船水会(I)
50.7.15

昭和50年5月4日

造波抵抗理論に関する覚書(補遺I)
(振幅関数の積分可能性について)

別所正利

内容

昭和　年　月　日

1. 序論

一般に正確な正しい理論を直接解くと言う試みは大変複雑な場合が多く応用上それを近似的に解くのが普通である。
しかも応用上は殆どすべての場合線型理論に終始して充分な場合が多い。
この時在来の解では考えている領域全体で一つの形をとるとするのが普通であったがSingular Perturbation理論では領域によって（遠場と近場で）展開形式を夫々に適当なものを選ぶ事によって理論に一つの新しい展開をもたらした。
さていづれにしてもしかし我々の求めるものはより正確な近似理論であるから実際的な立場からはある一つの理論についてその近似度あるいはその誤差を評価する必要があるであろう。
しかしこの近似度又は誤差は評価の方法によって精粗様々になり得るだろう。
従って目的に応じて評価方法を選ぶ必要が生じる事になろう。
本報告では特に細長船の造波抵抗積分が船首の鋭くとがっている場合以外は発散し従って細長船理論はその場合以外は適用出来ないとする考え方に対し上述のような観点から考察せんとするものである。

本文に入る前に無限流体中における薄い物体のまわりの流れについての例によってその考え方を示しておこう。

昭和　　年　　月　　日

速度ポテンシャル $\Phi(P;\beta)$ は線型理論では

$$\Phi(P;\beta) = O(\beta) \equiv \beta\varphi(P), \cdots (1)$$

ここに $P \equiv (x,y,z)$, $\beta = B/L$; 薄さ とする。
薄い船の理論とは(1)を書きかえて

$$\lim_{\beta\to 0}\left|\frac{\Phi(P;\beta)}{\beta} - \varphi(P)\right| = 0 \quad \text{in } D, \quad (2)$$

ここにDは考えている水の領域，厳密には速場。
なる極限関数 $\varphi(P)$ が存在する時，
これを $\Phi(P,\beta)/\beta$ の近似値と見なす訳である。
つまりこの考え方ではポテンシャルの差の絶対値が D の中で小さければよいので確かにその極限ではよい近似値の一つには違いないが実際問題としては D は無限領域であるから大変困難な事になるように思われる。
そこで平均的によい近似となるような方法が考えられて来る訳である。
つまり適当な誤差の評価関数を考えてそれが最小になるような近似を選ぶと言う立場である（(2)も勿論その中の一つである）。
その例としては例えば次の積分

$$T = \frac{\rho}{2}\iiint_D (\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2)\,dx\,dy\,dz = \frac{-\rho}{2}\iint_S \Phi\frac{\partial}{\partial\nu}\Phi\,dS, \quad (3)$$

つまり流体の運動エネルギーが考えられる。
この時は又(3)が自乗積分である事を考慮すると Φ の張る関数空間を考えると便利である。
つまり今その要素 Φ_1, Φ_2 を考えて内積

昭和　　年　　月　　日

$$(\phi_1,\phi_2) = \iiint_D \nabla\phi_1\nabla\phi_2\,dx\,dy\,dz\,, \quad \cdots\cdots (4)$$

