

波の中の船の運動の理論について

(前進速度のない場合)

別 所 正 利*

(昭和 40 年 6 月 30 日受付)

1. 序 言

前報では船の横揺れの問題を主眼として二次元問題に限って波の中における前進速度を持たない船の運動を線型理論的に考察した。そして速度ポテンシャルの境界条件を比較対照することによって、各運動成分の速度ポテンシャル相互間に互いに独立でないものがあり、また散乱波のそれはこれらによって表わされることを見出した。

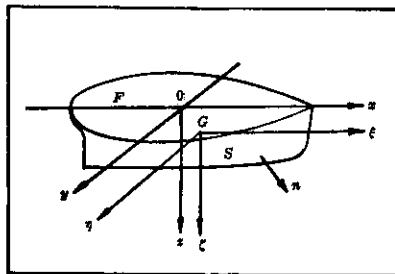
三次元では波は四方八方に拡がるので、二次元のような訳にはゆかないであろうが、同じような関係が見出せるであろうというのが本報の主題である。

理論そのものは前報同様従来のもの特に Haskind のそれ¹⁾ に実質的に等しいものであるが上述の観点を附加してさらに統一的に記述したものである。

2. 速度ポテンシャルなどの定義と境界条件^{1) 4) 12)}

平均水面上に原点 0 をおき第 1 図のような座標軸をとるものとする。

船は左右対称であるものとし、それが前進速度をもたないで波の中で調和的に揺れ動いているものとする。



第 1 図

* 機械工学教室 助教授

速度ポテンシャルを Φ , 圧力を P , 波高を ζ とすると,

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, z, t) &= \Re\{\varphi(x, y, z)e^{i\omega t}\}, \\ P(x, y, z, t) &= \Re\{p(x, y, z)e^{i\omega t}\}, \\ \zeta(x, y, z, t) &= \Re\{z(x, y)e^{i\omega t}\}, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

ただし $\omega = 2\pi/T$, T は周期,

のように書くことができ, φ, p, z は複素数値をとるものと考えればよい。

以下後出の H 関数を除いて添字 c, s でそれぞれの実部, 虚部を示すものとする。

したがってたとえば次のようになる。

$$\Phi(x, y, z, t) = \varphi_c(x, y, z) \cos \omega t - \varphi_s(x, y, z) \sin \omega t.$$

さて水面で圧力一定の条件は線型理論では,

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + K - \mu i \right) \varphi(x, y, 0) = 0, \quad (2.2)$$

ただし $\omega^2/g = 2\pi/\lambda$, g は重力の常数, λ は波長,

となり, また同じ線型性の仮定の下では次の等式が成立つ。

$$p(x, y, z) = \rho i \omega \varphi(x, y, z), \quad (2.3)$$

$$z(x, y) = \frac{\omega}{ig} \varphi(x, y, 0), \quad (2.4)$$

ただし ρ は水の密度とする。

さて線型理論では速度ポテンシャルは6自由度に対応するそれぞれ独立な運動と波の反射に関するポテンシャルを別々に考えて後でそれらを加え合わせればよい。それらを以下に列挙した簡単のために全文を通じて各運動およびそれに関する量などを下記の下添数字で示すことにしよう。

i)	x 軸に平行な運動 (前後揺れ)	添字	1
ii)	y " " (左右揺れ)	"	2
iii)	z " " (上下揺れ)	"	3
iv)	x 軸まわりの運動 (横揺れ)	"	4
v)	y " " (縦揺れ)	"	5
vi)	z " " (船首揺れ)	"	6

以上の他に回転運動については重心 G のまわりの運動に関する量を考えておくと便利であるから, 今 G を通る x, y, z 軸にそれぞれ平行な ξ, η, ζ 軸を考えて次のようにきめておこう。

iv')	ξ 軸まわりの運動 (横揺れ)	添字	4G
v')	η " " (縦揺れ)	"	5G
vi')	ζ " " (船首揺れ)	"	6G

また最後に

vii)	反射波の運動	添字	7
viii)	入射波の "	"	0

さて入射波の振幅を a とし x 軸に対し反時計まわりで α の角をなす方向から進んで来る

ものとすればそのポテンシャルは,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(x, y, z) &= \frac{iga}{\omega} \phi_0(x, y, z), \\ \text{ただし } \phi_0(x, y, z) &= e^{-Kz + iK(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

となる。他のものについても線型性の仮定の下では、ポテンシャルはすべて変位速度に比例するので、定常問題との類推を容易にするために下のように単位変位速度に対するポテンシャル ϕ_j を導入する。

今振幅を $X_j e^{i\omega t}$ ($j = 3, 4, 5$ に対しては角振幅を意味するものとする) とすると速度は $i\omega X_j e^{i\omega t}$ であるから,

$$\varphi_j = i\omega X_j \phi_j, \quad j = 1 \sim 6, \quad (2.6)$$

とおけば境界条件は

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} = -i\omega X_j \frac{\partial \phi_j}{\partial n}, \quad j = 1 \sim 6, \quad (2.7)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} x_1 &\equiv x, & x_2 &\equiv y, & x_3 &\equiv z, \\ \frac{\partial x_4}{\partial n} &= y \frac{\partial z}{\partial n} - z \frac{\partial y}{\partial n}, & \frac{\partial x_5}{\partial n} &= z \frac{\partial x}{\partial n} - x \frac{\partial z}{\partial n} \\ \frac{\partial x_6}{\partial n} &= x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n}. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

とし、 x_4, x_5, x_6 は (2.8) の境界条件を持ち 船体内部の領域で 正則な調和関数と考えておく。

細長い船では近似的に

$$x_5 \doteq -xz, \quad x_6 \doteq xy, \quad (2.9)$$

として大きい誤差はないであろうが、 x_4 については簡単にゆかないだろう。

さて (2.6), (2.7) によって,

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n} = -\frac{\partial x_j}{\partial n}, \quad j = 1 \sim 6, \quad (2.10)$$

