昭和48年9月1日

造波抵抗理論に関する覚書(II)

別所正利

頁

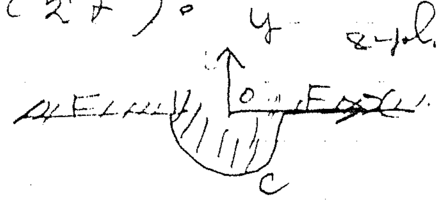
§4 自由表面と特異解（2次元的考察）

無限流体中に置かれた物体が定速で走る時は完全流体としての解は circulation を除いて一義的に定まる事はよく知られている。

又固定した固体境界があっても同じ事が言える。

しかし固定境界の場合でも問題を線型化すると特異解が現われて来る*し自由表面（重力のない）でも勿論現われる。

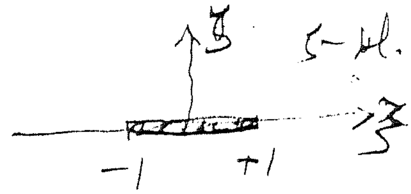
簡単の為に2次元問題を考えて見よう。



右図のような物体に一様な流れが当っているものとしよう。

境界円上　の条件は固体壁では

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0\ ,\ \text{or}\ \psi=0\ , \quad \cdots (1)$$



物体面 C 上では

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=-\frac{\partial x}{\partial n}\ ,\ \psi=-y+\alpha\ ,\ \alpha\text{は任意常数}\ (2)$$

となり、この第2の定数を(1)に合せて 0 とすると解は一義的に定まるが もともとの条件は法線速度が 0 になる事を要求するだけであるから一般には不定となりこれに対応する解を特異解とよぶ。

今この物体 C と境界円が ζ−面の実軸上に写像されたとすると この特異解の部分は

$$f(z)=\frac{\alpha}{\pi}\log\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right)\ , \quad \cdots (3)$$

となる事がすぐわかる*。

しかしこの解では前後端で無限大つまり特異点となるから これらの点で正則性の要求がある

* Van Dyke

ならば特異解はない。

しかし前後端は領域の特異点（角であると言う意味での）であるのでそこでの正則性を指定する事は問題を簡単化しすぎる事になるので一般的には特異解を認めた方がよかろう。

解(3)はよく知られた2次元Ovoidであって物理的意味もはっきりしている。

次に境界Fが重力のない自由表面だとすると線型理論による境界条件は

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,0)=0 \quad \text{or} \quad \varphi(x,0)=0 \quad , \text{on } F \quad (4)$$

であるから(2)のαに対応する特異解は

$$f(z)=\frac{i\beta}{\sqrt{(\zeta^2+1)}}-\frac{i\alpha}{\sqrt{\zeta^2+1}}\{\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\} \quad (5)$$

となってβは又もう一つの実の任意定数となる。

この場合も前後端は特異点であるがβを適当に選んでどちらかでfを有限にする事は出来る。

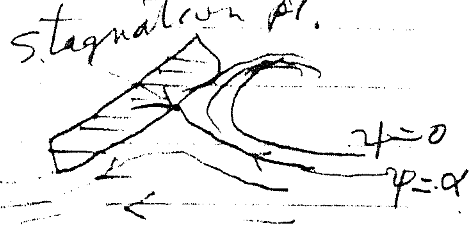
このように物体以外に境界面があると固体壁でも特異解が現われる。

その原因は物体と境界面の接点が領域の特異点であると言う事と又自由境界の場合は境界が変形し得ると言う事とにあると考えられる。

その特異解の物体面上の条件は境界面で$\psi=0$なる時

$$\psi=\alpha \ ; \text{Const}, \quad (6)$$

となる事であるがこの事は次の図のように物体前面で水が気外に離れて



行くような場合の線型化モデルと考えればよく理解でき、一般に重力のある場合にも斉次解の存在する事は明らかであろう。

図のような場合厳密解では系外に出て行く水の量を指定しないと解は定まらない*。

この不定さが線型化モデルでは斉次解となって線型的重ね合せが出来る便利な形になって出て来るのである。

なお(5)に現われる任意定数βは重力のある時には波による不定さを代表する。

即ちその時水面条件は

$$\gamma\,\psi(x,0)-\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,0)=0\,,\quad\cdots\quad(7)$$

となるので

$$\psi(x,y)=e^{\gamma y}\,\substack{\cos\\ \sin}\,\gamma x\,,\qquad(8)$$

つまり規則波だけ不定になる。

この不定さについては普通上流側に波のないと言う条件で消える。

さてそうすると例えば滑走板の場合前述のようにβを適当にえらんで後端における Kutta の条件を満たすと言うわけには行かなくなってαを適当に選ばねばならない。定速

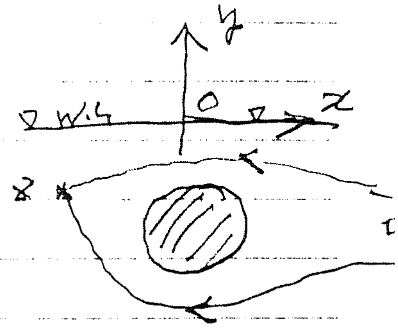
※流れに直角方向

一般に言って無限流体中の運動では物体の上下位置が変っても流体運動は変らないが、水面があると上下位置の僅かな変化が流れに大きく変化を及ぼす。この事は数学的にどのような斉次解として表現されると考えればよかろう。

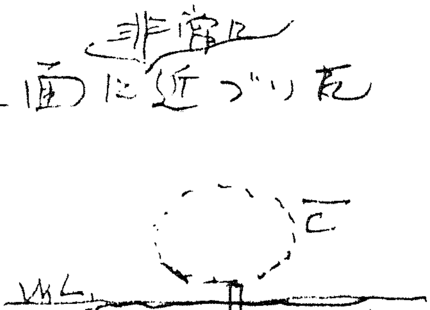
*A. F. Green

§5 全没体と半没体の違い（2次元）

前節の考察は全没体についても全く同様に議論を進める事が出来 前節(5)に対応する斉次解を得る事が出来る。*



しかも領域は半没体の場合は単連結であるが今の場合は2重連結であるから，もう一つ任意性が出来る。
即ち circulation を持つポテンシャルだけ不定となる。
従って波による不定さと circulation による不定さを除いて尚かつ前節におけるような不定さが残る事になるが，一方では全没体の場合半没体になかった条件が一つ加わる。
それは複素速度の一価性の条件である。
つまり circulation があっても複素速度は水の中で一価でなければならない。
この条件を入れると上の斉次解による不定さは消えて解は一義的に定まる事はよく知られた通りである。**,*
この間の違いを全没体が非常に水面に近づいた場合について考えて見よう。
この場合領域は2重連結であるから図のような cut を考えておいて，領域内で正則な複素速度を考えよう。



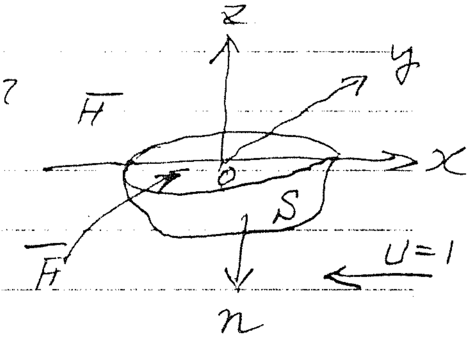
* 別所 "2次元半没垂直平板の造波抵抗"
** N.E. Kotchin

昭和　年　月　日

このcutは非常に小さくて物体が水面に殆ど接している極限を考える事にする。
さてこの場合一般にはcutの前後で速度は不連続であってよい、つまり多価関数があって物体が水面を切っているならば物理的にも首肯し得る。
これが半没体における斉次解となる。
しかし全没体ではcutの前後で速度は連続しなければならないから多価関数の部分は考えられない。
従ってこのような意味では全没体では斉次解は現われない。
しかし領域は2重連結であるのでcirculationによる分だけは任意であり、一方半没体では単連結であるからこの部分の任意性はない。
このようにして物体が水面に殆ど接している場合その接点の前後で速度が連続なものは全没体と考えてよく、不連続なものは水面を切っているものと扱えばよい事がわかる。
そして全没体では(に)circulationによる任意さが伴い半没体では前節でのような斉次解による任意さが伴うので、両者の解は一般には全く異なったものとなり、一致するものは個々のような場合は全没体の場合の極限だけである。

