

昭和 49 年 9 月 21 日

2次元滑走板における浸水長の変化について

(I. 定常問題)

別所正利

内容

	頁
1. 序	1
2. 積分方程式と解核	2
3. 浸水長の変化	8
4. 応用	11 - 12

附録 A 解の δ 微分

A-1 - 3

附録 B 両端で微分可能な解

B-1

1. 序

滑走艇の理論的研究は定常問題については丸尾によって調べつくされているし、又動揺問題については花岡によって定式化されて久しい。

しかしながらこれらの工学的応用については全く見るべきものがない。

その一つの原因として考えられるものは滑走艇では浸水長が大変大きく変化することにも拘わらずこれらの理論ではその変化は間接的にしか表わされないという点である。

つまり理論は船長を既知として展開され、解を得た後物理的な条件で与速度における長さが始めて決まる。

勿論実際の現象も同じ位複雑なものであつてこの点排水量型船と違って大変困難である。

このような状況から考えると長さの僅かな変化に伴う圧力変化(逐似的に線型化出来るだろう)なるものを考えればこのような欠点を補ふ事が出来ると考えられる。

又一方動揺問題では次報に示すようにそのような要素を考えないと固体としての平板境界条件を満たす事が出来ないのではこの場合はどうしても考えねばならない。

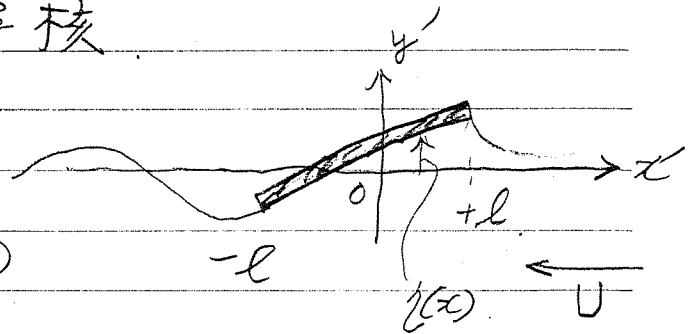
この際定常問題は一つの極限として考えておく必要がある。

そういう事情で今回は定常問題に限って浸水長の僅かな変化に伴う境界条件、圧力分布、その他の諸量の変化についてその線型部分のみ考察する。

2. 積分方程式と解核

① 無次元化関係

$$x' = lx, \quad y' = ly,$$



$$p'(x) = \rho U^2 p(x), \quad (\text{圧力})$$

$$\gamma = \gamma' l = \frac{\gamma l}{U^2},$$

$$u = u'/U, \quad v = v'/U, \quad (\text{速度})$$

$$\eta'(x') = l \eta(x).$$

±境界値問題の積分方程式は*

$$\eta(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^{+l} p(\xi) S(x-\xi) d\xi, \quad (1)$$

$$\text{または } \frac{d}{dx} \eta(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-l}^{+l} p(\xi) S_\xi(x-\xi) d\xi, \quad (2)$$

$$\text{2.2.2} \quad S(x) = \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_0^\infty \frac{\cos kx}{k-1-\mu i} dk, \quad (3)$$

$$S_\xi(x) = \frac{-1}{x} - \gamma \int_0^\infty \frac{\sin kx}{k-1-\mu i} dk, \quad (4)$$

1/2 $x = -\cos \theta$ とおいて

$$\eta_n(x) = \cos n\theta, \quad \dots (5)$$

1.2.2.2 (1) の解は

$$P_n(x) \equiv \frac{\Phi_n(\theta)}{\sin \theta} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m C_m^n \frac{\cos m\theta}{\sin \theta}, \quad (6) \quad \left(\begin{array}{l} \varepsilon_0 = 1 \\ \varepsilon_m = 2 \\ m \geq 1 \end{array} \right)$$

の形に一意的に定まる。

一方 (2) の解は任意性があるので Kutta の条件を加えて定められ

* 割所; “二次元流まわりの基礎理論” 昭和44年9月
Bessho & Nomura; M. D. A. vol. 10, No. 1, 1970

$$\frac{d^2 \eta_n(x)}{dx^2} = -n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x) + \alpha_n P_0(x) \\ \alpha_n &= -P_n(0)/P_0(0) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