次に反射波については (2.5) に対応して次のようにおけば

$$\varphi_r = \frac{iga}{\omega} \phi_r, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} (\phi_0 + \phi_r) = 0, \quad (2.12)$$

でなければならない。

このようにおくと圧力、表面変位は次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} p_j &= -\rho g K X_j \phi_j, & j &= 1 \sim 6, \\ p_j &= -\rho g a \phi_j, & j &= 0, 7, \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

$$\left. \begin{aligned} z_j(x, y) &= K X_j \phi_j(x, y, 0), & j &= 1 \sim 6, \\ z_j(x, y) &= a \phi_j(x, y, 0), & j &= 0, 7, \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

最後に重心のまわりの運動のポテンシャルは,

$$\varphi_{jG} = i\omega X_j \phi_{jG}, \quad j = 4, 5, 6, \quad (2.15)$$

とおき、重心 G の座標を O - x, y, z 軸に関して $(x_0, 0, z_0)$ とおくと,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \phi_{4G} &= -\frac{\partial x_4}{\partial n} - z_0 \frac{\partial x}{\partial n}, \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi_{5G} &= -\frac{\partial x_5}{\partial n} - x_0 \frac{\partial z}{\partial n} + z_0 \frac{\partial x}{\partial n}, \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi_{6G} &= -\frac{\partial x_6}{\partial n} + x_0 \frac{\partial y}{\partial n}, \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

となるから

$$\left. \begin{aligned} \phi_{4G} &= \phi_4 + z_0 \phi_2, \\ \phi_{5G} &= \phi_5 + x_0 \phi_3 - z_0 \phi_1, \\ \phi_{6G} &= \phi_6 - x_0 \phi_2, \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

とすることによって、原点まわりの運動のポテンシャルから求めることができる。

3. グリーン函数と速度ポテンシャルの積分表示^{1) 4)}

点 (x', y', z') に単位吹出しを有し、水面条件 (2.2) を満足するようなポテンシャルは次式で与えられる。

$$G(x, y, z; x', y', z') = \frac{1}{r_1} + \lim_{\mu \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k+K-\mu i}{k-K+\mu i} \times e^{-k(z+z') + i k \{ (x-x') \cos \theta + (y-y') \sin \theta \}} dk d\theta, \quad (3.1)$$

$$\text{ただし,} \quad r_1^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2.$$

偏微分すれば

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + K - \mu i \right) G(x, y, z; x', y', z') = \left(\frac{\partial}{\partial z} + K \right) \frac{1}{r_1} + \left(\frac{\partial}{\partial z} - K \right) \frac{1}{r_2}, \quad (3.2)$$

$$\text{ただし} \quad r_2^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2.$$

なる関係があることがわかるが、またこれから水面条件が満足されていることもすぐわかる。

さて (3.1) を変形すれば

$$G = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{4K}{\pi} \int_0^{\infty} [\cos\{uK(z+z')\} + u \sin\{uK(z+z')\}] \frac{K_0(uKR)}{1+u^2} du - 2\pi i K e^{-K(z+z')} H_0^{(2)}(KR), \quad (3.3)$$

ただし $R^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2$, $K_0, H_0^{(2)}$ はそれぞれ変形ベッセル、ハンケル関数である。

さらに

$$G = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \pi K \{ H_0(KR) - Y_0(KR) \} - 2e^{-K(z+z')} \int_0^{(z+z')} \frac{e^{Kv} dv}{\sqrt{v^2 + R^2}} - 2\pi i K e^{-K(z+z')} H_0^{(2)}(KR), \quad (3.4)$$

ただし H_0 はストルーフ、 Y_0 は第2種ベッセル関数とする。

これらの式で R が充分大きいときは右辺最後の項が最も大きく、他の項は無視できるようになるから

$$H_0^{(2)}(KR) \xrightarrow{KR \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi KR}} e^{-iKR + i\pi/4}.$$

を使えば

$$G \xrightarrow{KR \gg 1} \sqrt{\frac{8\pi K}{iR}} e^{-K(z+z')} - iKR, \quad (3.5)$$

また $R \equiv r - (x' \cos \theta + y' \sin \theta)$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$
とおけばまた次のようにも書ける。

$$G \xrightarrow{KR \gg 1} \sqrt{\frac{8\pi K}{iR}} e^{-K(z+z') - iKr + iK(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} \quad (3.6)$$

これは明らかに外方に拡がってゆく波を表わしている。

さてこのいわゆるグリーン関数を使うと、無限遠方で正則な関数は次のように表わされる。

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\} G(x, y, z; x', y', z') dS(x', y', z'), \quad (3.7)$$

ただし S は船の浸水表面とする。

無限遠では (3.6) によって次のような波となる。

$$\phi(x, y, z) \xrightarrow{KR \gg 1} \sqrt{\frac{K}{2\pi i r}} e^{-Kz - iK r} H(K, \theta), \quad (3.8)$$

ただし

$$H(K, \theta) = \iint_S \left(\phi \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) e^{-Kz + iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} dS, \quad (3.9)$$

ついでに

$$H_{c,s}(K, \theta) = \iint_S \left(\phi_{c,s} \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \phi_{c,s} \right) e^{-Kz + iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} dS \quad (3.10)$$

と定義する。前出のようにこの場合のみは c, s は実部虚部を意味しない。

次に入射波については同じくグリーンの公式から流体中では

$$\left. \begin{aligned} \iint_S \left(\phi_0 \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 \right) e^{-Kz + iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} dS &= 0, \\ \iint_S \left(\phi_0 \frac{\partial}{\partial n} G - G \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 \right) dS &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