§6 速度ポテンシャルの表現

" 斉次解がある事を認めると境界値問題は一体どのように定式化出来るか、速度ポテンシャルはどのように表現すればよいか "



速度ポテンシャル $\phi(P)$ は水面において

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi(x,y,0)=0, \quad \cdots(1)$$

$$\gamma = g/U^2,$$

船体表面 S 上で

$$\frac{\partial}{\partial n}\phi(P) = -\frac{\partial x}{\partial n} \text{ on } S, \quad P\equiv(x,y,z), \quad \cdots(2)$$

なる条件を満たさねばならない。

一方 $Q\equiv(x',y',z')$ にある単位吹出しによる速度ポテンシャルで上流側には波のない解はよく知れている通り

$$S(P,Q) = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{r(P,Q)} - \frac{1}{r(P,\overline{Q})}\right\} - \frac{\gamma}{4\pi^2}\lim_{\mu\to+0}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{k(z+z')+ik(\varpi-\varpi')}\,dk\,d\theta}{k\cos^2\theta-\gamma+\mu i\cos\theta}, \quad (3)$$

で~~与~~えられる。

$$r(P,Q)=\overline{PQ}, \quad r(P,\overline{Q})=\overline{P\overline{Q}}, \quad \overline{Q}\equiv(x',y',-z')$$

$$\varpi = x\cos\theta + y\sin\theta, \quad \varpi' = x'\cos\theta + y'\sin\theta.$$

これを使って次の積分を考えるとグリーンの定理により

$$\iint_{S+F+L+(P)}\left\{\phi(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q}S(P,Q) - \frac{\partial\phi}{\partial n_Q}S(P,Q)\right\}dS = 0, \quad \cdots(4)$$

ここに L は無限遠方の検査面、(P) は P 点の周りの

小さい球とする。

さて S は $P=Q$ で $1/r$ の特異性をもち，かつ

$$
\left.\begin{aligned}
S(P,Q) &\longrightarrow \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{r(P,Q)}+\frac{1}{r(\bar{P},Q)}\right\} \text{ for } x \gg x', \\
S(P,Q) &\longrightarrow 2S_s(P,Q) \text{ for } x \ll x',
\end{aligned}\right\} \cdots (5)
$$

ここに

$$S_s(P,Q)=\frac{\gamma}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\gamma(z+z')\sec^2\theta} \sin[\gamma\sec^2\theta(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}')]\sec^2\theta\, d\theta, \quad (6)$$

となる。

つまり Q点がP点の上流側にあれば波(6)をもち下流側になれば波はない。

一方 $\phi(Q)$は上流側には波はなく下流側にあるものと仮定すべきだから，(4)において L 上の積分は0となり結局

$$\phi(P)=\iint_{S+F}\left\{\phi(Q)\frac{\partial}{\partial n}S(P,Q)-\frac{\partial\phi}{\partial n}S\right\}dS(Q), \quad \cdots (7)$$

なる表現が得られる。

この内F上の積分は(1)の条件によって部分積分すれば

$$\iint_F\left[\phi\frac{\partial}{\partial n}S(P,Q)-\frac{\partial\phi}{\partial n}S(P,Q)\right]dS=-\iint_F\left[\phi\frac{\partial}{\partial z}S-\frac{\partial\phi}{\partial z}S\right]dxdy$$

$$=+\frac{1}{\gamma}\int_C\left[\phi(Q)\frac{\partial}{\partial x'}S-\frac{\partial\phi}{\partial x'}S\right]dy', \quad \cdots (8)$$

となり，これが所謂 Line Integral である。

そして最右辺の形で考えると S 上の積分より高次の項となる(dy'の為)が左辺の形を考えるならば同次の項であるので無視するのは

妥当でないだろう。

ここで境界条件(2)を(7)に代入し，PをSの上に持ってゆくと次の積分方程式を得る。

$$\frac{1}{2}\phi(P)\Big|_{P\,on\,S} = \iint_S \frac{\partial\chi}{\partial n} S(P,Q)\,dS(Q) + \iint_S \phi(Q)\frac{\partial}{\partial n} S(P,Q)\Big|_{P\,on\,S} dS$$

$$+\frac{1}{\gamma}\int_C \left[\phi\frac{\partial}{\partial x'}S - \frac{\partial\phi}{\partial x'}S\right]dy', \quad \text{---(9)}$$

この式においてC上の $\partial\phi/\partial x$ は水面変位 ζ と

$$\zeta(x,y) = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y,0), \quad \text{---(10)}$$

の関係があるので水面変位と見なせるが，そう見なすと ζ は ϕ を求めてからでないとわからないので具合が悪い。

しかし一般に船は細長いものであるし，又水面では線型化しているので

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y(x),0) = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\phi(x+\Delta x, y(x+\Delta x), 0) - \phi(x, y(x), 0)\right]/\Delta x, \quad (11)$$

と近似する事にすれば(9)式は ϕ に関するフレドホルムの第2種の方程式である。

従って斉次方程式（あるいは対応する第1種の方程式）

$$\frac{1}{2}\phi(P)\Big|_{P\,on\,S} = \iint_S \phi\frac{\partial}{\partial n}S\Big|\,dS + \frac{1}{\gamma}\int_C\left[\phi\frac{\partial}{\partial x'}S - \frac{\partial\phi}{\partial x'}S\right]dy', \quad \text{---(12)}$$

が恒等的に0以外の解を持たないならば解は一義的に只一つ定まる。

所で(12)の方程式は(7)において

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=0 \quad \text{on } S, \quad --- (13)$$

に対応する積分方程式であって今迄見て来たようにこれは恒等的に0でない解を有するという見地に立っているので今それをϕ_hとおき、(9)の特別解をϕ_{sp}とおくと一般解は

$$\phi=\phi_{sp}+\alpha\phi_h, \quad \alpha\text{：任意定数}, \quad (14)$$

となる。

さて(9)を一次方程式になおして数値的に解く事を考えて見ると(12)の解が存在するとすればマトリックスがsingularになる事であるから解は定まらない事になるので、この形は適当でなかろう。

そこで前節の考察から解の内一つは全没体に一致するものがある筈であるからそれをϕ_sと書くと(14)は又

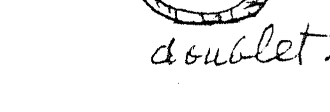
$$\phi=\phi_s+\alpha\phi_h, \quad --- (15)$$

と書ける。

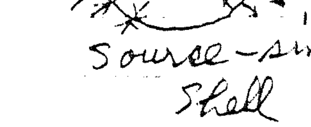
半没体を全没体で近似するにはいろいろな方法が考えられるが、代表的なものは図の3種位であろう。

その表現は夫々

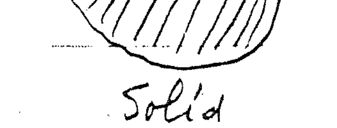
$$\left.\begin{aligned}\phi_s(p)&=\iint_S \mu(Q)\frac{\partial}{\partial n}S(p,Q)\,dS\\ \frac{\partial}{\partial n}\phi_s\Big|_S&=-\frac{\partial x}{\partial n}\end{aligned}\right\} \quad (16)$$



doublet shell



source-sink shell



Solid

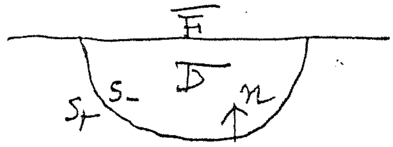
$$\left.\begin{aligned}\phi_s(P) &= \iint_S \sigma(Q)\, S(P,Q)\, dS(Q)\\ \frac{\partial}{\partial n}\phi_s(P)\Big|_S &= -\frac{\partial \chi}{\partial n}\end{aligned}\right\}\quad(17).$$

