M-21

47.7.18 水委(I)

造波抵抗理論に関する覚書(I)

別府正利

1. 解析接続
2. 連続の法則
3. 速度ポテンシャルの多価性

序

造波抵抗の理論 特に水面に浮んだ船のそれには判然と理解しかねるような面がいくつかある。

所でこの理論は広い見地から見ると応用数学の一種であり，流体力学もしくは水力学の一部であり又水の波の理論の一種である。

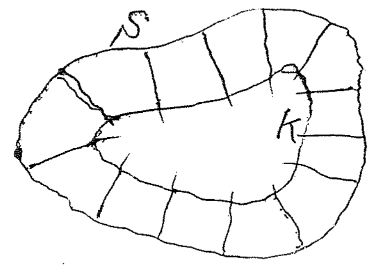
このような観点から各節毎に初めに設問し，それについての考察を書き綴って見た。

それが正しい答であるかどうか必ずしも保証の限りではない。又世間に属する事，他の論文に出ているものとの重複する事もあり，引用についても明示しない場合も多い。

これは覚書と名づける所以である。

1、解析接続

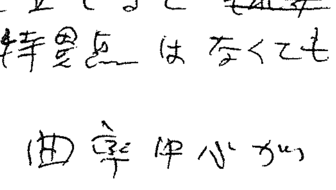
「物体の外側の流れを内部のスケルトン上の特異点分布で表現する時に，その形はどうあればよいか」



2次元では流れ函数 ψ を考えると物体の一部 ΔS をとり，その曲率半径を R とする。

今外側の領域 D で正則な函数 ψ は ΔS の上で境界条件 $\psi=0$ を満足する。

従って Schwarz の鏡像定理で ψ は D の鏡像 $\bar{D}$ ($\ni C$) に解析接続される。



D 内に特異点がなければ $\bar{D}$ にもないから結局特異点は C の近傍にある事になる。

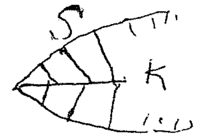
そこで S 至る所で内向き法線を立てると隣合うものが交わらない所まで解析接続され特異点はなくてもよい。

つまる所 S とスケルトン K の間に S の曲率中心がなければよいと言えよう。

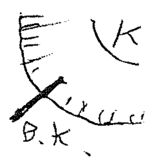
3次元の場合もケルビンの反転定理を使って全く同じ議論が出来る。

注意

i) 外に向いてとがった角があるとスケルトンは
そこで S と交わる。



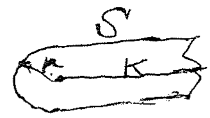
ii) ビルヂキールの場合は その鏡像を
考えて，主船体のスケルトンとの離に
考えてもよかろう。



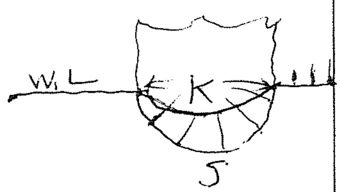
iii) 凹みの場合は 微分不明の点がある。
特に角がつく場合。
しかし切れ込みが深く狭い時は 物理的
に考えても水が侵入しないのであまり深く
考える事もなかろう。

iv) iii)から考えても スケルトンが連續した一個の
閉曲線である必要はなかろう。

v) スケルトンが曲率中心を通る時は
多重極を考えなければならない。



vi) 水面に浮んだ物体の場合は
iii)の場合にあたる訳で 最初
の構成法から言えば 図のようにする
必要はないけれども 問題によっては
このようにしておいた方が良いように思われる。