となるので、反射波については (3.7), (2.12) によって、

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi} \iint_S (\phi_0 + \phi_1) \frac{\partial}{\partial n} G dS, \quad (3.12)$$

となる。したがってまた

$$H_1(K, \theta) \equiv H_1(K, \alpha, \theta) = \iint_S (\phi_0 + \phi_1) \frac{\partial}{\partial n} e^{-Kz + iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} dS \quad (3.13)$$

となるが、この場合は明らかに α の関数でもあるので 必要に応じて第2式のように表示するものとする。

さて関数 G を実部と虚部にわけると, (3.3), (3.4) を参照して

$$G = G_0 + iG_1, \quad G_1 = -2\pi K e^{-K(z+z')} J_0(KR), \quad (3.14)$$

である。これを (3.7) に代入してポテンシャルを実部虚部にわけて, (3.10), (2.9) を使
うと、

$$\phi_{j_0} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\phi_{j_0} \frac{\partial}{\partial n} G_0 - G_0 \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 \right) dS$$

$$+ \frac{K}{4\pi} e^{-Kz} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} H_{js}(K, \theta) d\theta, \quad (3.15)$$

$$\phi_{js} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \phi_{js} \frac{\partial}{\partial n} G_c ds - \frac{K}{4\pi} e^{-Kz} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} H_{js}(K, \theta) d\theta, \quad (3.16)$$

となり、さらに

$$H_{js}(K, \theta) = \iint_S \phi_{js} \frac{\partial}{\partial n} e^{-Kz + iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} dS, \quad j = 1 \sim 6, \quad (3.17)$$

となる。

$j = 7$ の境界条件は物体が対称性をもっている対称ではないから次のように対称性をもったものにおいて考えるとよい¹²⁾。

$$\left. \begin{aligned} \phi_7 &= \phi_{7A} + \phi_{7B} + i(\phi_{7C} + \phi_{7D}), \\ \phi_0 &= \phi_{0A} + \phi_{0B} + i(\phi_{0C} + \phi_{0D}), \\ \frac{\partial}{\partial n}(\phi_{0j} + \phi_{7j}) &= 0 \quad j = A, B, C, D, \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \phi_{0A} &= e^{-Kz} \cos(Kx \cos \alpha) \cos(Ky \sin \alpha), \\ \phi_{0B} &= -e^{-Kz} \sin(Kx \cos \alpha) \sin(Ky \sin \alpha), \\ \phi_{0C} &= e^{-Kz} \cos(Kx \cos \alpha) \sin(Ky \sin \alpha), \\ \phi_{0D} &= e^{-Kz} \sin(Kx \cos \alpha) \cos(Ky \sin \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

このようにしておくとき物体の対称性に応じて、それぞれ対称性を有することになる。

(3.18) のそれぞれの関数は明らかに (3.12) の型の表示を持つから、今それを実部虚部において書くことになる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_{7jc} &= \frac{1}{4\pi} \iint_S (\phi_{0jc} + \phi_{7jc}) \frac{\partial}{\partial n} G_c dS \\ &\quad + \frac{K}{4\pi} e^{-Kz} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} H_{7js}(K, \theta) d\theta, \\ \phi_{7js} &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \phi_{7js} \frac{\partial}{\partial n} G_c dS \\ &\quad - \frac{K}{4\pi} e^{-Kz} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} H_{7jc}(K, \theta) d\theta, \end{aligned} \right\} j = A, B, C, D, \quad (3.20)$$

これは (3.16) と同じ型であり、物体が対称性をもてばそれに応じた対称性をもつから、二次元の場合と似た結論をひき出すことができる。

まず

$$H_j(K, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^j \cos n\theta + b_n^j \sin n\theta), \quad (3.21)$$

のように展開できるであろうから

$$e^{-iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-i)^n J_n(Kr) \cos n(\theta - \varphi),$$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = 2 \text{ for } n \geq 1,$$

なる展開式を利用すれば

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -iK(x \cos \theta + y \sin \theta) H_j(K, \theta) d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n J_n(Kr) (a_n^j \cos n\varphi + b_n^j \sin n\varphi), \quad (3.22)$$

となる。一方で ϕ_j を φ に関する三角級数に展開し、その展開係数について境界条件を表わす積分方程式を考えると、二次元の場合と同様にその中には互いに独立でないものがあるのでこれらをすべて解く必要はない¹²⁾。このようにして、散乱波の振幅は他の解から導かれることがわかるが、それについては次節でふれる。

最後に (3.13) のところでのべたように H_7 は α と θ の関数であるが、その式で α と θ を入れかえて引算をすると、

$$\begin{aligned} H_7(K, \alpha, \theta) - H_7(K, \theta, \alpha) &= \iint_S \left\{ \phi_0(\alpha) \frac{\partial}{\partial n} \phi_0(\theta) - \phi_0(\theta) \frac{\partial}{\partial n} \phi_0(\alpha) \right\} dS \\ &+ \iint_S \left\{ \phi_0(\alpha) \frac{\partial}{\partial n} \phi_0(\theta) - \phi_1(\theta) \frac{\partial}{\partial n} \phi_0(\alpha) \right\} dS, \end{aligned}$$

となるが (3.11) によって右辺第1項は消え、境界条件 (2.11) を右辺第2項に代入して次節 (4.5) を利用すればこれも消えるから

$$H_7(K, \alpha, \theta) = H_7(K, \theta, \alpha), \quad (3.23)$$

すなわち α の方向から来る波を反射して θ の方向に進む波の振幅は、逆に θ の方向から来る波を反射して α の方向に進む波の振幅に等しいということを意味するものと考えられる。