オ3の場合は source – sink でも doublet でもよく、(16)、(17)と同じ表現だが積分範囲 S の替りに $S+\bar{F}$ とおいたものになり、又境界条件も S と $\bar{F}$ の両方で上のように指定される。

いづれにしてもこの形では解が唯一つ定まる事はよく調べられている通りである。*

次に(7)は sink – source と doublet の入りまざった形であるから Lamb** に従ってこれをどちらか一方で現わす事を考えよう。

その為に船体内の領域 $\bar{D}$ の中で正則で水面条件(1)を満たすポテンシャル $\phi_{in}(P)$ を考えよう。



この場合 $\bar{D}$ は有限であるから何等困難なく(17)と同じ表現が導びけて $\bar{F}$ 上の積分は(8)の形にかける。

$$\phi_{in}(P) = \iint_{S_-}\left[\phi_{in}(Q)\frac{\partial}{\partial n}S - \frac{\partial}{\partial n}\phi_{in}\, S\right]dS(Q)$$

$$-\frac{1}{\nu}\int_C\left[\phi_{in}\frac{\partial}{\partial x}S - \frac{\partial \phi_{in}}{\partial x}S\right]dy',\quad P\in\bar{D},\quad(18)$$

もし P が $\bar{D}$ の中になければ 0 となる。

そこで(7)に(8)を代入し $P\in D$ として(18)と辺々相加えると、法線の方向が(7)と(18)では逆向きである事を考えて、

* Kostyukov

Gadd

** H. Lamb 〃 p.60

昭和　年　月　日

$$\Phi(P) = \iint_S \left[(\Phi - \Phi_{in}) \frac{\partial}{\partial n} S - \left(\frac{\partial}{\partial n}\Phi + \frac{\partial}{\partial n_-}\Phi_{in} \right) S \right] dS$$

$$+ \frac{1}{\gamma} \int_C \left[(\Phi - \Phi_{in}) \frac{\partial}{\partial x'} S - \frac{\partial}{\partial x'}(\Phi - \Phi_{in}) S \right] dy', \quad \cdots (19)$$

となるが この式で

$$\Phi(P) = \Phi_{in}(P), \quad P \in S + C, \quad \cdots (20)$$

とおき（そのような Φ_{in} が存在するとして）

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n}\Phi + \frac{\partial}{\partial n_-}\Phi_{in} &= -\sigma \quad \text{on } S \\ + \frac{\partial}{\partial x'}\Phi - \frac{\partial}{\partial x'}\Phi_{in} &= \nu \quad \text{on } C \end{aligned}\right\} \cdots (21)$$

とおくと

$$\Phi(P) = \iint_S \sigma(Q) S(P,Q) dS(Q) - \frac{1}{\gamma}\int_C \nu(Q) S(P,Q) dy(Q), \quad \cdots (22)$$

と書ける。

又

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n}\Phi + \frac{\partial}{\partial n_-}\Phi_{in} &= 0 \\ \Phi - \Phi_{in} &= \mu \\ \frac{\partial}{\partial x'}\Phi - \frac{\partial}{\partial x}\Phi_{in} &= \nu \end{aligned}\right\} \cdots (23)$$

とおけば

$$\Phi(P) = \iint_S \mu(Q) \frac{\partial}{\partial n} S(P,Q) dS(Q)$$

$$+ \frac{1}{\gamma}\int_C \left[\mu \frac{\partial}{\partial x'} S - \nu S \right] dy', \quad \cdots (24)$$

となる。

この場合は (2)に対して (23)の第1式を満足する Φ_{in} は

少なくとも

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{in}(P) &= \chi \quad \text{in } \bar{D} \\ &= 0 \quad \text{in } D\end{aligned}\right\} \quad \cdots (25)$$

又 $\partial\varphi/\partial n = 0$ に対しては

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{in}(P) &= \text{Const.} \quad \text{in } \bar{D} \\ &\ 0 \quad \text{in } D\end{aligned}\right\} \quad \cdots (26)$$

で与えられる事は明らかであろう。

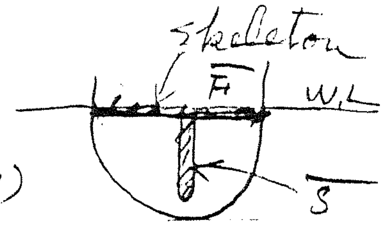
さて(22)、(24)について斉次解がある事は線積分の部分を左辺に移して見れば浮水体の場合に解の唯一性を証明したのと全く同じ手順で証明出来る。

このようにして見ると少くともこの $\nu(Q)$ の部分は任意に与えてもよいと思われる。この事は§7において変分原理による結果とも一致する。

~~最後に~~ 速度ポテンシャルの他の表現は§1の解析接続の考え方によっても出て来る。

つまり(7)において ϕ を船体内部のスケルトン迄解析接続して行くと

スケルトンは $\bar{S}$ と $\bar{F}$ であるとして、



$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{\bar{S}+} - \left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{\bar{S}-} &= -2\sigma, \\ \phi\big|_{\bar{S}+} &= \phi\big|_{\bar{S}-}\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + g\frac{\partial}{\partial z}\phi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}p, \quad \text{on } \bar{F}, \quad (28)$$

のような特異点を考えて、

$$\phi(P) = \iint_S \sigma(Q)\, S(P,Q)\, dS(Q)$$

$$- \frac{1}{\rho g} \iint_F p(Q) \frac{\partial}{\partial x'} S(P,Q)\, dx'dy', \qquad (29)$$

を得る。

これはStoker*の名づけたヨット型の船である。
この右辺第2項の形は前のより明瞭に水面の特異性の性格を示している。
即ち船体内の水面を圧力で圧しつけてそこが平らになるようにすると外側の水の運動は船体のある場合と全く変わらなくなるだろう。

こう考えるとこれは乾の言うSheltering Effect**を現わす項である。

なおこの際船体内の水位は任意に決められる。つまりこの部分が第二次解の主要部であると考えられる。

* J. J. Stoker "Water Waves"
** 乾

昭和　年　月　日

§7 Reverse flow Potential, Diffraction Potential

"船が逆方向に走っても造波抵抗は同じだと言われているが本当だろうか。"

薄い船、細長い船では前進と後進で造波抵抗積分が同じであるから前後非対称な船でも造波抵抗は同じであるが、船体による波の散乱まで考慮に入れても同じとは一寸考えられない。

そこで逆進する時のポテンシャルを書いて見て直進時のそれと比較して見よう。

一様速度の方向を変えても §6 (1) は同じである。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial}{\partial z}\right)\tilde{\Phi}(x,y,0)=0\ , \quad \cdots (1)$$

しかし S 上では

$$\frac{\partial}{\partial n}\tilde{\Phi}(P)=-\frac{\partial\phi}{\partial n}=\frac{\partial x}{\partial n}\ , \quad P\in S\ , \quad (2)$$

Q 点に吹出しのある解は §6 (3) において $\mu\to-0$ とすれば x 軸の正方向に波のある解となるので

$$\tilde{S}(P,Q)=S(P,Q)-2S_s(P,Q)\ , \quad \cdots (3)$$

S_s は §6 (6) による。

前と全く同様にして

$$\tilde{\Phi}(P)=\iint_{S+\bar{F}}\left\{\tilde{\Phi}(Q)\frac{\partial}{\partial n}\tilde{S}(P,Q)-\tilde{S}(P,Q)\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial n}\right\}dS(Q)\ , \quad (4)$$