さらに $\eta_a(x) = e^{ixx} \quad (9)$

に対する解は散乱圧力で $P_n(x)$ と記し 流出条件を満たすものは $P_n(x)$ と記すことにする。

さて(8)の表現から流出条件を満たす解の η は

$$\eta = \eta_n(x) + \alpha_n \quad (10)$$

となっているから流出条件を満たすと定数 α_n 或は板の上下位置は定まってしまう。

逆に言うと板の長さや上下位置が与えられた時には任意の速度で流出条件を満足する事は出来ない*。

このようにして板の上下位置の変化に対しては線型理論的に容易に解釋出来るが、一方板の上下位置が与えられた時に浮水長はどれだけになるかという問題は例えば $n=-1$ における(10)の値が与えられたものになる事を求めてそれから長さを求めなければならぬ。

そのような場合長さが僅かに変わると解はどの位変わるかが解っていると大変便利である。

そのような変化が又線型的になっていれば「一層」便利である。以下の考察をする所以である。

* T.Y. Wu, I. S. P. vol. 14, 1967
T.F. Ogilvie; 8th Symp. on Nav. Hydro., 1970

さて上述の問題で流れの方向を逆にしたものを
すべて (v) FP 12 よって 記す事とし 境界条件は

$$\begin{cases} \tilde{\psi}(x) = -\psi(x) \\ \frac{d}{dx} \tilde{\psi}(x) = -\frac{d}{dx} \psi(x) \end{cases} \quad (11)$$

となり、積分方程式は

$$\tilde{\psi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{P}(\xi) \tilde{S}(x-\xi) d\xi, \quad (12)$$

$$\frac{d}{dx} \tilde{\psi}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{P}(\xi) \tilde{S}'_x(x-\xi) d\xi, \quad (13)$$

$$\text{と } \tilde{S}(x-\xi) = S(\xi-x), \quad \dots (14)$$

であり、流出条件は $x=1$ で満たされるものとする。

そうするとこれらの関係から 明らかに

$$\psi(x) = \psi(-x) \text{ ならば } P(x) = -\tilde{P}(x), \quad (15)$$

$$1. \quad \psi(x) = -\psi(-x) \text{ ならば } P(x) = \tilde{P}(-x),$$

となる。又 類似に 散乱ポテンシャル について は

$$\tilde{\psi}_d(x) = e^{-ix} = \psi_d(-x), \quad \dots (16)$$

$$\text{と かけは } \tilde{P}_d(x) = -P_d(x), \quad \dots$$

となる。

従って

$$\tilde{P}_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{E}_m \tilde{C}_m^h \cos m\theta, \quad (17)$$

と 対応すると

$$C_m^n = (-1)^{n+m+1} \tilde{C}_m^h, \quad \dots (18)$$

又 相反定理は

$$\int_{-1}^1 P_n \tilde{\eta}_m dx = + \int_{-1}^1 \tilde{P}_m \eta_n dx, \quad (19)$$

$$\int_{-1}^1 P_n(x) \frac{d}{dx} \tilde{\eta}_m dx = - \int_{-1}^1 \tilde{P}_m \frac{d}{dx} \eta_n dx \quad (20)$$

となるので

$$C_m^{\perp} = \tilde{C}_n^m, \quad (21)$$

又

$$\left. \begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{\pi i \theta} \sum_{m=0}^{\infty} E_m C_m^n \cos m\theta \\ \tilde{P}_n &= \frac{1}{\pi i \theta} \sum_{m=0}^{\infty} E_m \tilde{C}_m^n \cos m\theta, \end{aligned} \right\} (22)$$

と展開すると

$$\left. \begin{aligned} C_m^n &= (-)^{n+m+1} \tilde{C}_{m+n}^n \\ C_m^n &= \alpha_n C_m^n + C_m^n, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\alpha_n = (-)^n \alpha_n, \quad \dots (24)$$