したがって (3.21) の型の展開ができるとすれば、これについては

$$H_7(K, \alpha, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^7 \cos \alpha \cos \theta + b_n^7 \sin \alpha \sin \theta), \quad (3.24)$$

のような展開ができるであろう。

4. 力とモーメント^{1) 4) 12)}

運動 i による j 方向あるいは $(j-3)$ 軸まわりのモーメントを F_{ij} とすると

$$\begin{aligned} F_{ij} &= - \iint_S p_i \frac{\partial x_j}{\partial n} dS = \rho g K X_i \iint_S \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} dS \\ &= -\rho g K X_i \iint_S \phi_i \frac{\partial}{\partial n} \phi_j dS, \end{aligned}$$

であるから、

$$F_{ij} = \rho g K X_i f_{ij}, \quad (4.1)$$

$$f_{ij} = - \iint_S \phi_i \frac{\partial}{\partial n} \phi_j dS = \iint_S \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} dS, \quad (4.2)$$

とおくと f_{ij} は X_i に無関係な量となる。

次に j 方向、あるいは $(j-3)$ 軸まわりの入射波および反射波による力あるいはモーメントを E_j とすると、

$$E_j = - \iint_S (p_0 + p_1) \frac{\partial x_j}{\partial n} dS = \rho g a \iint_S (\phi_0 + \phi_1) \frac{\partial x_j}{\partial n} dS$$

であるからやはり

$$E_j = \rho g a e_j, \quad (4.3)$$

$$e_j = - \iint_S (\phi_0 + \phi_7) \frac{\partial \phi_j}{\partial n} dS = \iint_S (\phi_0 + \phi_7) \frac{\partial x_j}{\partial n} dS, \quad (4.4)$$

とおいておこう。

グリーンの公式によって ϕ_i, ϕ_j が共に発散波を持つならば

$$\iint_S \left(\phi_i \frac{\partial}{\partial n} \phi_j - \phi_j \frac{\partial}{\partial n} \phi_i \right) dS = 0, \quad (4.5)$$

となることは容易にわかるから、まず

$$f_{ij} = f_{ji}, \quad (4.6)$$

となり、よく知られた力の対称性が出て来る。

次に (3.5), (2.11), (4.5) によって (4.4) を変形し (3.9) を見れば

$$e_j = H_j(K, \alpha), \quad (4.7)$$

すなわち Haskind の公式を得る⁹⁾。

また (4.5) と同様にして、(3.8) から

$$\iint_S \left(\phi_i \frac{\partial}{\partial n} \bar{\phi}_j - \bar{\phi}_j \frac{\partial}{\partial n} \phi_i \right) dS = \frac{iK}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{iK}{2\pi} H_i(K, \theta) \bar{H}_j(K, \bar{\theta}) d\theta, \quad (4.8)$$

が得られ、 $\frac{\partial}{\partial n} \phi_j$ は実数値であるからただちに

$$\mathcal{L}\{f_{ij}\} = f_{ij} = -\frac{K}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_i(K, \theta) \bar{H}_j(K, \bar{\theta}) d\theta, \quad (4.6)$$

が得られ、これは左辺の物体がなす仕事と右辺の波によって外方に失なわれるエネルギーが等しいことを意味している。

また (4.8) において $i=7$ とおくと、

$$\phi_7 \frac{\partial}{\partial n} \bar{\phi}_j - \bar{\phi}_j \frac{\partial}{\partial n} \phi_7 = (\phi_0 + \phi_7) \frac{\partial}{\partial n} \bar{\phi}_j + \left(\bar{\phi}_j \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 - \phi_0 \frac{\partial}{\partial n} \bar{\phi}_j \right),$$

となり、 $j=1\sim 6$ ならば $\frac{\partial}{\partial n} \phi_j$ は実数値であるから、(4.4), (4.7), (3.9) によって

$$\bar{H}_j(K, \alpha + \pi) - H_j(K, \alpha) = \frac{iK}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_7(K, \alpha, \theta) \bar{H}_j(K, \bar{\theta}) d\theta, \quad j=1\sim 6, \quad (4.10)$$

となり、さらに $j=7$ ならば (3.13) と境界条件によって

$$\bar{H}_7(K, \alpha, \alpha + \pi) - H_7(K, \alpha, \alpha + \pi) = \frac{iK}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_7(K, \alpha, \theta)|^2 d\theta, \quad (4.11)$$

なる式が成立つ。

したがって、(3.21), (3.24) のように展開できるとすれば

$$\left. \begin{aligned} a_n^7 &= \frac{ie_n}{K} \frac{(a_n^j + \bar{a}_n^j)}{(a_n^j)}, & b_n^7 &= \frac{ie_n}{K} \frac{(b_n^j + \bar{b}_n^j)}{(b_n^j)}, \\ |a_n^7|^2 &= \frac{e_n}{iK} (a_n^7 - \bar{a}_n^7), & |b_n^7|^2 &= \frac{e_n}{iK} (b_n^7 - \bar{b}_n^7), \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

となって二次元の場合と同様に反射波の振幅は $j=1\sim 6$ までの運動による波の振幅がわかっていれば求められることになり、さらにまた船が対称性をもっているときは、 $j=1\sim 6$ の運動のうちでも独立でないものがあることも容易にわかる。

このような訳で $H_1 \sim H_6$ がわかれば波の強制力も H_7 も求まるから後述のように運動

方程式を解くこともできるしまた漂流力も計算できる。

逆に波の強制力がわかっていれば (4.9) によって、各運動に対する減衰が計算でき、それから Kramers-Kronig の関係⁹⁾ によって附加質量の項が求められることになってやはり運動方程式は解けるはずである。