を得る。

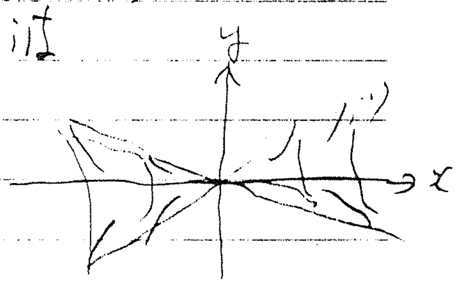
これに (3) を代入すると

$$\tilde{\Phi}=\phi_1+\phi_2\ , \quad \cdots (5)$$

$$\phi_1(P) = \iint_{S+H} \left[\tilde{\phi} \frac{\partial}{\partial n} S - S \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} \right] dS \, , \quad \cdots (6)$$

$$\phi_2(P) = -2\iint_{S+H} \left[\tilde{\phi} \frac{\partial}{\partial n} S_s - S_s \frac{\partial}{\partial n} \tilde{\phi} \right] dS \, , \quad \cdots (7)$$

となるがこの内 ϕ_1 は後方に波のあるポテンシヤルであり ϕ_2 は前後反対称なケルビン波であり、船の後方では ϕ_1 の波と打消し合って前方の波のみが残っている。



さてここで後方に波のあるポテンシヤルで S 上で $\frac{\partial \phi_2}{\partial n}$ と打消し合うもの、つまり

$$\frac{\partial}{\partial n}\phi_3 = -\frac{\partial \phi_2}{\partial n} \, , \quad \cdots (8)$$

となる ϕ_3 なる potential を導入し

$$\tilde{\phi} - \phi_2 - \phi_3 = \phi_1 - \phi_3 \, , \quad \cdots (9)$$

なるポテンシヤルは後方に波を持ち S 上では (2) と (8) により

$$\frac{\partial}{\partial n}\tilde{\phi} - \frac{\partial}{\partial n}(\phi_2 + \phi_3) = \frac{\partial x}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n}\phi \, , \quad \cdots (10)$$

である。

従って斉次解を除いて

$$\tilde{\phi} = -\phi + \phi_2 + \phi_3 \, , \quad \cdots (11)$$

なる式が成立つ。

これが前進時と後進時とのポテンシヤルの関係で ϕ_2 は (7) で ϕ_3 はケルビン波を散乱させるポテンシヤルであるから散乱ポテンシヤル

である。

同様にして §6(7) に (3) を代入して

$$\phi = -\tilde{\phi} + \tilde{\phi}_2 + \tilde{\phi}_3 , \quad \cdots \quad (12)$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \quad \cdots \quad (13)$$

$$\tilde{\phi}_1 = \iint_{S+\bar{F}} \left[\phi \frac{\partial}{\partial n} \tilde{S} - \tilde{S} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] dS , \quad (14)$$

$$\tilde{\phi}_2 = 2 \iint_{S+\bar{F}} \left[\phi \frac{\partial}{\partial n} S_s - S_s \frac{\partial}{\partial n} \phi \right] dS , \quad (15)$$

で $\tilde{\phi}_3$ は前方に波があり

$$\frac{\partial}{\partial n} \tilde{\phi}_3 = - \frac{\partial}{\partial n} \tilde{\phi}_2 \quad \text{on } S , \quad (16)$$

である。

(11), (12) のままでは直接の関係はよくわからないので無限遠方で両辺を等置すると例えば波の間の関係がわかる事になる。

その前に ϕ_2, ϕ_3 を少し変形しておこう。
まず Kotchin 関数を導入しよう。

$$H(\gamma,\theta) = \iint_{S+F} \left[\phi(P) \frac{\partial}{\partial n} E(P,\theta) - E(P,\theta) \frac{\partial}{\partial n} \phi \right] dS(P) , \quad (17)$$

$$\tilde{H}(\gamma,\theta) = \iint_{S+F} \left[\tilde{\phi} \frac{\partial}{\partial n} E - E \frac{\partial}{\partial n} \tilde{\phi} \right] dS , \quad (18)$$

ここに $E(P,\theta) = \exp\left[\gamma z \sec^2\theta + i \gamma \sec^2\theta \, \tilde{\omega} \right]$, (19)

なお F 上の積分は部分積分によって C 上の値で表わせる事はポテンシャルの時と同じである。*

ここでは簡単の為にこのままの形で使う。

* しかし(この形では) F 上の無限後方の積分は有限であるので C 上の値のみをとるものとする。

そうすると
$$S_s(p,Q)=\frac{\gamma}{4\pi i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[E(p,\theta)\overline{E}(Q,\theta)-\overline{E}(p,\theta)E(Q,\theta)\right]\sec^2\theta d\theta, \quad (20)$$
であるから
$$\phi_2(p)=\frac{i\gamma}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[E(p,\theta)\overline{\tilde{H}}(\theta)-\overline{E}(p,\theta)\tilde{H}(\theta)\right]\sec^2\theta d\theta, \quad (21)$$
$$\tilde{\phi}_2(p)=\frac{\gamma}{2\pi i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[E(p,\theta)\overline{H}(\theta)-\overline{E}(p,\theta)H(\theta)\right]\sec^2\theta d\theta, \quad (22)$$
となる。

ϕ_3はこの要素平面波たちのDiffraction potentialの集まりとして現わせるから

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\phi_d(p,\theta)+E(p,\theta)\right]&=0\\ \frac{\partial}{\partial\nu}\left[\tilde{\phi}_d(p,\theta)-E(p,\theta)\right]&=0\end{aligned}\right\}\text{ on } S, \quad (23)$$

ϕ_d, $\tilde{\phi}_d$は共に複素数値をとり、ϕ_dは後方に$\tilde{\phi}_d$は前方に波があるものとする。

そうすると
$$\left.\begin{aligned}\phi_3(p)&=\frac{i\gamma}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\phi_d(p,\theta)\overline{\tilde{H}}(\theta)-\overline{\phi_d}(p,\theta)\tilde{H}(\theta)\right]\sec^2\theta d\theta,\\ \tilde{\phi}_3(p)&=\frac{i\gamma}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\tilde{\phi}_d\overline{H}-\overline{\tilde{\phi}_d}H\right]\sec^2\theta d\theta,\end{aligned}\right\}(24)$$
と書ける。

ここで無限遠方における値を考えて見るとS or $\tilde{S}$の漸近性から

$$\phi(P) \xrightarrow[x\to+\infty]{} O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \cdots\cdots (25)$$

$$\phi(P) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 2\iint_{S+\bar{H}}\left[\phi\frac{\partial}{\partial n}S_s - S_s\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]dS = \tilde{\phi}_2$$

$$= \frac{\gamma}{2\pi i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[E(P,\theta)\overline{H(\theta)} - \overline{E}(P,\theta)H(\theta)\right]\sec^2\theta\, d\theta, \quad \cdots (26)$$

$$\tilde{\phi}(P) \xrightarrow[x\to-\infty]{} O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \cdots\cdots (27)$$

$$\tilde{\phi}(P) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \phi_2 = \frac{i\gamma}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[E\overline{\tilde{H}} - \overline{E}\tilde{H}\right]\sec^2\theta\, d\theta, \quad \cdots (28)$$

なお(25),(27)は

$$\iint_{S+\bar{H}}\frac{\partial\phi}{\partial n}dS = \iint_{S+\bar{H}}\frac{\partial}{\partial n}\tilde{\phi}\, dS = 0, \quad \cdots (29)$$

とした時成立つ関係である。

次に

$$\left.\begin{aligned} \phi_d(P,\theta) &\xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{\gamma}{2\pi i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[E(\theta')\overline{H_d(\theta,\theta')} - \overline{E}\, H_d\right]\sec^2\theta'\, d\theta' \\ \tilde{\phi}_d(P,\theta) &\xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{i\gamma}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[E\,\overline{\tilde{H}_d} - \overline{E}\,\tilde{H}_d\right]\sec^2\theta'\, d\theta' \end{aligned}\right\} (30)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned} H_d(\theta,\theta') &= \iint_{S+\bar{H}}\left[\phi_d(P,\theta)\frac{\partial}{\partial n}E(P,\theta') - E(P,\theta')\frac{\partial}{\partial n}\phi_d(P,\theta)\right]dS, \\ \tilde{H}_d &= \iint_{S+\bar{H}}\left(\tilde{\phi}_d\frac{\partial}{\partial n}E - E\frac{\partial}{\partial n}\tilde{\phi}_d\right)dS, \end{aligned}\right\} (31)$$