を定義するとノルム(距離)は

$$\sqrt{(\phi,\phi)} = \|\phi\|\,, \quad \cdots\cdots (5)$$

となり、$\phi(p)$の集合はヒルベルト空間を構成する*。

そうすると定義によりこの空間で(2)が成立つ為には

$$\lim_{p\to 0}\|\phi_p - \varphi\| = 0\,, \quad \cdots\cdots (6)$$

となる事である。

つまりあるノルム(評価関数)を持った関数空間を考えると(2)はその空間である点列がその極限点に收束すると言う条件を表現している。

その事は逆に(2)が成立っても(6)が成立たない場合を予想させる訳である。

以下では振幅関数について造波抵抗積分をノルムとするヒルベルト空間を考え薄い船、平らな船、細長い船の夫々の場合についてその近似性を検討する。

*中野秀五郎"ヒルベルト空間論"昭和21年，共立社

昭和　年　月　日

2. コッチン関数と振幅関数

今没水体の表面S上の吹出し分布$U\sigma(P)$による速度ポテンシャルを

$$\phi(P) = U\iint_S \sigma(Q)\, S(P,Q)\, dS(Q) \quad , \quad \cdots (1)$$

ここに

$$S(P,Q) \xrightarrow[P\to Q]{} \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r(P,Q)} \quad , \quad \cdots (2)$$

なるグリーン関数とする。

とする時

$$H(K,\theta) = \iint_S \sigma(P)\, e^{Kz + iK\tilde{\omega}(\theta)}\, dS \quad , \quad \cdots (3)$$

$$\tilde{\omega}(\theta) = x\cos\theta + y\sin\theta$$

をコッチン関数となずけよう。

薄い船では半幅曲線を$\eta(x,z)$とすると

$$\sigma\, dS = 2\frac{\partial}{\partial x}\eta(x,z)\, dx\, dz \quad , \quad \cdots (4)$$

、細長い船では面積曲線を$S(x)$とすると

$$\sigma\, dS = \frac{\partial S(x)}{\partial x}\, dx \quad , \quad \cdots (5)$$

と近似する訳である。

コッチン関数はσの２重フーリエ変換の形になっている。

従ってそれを逆変換する事によってσがもとめられσがわかればϕもわかる。

よってコッチン関数はϕに一対一に対応している。

(3)の逆変換の一般形は表面Sに関係しているので簡単ではないが特別の場合は大変簡単で例えば細長船では

$$F(k,\theta) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{d}{dx}S(x)\, e^{ipx}\, dx, \quad p = k\cos\theta, \qquad (6)$$

となる故

$$\frac{d}{dx}S(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k,\theta)\, e^{-ipx}\, dp, \qquad (7)$$

のようになってフーリエ変換の理論をそのまゝ使える。

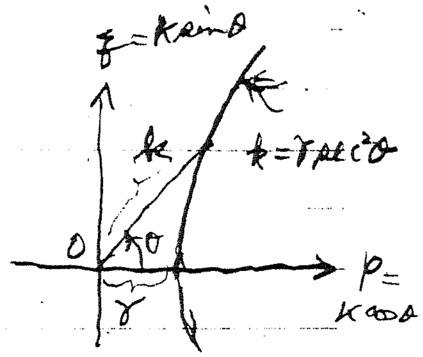
さて造波抵抗は

$$R = \frac{\rho g^2}{\pi U^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |A(\theta;\gamma)|^2 d\theta, \quad \text{- - -} \quad (8)$$

$$A(\theta;\gamma) = F(\gamma\sec^2\theta, \theta)\sec^3\theta, \quad \gamma = g/U^2, \qquad (9)$$

とかけるのでこの A を振幅関数と呼ぶ事にしよう。

(9)からわかるように A は F の $k = \gamma\sec^2\theta$ なる曲線上での値で決まる。(右図)



上述のようにコッチン関数は右図の(p,q)面上で与えられそれは特異点分布と一対一に対応している故この面上でコッチン関数がわかれば速度ポテンシャルも決まってしまう。

しかし振幅関数がわかっただけでは(p,q)面の図の曲線上の値が決まるだけであるから速度ポテンシャルは決まらない。

波無しポテンシャルの概念を導入するとそれは(p,q)面の $k=\gamma\sec^2\theta$ なる曲線上でコッチン関数が0になるような速度ポテンシャルであると定義出来る。

昭和　　年　　月　　日

さて物理的な観点に立って一般に散乱振幅は有限と考えられるから $A(\theta;\beta)$ は $L_2(0,\frac{\pi}{2})$ に属する。（自乗積分が存在する）
そこで二つの振幅関数 A_1, A_2 について内積

$$(A_1, A_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} A_1 \overline{A_2}\, d\theta , \quad \cdots \quad (10)$$

