、



$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\eta}{\partial x} &= \alpha + 4\beta\cos\theta \\ \eta &= -\alpha\cos\theta - \beta\cos 2\theta + Const \end{aligned}\right\} \qquad (8.8)$$

となるから解は　$p(x) = -\alpha p_1 - \beta p_2 + \cancel{Const.}$ 　(8.9)

と与えられるはずであるから上式を使って所望の量が求められる事になる。

特に飛沫がなくなるためには

(4.13) の θ が 0 にならねばならない。

つまり

$$\alpha\tilde{A}_0^0 + 2\beta\tilde{A}_1^0 = 0 = -\alpha A_0^0 + 2\beta A_1^0$$

よって

$$\alpha \doteqdot 2\beta\pi\gamma\bar{A}_1^T, \quad \cdots\cdots (8.10)$$

この時揚力は (4.16) によって

$$C_L = \pi\left[\frac{\alpha}{2}A_1^0 + 2\beta A_1^1\right] \doteqdot 2\pi\beta\overline{A_1^1} \doteqdot \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \cdots (8.11)$$

10するに

$$C_M = -\frac{\pi}{4}\left[\frac{\alpha}{2}A_2^0 + 2\beta A_2^1\right] \doteqdot O(\gamma^2), \quad \cdots (8.12)$$

最後の式は splash-free の時高速では力の中心は略々中央に来る事を意味する。(~~8.4~~),(8.7) からわかるように平板では力の中心は中央より前方よりになって居り、Camber がつくとこれが後方によって来るわけである。なお Camber が (8.10) より大きくなると滑走状態は存在しない(丸尾)。この事は上のようにモーメントが船首下げになる事からも理解出来よう。