よって

$$p_3 \xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{\gamma^2}{4\pi^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sec^2\theta d\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sec^2\theta' d\theta' \Big[\tilde{H}(\theta)\{E(\theta')\overline{H_d}(\theta,\theta') - \overline{E}(\theta')H_d(\theta,\theta')\}$$

$$+\tilde{H}(\theta)\{\overline{E}(\theta')H_d(\theta,\theta') - E(\theta')\overline{H_d}(\theta,\theta')\}\Big]$$

$$\tilde{p}_3 \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\frac{\gamma^2}{4\pi^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sec^2\theta d\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sec^2\theta' d\theta' \times \qquad (32)$$

$$\Big[\overline{H}(\theta)\{E(\theta')\tilde{H}_d(\theta,\theta') - \overline{E}(\theta')\tilde{H}_d(\theta,\theta')\}$$

$$+H(\theta)\{\overline{E}(\theta')\tilde{H}_d(\theta,\theta') - E(\theta')\tilde{H}_d(\theta,\theta')\}\Big],$$

さて(11)'において左辺は後方には波がないから右辺が持つ後方の波は互に打消し合わねばならない。
そしてこれは要素平面波について成立つべきであるから
(21),(26),(32)から

$$\frac{\gamma}{2\pi i}\overline{H}(\theta) = \frac{i\gamma}{2\pi}\tilde{H}(\theta) + \frac{\gamma^2}{4\pi^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\overline{H_d}(\theta',\theta)\{\tilde{H}(\theta') - \tilde{H}(\theta')\}\sec^2\theta' d\theta'$$

$$-\frac{\gamma}{2\pi i}H(\theta) = \frac{-i\gamma}{2\pi}\tilde{H} + \frac{\gamma^2}{4\pi^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}H_d(\theta',\theta)\{\tilde{H}(\theta') - \tilde{H}(\theta')\}\sec^2\theta' d\theta'$$

つまり

$$H(\theta) + \tilde{H}(\theta) = \frac{\gamma}{2\pi i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}H_d(\theta',\theta)\{\tilde{H}(\theta') - \overline{\tilde{H}}(\theta')\}\sec^2\theta' d\theta', \qquad (33)$$

同様にして(12)から

$$\tilde{H}(\theta) + H(\theta) = \frac{\gamma}{2\pi i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\tilde{H}_d(\theta',\theta)\{H(\theta') - \overline{H}(\theta')\}\sec^2\theta' d\theta',$$

を得る。

昭和　　年　　月　　日

も船が前後対称ならば幾何学的に考えて

$$\phi(x,y,z)=\tilde{\phi}(-x,-y,z) \quad , \cdots\cdots (34)$$

と考えられ

$$E(-x,-y,z;\theta)=\overline{E(x,y,z;\theta)} \quad , \cdots (35)$$

であるから (26), (28) から

$$\tilde{H}(\theta)=\overline{H}(\theta) \quad , \cdots\cdots (36)$$

でなければならない。

この時 (33) は H の実部と虚部の関係を与える事になり、これは次節の積分定理からも導かれる。

しかし (33) の関係から前後非対称な船の造波抵抗について何等かの関係を見出す事は困難である。

つまり一般に前後非対称な船の造波抵抗は前進時と後進時で異なるであろう。

なお (33) の関係は H_d そのものについても成立つ。

§8 積分定理

"動揺問題では相反定理によって有用な関係が導かれるが定常問題ではどうか"

定常問題の場合の相反定理は花岡のReverse flow Theorem*の特別の場合として導かれる。

前節のReverse flow Potentialをここでも～ EPを使って示す事にするとGreenの定理により直ちに

$$\iint_{S+F}\left[\phi_1(P)\frac{\partial}{\partial n}\tilde{\phi}_2(P)-\tilde{\phi}_2(P)\frac{\partial}{\partial n}\phi_1(P)\right]dS(P)=0, \quad \text{—— (1)}$$

と書かれる。

無限遠の検査面上の積分が消える事は明らかであろう。

又F上の積分はϕ_1も$\tilde{\phi}_2$も共に同じ水面条件を満たす事から部分積分によってC上の積分で表わせる事は前と同じである。

しかしϕ_1, ϕ_2なる二つのポテンシャルについて同様な事を考えると今度は無限後方の検査面上の積分が現われて

$$\iint_{S+F}\left(\phi_1\frac{\partial}{\partial n}\phi_2-\phi_2\frac{\partial}{\partial n}\phi_1\right)dS=\frac{\nu}{2\pi i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[H_1(\theta)\overline{H_2}(\theta)-H_2(\theta)\overline{H_1}(\theta)\right]\times \sec^2\theta\, d\theta, \quad (2)$$

この積分は(17)の定義式を使って求めると簡単である。

* 花岡

$$\phi_j(p) \to \frac{\gamma}{2\pi i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[E(p,\theta)\overline{H_j(\theta)} - \overline{E}(p,\theta)H_j(\theta)\right]\sec^2\theta\, d\theta,$$

$$\iint_{S+F}\left(\phi_1\frac{\partial}{\partial n}\phi_2 - \phi_2\frac{\partial}{\partial n}\phi_1\right)ds = +\iint_{L}\left(\phi_1\frac{\partial}{\partial n}\phi_2 - \phi_2\frac{\partial}{\partial n}\phi_1\right)dS$$

$\partial n = -\cancel{dx}$

$$= \frac{\gamma}{2\pi i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\overline{H_2(\theta)}\sec^2\theta\, d\theta \cdot \iint_{S+F}\left(\phi_1\frac{\partial}{\partial n}E(p,\theta) - E\frac{\partial}{\partial n}\phi_1\right)ds$$

$$-\frac{\gamma}{2\pi i}\int H_2(\theta)\sec^2\theta\, d\theta\iint_{S+F}\left(\phi_1\frac{\partial}{\partial n}\overline{E} - \overline{E}\frac{\partial}{\partial n}\phi_1\right)ds$$

$$= \frac{\gamma}{2\pi i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[H_1(\theta)\overline{H_2(\theta)} - H_2(\theta)\overline{H_1(\theta)}\right]\sec^2\theta\, d\theta \quad //$$

$$\overline{H_1(\theta)} = H_1(\theta+\pi) \qquad \theta' = \pi + \theta \qquad \theta = \theta' - \pi$$

$$\overline{H_1(\theta'-\pi)} = H_1(\theta')$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}H_2(\theta)\overline{H_1(\theta)}\sec^2\theta\, d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}H_2(\theta'-\pi)\overline{H_1(\theta'-\pi)}\sec^2\theta'\, d\theta'$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}H_1(\theta')\overline{H_2(\theta')}\sec^2\theta'\, d\theta'.$$

まず(1)において $\hat{\phi}$ を $\hat{\phi}_d$ とおくと

$$\iint_{S+F}\left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\hat{\phi}_d-\hat{\phi}_d\frac{\partial}{\partial n}\phi\right]dS=0$$

一方

前節(23)により $\frac{\partial}{\partial n}\hat{\phi}_d=\frac{\partial}{\partial n}E(p,\theta)$ on S

(1.1)より

$$H(\theta)=\iint_{S+F}\left(\phi\frac{\partial}{\partial n}E-E\frac{\partial}{\partial n}\phi\right)dS$$