消滅条件は

$$\sum_{m=0}^{\infty} E_m C_m^n = 0,$$

(飛来)

$$\sigma_n = (-)^m \sum_m E_m C_m^n = (-)^{n+1} \tilde{\sigma}_n \quad (25)$$

さて今

$$\begin{aligned}
 R(x, z) &= \frac{1}{\pi \sqrt{1-z^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n P_n(x) \eta_n(z) \\
 &= \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-z^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_n \varepsilon_m C_m^n \cos m\theta \cos n\theta', \quad (26) \\
 x &= -\cos \theta, \quad z = -\cos \theta'
 \end{aligned}$$

とかくと

$$P_n(x) = \int_{-1}^1 \eta_n(z) R(x, z) dz, \quad (27)$$

と書けるのでこれは 解 積 である。

(21) に よつて (26) は又

$$R(x, z) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \tilde{P}_n(z) \tilde{\eta}_n(x), \quad (28)$$

と書けるので

$$\tilde{P}_n(x) = \int_{-1}^1 \tilde{\eta}_n(z) \tilde{R}(x, z) dz, \quad (29)$$

と $\tilde{R}$ を定義すると

$$\tilde{R}(x, z) = R(z, x), \quad (30)$$

よつて

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 S(z-x') R(x, z) dz &= \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \sum \varepsilon_n \tilde{\eta}_n(x) \int_{-1}^1 \tilde{P}_n(z) S(z-x') dz \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \tilde{\eta}_n(x) \tilde{\eta}_n(x') \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{n=0}^N \varepsilon_n \cos n\theta \cos n\theta' \right], \quad (31)
 \end{aligned}$$

となつて右辺は Dirac の δ 関数で表わされる。

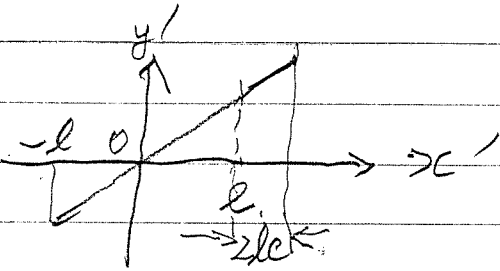
同様にして流出条件を満足する解核は

$$P(x) = \int_{-1}^1 \frac{d\zeta}{d\zeta} \mathcal{R}(x, \zeta) d\zeta, \quad (32)$$

$$\mathcal{R}(x, \zeta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} E_n P_n(x) \frac{\sin n\pi\zeta}{n} \quad (33)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \mathcal{R}(x, \zeta) = R^*(x, \zeta) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\zeta^2}} \sum_{n=0}^{\infty} E_n P_n(x) \eta_n(\zeta)$$

3. 浸水長の変化



今速度が不変として浸水長が僅かなるを $2cl$ だけ先端で伸ばしたと考えよう。

流出条件を満たす解は最初

$$-p_1\left(\frac{x'}{l}, \gamma' l\right) \longrightarrow \gamma' = l \left\{ -\frac{x'}{l} + \alpha_1(x) \right\}$$

で伸ばしたものは

$$-p_1' \equiv -p_1\left(\frac{x'-cl}{l+cl}, \gamma' l(1+c)\right) \longrightarrow \gamma' = l(1+c) \times \left\{ -\frac{x'-cl}{l(1+c)} + \alpha_1(\gamma' l(1+c)) \right\}$$

であるから その差は

$$\Delta p = -p_1' + p_1 = c \left[-\gamma p_{1\gamma}(x, \gamma) + (1+x) p_{1x}(x, \gamma) \right], \quad (1)$$

又

$$\Delta \gamma = (\gamma')' - \gamma' = -c(1 + \alpha_1 + \gamma \alpha_{1\gamma}), \quad (2)$$

となつて $c(2cl)$ に比例する。

又 $\Delta \gamma$ は先端の部分 (22では今はよくわからない) を除いて (2) のように定数値をとる。このような解としては P_0 があるけれども (1) とは違つていて積分可能であるか (1) は積分可能ではないので普通の意味では考えられない。