2. 連続の法則

「流れの各断面で流量は一定のはずであるがそれを表現する式はどうなるか。又水の総量は一定のはずだが」

線型化された各種の条件は、

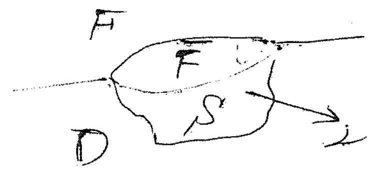
$$\frac{p}{\rho} = -U\varphi_x - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - gz \doteqdot -U\varphi_x - gz \ , \qquad (2.1)$$

$$\varphi_x = -\frac{g}{U}\zeta \ , \quad \text{on } z=0 \qquad (2.2)$$

$$\varphi_z = U\zeta_x \quad \text{〃} \quad z=0 \qquad (2.3)$$

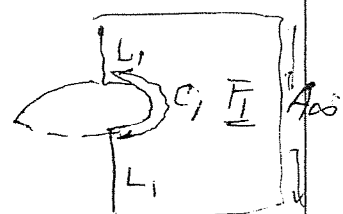
$$\varphi_\nu = -Ux_\nu \quad \text{on } S \qquad (2.4)$$

~~グリーン~~ガウスの定理により



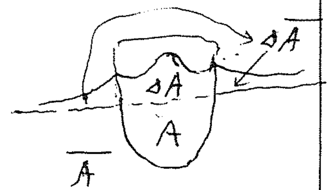
$$\iint (Ux+\varphi)_\nu \, dS = 0 \ , \qquad \cdots (2.5)$$

積分~~領域~~より前方の流体をとりまく表面上にとる事にすると



$$U\iint_{-\infty}^{\infty} dy\,dz - \iint_{\bar{A}+\Delta\bar{A}} (U+\varphi_x)\,dy\,dz = 0 \ , \qquad (2.6)$$

$$\because \ (Ux+\varphi)_\nu = 0 \quad \text{on } S_1$$



所で

$$\iint_{\bar{A}} \varphi_x \, dy\,dz = -\iint_{\bar{F}_1} \varphi_z \, dx\,dy - \iint_{S_1} \varphi_\nu \, dS$$

$$= -U\iint_{\bar{F}_1} \zeta_x \, dx\,dy + U\iint_{S_1} x_\nu \, dS$$

$$= -U\int_{L_1+C_1} \zeta\, dy + U\iint_{A} dy\,dz \ ,$$

となるから

$$\frac{g}{U}\int_{L_1} \zeta^2 dy + U\int_{C_1} \zeta\, dy = 0$$

つまり

$$\Delta A = -\int_{C_1} \zeta\, dy = \frac{g}{U^2}\int_{L_1} \zeta^2 dy \ , \qquad \cdots (2.7)$$

特に L_1 を無限後方にとってやると

$$\Delta A_0 = -\int_C \zeta\, dy = \frac{g}{U^2}\int_{-\infty}^{\infty} \zeta^2\Big|_{x=-\infty} dy, \quad \cdots (2.8)$$

今

$$\zeta\Big|_{x\to\infty} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \bar{F}(\theta)\, e^{iKx\sec\theta + iKy\sec^2\theta\sin\theta} d\theta, \quad K = g/U^2, \quad (2.9)$$

とおくと

$$\frac{\rho U^2}{2}(\Delta A_0) = 2\pi\rho U^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |F|^2 \frac{\cos^3\theta}{1+\sin^2\theta} d\theta, \quad (2.10)$$

この場合造波抵抗Rは

$$R = \pi\rho U^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |F|^2 \cos^3\theta\, d\theta, \quad \cdots (2.11)$$

と与えられるので両者の相似性はよくわかる。*

次に全水量について考えよう。
簡單の為に圧力分布の場合を考えよう。

$$\frac{1}{\rho}p(x,y) = -U\varphi_x - g\zeta, \quad \cdots (2.12)$$

部分積分を行い φ が x=±∞ で 0 となる事から

$$\iint_{F+S}\varphi_x\, dx\, dy = 0, \quad \cdots (2.13)$$

となるから

$$\iint_F \zeta\, dx\, dy + \frac{1}{\rho g}\iint_S p\, dx\, dy + \iint_S \zeta\, dx\, dy = 0, \quad (2.13')$$

ここで

$$V = -\iint_S \zeta\, dx\, dy, \quad \cdots (2.14)$$

は見掛の排水量であり

$$Z = \iint_S p\, dx\, dy = \rho g \nabla, \quad (2.15)$$

は揚力で ∇ は静止時の排水容積である。

従って $\Delta V = -\iint_F \zeta\, dx\, dy = \frac{U}{g}\iint_F \varphi_x\, dx\, dy = -\frac{U}{g}\int_C \varphi\, dy$. (2.16)