によって

$$H(\theta)=\iint_S\hat{\phi}_d\frac{\partial}{\partial n}\phi\,dS-\iint_F\left(\phi\frac{\partial}{\partial n}\hat{\phi}_d-\hat{\phi}_d\frac{\partial}{\partial n}\phi\right)dS+\iint_F\left(\phi\frac{\partial}{\partial n}E-E\frac{\partial}{\partial n}\phi\right)dS$$

$$-\iint_S E\frac{\partial}{\partial n}\phi\,dS$$

$$=\iint_S\{\hat{\phi}_d-E\}\frac{\partial}{\partial n}\phi\,dS+\iint_F\left[\phi\frac{\partial}{\partial n}(E-\hat{\phi}_d)-(E-\hat{\phi}_d)\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]dS; \quad \cdots(3)$$

この右辺第2項の積分は(1.1)式における註のように部分積分してC上の値のみとるものとする。

これが所謂Haskind もしくは花岡の公式であって Kotschin 関数は $\hat{\phi}_d$ がわかれば境界条件のみでわかる, 言いかえれば散乱ポテンシャルは波振幅の影響関数である事を示す。

しかし今の場合右辺第2項の中の第1項は ϕ がわからねばもとめられないので上述の事は言えない。

さてもし ϕ が斉次解 ϕ_h ならば(3)の右辺第1項は消えて

$$H_h(\theta)=\iint_F\left[\phi_h\frac{\partial}{\partial n}(E-\hat{\phi}_d)-(E-\hat{\phi}_d)\frac{\partial\phi_h}{\partial n}\right]dS, \quad \cdots(4)$$

又 ϕ が§6の ϕ_S つまり没水部のポテンシャルならば

$$H_S(\theta)=\iint_S\{\hat{\phi}_d-E\}\frac{\partial}{\partial n}\phi_S\,dS, \quad \cdots(5)$$

となるから上の注意は斉次解の部分についてのみ

昭和　年　月　日

あてはまる事である事がわかる。

昭和　年　月　日

§9 変分原理

"一般に境界値問題は最大最小値問題に置換える事が出来る。我々の場合それはどのような形で可能か"

この問題の困難さは今の場合Dの為に運動エネルギーが無限大になる事にある。
即ち無限流体中で渦がなければ運動エネルギーは有限であるから Kelvin の原理は*

$$T = +\frac{\rho}{2}\iiint_D (\nabla\phi)^2 dxdydz \quad \cdots\cdots(1)$$

が最小になるように ϕ を決めればよい。
つまり

$$\iiint_D (\nabla\phi)^2 dxdydz = \iiint_D \phi\Delta\phi\, dxdydz - \iint_S \phi\frac{\partial\phi}{\partial n}dS. \quad \cdots(2)$$

であるから今 T が有限になりかつ S 上で $\partial\phi/\partial n$ が与えられた値をとるような ϕ をとってきて T の変分をとると、

$$\Delta\phi = 0, \quad \cdots\cdots(3)$$

でなければならず、又 T は常に正であるからその極値は最小である。
領域 D が簡単な場合は有限要素法と同じでこれは簡単明瞭であるけれど無限領域では大変である。
又一方 ϕ が調和函数である我々の場合許容関数として境界条件を満たすものを探して来るより、調和関数をもって来る方がずっと楽である。

* Lamb,

昭和　　年　　月　　日

そこで上の変分問題を変形して次のようにするとよい。*

$$\frac{J}{\rho} = -\iint_S \left[\phi v_n - \frac{1}{2}\phi\frac{\partial}{\partial n}\phi\right] dS, \quad \Delta\phi = 0, \qquad (4)$$

$$v_n = \frac{\partial}{\partial n}\phi : \text{given}, \qquad (5)$$

このJが極値をとるようにφを決めるとφが(5)を満たす事は容易にわかる。

又これは最大値問題になっている事もよく知られている。

波のある場合は運動エネルギーが無限大となるので工合が悪いのであるから、これにかわる力学量を見つけなければならない。

そのような量としてラグランジアンL、つまり、

$$L = T - V, \qquad (6)$$

Tは運動エネルギー、Vはポテンシャルエネルギー。

を持って来るとよく知られているように規則波ではT=Vであるから規則波ではL=0となり、全系のLも有限になると考えられる。

さてLは流体の場合圧力の体積積分で与えられる事が示されている。**

即ち、

$$p(x,y,z) + \frac{\rho}{2}(\nabla\Phi)^2 + \rho g z = \text{Const}, \qquad (7)$$

として

$$\Phi = x + \phi$$

$$\frac{L}{\rho} = \frac{1}{\rho}\iiint_D p\, dx\,dy\,dz = \iiint_D \left[\text{Const} - gz - \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2\right] dx\,dy\,dz,$$

* Courant-Hilbert

** Hargreaves

昭和　　年　　月　　日

であるが
$$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\iint_{S+F} z^2\,dx\,dy + \text{Const},$$
であるから 結局

$$P_1 = M - T - V + \text{Const}, \quad \cdots\cdots (8)$$

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{\rho}{2}\iiint_D (\nabla\phi)^2\,dx\,dy\,dz, \\ V &= \frac{\rho g}{2}\iint_{S+F} z^2\,dx\,dy, \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (9)$$

$$M = -\rho\iiint_D \phi_x\,dx\,dy\,dz = \rho\iint_{S+F} \phi\frac{\partial x}{\partial n}\,dS, \quad \cdots (10)$$

この M は x 方向の運動量の積分である。
もし ϕ が
$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial n} \quad \text{on } S \text{ and } F, \quad (11)$$
なる境界条件を満たすならば
$$M = -\rho\iint_{S+F} \phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\,dS = \rho\iiint_D (\nabla\phi)^2\,dx\,dy\,dz = 2T, \quad (12)$$
となり、この時
$$P = T - V + \text{Const} = L + \text{Const}. \quad \cdots (13)$$
となって Pは ラグランジャンと同じになる事は明らかである。
このような P の変分問題として水の波の問題が表現出来る事は既に示されている。
しかしながら実際に適用するには M, T, V 等の積分の夫々は有限でないので特別な場合でないとこのままでの適用は無理である。
この為には Reverse flow Potential を導入するとよい。

昭和　　年　　月　　日

ここから以下は線型理論によって考察しよう。

さて

$$P^* = M^* - T^* - V^* \quad , \quad \cdots\cdots (14)$$

$$M^* = \frac{\rho}{2}\iint_{S+F} (\phi - \tilde{\phi}) \frac{\partial \chi}{\partial n} dS \quad , \quad \cdots\cdots (15)$$

$$T^* = \frac{\rho}{2}\iiint_D \nabla\phi\nabla\tilde{\phi}\, dx\,dy\,dz$$

$$= -\frac{\rho}{2}\iint_{S+F} \phi\frac{\partial}{\partial n}\tilde{\phi}\, dS = -\frac{\rho}{2}\iint_{S+F} \tilde{\phi}\frac{\partial}{\partial n}\phi\, dS, \quad \cdots (16)$$

$$V^* = \frac{\rho g}{2}\iint_F \zeta\tilde{\zeta}\, dx\,dy = -\frac{\rho}{2g}\iint_F \frac{\partial}{\partial x}\phi\frac{\partial}{\partial x}\tilde{\phi}\, dx\,dy, \quad (17)$$

ここに、

$$\zeta(x,y) = -\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial x}\phi, \quad \tilde{\zeta} = \frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{\phi} \quad , \quad \cdots (18)$$

又 F として $z=0$ の面をとる事にすると (15) の右辺の積分は F 上で消えるので S の上のみにとればよい。

さて $\tilde{\phi}$ について変分をとると、

$$\delta P^* = -\frac{\rho}{2}\iint_S \delta\tilde{\phi}\left(\frac{\partial \chi}{\partial n} + \frac{\partial \phi}{\partial n}\right) dS$$

$$+ \frac{\rho}{2}\iint_F \delta\tilde{\phi}\left(\frac{\partial}{\partial z}\phi + \frac{1}{g}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi\right) dx\,dy$$

$$- \frac{\rho}{2g}\int_C \delta\tilde{\phi}\frac{\partial}{\partial x}\phi\, dy \quad , \quad \cdots (19)$$