を導入するとこの $L_2(0,\frac{\pi}{2})$ はヒルベルト空間となり*
そのノルムは散乱振幅の平方根に比例する。
今 A があるパラメーター例えば β に関係している時、この空間でつまり散乱振幅をノルムとして

$$\lim_{\beta\to 0} A(\theta;\beta) = A(\theta;0) , \quad \cdots (11)$$

とは

$$\lim_{\beta\to 0}\left(A(\theta;\beta)-A(\theta,0),\ A(\theta;\beta)-A(\theta,0)\right) = 0 , \quad (12)$$

を意味し、これは (11) の左辺と右辺の散乱振幅が等しい事を意味する。
所で振幅関数は k-γ 面のある曲線上の値を示すだけであるから (11) がコッチン関数の精度を保証する事は出来ない（散乱分布だけ不定である！）し又逆にコッチン関数の k-γ 面全体でよい精度であったとしても $k=\gamma\sec^2\theta$ の曲線上では精度はよくないかも知れない。
以下の節ではこの点を従来の近似理論について検討して見る。

*前出 中野

3. 薄い船

先ず最初に所謂薄い船を採り上げよう。$\beta=B/L$ を小さくして行くと水の領域全体においてその流場について §1 (1), (2) が大体成立っている事にあまり異論はないだろう。

ここでは前節の意味において振幅関数

$$A(\theta,\gamma)=\sec^3\theta\iint_S \sigma(P)\,e^{\gamma\{z+i\varpi(\theta)\}\sec^2\theta}\,dS, \quad \cdots \quad (1)$$

が従来の近似的振幅関数

$$A_0(\theta,\gamma)=2\sec^3\theta\iint \frac{\partial\eta}{\partial x}(x,z)\,e^{\gamma\{z+ix\cos\theta\}\sec^2\theta}\,dx\,dz, \quad (2)$$

に収束するかどうかを検討して見よう。

幸い、この問題は既に Kotik 等* によって数値的に調べられており、彼等は中心線面上の特異点分布による造波抵抗と外部流場の等価な表面上の特異点分布によるそれとが異なる事を見出し、それを造波抵抗の Non-Uniqueness と呼んでいる。

ここでは少し定性的な面を考えて見よう。簡単の為に垂直舷側無限吃水船としよう。理論の近似の範囲内で特異点 §2 (4) を半分宛 $y=\pm\eta(x,z)$ の表面上においてよいだろうから (1), (2) は夫々

$$A_0(\theta)=\frac{2}{\gamma}\sqrt{\cos\theta}\int_{-1}^{1}\frac{\partial\eta}{\partial x}(x)\,e^{i\gamma x\sec\theta}\,dx, \quad \cdots \quad (3)$$

---

* J. Kotik & R. Morgan, J. S. R. [illegible] March 1969

$$A(\theta) = \frac{2}{\gamma}\sqrt{\cos\theta}\int_{-1}^{1}\frac{\partial \eta}{\partial x}\, e^{i\gamma x\sec\theta}\cos\{\gamma\eta(x)\sec^2\theta\sin\theta\}\,dx, \quad (4)$$

従来の近似では

$$A(\theta)\xrightarrow[\beta\to 0]{} A_0(\theta), \quad \cdots\cdots (5)$$

とする訳であるがこれは

$$\cos\{\gamma\eta(x)\sec^2\theta\sin\theta\}\xrightarrow[\beta\to 0]{} 1, \quad (6)$$