ここでは上の意味での圧力差の極限の場合と解する事にする。

そうすると (1) の積分は次のようにおめられる。

$$\int_{-1}^1 P_n(x) \eta_m(x) dx = \pi C_m^n, \quad (3)$$

そこで

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \Delta P_n(x) \eta_m(x) dx &= \pi \Delta C_m^n \\ &= C \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{c} \left[\int_{-1}^{1+2c} P_n\left(\frac{x-c}{1+c}, \delta \sqrt{1+c}\right) \eta_m(x) dx - \int_{-1}^1 P_n(x, \delta) \eta_m(x) dx \right] \quad (4) \end{aligned}$$

と定義されて

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1+2c} P_n\left(\frac{x-c}{1+c}, \delta \sqrt{1+c}\right) \eta_m(x) dx &= (1+c) \int_{-1}^1 P_n\left(\frac{z}{1+c}, \delta \sqrt{1+c}\right) \eta_m\left(\frac{z}{1+c} + \frac{1+z}{1+c} c\right) dz \\ &= \int_{-1}^1 P_n(z, \delta) \eta_m(z) dz + c \int_{-1}^1 \left[P_{n\delta}(z, \delta) \eta_m(z) + P_n(z, \delta) (1+z) \eta_{m+1}(z) \right] dz \end{aligned}$$

となる故

$$\begin{aligned} \pi \Delta C_m^n &= \int_{-1}^1 \Delta P_n(x) \eta_m(x) dx \\ &= c \int_{-1}^1 \left[\delta P_{n\delta}(z) \eta_m(z) + P_n(z, \delta) \frac{d}{dz} \{ (1+z) \eta_m(z) \} \right] dz, \quad (5) \end{aligned}$$

所で前頁の議論より一般に

$$\Delta P_n(x) = c \left[\delta P_{n\delta}(x) - (1+x) P_{n+1}(x) \right], \quad (6)$$

そこで式 (5) と比較して次の部分積分の形式に成る。すなわち

$$\int_{-1}^1 (1+x) P_{n+1} \eta_m(x) dx = - \int_{-1}^1 P_n(x) \frac{d}{dx} \{ (1+x) \eta_m(x) \} dx, \quad (7)$$

半に

$$F_n(\sigma) = \int_{-1}^1 P_n(x) e^{i\sigma x} dx \quad (8)$$

に ついては、同様に

$$\begin{aligned} \Delta F_n(\sigma) &= \int_{-1}^1 \Delta P_n(x) e^{i\sigma x} dx \\ &= c \int_{-1}^1 [\sigma P_{n+1}(x) + \{1 + i\sigma(1+x)\} P_n(x)] e^{i\sigma x} dx, \quad (9) \end{aligned}$$

を得るが、一方 (8) を σ で微分すると

$$F_{n\sigma}(\sigma) = \int_{-1}^1 \{P_{n+1}(x) + i\sigma P_n(x)\} e^{i\sigma x} dx, \quad (10)$$

であるからこれを (9) に代入して

$$\Delta F_n(\sigma) = c \{ \sigma F_{n\sigma}(\sigma) + (1 + i\sigma) F_n(\sigma) \}, \quad (11)$$

を得る。

これらの式で σ による微係数は 附録 A によつて

1. 求められる。

このようにして ΔP の積分は定義出来物理的にも首肯しうるが、§2 (19) (20) の相反定理については積分順序の交換が出来ない (つまり個々の積分が一樣収束でない) ので成立しない事に注意すべきである。

$$\text{つまり} \quad \int_{-1}^1 \Delta P_n \tilde{\eta}_m dx \neq \int_{-1}^1 P_m \Delta \eta_n dx, \quad (12)$$

4. 応用

滑走板の理論では浸水長をあらかじめ決める
 訳にはゆかないのが排水量型船と違って大変面
 倒な点であるが、前節の結果を利用すると
 この点について二次のような近似の取扱いが
 出来る事になる。