よって $\delta P^* = 0$ は

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial \chi}{\partial n} && \text{on } S \\ &g\frac{\partial}{\partial z}\phi + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi = 0 && \text{on } F \\ &\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 && \text{on } C \end{aligned}\right\} (20)$$

昭和　年　月　日

に等価である。

$\tilde{\phi}$ についても同様な式が得られる。

このようにして境界値問題は変分問題になったが最大値か最小値かはわからない。

さて実際問題としては ϕ として波のある解を考えるとすると水面条件を満たすものをとるのが便利であるから P^* はその時

$$P^* = \frac{\rho}{2}\iint_S \left[(\phi-\tilde{\phi})\frac{\partial \chi}{\partial n} - \tilde{\phi}\frac{\partial}{\partial n}\phi\right] dS + \frac{1}{2g}\int_C \tilde{\phi}\phi_x \, dy, \quad \text{------- (21)}$$

と書ける。

これも極値において(20)を満足する。

ところで(20)の最後の条件は始めて現われて来たものであって§6節迄の斉次解についての考察からすれば、このような条件をつければ解が一義的に決まると考えられる。

しかしこの ϕ_x を C における水面変位と見る時この条件は厳しすぎるし又現実的でもない。

それをさけるには任意の $\zeta_0(x,y)$ を持って来て上式を

$$P_E^* = \frac{\rho}{2}\iint_S \left[(\phi-\tilde{\phi})\frac{\partial \chi}{\partial n} - \tilde{\phi}\frac{\partial}{\partial n}\phi\right] dS + \frac{\rho}{2g}\int_C \left[\tilde{\phi}\phi_x + g(\tilde{\phi}\zeta_0 - \phi\tilde{\zeta}_0)\right] dy, \quad (22)$$

とおくと(20)の第3式の代りに

$$\tilde{\phi} = g\tilde{\zeta}_0, \quad \phi_x(y) = -g\zeta_0(x,y) \quad \text{on } C, \quad (23)$$

となる。(22)の最後の項は ϕ と $\tilde{\phi}$ について双一次形になるように加えてある。

このように考えて来ると C 上の wave profile は

全く任意に与える事が出来ると考えられる。

又換言すれば斉次解は C上の ζ_0 を指定する事によって決めれば便利である。

そして ζ_0 は任意であるから斉次解も又無限に多くある事になる。

なお P_E^* の極値は、

$$[P_E^*] = \frac{\rho}{2}\iint_S \phi\frac{\partial\chi}{\partial n}\,dS - \frac{\rho}{2}\int_C \phi\tilde{\zeta}_c\,dy$$

$$= T^* - V^* \qquad \text{---} \quad (24)$$

となる。

実際の計算は境界値条件を直接解く方がずっと楽である。

しかし Rayleigh-Ritz 法と同じく近似値を求める時は便利であり、又一般の変分法における各種の解法が応用出来るであろう。

動揺問題と違って我々の場合は速度ポテンシャルは一種であるので応用の範囲は狭いけれど散乱ポテンシャルについても同様にして、

$$P_E^* = \frac{\rho}{2}\iint_S \left[(\phi - \tilde{\phi})\frac{\partial}{\partial n}E(p,\theta) - \tilde{\phi}\frac{\partial}{\partial n}\phi\right]dS$$

$$+ \frac{\rho}{2g}\int_C \left[\tilde{\phi}\phi_x + g(\tilde{\phi}\zeta_c - \phi\tilde{\zeta}_c)\right]dy, \quad \cdots (25)$$

$$\left.\begin{aligned} \phi_d(p,\theta) + \frac{\partial}{\partial n}E(p,\theta) &= 0 \quad \text{on } S \\ \frac{\partial}{\partial x}\phi_d(p,\theta) &= -g\zeta_c \quad \text{on } C \end{aligned}\right\} \cdots (26)$$

のように変分問題に帰着させる事が出来る。

昭和　　年　　月　　日

なお(21)で $\phi_x=0$ / on c の解を求めてあとを斉次解とするならば その汎関数は、

$$P^*_{Eh} = -\frac{\rho}{2}\iint \tilde{\phi}\frac{\partial}{\partial n}\phi\, dS$$

$$+\frac{\rho}{2g}\int_c\left[\tilde{\phi}\phi_x + g(\tilde{\phi}\zeta_c - \phi\tilde{\zeta}_c)\right]dy, \quad (27)$$

となり

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial n}\phi = \frac{\partial}{\partial n}\tilde{\phi} = 0 \quad \text{on } S \\ \phi_x = -g\zeta_c\,,\ \tilde{\phi}_x = -g\tilde{\zeta}_c\end{array}\right\} \quad (28)$$

である。

§10 アルキメデスの原理の拡張

§2で圧力分布型の船について見掛の排水量と船の排水量との関係について簡単な関係を示したが、ここではそれが排水量型の船についても成立っている事を示そう。

その関係と言うのは

" 静的浮力も含めて船に働く垂直力は船の見掛の排水重量と水の自由表面の静止水面からの変化分の排水重量の和に等しい。"

つまり静力学でアルキメデスの原理と呼ばれる関係が船が走っている時に水面変位まで考慮すると成立つと言う命題である。

この証明は線型理論では既にのべたように圧力分布型の船では簡単だが排水量型の場合うまくゆかない。

又全没体では水面変位の積分は線型的には0になって半没体と全く異なって来る。

この事は垂直力が排水重量に比して格段に小さいつまり高次の微小量である事に基づいていると考えられる。

従ってこの証明は高次の項をとり入れて行わねばならない。

さてベルヌーイの定理は

$$\frac{p}{\rho} + \varphi_x + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + gz = 0, \qquad (1)$$

船に働らく垂直力 Z は

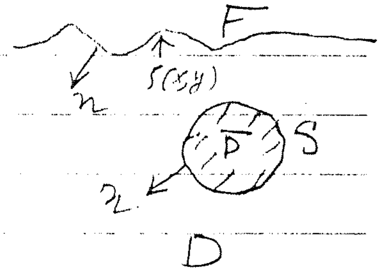
$$Z = -\iint_S p \frac{\partial z}{\partial n} dS, \qquad (2)$$

水面では圧力一定(今は0)であるから．

$$\varphi_t(x,y,\zeta) + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + g\zeta(x,y) = 0, \quad \cdots (3)$$

従って(2)は又．

$$Z = -\iint_{S+F} p \frac{\partial z}{\partial n}\, dS, \quad \cdots (4)$$



とも書ける。

φはSとF上で

$$\frac{\partial}{\partial n}\varphi = -\frac{\partial x}{\partial n}, \quad \cdots (5)$$

なる境界条件を満たしているものとする。

さて そうすると．

$$\iint_{S+F}\left[\varphi_x + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2\right]\frac{\partial z}{\partial n}\, dS$$

$$= \iint_{S+F}\left[\{\varphi_x z_n - \varphi_z x_n\} + \left\{\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 z_n - \varphi_z \varphi_n\right\}\right] dS, \quad \cdots (\;)$$

となり，この右辺の中括弧の中の積分はそれぞれグリーンの定理によってDの体積積分とすれば0になる事がわかる。

つまり

$$\iint_{S+F}\left[\varphi_x + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2\right]\frac{\partial z}{\partial n}\, dS = 0, \quad \cdots (6)$$

これを(2)に代入すると直ちに．

$$Z = +\rho g \iint_{S+F} z \frac{\partial z}{\partial n}\, dS = \rho g V - \rho g \iint_{F} \zeta(x,y)\, dx\, dy, \quad (7)$$

ここに

$$V = \iint_{S} z \frac{\partial z}{\partial n}\, dS = \iiint_{D} dx\, dy\, dz, \quad \cdots (8)$$

が得られ 命題は証明された。

昭和　年　月　日

問題が残るのは線型理論であつて，この式の右辺の（仮ばは没水体について）

ζ に線型理論での値つまり ϕ_x に比例するとおけばこの項は平均において 0 となる。

従つて垂直力は静浮力のみとなる。

半没体の場合は

$$Z^{(10)} = \rho g \nabla + \rho g \iint_{F} \zeta(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \rho g \nabla + \rho g \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \zeta\left(x, \pm\frac{B}{2}\right) B(x)\,dx, \quad \text{----} \quad (9)$$

ここに $B(x)$ は船の幅を示す。又 L は船長である。

従つてこの近似で船が静止時の値そのまま何等垂直力を受けていない，つまり sinkage free で走つているものとすると

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \zeta\left(x, \pm\frac{B}{2}\right) B(x)\,dx = 0, \quad \text{---} \quad (10)$$

となる。

実験から見るとこの左辺の量は 0 にならないがしかし排水量の僅かの % である。*

この議論はやはり粗近似であつて，線型理論で与えられる垂直力は第2近似値となる。

即ち (3) 式によつて ζ の第2近似を求めると

$$g\zeta(x,y) \doteqdot -\varphi_x(x,y,0) - \zeta\varphi_{xz}(x,y,0) - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2\Big|_{z=0}$$

$$\doteqdot -\varphi_x(x,y,0) + \frac{1}{g}\varphi_x\varphi_{xz} - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2\Big|_{z=0}; \quad (11)$$

又

$$\frac{1}{g}\iint_{F}\varphi_x\varphi_{xz}\,dx\,dy = \frac{1}{g}\int_{C}\varphi_x\varphi_z\,dy - \frac{1}{g}\iint_{F}\varphi_z\varphi_{xx}\,dx\,dy$$

* 別紙

$$= \frac{1}{g}\int_C \varphi_x \varphi_z \, dy + \iint_H \varphi_z^2 \, dx\,dy$$

であるから (11) を (7) に代入すると

$$Z = \rho g \nabla + \rho \iint_H \left[\varphi_x - \frac{1}{g} \varphi_x \varphi_{xz} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \right] dx\,dy .$$

$$= \rho g \nabla + \rho \iint_H \varphi_x \, dx\,dy - \frac{\rho}{g} \int_C \varphi_x \varphi_z \, dy$$

$$+ \rho \iint_H \left[\frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 - \varphi_z^2 \right] dx\,dy , \quad \cdots\cdots (12)$$

を得る。

一方 (2) に (1) を代入して (6) の上の式を使って忠実に線型理論を適用すれば

$$Z = \rho g \nabla + \iint_H \left[\varphi_x + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 - \varphi_z^2 \right] dx\,dy , \quad \cdots (13)$$

を得る。

(12) 式とその右辺 第3項だけ違うが いづれ高次の項であるし 一般にはこれが使われるので (12) は使わない事にしよう。

いづれにしても このようにして (13) は (7) の式の第2近似である事がよくわかるであろう。

昭和　　年　　月　　日

§11 近似解.

"このようにいろいろな議論をして見てしかし一体何か役に立つのであろうか、又従来の理論との関係はどうなるのか"

以上10節に亘って主張して来た事を要約すると

i) 特異点を置く場所の問題

ii) 斉次解の存在

iii) 散乱ポテンシャルの重要性

iv) 垂直力の平衡の問題

と言う事になるであろう。

そこでここではこれらの主張に従って薄い船の造波抵抗理論を組立てて見よう。

まずミッチェル近似によって船の縦断面 S に

$$\phi_M(P) = \iint_S \sigma(Q)\, S(P,Q)\, dx'dz', \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\sigma = -2\frac{\partial}{\partial x}\eta(x,z), \quad \eta\text{: 船の半幅}, \quad (2)$$

を考える。

この σ は Inuid 近似でも細長船近似でもかまわない。

次に斉次解としてはこの ϕ_M によって船体内部に出来る波を押える為の ϕ_c と水線面上の一様な圧力分布によるものをえらぶ。

$$\phi_c(P) = \iint_F \sigma_H(Q)\, S_{x'}(P,Q)\, dx'dy', \quad \cdots (3)$$

これは(1)に比して高次の量であるが水面分布である点で後流における波は大きい。

昭和　年　月　日

ここに

$$\varphi_h(P) = -\frac{1}{\gamma}\iint_{F} S_{x'}(P,Q)\,dx'dy' = \frac{2}{\gamma}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \eta_{x'} S(P,Q)\,dx' \quad (4)$$

となり，解は，

$$\varphi = \varphi_M + \varphi_c + \alpha\varphi_h \quad ,$$

αは任意定数とする。

φ_cは高次として考えなくともよい。今は考えない事にしよう。そこで

$$\varphi = \varphi_M + \alpha\varphi_h \quad , \quad (5)$$

このαは，前節の考察に従って第1近似で垂直力が平衡するように決める。

即ち sinkage free で走っているならば

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \varphi_x\,\eta(x)\,dx = 0$$

$$\alpha = -\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\partial}{\partial x}\varphi_M\,\eta(x)\,dx \Big/ \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\partial}{\partial x}\varphi_h\,\eta\,dx , \quad (6)$$

分母は略々水線面積に比例する（定義から）と考えられるので このαは mean sinkage に略々等しいと考えられる。（符号は除いて）

Kotschin 関数は

$$H(\theta) = H_M + \alpha H_h \quad , \quad (7)$$

となるがこの近似では実相成分はない。

つまり船が対称ならば Hはすべて純虚数値をとる。

実相成分が重要である事はよく知られた事であるから それを採り入れたい。

それには φ_c を考えるのも一つの方法である。
ここでは散乱ポテンシャルを考えてそれをとり入れよう。

つまり対称な船の場合 §7の(33)と(36)から H_d がわかれば

$$H(\theta)+\overline{H}(\theta)=\frac{\nu}{2\pi i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\overline{H_d}(\theta',\theta)\{H(\theta')-\overline{H}(\theta')\}\sec^2\theta'\,d\theta', \quad (8)$$

によって虚相成分が求められる。
この式からもわかるように薄い若しくは細長い船の場合それは自乗のオーダーの項になってしまう。
しかし低速において特に小さいとは限らない。
さて Φ_d あるいは H_d は §7 (23), (31) から (1) を求める時と同じ近似法で

$$H_d(\theta,\theta')\fallingdotseq\iint_{S+\overline{S}}E(p,\theta')\frac{\partial}{\partial n}E(p,\theta)\,dS$$

$$=\iiint_D\nabla E(p,\theta')\nabla E(p,\theta)\,dxdydz, \quad (9)$$

$$=\nu^2\underbrace{\sec^2\theta\sec^2\theta'}_{\{1-\cos(\theta-\theta')\}}\iiint_D E(p,\theta')E(p,\theta)\,dxdydz, \quad (9)$$

このような量が抵抗にどの程度貢献するかとなると数値計算に頼る他ないが、虚相成分について言えばこれが0でなければ造波抵抗はこれを考えない場合より増える。
所が現在理論値は実験値を大きく上廻る為に困っているのであるから量的な面では虚相成分を考えても改良にはならない。
この面で期待が持てるのは φ_c の部分で
よって、(1)に(2)を代入して(4)と比較すれば

昭和　年　月　日

直ぐわかるように、ψ_sはψ_Mとよく似て居つて打消し合う性格のものである。*

このように考えて来ると造波抵抗が理論値と合うには平均沈下量は非常に重要な要素である事がわかろう。

この事は又実験的にも沈下を許す場合と許さない場合で抵抗がかなり異なる事が示されて居るので充分考え得る事である。**

* 船側が垂直な船において特に$\alpha = 1$とおいて見ると(1)と(4)から$\theta \approx 0$の近くではKeel線上の特異点によるϕのみが残り著者の言う没水体型の船になる。この型の船の造波抵抗の計算値が量的に実験値に近い事は下記論文 別所、水野；関西造船

** 乾

; D.T.M.B. Data