を仮定する事になる。

確かにこれはθが小さい所つまり横波系では成立つけれどγが大きく又θも大きい所つまり低速で発散波系では大きい誤差を生むと思われる。

そこで低速でこれが造波抵抗に及ぼす効果を調べて見よう。

その前に(3)(4)を部分積分し $\eta(\pm 1)=0$ と仮定して書き直しておこう。

$$A_0(\theta) = -2i\sqrt{\sec\theta}\int_{-1}^{1}\eta(x)\, e^{i\gamma x\sec\theta}\,dx, \quad (7)$$

$$A(\theta) = \frac{2\cos^{\frac{3}{2}}\theta}{i\gamma\sin\theta}\int_{-1}^{1} e^{i\gamma x\sec\theta}\sin\{\gamma\eta(x)\sec^2\theta\sin\theta\}\,dx, \quad (8)$$

さて $A(\theta)\xrightarrow[\theta\to 0]{} A_0(\theta)$ $\quad\cdots\cdots (9)$

又θが$\frac{\pi}{2}$に近い所では(3)より前後対称船では

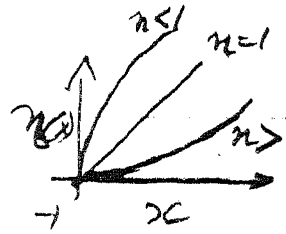
$$A_0(\theta)\xrightarrow[\theta\to\frac{\pi}{2}]{} \frac{4i}{\gamma^2}\cos^{\frac{3}{2}}\theta\left|\frac{\partial\eta}{\partial x}\right|_{x=1}\cos(\gamma\sec\theta), \quad (10)$$

（$\frac{\partial\eta}{\partial x}$が無限大ならばγのオーダーが違って来る）

$A(\theta)$ は $z(x)$ によって大変異なるので今 $x=\pm1$ の近くで

$$z(x) = \alpha|1\pm x|^{\frac{1}{n}} \quad , \ldots\ldots (11)$$

のように仮定しよう。



勿論 $\alpha = O(\beta)$ である。

$\theta=\frac{\pi}{2}$ の近くでは(8)の被積分関数の正弦項が最も効いて来るだろう。

所で

$$\int_0^\infty \sin(\gamma\alpha\sec\theta\sin\theta\, x^n)\,dx$$

$$= \Gamma(1+\tfrac{1}{n})\sin(\tfrac{\pi}{2n}) \Big/ (\gamma\alpha\sec\theta\sin\theta)^{\frac{1}{n}}, \quad (12)$$

なる積分がある故

$$A(\theta) \xrightarrow[\theta\to\frac{\pi}{2}]{} \frac{4(\cos\theta)^{\frac{3}{2}+\frac{2}{n}}}{\gamma^{1+\frac{1}{n}}\alpha^{\frac{1}{n}}}\Gamma(1+\tfrac{1}{n})\sin(\tfrac{\pi}{2n})\cos(\gamma\sec\theta), \quad ? \quad (13)$$

つまり波長の小さい発散波では

$$A_0(\theta) = O(\beta) \quad , \quad (14)$$

に対し

$$A(\theta) \underset{\theta\to\frac{\pi}{2}}{=} O(\beta^{-\frac{1}{n}}) \quad , \ldots \quad (15)$$

となって充分鋭く先がとがっていても($n\gg1$)
(5)は満足されない。

それ故 $\beta\to0$ としても造波抵抗的には(5)が成立たないで船首尾の形状により種々である。*

* Kotik 前出, Brand, J.S.R. March 1972,
馬場, 造船学会 昭和50春 講演会

4. 平たい船.

水面 $z=0$ において かかる力が

$$p(x,y) = -\rho g \zeta(x,y), \quad \cdots \quad (1).$$

の形に与えられる時、振幅函数、造波抵抗は夫々

$$A(\theta) = \iint_{B} \zeta(x,y)\, e^{i\gamma \sec^2\theta\, \overline{\omega}(\theta)}\, dx\,dy \cdot x \sec^{\frac{5}{2}}\theta, \quad (2)$$

$$R = \frac{\rho \gamma^2 g^2}{\pi U^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |A(\theta)|^2 d\theta, \quad \cdots \quad (3)$$