とおくと (2.13')は $\nabla = V + \Delta V$, (2.17)

となって水量は変らない事を示す。

排水量型の場合は揚力を与える式に少し疑問があり* この関係がどの程度のオーダー迄

* 別所 造協論文集 110号

成立っているかを確める事に成功しなかったが少くとも線型的には成立っているようである。

なお細長く薄い船では(2.16)を部分積分して

$$\varphi_x \doteqdot -\frac{s}{U}\zeta \qquad , \quad \cdots$$

を考慮すると

$$\Delta V = -2\int_C f\zeta\,dx \qquad , \quad \cdots\cdots (2.18)$$

となって，これは確かに排水量の見掛の増分となる。即ち線型的には(2.17)が成立つと言えよう。

3. 速度ポテンシャルの多価性

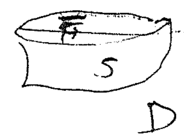
「与えられた船体表面上の境界条件に対して速度ポテンシャルは一義的に決まるか」

これについては従来は肯定的見解が支配的であって，その論拠としては $U\to 0$ or ∞ の極限におけるポテンシャルについて積分方程式の理論を適用するものである。*

しかしながら線型理論においては ~~それに~~ 線型化に附随して特異性が表われるもので注意を要する**

圧力分布については既にそれを示してある***ので ここでは のべず排水量の船について少くとも一価でない事を示そう。

具体的に S の ~~表面~~ 上の特異点分布によるポテンシャルとその投影面 S_P 上のものによるそれを考えよう。



$$\varphi_P(P) = \iint_{S_P} \sigma_P\, S(P,Q)\,dS \,, \qquad (3.1)$$

$$\varphi_S = \iint_S \sigma_S\, S\, dS \,, \qquad (3.2)$$

S は水面条件を満たす広義のグリーン函数とする。

この2つの速度ポテンシャルが共に

$$\varphi_{P\nu} = \varphi_{S\nu} = -U x_\nu \quad \text{on } S\,, \qquad (3.3)$$

なる条件を満たす時 二つのポテンシャルは D 内で等しくなるだろうか。

* [illegible] Lord　　*** 別所正利, M. D. A. Vol. 10, 1970

** M. van Dyke; "Perturbation Methods in Fluid Mechanics" Acad. Press 1964

SEKIREI A4 NO. 164

先ず無限後方の波の振幅函数を調べて見よう。

今それを

$$H_p(K,\theta) = 4\pi \iint_{S_{P/2}} \sigma_P \, E(K,\theta,P)\, dS(P) \ , \qquad (3.4)$$

$$H_S = 4\pi \iint_S \sigma_S \, E(K,\theta,P)\, dS(P) \ , \qquad (3.5)$$

但し $E(K,\theta;P) = e^{Kz\sec^2\theta + iK(x\cos\theta + y\sin\theta)\sec^2\theta}$

とすると、

$$\left.\begin{array}{l} 4\pi\sigma = \varphi_{\nu+} - \varphi_{\nu-} \\ \varphi_+ - \varphi_- = 0 \end{array}\right\} \text{ on } S \ , \qquad (3.6)$$

故、グリーンの定理により

$$H_P = \iint_{S_{P/2}} (\varphi_{P\nu} E - \varphi_P E_\nu)\, dS$$

$$= \iint_{F} (\varphi_{Pz} E - \varphi_P E_z)\, dS + \iint_S (\varphi_{P\nu} E - \varphi_P E_\nu)\, dS, \quad (3.7)$$

$$H_S = \iint_{S_+ - S_-} (\varphi_{S\nu} E - \varphi_S E_\nu)\, dS$$

$$= \iint_S (\varphi_{S\nu} E - \varphi_S E_\nu)\, dS - \iint_F (\varphi_{Sz} E - \varphi_S E_z)\, dS, \quad (3.8)$$