ところで実際の数値計算では、(3.7) の表現よりも吹出し吸込み、あるいは二重吹出し分布で次のように表現する方が便利であると思われる⁴⁾。

$$\phi_j = \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu_j \frac{\partial}{\partial n} G dS, \quad (4.13)$$

$$\phi_j = \frac{1}{4\pi} \iint_S \sigma_j G dS, \quad (4.14)$$

そうすると S の外側 (+ 印) と内側 (- 印) で次のような不連続性がある。

$$\phi_j|_+ - \phi_j|_- = \mu_j, \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi_j \Big|_+ - \frac{\partial}{\partial n} \phi_j \Big|_- = -\sigma_j, \quad (4.16)$$

ただし
$$\iint_S \sigma_j dS = 0,$$

さて力あるいはモーメントは σ, μ によって次のように表わされる。

すなわち

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \iint_{S+F} \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} dS - \iint_F \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} dS \\ &= \iint_{S+F} \left(\phi_j \frac{\partial x_i}{\partial n} - x_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right) dS - \iint_{S+F} x_j \frac{\partial x_i}{\partial n} dS + \iint_F \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial z} dx dy, \end{aligned}$$

ただし F は船の水線面とする。

となるから、右辺第2項の積分は体積積分に変え、第1項では積分領域を S の外側と内側にしほって、(4.15)、(4.16) を使い、第3項については ϕ_i に (4.13)、(4.14) を代入して積分順序を変え

$$\phi_j = \frac{1}{4\pi} \iint_F \frac{\partial x_j}{\partial z} G dx dy, \quad (4.17)$$

のような関数を導入すれば

$$f_{ij} = - \iiint_D (\text{grad } x_i)(\text{grad } x_j) dv + \left\{ \iint_S \mu_i \frac{\partial}{\partial n} (x_j + \phi_j) dS, \right. \quad (4.18)$$

$$\left. \iint_S \sigma_i (x_j + \phi_j) dS, \right\}$$

が得られる¹⁰⁾。ただし D は船体内の全容積とする。

(4.17) の $\partial x_j / \partial z$ は $j = 1, 2, 6$ では零であり、また没水体では F がなくなるのでやはりなくなるから

$$f_{ij} = - \iiint_D (\text{grad } x_i)(\text{grad } x_j) dv + \left\{ \iint_S \mu_i \frac{\partial x_j}{\partial n} dS, \right. \quad (4.19)$$

$$\left. \iint_S \sigma_i x_j dS, \right\}$$

のように簡単になる。

ϕ_j は $j=3, 5$ などでは特に重要であって、水上船と没水体との違いを示す具体的な量であって無視することはできない¹⁰⁾。

波の強制力については (4.18) のような項が複雑になるので省略するが $j=1, 2, 6$ および没水体では同様にして

$$e_j = \iint_S \mu_j \frac{\partial x_j}{\partial n} dS \quad \text{or} \quad \iint_S \sigma_j x_j dS, \quad (4.20)$$

となる。

一方 (4.7) の関係があるから (3.9) 式で積分面を変えて水面条件を考えれば F の上の積分は消えて

$$H_j(K, \alpha) = \iint_S \mu_j \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 dS \quad \text{or} \quad \iint_S \sigma_j \phi_0 dS, \quad j=1 \sim 7. \quad (4.21)$$

となりこれはよく知られた式である。

5. 減衰エネルギーと漂流力^{1) 2)}

今入射波だけ除いた速度ポテンシャルを

$$\varphi = \sum_{j=1}^7 \varphi_j = i\omega \sum_{j=1}^7 X_j \phi_j, \quad (5.1)$$

ただし
とし、さらに

$$\begin{aligned} A(K, \theta) &= \iint_S \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 - \phi_0 \frac{\partial}{\partial n} \varphi \right) dS, \\ &= i\omega \sum_{j=1}^7 X_j H_j(K, \theta), \end{aligned} \quad (5.2)$$

とおこう。

波の力だけで船が揺れ動いているものとすれば、全系のエネルギーは不変であるから

$$\iint_S \left\{ (\varphi_0 + \varphi) \frac{\partial}{\partial n} (\varphi_0 + \varphi) - \overline{(\varphi_0 + \varphi)} \frac{\partial}{\partial n} (\varphi_0 + \varphi) \right\} dS = 0, \quad (5.3)$$

ここに ϕ_0, φ_0 は (2.5) による。

となるが、被積分関数をならべかえて (3.11) 上式, (5.2), (4.8) を代入すれば

$$A(K, \pi + \alpha) - \overline{A(K, \pi + \alpha)} = \frac{-i\omega K}{2\pi g a} \int_{-\pi}^{\pi} A(K, \theta) \overline{A(K, \theta)} d\theta, \quad (5.4)$$

となることがわかるが、この右辺は拡散波によるエネルギー散逸

$$M = \frac{\rho\omega K}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(K, \theta)|^2 d\theta, \quad (5.5)$$

と常数倍だけ異なるものである。

また (5.3) において (2.12) の境界条件を考えに入れて

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \sum_{j=1}^6 \varphi_j = i\omega \sum_{j=1}^6 X_j \phi_j \\ B(K, \theta) &= \iint_S \left(\phi \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 - \phi_0 \frac{\partial}{\partial n} \phi \right) dS, \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

とおいて、ならべかえ、 ϕ_j ($j=1 \sim 6$) の境界値は実数であることを考えて (4.4), (4.7) を

代入すると

$$\sum_{j=1}^6 \{X_j \overline{H_j(K, \alpha)} - \overline{X_j} H_j(K, \alpha)\} = \frac{-iK}{2\pi ga} \int_{-\pi}^{\pi} |B(K, \theta)|^2 d\theta. \quad (5.7)$$