と与えられる。

極く低速では $\zeta(x,y)$ は船底曲線として良いと言われるが この点については極限移行に問題があり これは大変良くない近似であるけれど 今は正しい極限値が良くわかっていないのでその近似理論に従う事にしよう。

この理論では吃水が水面変位と同程度の大きさである事、つまり速度水頭に比し充分小さい事を前提としているので低速における排水量型船は全くこの範囲にはいらない。

さて (2) において $\beta \to 0$ とすると

$$A(\theta) \xrightarrow[\beta\to 0]{} \int_{-1}^{1} S(x)\, e^{i\gamma x \sec\theta}\, dx \sec^{\frac{5}{2}}\theta, \quad (4)$$

$$S(x) = \int \zeta(x,y)\, dy, \quad \cdots \quad (5)$$

となって次節の細長い船の場合の式に一致する。

こうした場合よく知れているように $S(x)$ が両端で一階微係数まで 0 にならなければ R が存在しない

しかしこれは $\beta \to 0$ の極限移行が行きすぎたに過ぎないので β を有限に保ったまま 抵抗積分

を実行すればRは有限に止まる。
以下簡単な例について見よう。

$$\zeta(x,y)=2\tau\ ;\ \text{const.}\quad \text{for}\left\{\begin{array}{l}-1<x<1\\-\beta<y<\beta\end{array}\right\}\cdots(6)$$

$$\tau=T/L$$

つまり長方形の細長い一様喫水の船を考えよう。

$$A(\theta)=2\tau\sqrt{\cos\theta}\ \frac{\sin(\gamma\sec\theta)\sin(\gamma\beta\sec^2\theta\sin\theta)}{\gamma^2\sin\theta},\ (7)$$

$$R=\rho U^2L^2\tau^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(\gamma\sec\theta)\sin^2(\gamma\beta\sec^2\theta\sin\theta)\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sin^2\theta},\ (8)$$

$$\sin^2(\gamma\sec\theta)=\frac{1}{2}\{1-\cos(2\gamma\sec\theta)\}$$

であって $\underbrace{\ }_{}$ γが充分大きい時は 2の余弦項に関する積分は小さいから無視すると

$$R\doteqdot\frac{\rho}{2}U^2L^2\tau^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(\gamma\beta\sec^2\theta\sin\theta)\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta\qquad(8')$$

と近似出来るだろう。
ついで更に $\theta=0$ の近くでは被積分関数は $O(\beta^2)$ であるから β ~~が~~ 小さい時は θ の大きい所が積分に利いて来る故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(\gamma\beta\sec^2\theta\sin\theta)\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta\doteqdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(\gamma\beta\sec^2\theta)\cos\theta d\theta$$

$$\doteqdot\frac{\gamma\beta}{2}\int_0^{\infty}\sin^2(u)\frac{du}{u^2}=\frac{\pi}{4}\gamma\beta\ ,\quad\cdots(9)$$

よって

$$R\doteqdot\frac{\pi\rho}{8}U^2L^2\gamma\beta\tau^2,\quad\cdots(10)$$

(8)の被積分関数の中で直接 $\beta \to 0$ とすれば
（細長船近似）

$$R = O(\beta^2 T^2) \quad , \qquad (11)$$

となるがこの場合は $S(x)$ が鋭くとがっていないと積分が存在しない。

(8)を直接積分すると、

$$R \underset{\gamma \gg 1}{=} O(\beta T^2) \quad , \qquad (12)$$

となって(11)と β に関する Order が違って来る。

つまり R 積分が存在しないと言う事は極限移行パラメーターに関してその数値的オーダーが異なる事を意味している。

今の場合では細長船近似では $R = O(\beta^2)$ であるが長方形水線の船では細長くても $R = O(\beta)$ となってオーダーが違って来る。

しかしこの場合も積分の誘導からわかるように発散波成分がこのような差違の主役を演じているので定性的な性格はともかくも定量的な面に関しては前節同様悲観的である。

換言すれば波の散乱を考慮した近似理論（特に発散波について）の必要が望まれる。*

* 堤他，造船学会，昭和50年5月講演会

§7 細長い船

β, τ が更に小さい時は §2 (6) のようになるが今は §4 (4) の形をとって

$$A(\theta) = \int_{-1}^{1} S(x)\, e^{i\tau x \sec\theta} dx \sec^{\frac{5}{2}}\theta, \quad \cdots (1)$$