さて実際問題として正しく計測出来又簡単に
 計算出来る長さは青停止時水線長であるから
 以下水位長さとしてはこれを採用するものとする。

しかし一般に浸水長の変化は大変大きいので
 前節で考えたように僅かなものとは考え難い時
 は逐次近似を行うか又は重力を無視した
 浮上理論によって前もって推定した浸水長から
 出発すればよからう。

i) 滑走平板の後端の位置を固定すると浸水長
 は速度によってどう変化するか。

滑走板後端位置は迎角を β とすると

$$-H \equiv \gamma(-1) = -\beta \{1 + \alpha_1(x)\}, \quad (1)$$

と与えられるので正しく求めるには右辺の量が左辺の
 与えられた値に等しいような x を探し、与えられた
 速度から浸水長を見出せばよい。

しかし x の変化が僅かであるとするならば長さ c
 (板長) だけ変うたとして。

$$\beta(1+c) \{1 + \alpha_1(x+c)\} \doteq H \quad (2)$$

から

$$c \doteq \frac{H/\beta - (1 + \alpha_1)}{1 + \alpha_1 + x \alpha_{1x}} \xrightarrow{H \rightarrow 0} \frac{-\alpha_1}{1 + \alpha_1 + x \alpha_{1x}}, \quad (3)$$

となる。

昭和 年 月 日

ii) 排水量一定で速度が変化する時の浸水長変化
 静止時排水量か揚力に等しいとあくと

$$\frac{\rho g}{2} \beta = -\pi \rho \beta (1+c) a'_0(\gamma \sqrt{1+c}), \quad (4)$$

から近似的に

$$c \doteq -\frac{\gamma/2\pi + c'_0}{c'_0 + \gamma \frac{d}{d\gamma} c'_0}, \quad (5)$$

となる。

iii) 排水量および浮心が一様ならば如何か
 (4) の他に浮心 (今は後端から $2/3$, 前から $-1/3$)
 一定の条件は. (β_0 は静止時トリム角)

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &= -2\pi \beta (1+c) c'_0(\gamma \sqrt{1+c}), \\ \frac{\gamma}{6} \beta_0 &= \pi \beta (1+c)^2 c'_1(\gamma \sqrt{1+c}), \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{よって} \quad c &= -\frac{3c'_1 + \gamma c'_0}{c'_1 + \gamma c'_{1\gamma} + \gamma^2 c'_{0\gamma}}, \\ \frac{\beta_0}{2\pi \beta} &= -c'_0 - \frac{(3c'_1 + \gamma c'_0)(c'_0 + \gamma c'_{0\gamma})}{c'_1 + \gamma c'_{1\gamma} + \gamma^2 c'_{0\gamma}}, \end{aligned} \right\} (17)$$

附録A 解の微分

A-1

昭和 年 月 日

§2 (3) を x で微分すると.

$$\frac{\partial}{\partial x} S'(x-3) = \frac{(x-3)}{x} \frac{\partial}{\partial x} S'(x-3) = \frac{(3-x)}{x} S_3'(x-3) \quad (1)$$

よって §2 (1) の両辺を x で微分すると.

$$\frac{\partial}{\partial x} \eta(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 P_8'(z) S'(x-3) dz - \frac{1}{\pi x} \int_{-1}^1 P_8(z) (x-3) S_3'(x-3) dz \quad (2)$$

一方 §2 (2) は

$$\frac{\partial}{\partial x} \eta(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 P_8(z) S_3'(x-3) dz \quad (3)$$

これから (2) は又

$$(1-x) \frac{\partial}{\partial x} \eta(x) + x \frac{\partial}{\partial x} \eta(x) = \frac{x}{\pi} \int_{-1}^1 P_8'(z) S(x-3) dz + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 P_8(z) (3-1) S_3'(x-3) dz \quad (4)$$

と書ける。

ここで $P_8(x)$ が $x=-1$ で流出条件を満足するとすれば右辺第2項は部分積分出来て

$$(1-x) \frac{\partial}{\partial x} \eta(x) + x \frac{\partial}{\partial x} \eta(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \{ x P_8'(z) + (1-3) P_8(z) - P_8(z) \} x S_3'(x-3) dz$$

或いは

$$\begin{aligned} \eta(x) + x \frac{\partial}{\partial x} \eta(x) + (1-x) \frac{\partial}{\partial x} \eta(x) \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \{ x P_8'(z) + (1-3) P_8(z) \} S(x-3) dz \end{aligned} \quad (5)$$

を得る。

この解は §2 (33) による

昭和 年 月 日

$$\gamma P_\gamma(x) + (1-x)P_x(x) = \int_{-1}^1 \left\{ \eta(z) + \gamma \frac{2}{2\gamma} \eta(z) + (1-z) \frac{2}{2\gamma} \eta(z) \right\} \times R'(x, z) dz, \quad (6)$$

よって 5.7.12 $\eta(x) = -x + \alpha_1 = \alpha_1 + \cos \theta$ とおくと

$$\gamma P_{1\gamma}(x) + (1-x)P_{1x}(x) = (\alpha_1 + \gamma \alpha_{1\gamma} - 1) P_0(x), \quad (7)$$

$$\gamma \eta(x) + \gamma \frac{2}{2\gamma} \eta(x) + (1-x) \eta(x) = (1+i\gamma) e^{i\gamma x} + \alpha_1 + \gamma \alpha_{1\gamma}$$

$$\eta(x) + \gamma \frac{2}{2\gamma} \eta(x) + (1-x) \eta(x) = (1+i\gamma) e^{i\gamma x} + \alpha_1 + \gamma \alpha_{1\gamma}$$

よって 5.7.12

$$\gamma P_{d\gamma}(x) + (1-x)P_{dx}(x) = P_d(x) + i\gamma P_d(x) + \gamma \alpha_{d\gamma} P_0(x), \quad (8)$$

を得る。

よって

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{m=0}^{\infty} E_m C_m^{\lambda} \cos m\alpha = \frac{\varphi_n(\theta)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\sin \theta} \left[\varphi_n(\theta) - \frac{\theta^2}{2} \varphi_n''(0) + \dots \right]$$

$$\varphi_n''(0) = + \sum_{m=1}^{\infty} m^2 E_m C_m^{\lambda}, \quad \varphi_n(0) = \sum_{m=0}^{\infty} E_m C_m^{\lambda} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1-x^2} (1-x) P_x(x) = (1+\cos \theta) \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\varphi(0)}{\sin \theta} \right) \rightarrow -\varphi''(0),$$

よって (7) (8) にあいて $x \rightarrow -1$ とおくと

$$(\alpha_1 + \gamma \alpha_{1\gamma} - 1) \Phi_0(0) = -\varphi_1''(0) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m m^2 C_m^{\lambda}, \quad (9)$$

$$i\gamma \Phi_d(0) + \gamma \alpha_{d\gamma} \Phi_0(0) = -\varphi_d''(0) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m m^2 C_m^{\lambda}, \quad (10)$$

212 7

61

273 76

801

801

を得る。

又

あるか

1. 8

又

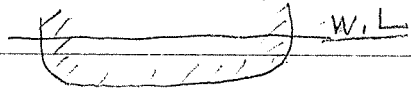
と定義

— 801

附録B 両端で微分可能な解

昭和 年 月 日

§2 (1) または (2) の積分方程式は同 (6) の形の唯一解を持つ事が知られてゐるが圧力として両端で有限で且つ微分可能なものを考えると丸尾* によつて示されてゐるように船型が水線と直交し飛沫はなくなる。これは浅吃水排水量型船のモデルと考えられる。



又この間の事象は前進速度なしで水面で振動する圧力分布とは丁度逆になつていてその場合は §2 (6) の形の圧力分布が上図の船型** を表現すると考えられる。

さて $\gamma \rightarrow \infty$ における §2 (1) の近似解は形式的に

$$p(x) \rightarrow \sigma(x)$$

となるけれども上述のように滑走板とはモデルが異なるので上の近似解はうまくない。

1. 逆に浅吃水排水量型船には具合がよいと考えられる。

しかし圧力分布によつて近似すると水線近くの形を希望なく表現する事が出来ないにも拘わらずこの附近の形は逆は抵抗には大きく影響するので結局のところ具合が悪い事になる。

*丸尾, 造船協会論文集 78号 (1947)

**別所, "浅吃水船の動揺問題" 1974