となるが、この左辺は Haskind の公式によって波が船に対してなす仕事に比例し、右辺は船が運動によってたてた波が持ちさるエネルギー N に比例している。

すなわち

$$N = \frac{\rho \omega K}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |B(K, \theta)|^2 d\theta, \quad (5.8)$$

これらの式を (5.1), (5.6) のように要素に分解して、書きなおせば

$$M = \frac{\rho}{8\pi} \omega^3 K \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^7 X_i \overline{X_j} \int_{-\pi}^{\pi} H_i(K, \theta) \overline{H_j(K, \theta)} d\theta, \quad (5.9)$$

$$M = -\frac{\rho ga \omega}{4} \sum_{j=1}^7 \{X_j H_j(K, \pi + \alpha) + \overline{X_j} \overline{H_j(K, \pi + \alpha)}\}, \quad (5.10)$$

$$N = \frac{\rho \omega^3 K}{8\pi} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 X_i \overline{X_j} \int_{-\pi}^{\pi} H_i \overline{H_j} d\theta = \frac{\rho \omega^3}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 X_i \overline{X_j} f_{ij}, \quad (5.11)$$

$$N = \frac{\rho ga \omega}{4i} \sum_{j=1}^6 \{\overline{X_j} H_j(K, \alpha) - X_j \overline{H_j(K, \alpha)}\}, \quad (5.12)$$

となる。

一方漂流力は x 方向に D_x , y 方向に D_y とすると

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \frac{\rho K^2}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(K, \theta)|^2 (\cos \alpha - \cos \theta) d\theta, \\ D_y &= \frac{\rho K^2}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(K, \theta)|^2 (\sin \alpha - \sin \theta) d\theta, \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

で与えられ、この内右辺第1項は (5.4) によって書きかえることもできる。

これを上式のように分解すれば

$$D_x = \frac{\rho g K^3}{8\pi} \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^7 X_i \overline{X_j} \int_{-\pi}^{\pi} H_i(K, \theta) \overline{H_j(K, \theta)} (\cos \alpha - \cos \theta) d\theta, \quad (5.14)$$

となり、また (4.21) 第2式によって吹出し分布で表わすと

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} H_i(K, \theta) \overline{H_j(K, \theta)} (\cos \alpha - \cos \theta) d\theta \\ &= 2\pi \iiint_S \sigma_i(x, y, z) \overline{\sigma_j(x', y', z')} e^{-K(z+z')} \{J_0(KR) \cos \alpha - iJ_1(KR) \cos(\varphi - \varphi')\} \\ & \quad \times dS(x, y, z) dS(x', y', z'), \end{aligned} \quad (5.16)$$

ただし

$$R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad \varphi' = \tan^{-1} \frac{y'}{x'}.$$

のように書ける⁷⁾。

もちろん運動の振幅は運動方程式をとりて求めなければならないが、二次元のように簡単ではないので省略する。しかし大体似たような結論が出そうである。

6. 波長の大きい時^{1) 8) 9) 12)}

前節で定義した力およびモーメントは一般にはすべて0でないけれども実際上は船が対

称性をもっているので多くの連成項が消える。

$$\left. \begin{aligned} f_{12} = f_{13} = f_{14} = f_{16} = f_{23} = f_{25} = f_{26} = f_{34} = f_{35} = f_{36} = f_{45} = f_{46} = f_{56} = 0, \\ f_{15}, f_{24} \neq 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

となることがわかり、縦揺れと前後揺れ、横揺れと左右揺れの連成項のみが消えない。

しかし前後の対称性がない普通の船のような場合はその他にさらに

$$f_{15}, f_{24}; f_{16}, f_{26}, f_{35}, f_{46} \neq 0, \quad (6.2)$$

すなわち上下前後、左右船首、縦上下、横船首各動揺間の連成項が出てくる。

しかし普通の船では前後の非対称性は僅かでありまた前後揺れに基因する力は小さいから

$$f_{16}, f_{15} \doteq 0 \quad (6.3)$$

と考へて、前後揺れと縦揺れ、上下揺れとは無関係であるとしても大きい誤差は招かないかも知れないが、一方横揺れについてはその復原力および減衰が左右揺れに比し小さいので連成項は無視できないと考えられる。

さて波長が大きい時、すなわち $K \rightarrow 0$ の時は二次元の場合と同様にして、附加慣性の係数を k_j とすると

$$f_{jj} \doteq k_j \Delta, \quad j = 1, 2, 3, \quad (6.4)$$

$$f_{jj} \doteq k_j I_{(j-3)} / \rho, \quad j = 4, 5, 6, \quad (6.5)$$

ただし ∇ は排水容積、 I_j は j 軸まわりの慣性モーメントとする。

また

$$\left. \begin{aligned} f_{15} &\doteq -k_1 l_{15} \nabla \\ f_{24} &\doteq -k_2 l_{26} \nabla \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{26} &\doteq -k_2 l_{26} \nabla \\ f_{35} &\doteq -k_3 l_{35} \nabla \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{13} &\doteq -k_{13} \nabla \\ f_{46} &\doteq k_{46} I_4 / \rho \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

のように表わすことができるであろう。

ここで l_{15} , l_{24} , l_{26} , l_{35} 等は附加質量の中心の原点から距離と考えられる。

次に強制力については、左右対称であるとして

$$e_1 = H_1(K, \alpha) \doteq K[f_{13} + i \cos \alpha (\nabla + f_{11})], \quad (6.9)$$

$$e_2 = H_2(K, \alpha) \doteq i K \sin \alpha (\nabla + f_{22}), \quad (6.10)$$

$$e_3 = H_3(K, \alpha) \doteq A_w - K(\nabla + f_{33}) + i K \cos \alpha (f_{13} + A_w l_f), \quad (6.11)$$