$$R = \frac{\rho \gamma^2 g^2}{\pi U^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |A(\theta)|^2 d\theta, \quad (2)$$

としておこう。

積分 R が存在する為には発散波成分が積分可能である事が必要であって　その為には

$$S(x) \xrightarrow[|x|\to 1]{} \delta^2 (1-|x|)^n, \quad (3)$$

$$(\delta^2 \propto \beta\tau)$$

とする時

$$n > 1, \quad \cdots\cdots (4)$$

でなければならないが　これは端 S が 0 になる事を意味し　従来　細長船理論の適用限界とされている訳である。

しかし前節の例でもわかるように R が積分可能でないのは $\beta, \tau \to 0$ とする時 A(θ) の発散波成分が積分不可能になる為であって βτ を有限に保ったまゝ R 積分を実行すると有限な値に止まる。

そして (1) (2) の形では

$$R = O(\beta^2\tau^2), \quad \cdots (5)$$

であるが　そのような場合は その関係が成立たず β, τ の巾指数は一般には 2 より小さい。
（τ が有限な時は (5) とは大分違った表現となる*）

* 別刷；造協 "造船抵抗シンポジウム" 昭和40年

昭和　年　月　日

一方細長船理論は流場の記述の点に関しては大変簡単便利であり従って有用であるので単に R 積分が存在しないと言うだけでその適用を諦めるのは早計にすぎるのではないだろうか。

つまり §1 §2 の用語で言えば流場については §1 (2) に相当する細長船理論の式は概ね妥当であるが 振幅関数 (1) については造波抵抗を測度とすると大変粗略な近似で 横波についてはよろしかろうが 発散波については全く具合がわるく元にかえって §2 (3) による (9) あるいは §4 (2) のように特異点を船体表面に分布させたものを使うべきである。

実際 §2 の考察を考慮すると (5) の成立つのは大変先の鋭くとがった ((5) の $n \to \infty$) 船だけであって そこまで厳密に適用範囲を後退させるのでは実用上の意味がなくなってしまうだろう。

このような観点に立てば細長船はさらに分類される必要があると言う事になる。

以下にその一案を示す。

1. 真の細長船　　(5) が成立つ。
   無限に鋭く先がとがっており、$\gamma\tau \ll 1$ である。
2. 薄い細長船
   (a) 無限に鋭くとがった船・(真の薄い船)
   (b) 鋭くとがった 〃
   (c) 先の丸い 〃

3. 平たい細長船
(a) 無限に鋭く尖つた船（真の細長船）
(b) 先の鋭い船　（水線面が）
(c) 先の丸い　〃
(d) 先の平たい　〃

このように分類してみると結局の所細長船理論が適用出来るのは1.の真の細長船（造波抵抗にまで）のみであるから結局この理論は流場についての近似理論であつて造波抵抗については（特に発散波）薄い船，平たい船の理論を適用すべきであると云う事になる。
又薄い船の理論も無限に鋭く船首尾材がとがつている場合にのみ造波抵抗積分は正しい値を与える。

以上を要約すれば従来の薄い船，細長い船の理論は流場の記述においては大体満足しうる（線積分の問題は別として）が造波抵抗の面では採用しがたいと云う事になろう。
しかしながらそのようになつて来るのは発散波に対する近似度が大変悪い事に起因するがそれについては散乱波を考慮に入れる必要が当然あるので船体表面特異点分布を採用しても良い結果を得るか否かについては大変疑問である。

以上