となるから (3.3)の条件を入れても一般には

$$H_P \neq H_S \ , \qquad (3.9)$$

であろう。

そうすると散乱波が違うのであるから $\varphi_P \neq \varphi_S$ in D である。

もっと具体的に近似値として φ_P, φ_S に正鏡像のポテンシャルを代入して見よう。

この場合は (3.3) が成立しては $\varphi_P = \varphi_S$ in D であって特に

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_P = \varphi_S \quad \text{on } S \\ \varphi_{Pz} = \varphi_{Sz} = 0 \quad \text{on } F \end{array}\right\} \qquad (3.10)$$

となるが、これを代入しても尚かつ

$$H_P - H_S = -\iint_F (\varphi_P + \varphi_S) E_z\, dS \neq 0 \ , \qquad (3.11)$$

となって造波抵抗が異なる事を容易に例示する事が出来る。

これは Kotik が造波抵抗の多価性と名づけたものである*。

逆にもし(3.3)の条件で速度ポテンシャルが一義的に決まらないとすると

$$\varphi_2 = 0 \quad \text{on } S, \quad \cdots \quad (3.12)$$

なる条件によって恒等的に0でない解が存在する事になる。

2次元の場合には既に例があげられている**が例えば薄い船の場合圧力分布による

$$\varphi = \frac{1}{\rho}\iint_F p\, S_x\, dx, \quad \cdots \quad (3.13)$$

を考えれば明らかに $\varphi_y = 0$ on $y=0\,(S)$, (3.14)

となり、この p は決めようがない。

2次元の場合から類推すると(3.12)の条件は平均沈下を表現している。

つまり今 S が(平行に) δz だけ沈下で S' になったとすると

$$\varphi_2\big|_{S'} = \varphi_2\big|_S + \delta z\, \varphi_{2z}\big|_S \doteqdot \varphi_2\big|_S, \quad (3.15)$$

となるから沈下による部分の境界条件は(3.12)となる。

同様ながらトリムによる境界条件は法線方向がそれだけ傾くので

$$\varphi_2 = -U\tau z_2 \quad \text{on } S, \quad (3.16)$$

となる。

さて(3.12)は斉次の条件であるから沈下量は任意であって数学的には不定であり、物理的な条件によって定めなければならない。

圧力分布の場合は Kutta の流出条件によって決められる。

** 別所・水野, 防大紀要, 1, 昭38年 ; 別所, 8th O.N.R. Symp 1970

* J. Kotik ; J.S.R. 1969

排水量型の船では平均沈下量，トリムによって決まる。つまり上下方向力モーメント等の釣合の式から定められるべきであると思われる。

この事は現在の理論で上下力，トリムをうまく説明出来ない事と造波抵抗が定量的に正確に合わせないのと対比して興味深い。

さてこのような所謂斉次解が一義的に決まるかどうかと言う事になると一般的には又決め手がない。

なお造波抵抗の公式については浸水面の変化を考えれば Lagalley の公式でよい。

線型理論では浸水面の変化部では静水圧のみ考えればよいから

$$R = \underbrace{\frac{\rho g}{2}\int_C \zeta^2 dy}_{R_1} \underbrace{- \rho\iint_S \left(U\varphi_x + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2\right) x_\nu dS}_{+\ R_2} \qquad (3.17)$$

$$R_2 = \rho\iint_S \left[\varphi_x(\varphi_\nu + U x_\nu) - \left(U\varphi_x + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2\right)x_\nu\right] dS$$

$$= -4\pi\rho\iint_S \sigma\varphi_x dS + \rho\iint_F \varphi_x\varphi_z dS$$

所で

$$\rho\iint_F \varphi_x\varphi_z dS = -\rho g\iint_F \zeta\zeta_x dS = -R_1$$

であるから

$$R = -4\pi\rho\iint_S \sigma\varphi_x dS, \quad \cdots \quad (3.18)$$

となる。

上下力，モーメントについては F 上の積分が残ってこううまくは行かない。*

* 別途検討