ただし A_w は水線面積、 l_f は原点から前方に測った浮面心までの距離とする。

$$e_4 = H_4(K, \alpha) \doteq i K \sin \alpha [f_{42} + \overline{OM}_i \nabla], \quad (6.12)$$

$\overline{OM}_i$ は原点から横メタセンターまでの高さ。

$$e_5 = H_5(K, \alpha) \doteq -l_f A_w - K f_{35} + i K \cos \alpha (f_{15} + \overline{OM}_i \nabla), \quad (6.13)$$

$\overline{OM}_i$ は原点から縦メタセンターまでの高さ。

$$e_6 = H_6(K, \alpha) \doteq i K \sin \alpha f_{26}, \quad (6.14)$$

ただし浮心は原点の真下にあるものとする。

7. 運動方程式

最も簡単な場合として $\alpha = 0$ すなわち縦波をうける場合を考えて見よう。

この時は左右対称な船では縦上下、前後の三運動がおこる。

運動方程式は $e^{i\omega t}$ なる因子を除いて、

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\omega^2}{g} WX_1 &= F_{11} + F_{31} + F_{5G1} + E_1, \\ -\frac{\omega^2}{g} WX_3 + \rho g A_w X_3 &= F_{13} + F_{33} + F_{5G3} + E_3, \\ -\frac{\omega^2}{g} I_{2G} X_5 + W m_e X_5 &= F_{15G} + F_{35G} + F_{5G5G} + E_{5G}, \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

ただし $W = \rho g V$, I_{2G} は η 軸まわりの重量慣性モーメント, m_e は縦メタセンター高さとする。

4 節の記号によって書き直せば

$$\left. \begin{aligned} f'_{11} X_1 + f_{31} X_3 + f_{5G1} X_5 &= -\frac{a}{K} e_1, \\ f_{13} X_1 + f'_{33} X_3 + f_{5G3} X_5 &= -\frac{a}{K} e_3, \\ f_{15G} X_1 + f_{35G} X_3 + f'_{5G5G} X_5 &= -\frac{a}{K} e_{5G}, \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} f'_{11} &= V + f_{11} \\ f'_{33} &= V + f_{33} - A_w/K, \\ f'_{5G5G} &= I_{2G}/\rho g + f_{5G5G} - m_e V/K, \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

となる。

この連立方程式をとけば運動が求められる訳であるが、特に前後対称ならば

$$f_{13} = f_{35G} = 0$$

となるので上下揺れは独立になり

$$\frac{X_3}{a} = -\frac{e_3}{K(V + f_{33}) - A_w}, \quad (7.4)$$

で与えられる。

同調時、すなわち

$$\Re\{K(V + f_{33}) - A_w\} = 0, \quad (7.5)$$

には (4.7), (4.9) によって、

$$\frac{a}{X_3} = \frac{K^2}{4\pi H_3(K, 0)} \int_{-\pi}^{\pi} |H_3(K, 0)|^2 d\theta, \quad (7.6)$$

となる。従って特に $K \rightarrow 0$ とすれば (6.11) によって

$$\frac{a}{X_3} \doteq \frac{K^2}{2} \overline{H_3(K, 0)} \doteq \frac{K^3}{2} \{A_w - K(1 + k_3)V\}, \quad (7.7)$$

となるが、この時一方では (7.5) の関係があるので X_3 は無限に大きくなることになる。

一方でまた (7.5) は (6.11) からわかるようにこの場合波の強制力がなくなる。いわゆる波なしの条件でもあるから、同調周期と波なし周期はほぼ等しくかつこの時には振幅が無限に大きくなることがわかる¹¹⁾。

しかし (7.6) からわかるように、右辺の分母は H_3 が恒等的に 0 でなければ 0 にならないから $H_3(K, 0)$ が 0 になれば、すなわちこの方向にのみ波なしならば X_3 は 0 になる¹¹⁾。

縦揺れの場合は前後揺れがあまり関係しないと言う点を除けば前報の横揺れの場合によく似ていると考えられる。そしてあらゆる方向に波なしとすることはできないが一方方向にのみ波なしとすることは可能と思われる¹¹⁾。

8. 球の運動

4 節でのべたように 6 つの運動に対する附加質量と $H_j(K, \theta)$ がわかっていれば運動方程式はとけ、かつ漂流力まで求められる。

しかし従来の計算では附加質量とダムピングのみが与えられているので運動方程式を解くには一般には不充分である。

ただ球および垂直軸のまわりに軸対称な物体ではそれだけで運動方程式をとくには充分である。

簡単のために半径 r の半没球の場合についてのみ考え、 $\alpha = 0$ としておこう。

重心は 0 から l だけ下にあるとすると運動方程式は (7.2) で与えられるが、球に働く力はすべて原点 0 に働くこと、および (2.17) を考えると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (\nabla + f_{11})X_3 - lf_{11}X_3 &= -\frac{a}{K}H_1(K, 0), \\ \left\{ (\nabla + f_{33}) - \frac{A_w}{K} \right\} X_3 &= -\frac{a}{K}H_3(K, 0), \\ -lf_{11}X_1 + \left(\nabla c^2 + l^2 f_{11} - \frac{l}{K}\nabla \right) X_3 &= \frac{a}{K}lH_1(K, 0) \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

ただし $l_{20}/\rho g \nabla = c^2$ とする。またメタセンターは原点に一致するので l は同時にメタセンター高さでもある。

対称性から明らかに

$$\left. \begin{aligned} H_3(K, \theta) &= H_3(K), \\ H_1(K, \theta) &= iH_1(K)\cos\theta, \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

のようになるであろうから (4.9) によって、

$$\left. \begin{aligned} f_{11s} &= -\frac{K}{4}|H_1(K)|^2, \\ f_{33s} &= -\frac{K}{2}|H_3(K)|^2, \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

であり、従ってダムピングがわかれば波の強制力の絶対値はわかることになる。

さて (8.1) をとけばいわゆる増幅率の形で次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} Q_3 &= X_3/a = -D_3/\Delta_3, \\ \Delta_3 &= 1 + f_{33}|\nabla - A_w|K\nabla, \\ D_3 &= H_3(K)/K\nabla \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= X_1/a = -i D_1/\Delta_1, \\ Q_3 &= X_3/Ka = i D_3/\Delta_1, \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= (1+f_{11}/\varphi)(Kc^2/l-1)+Kl f_{11}/\varphi, \\ D_1 &= D_3(Kc^2/l-1), \\ D_3 &= H_1(K)/K\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

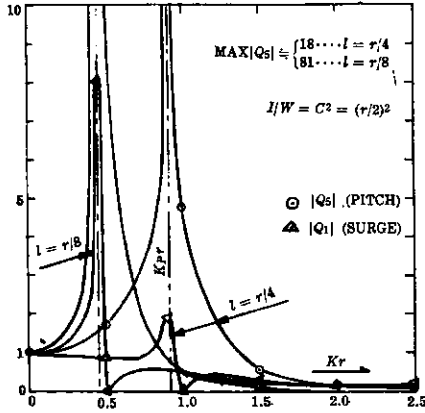
特に $l=0$ とすれば (8.5) は,

$$\left. \begin{aligned} X_3 &= 0 \\ Q_1|_{l=0} &= -i H(K)/K(\varphi+f_{11}), \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

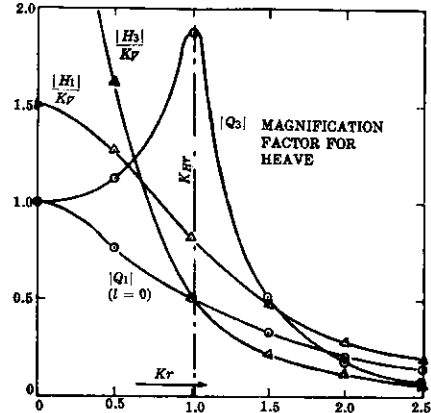
となる。

今仮りに $c = \frac{r}{2}$, $l=0$, $\frac{r}{4}$, $\frac{r}{8}$ において, W. D. Kim の計算⁴⁾を利用して運動を求

めたものを第2図, 第3図に図示する。



第 2 図



第 3 図

図のように特に縦揺れの倍率は l が小さくなると非常に大きい。

同調点では, 上下揺れの場合,

$$\left. \begin{aligned} K_H &= A_w/(\varphi + f_{33e}), \\ Q_3 &= -2i/K_H^2 H_3(K_H), \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

縦および前後揺れの場合,

$$\left. \begin{aligned} K_P &= l(\varphi + f_{11e})/\{c^2\varphi + (c^2 + l^2)f_{11e}\}, \\ Q_1 &= -4f_{11e}/\{K_P^2 \varphi \overline{H_1(K)}\}, \\ Q_3 &= -4(\varphi + f_{11e})/\{K_P^3 l \varphi \overline{H_1(K)}\}, \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

となるから後者では l が大きいほど, また K_P が大きいほど揺れ方は少ないことになる。

9. 結 論

以上を要約すれば、前進速度を持たないで波の中で揺れ動く船の運動を線型理論的に考えてみると、それは6自由度および反射波に関する速度ポテンシャルをそれぞれ独立に考えて重ね合わせればよい訳であるが、それらの中には独立でないものがあり、特に反射波のそれは他のものから導出することができることがわかった。

従って反射波の速度ポテンシャルは求めないでも運動方程式を解き、また漂流力を求めることができることになる。

逆にあらゆる方向、周期について波の強制力がわかっていれば Haskind の公式でダンプングが求められ、さらに Kramers-Kronig の公式で原理的には附加質量も求めることができる訳である。

このような関係を利用すれば波の中の船の運動に関する理論計算はかなり簡単化されるであろう。

参 考 文 献

- 1) M. D. Haskind: Technical and Research Bulletin, No. 1~12, SNAME (1953).
- 2) H. Maro: Journal of Ship Research, Vol. 4, No. 3 (1960).
- 3) J. N. Newman: Journal of Ship Research, Vol. 6, No. 3 (1962).
- 4) W. D. Kim: Journal of Fluid Mechanics, Vol. 21, Pt. 3 (1962).
- 5) J. Kotik and V. Mangulis: International Shipbuilding Progress, Vol. 9, No. 97 (1962).
- 6) H. Lamb: "Hydrodynamics" 6th ed. p. 166, Dover, New York.
- 7) 別所正利: 造船協会論文集 101号 昭和32年
- 8) 別所正利: 造船協会論文集 102号 昭和33年
- 9) 別所正利: 造船協会論文集 103号 昭和33年
- 10) 別所正利: 造船協会論文集 110号 昭和36年
- 11) 別所正利: 造船協会論文集 117号 昭和40年
- 12) 別所正利: 防衛大学校理工学研究報告 3巻1号 昭和40年

“On the Theory of Motions among Waves of a Ship Having No Advance Speed”

By Masatoshi BESSHO*

Abstract

The author tries to treat the theory of motions among waves of a ship having no advance speed systematically as far as possible, especially dealing with the boundary conditions of the velocity potentials.

Thus, he explains the method to derive the reflection potential of the incident wave from the potentials of other motions.

This enables us to solve the equation of motion by making use of the published data of the added mass and the damping coefficient of a body.

Thence, he calculates the motion of a half immersed sphere among waves, for example.

* Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering.