

波の中の船の横揺れ運動の理論について

(続 報)

別 所 正 利*

(昭和40年9月30日受付)

1. 序 言

前々報¹⁾では二次元筒状船について、Haskind の関係を利用して横揺れの運動方程式を解いて見た。

その結果いわゆる active resistance を考えに入れていない従来の Froude—Kriloff—渡辺の理論と形式的に一致することがわかった。

しかしこの理論から導かれる同調横揺れ角は後出のように波長の大きい所では異常に大きくなって実際の現象と一致するとは思われない。

一方田才によれば三次元物体では理論と実験との一致は良好であると言う^{2), 3)}ので、さらに三次元問題について系統的に検討して見なければ断定的な結論は出せない。

しかし菱田の計算⁴⁾を見ると船首尾近くの方が中央部付近よりずっと大きい波をつくるようであるから、このためにこのような一見相反する結果が出て来るのかも知れない。

したがってこの点は粘性抵抗をも考えに入れて検討して見る必要があるであろう。

いずれにしても田才、菱田の計算と実験との一致から推して考えれば、造波抵抗理論そのものの妥当性は疑がうことができないと思われる。

このような事情を考え合わせると、結局今の段階では全体としての運動を求めるのは場合によって難かしいが、水が船におよぼす個々の力などについては理論がかなり正しい数値を与えてくれるものと予想される。

そこで本報ではやはり簡単のために二次元問題に限って具体的に Lewis Form をとりあげて、特に波長の大きい所で諸種の力が船型によってどのように変わるかを調べて見た。

またさらにいわゆる有効波傾斜係数が波長の大きい所でどのように変化するかを検討し、その結果から波の強制モーメントを少なくする方法について検討して見た。

2. 速度ポテンシャルの定義

本報では前々報¹⁾と少し異なり、前報²⁾のものにほぼ等しい記号などを採用したので本

* 防衛大学校機械工学教室 助教授

節と次節では諸種の定義を掲げることにする。

まず速度ポテンシャルを

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, t) &= \Re \{ \varphi(x, y) e^{i\omega t} \} \\ \varphi(x, y) &= \varphi_0(x, y) + i\varphi_s(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

とおくと、圧力、水面変位は、

$$P(x, y, t) = \Re \{ \rho i \omega \varphi(x, y) e^{i\omega t} \}, \quad (2.2)$$

$$\eta(x, t) = \Re \left\{ \frac{\omega}{ig} \varphi(x, 0) e^{i\omega t} \right\}, \quad (2.3)$$

のように与えられる。

ここに $\omega = 2\pi/\tau$, τ は周期, g は重力の常数, ρ は水の密度とする。

また座標系は第1図のようにとり、原点は平均水面上、図形の中心におくものとする。

さて φ は水面において

$$K\varphi(x, 0) + \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, 0) = 0, \quad (2.4)$$

なる条件を満足し、かつ x の無限に大きい所で次のような波を持つ調和函数である。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y) &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} iH^+(K)e^{-Ky - iKx}, \\ &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} iH^-(K)e^{-Ky + iKx} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

ここに

$$H^\pm(K) = \int_C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-Ky \pm iKx} dS, \quad (2.6)$$

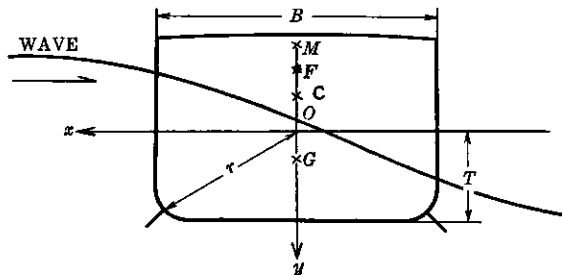
であって、 C は物体と水との境界の曲線を示すものとする。

したがって (2.3) によって発散波の振幅は

$$\eta(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \Re \left\{ \frac{\omega}{g} H^\pm(K) e^{-Ky \pm iKx + i\omega t} \right\} \quad (2.7)$$

で与えられる。

さて線型理論の立場ではポテンシャルは、それぞれの自由度に対応するものと入射波の散乱に対応するものとの重ね合わせで表わされるから、次のように各自由度に対応する速度ポテンシャルを定義しておくと便利である。



第1図

- i) x 軸に平行な動揺に関する量を添字 1 で表わすこととし、その振幅を $Xe^{i\omega t}$ とする。

境界条件は

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = i\omega X \frac{\partial x}{\partial n}$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(x, y) &= i\omega X \phi_1(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi_1 &= -\frac{\partial x_1}{\partial n}, \quad x_1 \equiv x \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

とおくと ϕ_1 は単位振幅速度に対する速度ポテンシャルである。

- ii) 原点のまわりの回転動揺に関する量を添字 3 で表わし、その振幅を $\theta e^{i\omega t}$ とおき、同様に

$$\left. \begin{aligned} \phi_3 &= i\omega \theta \phi_3 \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi_3 &= -\frac{\partial x_1}{\partial n} = x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n}, \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

のように ϕ_3 を定義する。

(この定義は前々報と符号が逆になっているので、後出の式も少しずつ異って来る)

- iii) 重心のまわりの回転動揺に関する量は添字 5 で表わすことにすると、振幅はやはり $\theta e^{i\omega t}$ であるから、

$$\left. \begin{aligned} \phi_5 &= i\omega \theta \phi_5 \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi_5 &= x \frac{\partial}{\partial n} - (y-l) \frac{\partial x}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

となり、したがって

$$\phi_5 = \phi_3 - l \phi_1, \quad (2.11)$$

である。

ここに l は原点から重心までの距離である (水面下方に正と取る)。

- iv) x の正の方向からの入射波はその振幅を a とすると

$$\phi_0(x, y) = \frac{iga}{\omega} \phi_0(x, y), \quad \phi_0(x, y) = e^{-\kappa y + i\kappa x} \quad (2.12)$$

で与えられ、その物体による反射波 ϕ_4 は

$$\left. \begin{aligned} \phi_4(x, y) &= \frac{iga}{\omega} \phi_4(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial n} (\phi_0 + \phi_4) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

のような境界条件を満足しなければならない。

最後に上下動は今の場合関係ないので省略する。

3. 力とモーメントの定義⁽¹⁾⁽²⁾

運動 i による j 方向の力あるいはモーメントを F_{ij} と書くことにすると

$$F_{ij} = -\rho i \omega \int_c \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} dS = \rho \omega^2 X_i \int_c \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} dS, \quad i, j = 1, 3, 5, \quad (3.1)$$

ここに $X_1 \equiv X_1$, $X_3 \equiv \theta$, $X_5 \equiv \theta$ とする。

そこで

$$f_{ij} = \frac{F_{ij}}{\rho \omega^2 X_i} = \int_c \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} dS = - \int_c \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} dS, \quad (3.2)$$

のような量を定義しておく。

波の強制力およびモーメントを E_j とすると同様にして

$$\left. \begin{aligned} E_j &= -\rho i \omega \int_c (\phi_0 + \phi_i) \frac{\partial x_j}{\partial n} dS = \rho g a e_j, \\ e_j &= - \int_c (\phi_0 + \phi_i) \frac{\partial}{\partial n} \phi_j dS, \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

のように e_j な量を導入しておこう。

そうすると

$$f_{ij} = f_{ji}, \quad (3.4)$$

$$e_j = -H_j^+(K), \quad (3.5)$$

ここに

$$H_j^{\pm}(K) = \int_c \left(\frac{\partial}{\partial n} \phi_j - \phi_j \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-K y \pm i K x} dS, \quad (3.6)$$

なる関係がある。

今単位振幅の運動によって起こされる発散波の振幅を A とすると (2.7) によってこれは上の H と次のような関係がある。

$$A_j = K H_j^+(K), \quad (3.7)$$

また、今の場合 ϕ_1, ϕ_3 などはすべて左右対称であるから定義式から明らかに

$$H_j^+(K) = -H_j^-(K), \quad j = 1, 3, 5, \quad (3.8)$$

であり、したがって前々報によって

$$\mathcal{J}\{f_{ij}\} = f_{ijs} = -H_i^+(K) \overline{H_j^+(K)}, \quad (3.9)$$

なる関係がある。

特に $i = j$ とするとこれはダムピングである。今 X_j なる運動に対して働らく速度に比例する抵抗を $\omega X_j N_j$ の形にかくとすると次の関係が成立つ、

$$-f_{jjs} = N_j / \omega = |H_j^+(K)|^2 = |A_j / K|^2, \quad (3.10)$$

また

$$\left. \begin{aligned} e_3/e_1 &= H_3^+(K)/H_1^+(K) = l_w, \\ e_5/e_1 &= l_w - l \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

とおくと l_w は実数値をとるから波による強制モーメントは水平強制力と同位相である。

これらの式と (3.9) を使って、

$$\left. \begin{aligned} f_{33S}/f_{13S} &= f_{13S}/f_{11S} = l_w, \\ f_{35S}/f_{15S} &= f_{15S}/f_{11S} = l_w - l_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

となるから、例えば H_3^+ と H_1^+ とがわかっていれば f_{ij} の虚数部はすべて計算できる。

最後に f_{ij} の実部は付加質量のような項であるから次のように書いておこう。

$$\left. \begin{aligned} f_{11c} &= \int_c \phi_{1c} \frac{\partial x}{\partial n} dS = k_1(K) \nabla, \\ f_{13c} &= \int_c \phi_{1c} \frac{\partial x_3}{\partial n} dS = k_1(K) l_1(K) \nabla, \\ f_{33c} &= \int_c \phi_{3c} \frac{\partial x_3}{\partial n} dS = k_1(K) \kappa_3^2(K) \nabla, \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

ここで ∇ は船の水面下の断面積とする。

このようにおくと、 k_1 は横方向の付加質量係数、 l_1 は横方向の付加質量の中心、 κ_3 は回転付加慣性の慣性半径となる。

4. 力とモーメントについて

横揺れの問題では船幅に比して波長はずっと大きいのが普通であるから $K=0$ の極限の速度ポテンシャルを近似値として用いて種々の量を計算できる。

この時の誤差は K のオーダーであることがわかっている¹⁴⁾。

一方ダムピングは K^2 のオーダーであるので、この近似ではダムピングは無視してもよいことになる。

付録 A には Lewis form について (3.12) の定義による k_1, l_1, κ_3 となどの計算例を示してある。

(これらの式はすでに文献に与えられているものであるが便宜上まとめて記しておいた) 波の強制力は次式で与えられる²¹⁾。

$$\begin{aligned} H_1^+(K) &\doteq iK \int_c \left(x \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \phi_1 \frac{\partial x}{\partial n} \right) dS \\ &= -iK \nabla (1 + k_1), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} H_3^+(K) &\doteq iK \int_c \left(x \frac{\partial \phi_3}{\partial n} - \phi_3 \frac{\partial x}{\partial n} \right) dS \\ &= -iK \nabla (\overline{OM} + k_1 l_1), \\ l_w &\doteq (\overline{OM} + k_1 l_1) / (1 + k_1), \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

ただし $\overline{OM}$ は原点からメタセンター M までの距離とし M が水面下にある場合を正とする。

したがって

$$\left. \begin{aligned} \overline{OM} \nabla &= - \int_c x \frac{\partial \phi_3}{\partial n} dS = \int_c \left(xy \frac{\partial x}{\partial n} - x^2 \frac{\partial y}{\partial n} \right) dS \\ &= \overline{OB} \nabla - \overline{BM} \nabla, \quad \overline{BM} = B^2/12, \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

ここに B は船幅とし、 $\overline{OB}$ は原点から浮心 B までの、 $\overline{BM}$ は浮心からメタセンターま

での距離とする。

参考のために $K \rightarrow \infty$ の極限を考えれば、波の影響は波長より深い所までは届かないと考えられるから、この場合は水面付近を除いて $K = \infty$ の速度ポテンシャルで近似できると考えられる。

したがって H_3^+ を除けば付録 B のように諸量の近似値が求められる。

H_3^+ は次に示すように水面付近のポテンシャルによって決まる。

すなわち K が十分大きいと、物理的に考えて、右方に出て行く波と左方に出て行く波は全く干渉しないと思われるから、船が水線付近で垂直な船側を持っているとすれば T. H. Havelock の式によって^{13) 15)}

$$\begin{aligned} H_1^+(K) &\doteq 2 \int \frac{\partial \phi_1}{\partial x} e^{-Ky + \frac{iKB}{2}} dy = -2 \int_0^\infty e^{-Ky + \frac{iKB}{2}} dy \\ &= -\frac{K}{2} e^{\frac{iKB}{2}}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$H_3^+(K) \doteq 2 \int_0^\infty \frac{\partial \phi_3}{\partial x} e^{-Ky + \frac{iKB}{2}} dy = -\frac{2}{K^2} e^{\frac{iKB}{2}}, \quad (4.5)$$

となるから、また

$$l_w \doteq \frac{1}{K}. \quad (4.6)$$

のような近似式が求められる。

これらの式は垂直平板の解析的解¹⁸⁾と比較して見ると $KT \geq 5$ (T は吃水) すなわち吃水が波長に比して大きい所ではかなり正確な近似値を与えていることがわかる。

さて付録 A, B の計算結果を見るとこれらの諸量について次のようなことが言える。

i) $K = 0$ における x 方向の付加質量の中心 C は幅の極端に狭い場合を除けば常にメタセンター M の下側にある。特に楕円の場合は M と C は一致し、したがって下記の F 点も一致する。

ii) $K = 0$ の極限における波の強制力の中心 F は M と c を $1:k_1$ に内分する点にある ((4.2) 式によって)。

したがってこの F 点で船を支えれば波による傾斜モーメントはなくなる。一方 Haskind の関係によればこの時造波ダムピングもなくなる¹¹⁾。

菱田は重心を中心とする回転運動による造波ダムピングが重心の上下によって変化する様子から船型を (+) 型と (-) 型の二つの類型に分けている¹²⁾ が上記の事情を考えると、これはまた M と C の距離が大きい場合が (+) 型、ほとんど一致する場合を (-) 型と呼んでいることになる。

またこの分類は渡辺による運動の上からの分類¹⁾ (幅の広い浅吃水船と幅の狭い深吃水船) とも略々一致する。

iii) Kramers-Kronig の関係¹⁸⁾ から明らかなように、

$$k_1(0) > k_1(\infty) \quad (4.7)$$

となっている。

また K の小さい所では付録 D に示すように同じ関係によってその変化の様子を知ることができる。

$k_1(0)$ も $k_1(\infty)$ も幅吃水比と面積係数によって大きく変化する。

このうち面積係数による変化については楕円に近い所で極小値を示す。

iv) 重心に関する付加慣性モーメントは (2・11), (3・2), (3・13) などを用いて,

$$\begin{aligned} f_{ss_0} &= (k_1 \kappa_s^2 - 2l k_1 l_1 + l^2 k_1) \nabla \\ &= \{\kappa_s^2 - l_1^2 + (l - l_1)^2\} k_1 \nabla, \end{aligned} \quad (4 \cdot 8)$$

と書けるから, $l = l_1$, すなわち重心が C に一致した時に最も小さくなる。

換言すれば C 点は付加慣性モーメントの極小な点である。

v) l_1 は $K = 0, \infty$ の両値も, また田才⁷⁾, 田村²⁰⁾の計算値を参照しても K による変化は小さいものと考えられる。

vi) l_w は K が十分大きい所では (4・6) によって与えられるから, F 点はいつでも水面の少し下に来ることになる。しかし K のかなり大きい所まで l_1 と同じ程度の変化を示すもののようである^{7) 20)}。

5. 運動方程式⁽¹⁾

横揺れと左右揺れの運動方程式は $e^{i\omega t}$ の因子を除いて次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\omega^2}{g} WX &= F_{11} + F_{15} + E_1 \\ -\frac{\omega^2}{g} I\theta + W\overline{GM}\theta &= F_{51} + F_{55} + E_5, \end{aligned} \right\} \quad (5 \cdot 1)$$

ここに $W = \rho g \nabla$, $I = W \kappa^2$ すなわち単位長さ当りの重量慣性モーメントとする。

3節の定義を代入すれば

$$\left. \begin{aligned} (\nabla + f_{11})X + f_{15}\theta &= \frac{a}{K} H_1 + (K) \\ \left(\nabla \kappa^2 + f_{55} - \frac{\overline{GM}}{K} \nabla \right) \theta + f_{51}X &= \frac{a}{K} H_5 + (K) \end{aligned} \right\} \quad (5 \cdot 2)$$

となるから, この解は

$$X/a = E_1/D_1, \quad \theta/\theta_w = E_5/D_1, \quad \theta_w = Ka, \quad (5 \cdot 3)$$

の形にかけろ。ここに

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \frac{\nabla}{K} \left\{ \left(\kappa^2 + k_1 \kappa_s^2 - \frac{\overline{GM}}{K} \right) - k_1 (l_1 - l)(l_w - l) \right\} H_1 + (K), \\ E_5 &= \frac{\nabla}{K^2} \left\{ (1 + k_1)(l_w - l) - k_1 (l_1 - l) \right\} H_5 + (K) \end{aligned} \right\} \quad (5 \cdot 4)$$

ただし $f_{ss_0} = k_1 \nabla \kappa_s^2$ とする。

$$\left. \begin{aligned} \mathscr{D}\{D_1\} &= \left\{ \left((1 + k_1) \left(\kappa^2 + k_1 \kappa_s^2 - \frac{\overline{GM}}{K} \right) - k_1^2 (l_1 - l)^2 \right) \nabla^2, \right. \\ -\mathscr{J}\{D_1\} &= \left\{ \left(\kappa^2 + k_1 \kappa_s^2 - \frac{\overline{GM}}{K} \right) + (1 + k_1)(l - l_w)^2 \right. \\ &\quad \left. \left. - 2k_1 (l_1 - l)(l_w - l) \right\} \nabla |H_1 + (K)|^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5 \cdot 5)$$

のように計算できる。

特に同調時には

$$\mathcal{R}\{D_1\} = 0$$

となるから、上式から

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{K^* |E_s|^2}{i(1+k_1)}, \\ E_1 &= -\frac{Kk_1(l_1-l)}{(1+k_1)} E_s, \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

となり、(5.3) は

$$\left. \begin{aligned} \theta/\theta_w &= i(1+k_1) \nabla / K^* \bar{E}_s, \\ X/a &= -ik_1(l_1-l) \Delta / K^* \bar{E}_s, \\ \theta/KX &= -(1+k_1)/\{Kk_1(l_1-l)\}, \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

となる。

以上はもちろん粘性のない場合の解であるが、粘性がある場合でも付加質量や波の強制力などはこの理論で与えられるものとあまり違わないと考えられる。

したがって、粘性によるダムピングがなんらかの方法で推定できれば(5.1)にそれを考慮すれば運動が求められることになる。

波による傾斜モーメントは明らかに E_s に比例するから粘性がなければ E_s が 0 になると(5.7)によって無限に大きく横揺れすることになる⁹⁾。

しかし造波以外のダムピングがあれば彼による傾斜モーメントがなくなれば横揺れしないことになる⁹⁾。

さて(5.1)あるいは(5.2)において第一式を消去して波による傾斜モーメント M を計算すると

$$\frac{M}{\rho g \nabla \theta_w} = \frac{-i K E_s}{(1+k_1) \nabla^2} = \frac{1}{i K \nabla} \left[l_w - \frac{l+k_1 l_1}{1+k_1} \right] H_1 + (K) \quad (5.8)$$

と与えられるが従来¹⁾の理論ではここで有効波傾斜係数 γ を導入して

$$M/\rho g \nabla \theta_w = \gamma \overline{GM}, \quad (5.9)$$

とおいているから、これになぞらえると上の二式から

$$\gamma = \frac{i}{K \overline{GM} \nabla} \left[l_w - \frac{l+k_1 l_1}{1+k_1} \right] H_1 + (K), \quad (5.15)$$

となり、実際 $K \rightarrow 0$ では(4.1)および(4.2)第2式によって従来通り $\gamma = 1$ となる¹¹⁾。

この γ を使い、さらに(7.4)を使って(5.7)第1式を書きなおすと

$$\left| \frac{\theta}{\theta_w} \right| = \left(\frac{\pi}{2} \gamma \right) / \left(\frac{\Delta \theta}{\theta} \right), \quad (5.11)$$

となるが、この形にしておけば粘性によるダムピングがある場合にも成立つと考えられる。

最後に(5.7)第3式から、 θ と X とは $l_1 > l$ すなわち付加質量中心 C が G の下にあれば逆位相となり、 $l_1 > l$ すなわち C が G の上にあれば同位相となることがわかる。

一方前節でのべたように楕円程度にやせた船では C と M はほとんど一致するから当然大抵の場合 C は G の上にあることになり、 θ と X は同位相となることになると考えられ、幅の広い肥えた船ではむしろその逆になると考えられる。

前者は渡辺が幅の狭い船の、後者は幅の広い船の揺れ方として分類したものである¹⁾。

このような揺れ方の相違によって、例えば幅の広い肥った船では左右揺れの反力が波による傾斜モーメントを減殺するように働いていると考えられる。

しかしこの場合でも K の小さい時はメタセンターに関するモーメントを考えると C 点に働く左右動の付加慣性力と F 点に働く波の強制力が (4.2) 式によって互に打消し合うので結局静的傾斜モーメント $W\overline{GM}\theta_w$ だけが残ることになる。

6. r 係数

この r 係数については幸い割合簡単に次のように $K=0$ のポテンシャルから近似値が求められる。

(5.11) をもう一度かくと

$$r\overline{GM} = \frac{i}{K\overline{V}} \left[-H_3 + (K) + (l + k_1 l_1) \frac{H_1 + (K)}{1 + k_1} \right] \quad (6.1)$$

であるが、この右辺で重心に関係するのは $l = \overline{OG}$ のかかった項だけであるので、上式を分解して

$$r\overline{GM} = r_s \overline{OG} - r_m \overline{OM}, \quad (6.2)$$

$$r_s = \frac{i H_1 + (K)}{K(1 + k_1)\overline{V}}, \quad (6.3)$$

$$r_m \overline{OM} = \frac{i}{K\overline{V}} \left[H_3 + (K) - \frac{k_1 l_1}{1 + k_1} H_1 + (K) \right], \quad (6.4)$$

と書くと、 r_s 、 r_m は重心位置に関係しないから、この形の方が便利であろう。

なお (6.4) はまた

$$r_m \overline{OM} = r_s \{(1 + k_1) l_w - k_1 l_1\}, \quad (6.5)$$

のようにも書ける。

第2図に二、三の例を田才の計算値⁷⁾ を使って計算したものを示す。

さて (3.6) の被積分関係の e の項を展開して (4.1), (4.2) のさらに次の項まで求めると

$$i H_1 + (K)/K \doteq (1 + k_1)\overline{V} - K \int_c \left(\phi_1 \frac{\partial xy}{\partial n} + xy \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right) dS. \quad (6.6)$$

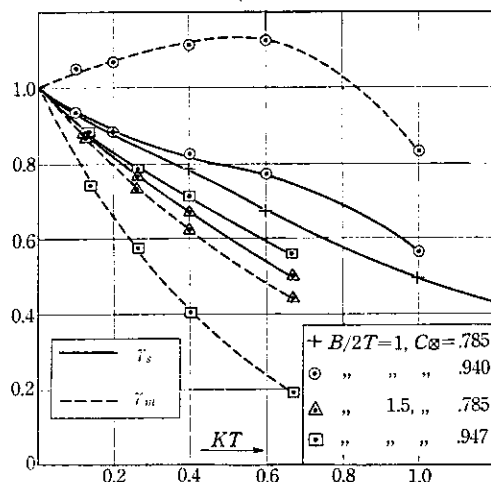
$$i H_3 + (K)/K \doteq (\overline{OM} + k_1 l_1)\overline{V} - K \int_c \left(\phi_3 \frac{\partial xy}{\partial n} + xy \frac{\partial \phi_3}{\partial n} \right) dS. \quad (6.7)$$

となる。

これらを (6.3), (6.4) に代入すると

$$r_s \doteq 1 - KA, \quad (6.8)$$

$$A = \frac{1}{(1 + k_1)\overline{V}} \int_c \left(\phi_1 \frac{\partial xy}{\partial n} + xy \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right) dS. \quad (6.9)$$



第 2 図

$$\gamma_m \doteq 1 - KC. \quad (6.10)$$

$$\overline{OMC} = -k_1 l_1 A + \frac{1}{V} \int_c \left(\phi_s \frac{\partial xy}{\partial n} + xy \frac{\partial x_s}{\partial n} \right) dS. \quad (6.11)$$

となって γ_s, γ_m の第1近似1に対する第2近似値が求まることになる。

しかも ϕ_j の虚部は実部に比して小さいから、これに $K=0$ の速度ポテンシャルを代入してもよい。

付録 C に A, C などの計算を示してある。

第2図の例についてこれらの近似値を入れて見ると、一、二の点を除き大体 $KT=0.3$ 位までよくあうようである。

さて (6.9), (6.11) において ϕ_j および k_1 を 0 とおけば従来の理論式になって、今それらに (') をつけて区別することにする

$$\gamma' \overline{GM} = \gamma_s' \overline{OG} - \gamma_m' \overline{OM}, \quad (6.12)$$

$$\gamma_s' \doteq 1 - KA' \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad (6.13)$$

$$A' = \frac{1}{V} \int_c xy \frac{\partial x}{\partial y} dS = \overline{OB},$$

$$\gamma_m' \doteq 1 - KC' \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad (6.14)$$

$$C' = -\frac{1}{\overline{OM}V} \iint_V (x^2 - y^2) dx dy,$$

となる。これは渡辺の式から誘導できるものと少し異っているが、そこに記されているフルードの式と一致する。

なお渡辺の式では K のもっと高次の項までとってあるが、(6.8) から (6.11) までの式とこれらの式とからすぐわかるように、フルード・クリロフ・渡辺理論では K のオーダーですでに誤差が出ているのであるから、厳密に言えば $\gamma \doteq 1$ としなければならない訳である。

さてもとにかえて (6.2) に $\overline{OG} = \overline{OM} + \overline{GM}$ を代入すると

$$r\overline{GM} = r_s\overline{GM} + (r_s - r_m)\overline{OM}, \quad (6.15)$$

これに (6.8), (6.10) を代入すると

$$r = r_s + K(C-A)\overline{OM}/\overline{GM}, \quad (6.16)$$

と書けるが、普通の船では $\overline{OM} < 0$, $\overline{GM} > 0$, $C > A$ であるから大抵の場合 $r < r_s$ である。

特に $r = 0$ となるためには

$$-\overline{OM}/\overline{GM} = (1-KA)/K(C-A), \quad (6.17)$$

であればよい。

横揺れの問題では普通付加慣性半径は小さくて同調点における K はほぼ $\overline{GM}$ に比例するから慣性半径を κ とすると

$$K = \frac{\overline{GM}}{\kappa^2}, \quad (6.18)$$

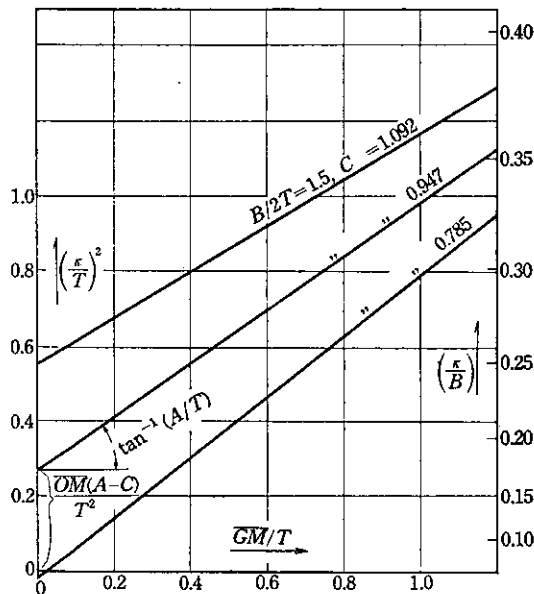
とおいても右辺はほとんど K に無関係となるであろう。

上式を (6.17) に代入すると

$$\kappa^2 = \frac{\overline{GM}}{K} = A\overline{GM} - (C-A)\overline{OM}, \quad (6.19)$$

と書けるから、仮に κ が K に無関係とすると第3図の直線上にのるように重心と慣性半径を選べば $r = 0$ となる。

以上は近似的な方法であるが、正確な計算値が得られる場合は (6.2) に (6.5) を代入す



第3図

ると $GM \approx 0$ として $\gamma = 0$ となるためには

$$\left. \begin{aligned} \gamma_s &= 0, & \text{あるいは} \\ \overline{OG} &= (1+k_1)l_w - k_1 l_1 \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

のどちらが成立てばよい。

このうち第1式の場合は今の所あまり見込みはなく¹⁰⁾、第2式の場合が上述の場合にあたり、 k_1, l_1, l_w が与えられている場合はこの式からただちに $\gamma = 0$ となるような重心位置を計算できるわけである。

しかし (4.2) によって $K = 0$ の極限では上式の右辺は $\overline{OM}$ に等しくなるのでこの条件は $\overline{GM} = 0$ を意味することになり K の小さい所では $\gamma = 0$ とすることは実際面ではなかなか困難なことであると予想される。

付録 C の値を利用して近似的に計算しても確かに K の小さい値で $\gamma = 0$ とするのは難しい。

7. 実験について

動揺の実験的研究には一般に強制、自由の二種類の動揺試験が考えられるが、横揺れの問題では特別の場合を除いてダмпピングが非常に小さいので強制動揺試験は難かしくてあまり適当ではないのでここでは触れない。

さて自由動揺の運動方程式は (5.2) の右辺を 0 とおいて

$$\left. \begin{aligned} (\overline{V} + f_{11})X + f_{1s}\theta &= 0, \\ \left(\overline{V}\kappa^2 + f_{ss} - \frac{GM\overline{V}}{K}\right)\theta + f_{s1}X &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

で与えられることになるが、これは厳密な意味では運動方程式でなくて、波数 K で単振動している時の高次の項を一部省略した力の釣合の式と考えるべきである。

さて第1式から

$$\frac{X}{\theta} = -\frac{f_{1s}}{(\overline{V} + f_{11})},$$

を得るが、上述のようなこともあり、また K の小さい所を考えるとすればこの右辺の量の虚部は小さいはずであるから

$$\frac{X}{\theta} \doteq -\frac{f_{1sc}}{(\overline{V} + f_{11c})} = \frac{k_1(l-l_1)}{(1+k_1)}, \quad (7.2)$$

としてもよいように思われる。これは (5.7) 第3式つまり波浪中同調時の X と θ の比に等しいからこの二つの場合において船の運動は互いに相似になっていることがわかる。

これを第2式に代入すれば

$$\frac{\overline{GM}}{K} = \kappa^2 + \frac{f_{ssc}}{\overline{V}} - \frac{k_1^2(l-l_1)^2}{(1+k_1)} \quad (7.3)$$

がえられ、これは (5.5) 第1式の右辺を 0 とおいたものつまり、同調のための条件式に等しいから、この式によって自由動揺の周期が波浪中の同調周期に等しいことがわかる。

これらのことから自由動揺によって失われるエネルギーは同調時において失われるものと

同じであるはずである。

さて一揺れの間に失われる波のエネルギーは

$$\frac{\rho g \lambda}{4} |\theta A_s + X A_1|^2 = \frac{\pi \rho g K}{2} |\theta H_s + X H_1|^2,$$

であり、同じく位置のエネルギーは

$$\rho g V \overline{GM} \theta \Delta \theta$$

であるから両式を等置して (7.3) を代入し, (5.8), (5.10) などを利用すれば

$$\Delta \theta / \theta = \frac{\pi}{2} K^3 r^2 \overline{GM} V, \quad (7.4)$$

となり, $\Delta \theta / \theta$ を測定すればこの式で r が求まることになる。

今この右辺に実際の値を代入して見ると, r をかりに 1 とおいても普通は非常に小さくなって実用的な値にならない。

したがって最初に述べたように今後検討しなければならない点である。

しかし逆にこの式で右辺の r が例えば次に述べるような方法で求められると, 実験的に造波ダмпピングが求められることになるから, これでダмпピングの相似則の検討ができることになるかも知れない。

付加慣性などを求めるためにはこの試験だけでは不定で例えば k_1 の直接測定のような実験を追加しなければならない²⁾。

そのような訳でもし粘性がなければ (7.4) 式によって自由動揺試験から波の強制力が求められるのであるが, 実在の流体ではこれは不可能であるから別個にそれを求めなければならない。

元良らはこの目的で角変位のみを拘束して船の波浪中における傾斜モーメント M を測定する方法を提案した³⁾。

それを (5.2) で考えると

$$\left. \begin{aligned} (\nabla + f_{11}) X &= \frac{a}{K} H_1 + (K), \\ f_{13} X &= \frac{a}{K} H_s + (K) + \frac{M}{\rho g K}, \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

となり, 第 1 式から

$$\frac{X}{a} = \frac{H_1 + (K)}{K(\nabla + f_{11})}, \quad (7.6)$$

がえられ, これを第 2 式に代入して

$$\frac{M}{\rho g K a} = -\frac{H_s +}{K} + \frac{f_{13} H_1(K)}{K(\nabla + f_{11})}, \quad (7.7)$$

となるが, これは (3.10), (3.12) を代入して整理すると (5.8) と同じものになる。

また (7.6) は (6.3) の定義によって

$$\frac{X}{a} = -i \gamma_s, \quad (7.8)$$

となる。

したがって M と X を測定すれば (5.9), (7.8) によって, r と r_* が求められ, さらに (6.2) によって r_m も求まるから, 重心の変化による r の変化も推定できることになる。

波の強制力を求める方法はこの他にも一, 二考えられるが, この方法のように巧妙なものは見つからないようである。

8. ビルジキールの効果について

従来の考え方ではビルジキールは付加慣性を幾分増加させる他には, ただ単に渦抵抗を与えるものとしての役割しか果たし得なかった。

しかし菱田によれば³⁾ ビルジキールは造波抵抗に大きい影響をおよぼすと言われるので当然波の強制力, すなわち r 係数にも大きい変化を与え得るはずである。この間の事情は元良らの上下動に関する研究におけるフィンの効果と同じようなものがあり得ると考えられる⁹⁾。

さてまずビルジ部に原点 0 から距離 r の所に幅 b のビルジキールが左右一組着いている場合を考えよう。

また簡単のために r は水線と 45° の角をなしているものとするがこの簡単化によって次の考察が全く誤った結論になるとは思えない。

まずビルジキールによって付加算量係数 k_1 は Δk_1 だけ増えると考えられるが, それは例えば次のように与えられるであろう。

$$\Delta k_1 = \alpha \frac{8\pi b^2}{V}, \quad (8.1)$$

ここに $2\pi(2b)^2$ は船体表面に関する鏡像効果を考えたビルジキールの付加質量を左右一組あるから 2 倍したものであり, α はさらにビルジ部の速度増加によってその効果が増大する影響や流れの方向による影響などを考えた係数とする。

そうすると肥っていればいるほど α は大きくなるであろうが, 大体において 1 に近い値と考えてよからう。

次にこのビルジキールによって左右揺れをする時の横揺れモーメントは大体

$$k_1 l_1 \rightarrow k_1 l_1 + r \Delta k_1, \quad (8.2)$$

のように増すと考えられるから, 付加質量の中心は下に下がることになる。

一方 r が x 軸と 45° の角をなすと仮定したからビルジキールの上では

$$\frac{\partial}{\partial n}(xy) = 0$$

となるので (6.5), (6.7) の右辺の積分はビルジキールがある場合もほとんど元と同じになると考えられる。

したがって A および C の変化は (8.1), (8.2) の変化に基づく分だけ考えれば良く, まず (8.1) と (8.9) から

$$\left. \begin{aligned} A &\rightarrow A + \Delta A = \frac{A(1+k_1)}{1+k_1+\Delta k_1}, \\ \Delta A &\doteq -\frac{\Delta k_1}{1+k_1}, \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

であるから、 A は小さくなりしたがって r_m は大きくなる。

また (8.2) を使って、定義式 (6.11) から

$$\left. \begin{aligned} C &\rightarrow C + \Delta C \\ \Delta C &= \frac{\Delta(k_1 l_1 A)}{\overline{MO}} = \frac{A \Delta k_1}{\overline{MO}} \left(r - \frac{k_1 l_1}{1+k_1} \right), \\ \overline{MO} &= -\overline{OM}, \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

が得られるが ΔC はこの式から普通は正であると考えられるので C は大きくなり、したがって r_m は小さくなる。

さらに、両者の差をとると

$$C + \Delta C - (A + \Delta A) = C - A + A \Delta k_1 \left(\frac{r - \frac{k_1 l_1}{1+k_1}}{\overline{MO}} - \frac{1}{1+k_1} \right), \quad (8.5)$$

となるので $\overline{MO}$ があまり大きくなければ大体これは正になると考えてよからう。

これを第3図について考えると $r=0$ に対する $(\kappa/T)^2$ の直線が全体として上にあがりかつ傾斜が小さくなると考えられ、このことは普通は r が小さくなることを意味するであらう。

付録 C の計算結果を見ると一般に肥っているほどすなわち水面下に排水量が多いほど r は小さくなる傾向が著るしいから上述の考察はこの傾向と矛盾しない。

以上をまとめて言えばビルジキールの付加質量効果は r_m を大きくするけれども r_m は小さくし、結果としては r が小さくなる方向に働く。

この時やせた船に比して肥った船では (8.1) の α が大きくなるので Δk_1 が大きく、 r が大きいしまたメタセンタが低いので式から ΔC , $-\Delta A$, $\Delta C - \Delta A$ はすべてより大きくなるので r はより小さくなると考えられて従来の実験的結果と矛盾しない。

このように r_m はビルジキールを着けると大きくなると考えられるが、これを小さくするには (6.9) 式から考えて船底にパーキールを着ければよいことになる。

この場合も上と同じように取扱うことができやはり r_m も小さくなるようであるが詳説は略する。

また船側にフィンを着けた場合はこのような考え方からは α が小さくなるから当然この面の効果はわずかであると考えらるし、またそれが水面に近いと造波効果が大きくなると考えられる。ところがハスキントの関係からすればこの効果は波の強制力を増すことになるので両々あいまって上のような効果は少なくなるかあるいは逆にないと予想される。

以上の事情を直観的に考えれば5節の最後に述べたように次のように言えよう。

すなわちビルジキールをつけるとメタセンタはそのままに左右揺れが喰いとめられる。

その結果船は水から反力を受けるが、そのモーメントは波の傾斜モーメントを相殺する方向に働くので全体として見ると波の強制モーメントが小さくなる。

9. 結 言

以上船が無限に長い二次元筒体で代表される場合について考察した結果を列挙すれば

- i) $K \rightarrow 0$ の極限で付加質量の中心 C は楕円ではメタセンター M に一致するが、普通 M の下にあり、波の強制力の中心は $\overline{CM}$ を $1:k_1$ に内分する点である。
 ii) 波の傾斜モーメントは従来の理論のように静的傾斜モーメントの γ 倍と言う形に表わされるがこれを分解して

$$\gamma \overline{GM} = \gamma_s \overline{OM} + \gamma_m \overline{OM}$$

と言う形にすると、 γ_s, γ_m は重心位置に関係しない関数となって便利である。

- iii) この時 γ_s, γ_m は角変位のみを拘束した横揺れモーメント測定試験によって実験的にも求めることができる。
 iv) γ を 0 にするような重心位置と慣性半径の組合せがあるが一般にはこれは周期の非常に小さい所になる。
 v) ビルジキールには波の強制モーメントを小さくする効果が考えられる。

三次元問題にこれらの結論を直接適用できないのは言うまでもないが、ある程度まで定性的には成立つものと考えてよからう。

この問題についてはまた機会をあらためて検討したい。

参 照 文 献

- 1) 渡辺恵弘：造船協会々報 49 号 (昭和 7 年 4 月)
- 2) 上野敬三：同 67 号 (昭和 15 年)
- 3) 菱田敏男：造船協会論文集 85 号 (昭和 27 年)
- 4) 同 同 86(前)号 (昭和 28 年)
- 5) 同 同 86(後)号 (昭和 29 年)
- 6) 元良誠三：船体運動力学，共立出版 (昭和 32 年)
- 7) 田才福造：造船協会論文集 110 号 (昭和 36 年)
- 8) 同 西部造船会々報 30 号 (昭和 40 年 8 月)
- 9) 元良誠三，小山健夫：造船協会論文集 117 号 (昭和 40 年 6 月)
- 10) 別所正利：同
- 11) 別所正利：防大理工学研究報告 3 巻 1 号 (昭和 40 年 5 月)
- 12) 同 同 3 巻 2 号 (昭和 40 年 9 月)
- 13) T. H. Havelock: Phil. Mag. vol. 8 (1929).
- 14) F. Ursell: Q. Jour. Mech. Appl. Math. vol. 2 pt. 3 (1949)
- 15) " : " Vol. 7 pt. 4 (1954)
- 16) O. Grin: Schiffstechnik Bd. 3 (1955/56)
- 17) Ir. G. Vossers: Intern. Shipbuil. Progress vol. 7 No. 68 (Apr. 1960)
- 18) J. Kotik and V. Mangulis: Intern. Shipbuil. Progress vol. 9 No. 97 (1962)
- 19) J. Kotik: Journal of Ship Research vol. 7 (Oct. 1963)
- 20) K. Tamura: Seibu Zosen Kai Kaiho No. 26 (Sep. 1963)
- 21) F. Tasai: Rep. of Res. Inst. for Appl. Mech., Kyushu Univ. vol. 13 No. 45 (1965)

付録 A. $K = 0$ の時の速度ポテンシャルなど

$K \rightarrow 0$ の時は F. Ursell によって水面が固体壁である時の速度ポテンシャルに近づくことが示されている¹⁴⁾。

Lewis 断面については O. Grim によって付加質量などが与えられている¹⁶⁾が，以下メタセンターの計算やまた付録 B の計算との比較対照の便のために重複をかえりみず式を導いておいた。

さて ζ -平面の単位円を

$$z \equiv x + iy = c \left(\zeta + \frac{a}{\zeta} + \frac{b}{\zeta^3} \right), \quad (\text{A} \cdot 1)$$

によって z -平面に写像して得られる形が **Lewis form** である。

断面の方程式は上式から $\zeta = e^{i\theta}$ とおいて

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{c} &= (1+a) \cos \theta + b \cos 3\theta, \\ \frac{y}{c} &= (1-a) \sin \theta - b \sin 3\theta, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 2)$$

と与えられる。

また幅を B , 吃水を T , 面積を $\mathcal{V}$, 面積係数を C_{∞} とすると

$$\left. \begin{aligned} \frac{B}{2T} &= \frac{(1+a+b)}{(1-a+b)}, \\ \frac{\mathcal{V}}{c^2} &= \frac{\pi}{2} (1-a^2-3b^2), \\ C_{\infty} &= \frac{\pi}{4} \frac{(1-a^2-3b^2)}{\{(1+b)^2-a^2\}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 3)$$

となることは容易にわかる。

次に原点 O から浮心までの距離 $\overline{OB}$ は

$$\overline{OB} = \frac{1}{2\mathcal{V}} \int_c y^2 dx = \frac{2c^3}{3\mathcal{V}} \left[(1-a)^2(1+a) - \frac{b}{5}(1-a)(1-5a) - \frac{27}{35}(5-7a)b^2 + b^3 \right] \quad (\text{A} \cdot 4)$$

となり浮心からメタセンターまでの距離は,

$$\overline{BM} = \frac{B^3}{12\mathcal{V}} = \frac{c^3}{12\mathcal{V}} (1+a+b)^3, \quad (\text{A} \cdot 5)$$

であるから, 両者を加えて, 原点からメタセンターまでの距離は M が原点から下方にある場合を正として

$$\overline{OM} = - \frac{\frac{16}{3\pi} \left[a(1+a) + b \left(\frac{4}{5} + \frac{6}{5}a + a^2 \right) + 3b^2 \left(\frac{4}{7} - \frac{a}{5} \right) \right]}{(1-a^2-3b^2)(1-a+b)} \quad (\text{A} \cdot 6)$$

と計算される。

楕円では $b=0$ とおいて次のように簡単になる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\overline{OB}}{T} &= \frac{4}{3\pi} \\ \frac{\overline{OM}}{T} &= - \frac{16}{3\pi} \frac{a}{(1-a)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 7)$$

さて左右動に対する速度ポテンシャルを ϕ_1^0 , 流れ関数を ψ_1^0 , 回転運動に対するものをそれぞれ ϕ_{s0}, ϕ_s^0 としさらに複素速度ポテンシャルを

$$\left. \begin{aligned} f_1^0 &= \phi_1^0 + i\phi_1^0, \\ f_3^0 &= \phi_3^0 + i\phi_3^0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 8)$$

のように定義しておく。

境界条件は (2・8), (2・9) により

$$\left. \begin{aligned} \frac{\phi_1^0}{c} &= -\frac{y}{c} = -(1-a)\sin\theta + b\sin 3\theta, \\ \frac{\phi_3^0}{c^2} &= -\frac{(x^2+y^2)}{2c^2} = -\frac{1+a^2+b^2}{2} - a(1+b)\cos 2\theta - b\cos 4\theta \end{aligned} \right\} \pi > \theta > 0 \quad (\text{A} \cdot 9)$$

のように書ける。また下半面については水面が鏡像であるようなポテンシャルを求めるのであるから、上半面と対称であると考えればよい。

したがって左右動についてはただちに

$$\left. \begin{aligned} \frac{f_1^0}{c} &= \frac{1-a}{\zeta} - \frac{b}{\zeta^3}, \\ \frac{\phi_1^0}{c} &= (1-a)\cos\theta - b\cos 3\theta, \\ \frac{d\phi_1^0}{cd\theta} &= -(1-a)\cos\theta + 3b\cos 3\theta, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 10)$$

が求むる解である。

回転動に対しては

$$\left. \begin{aligned} \cos\alpha\theta - 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} A_p^\alpha \sin p\theta, \quad A_p^\alpha = \frac{4\alpha^2}{\pi p(p^2 - \alpha^2)}, \\ p &= 2n+1, \quad \alpha = 0, 2, 4, 6\cdots, \quad \pi > \theta > 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 11)$$

なる展開を使って次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{f_3^0}{c^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{a(1+b)A_p^2 + bA_p^4\}\zeta^{-p}, \\ \frac{\phi_3^0}{c^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{a(1+b)A_p^2 + bA_p^4\}\cos p\theta, \\ \frac{\phi_3^0}{c^2} &= -\sum_{n=0}^{\infty} \{a(1+b)A_p^2 + bA_p^4\}\sin p\theta \\ &= -a(1+b)(\cos 2\theta - 1) - b(\cos 4\theta - 1), \\ \frac{d\phi_3^0}{c^2 d\theta} &= 2a(1+b)\sin 2\theta + 4b\sin 4\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 12)$$

これらの級数の和は次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_p^2 \zeta^{-p} &= \frac{3}{\pi} \left\{ -\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) + \frac{1}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)^2 \log\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right) \right\} \\ \sum_{n=0}^{\infty} A_p^4 \zeta^{-p} &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{3} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) - \left(\zeta^3 + \frac{1}{\zeta^3}\right) + \frac{1}{2} \left(\zeta^2 - \frac{1}{\zeta^2}\right)^2 \log\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 13)$$

これらの値を使って

波の中の船の横揺れ運動の理論について

第 1 表 $B/2T = 2.0$

a		0.267	0.300	0.333	0.367	0.400
b		-0.200	-0.100	0	0.100	0.200
C_a		1.117	0.960	0.785	0.610	0.442
$\overline{OM}/T$		-0.636	-0.901	-1.273	-1.811	-2.566
$\overline{OB}/T = A'/T$		0.557	0.488	0.424	0.375	0.452
$K = 0$	k_1	0.813	0.591	0.500	0.516	0.667
	l_1/T	0.266	-0.542	-1.273	-1.682	-1.649
	l_w/T	-0.262	-0.768	-1.273	-1.767	-2.199
	$(\kappa_3/T)^2$	1.364	1.155	1.824	3.025	4.083
$K = \infty$	k_1	0.249	0.190	0.203	0.287	0.480
	l_1/T	0.646	-0.732	-1.569	-1.579	-1.245
	$(\kappa_3/T)^2$	7.170	3.744	2.776	3.146	3.528
A/T		0.680	0.844	0.992	1.119	1.229
C/T		3.210	1.878	1.276	1.021	0.945
C'/T		1.645	1.008	0.589	0.312	0.124
$\frac{(A-C)\overline{OM}}{T}$		1.610	0.932	0.362	-0.176	-0.730

第 2 表 $B/2T = 1.5$

a		0.160	0.180	0.200	0.220	0.240
b		-0.200	-0.100	0	0.100	0.200
C_a		1.092	0.947	0.785	0.623	0.467
$\overline{OM}/T$		-0.145	-0.311	-0.531	-0.814	-1.220
$\overline{OB}/T = A'/T$		0.541	0.481	0.424	0.390	0.385
$K = 0$	k_1	0.967	0.749	0.667	0.664	0.779
	l_1/T	0.356	-0.136	-0.531	-0.751	-0.777
	l_w/T	0.101	-0.236	-0.531	-0.789	-1.026
	$(\kappa_3/T)^2$	0.621	0.264	0.317	0.642	1.035
$K = \infty$	k_1	0.295	0.247	0.270	0.364	0.554
	l_1/T	0.571	-0.230	-0.655	-0.684	-0.539
	$(\kappa_3/T)^2$	3.411	1.103	0.482	0.759	1.146
A/T		0.606	0.714	0.806	0.886	0.953
C/T		4.497	1.581	0.761	0.630	0.661
C'/T		2.017	1.018	0.471	0.262	0.122
$\frac{(A-C)\overline{OM}}{T}$		0.557	0.270	-0.024	-0.208	-0.355

第3表 $B/2T = 1.0$

a	0	0	0	0	0
b	-0.200	-0.100	0	0.100	0.200
C_{κ}	1.080	0.941	0.785	0.630	0.490
$\overline{OM}/T$	0.220	0.122	0	-0.155	-0.289
$\overline{OB}/T = A'/T$	0.529	0.477	0.424	0.375	0.406
$K = 0$	k_1	1.273	1.061	1.000	1.062
	l_1/T	0.433	0.178	0	-0.094
	l_w/T	0.340	0.151	0	-0.123
	$(\kappa_3/T)^2$	0.322	0.069	0	0.046
$K = \infty$	k_1	0.393	0.361	0.405	0.528
	l_1/T	0.361	0.177	0	-0.022
	$(\kappa_3/T)^2$	1.446	0.282	0	0.129
					0.332
A/T	0.534	0.590	0.637	0.675	0.707
C/T	-0.830	-0.382	-0.106	0.081	0.355
C'/T	0	0	0	0	0
$\frac{(A-C)\overline{OM}}{T}$	0.301	0.119	0	-0.092	-0.102

 第4表 $B/2T = 2/3$

a	-0.160	-0.180	-0.200	-0.220	-0.240
b	-0.200	-0.100	0.000	0.100	0.200
C_{κ}	1.092	0.947	0.785	0.623	0.467
$\overline{OM}/T$	0.369	0.313	0.236	0.146	0.025
$\overline{OB}/T = A'/T$	0.505	0.469	0.424	0.384	0.352
$K = 0$	k_1	1.715	1.517	1.500	1.649
	l_1/T	0.559	0.338	0.236	0.202
	l_w/T	0.489	0.328	0.236	0.181
	$(\kappa_3/T)^2$	0.325	0.121	0.063	0.065
$K = \infty$	k_1	0.538	0.527	0.608	0.790
	l_1/T	0.573	0.373	0.291	0.279
	$(\kappa_3/T)^2$	0.832	0.230	0.095	0.155
					0.253
A/T	0.488	0.517	0.538	0.556	0.566
C/T	0.111	0.598	1.142	2.003	11.594
C'/T	0.529	0.575	0.707	0.976	3.923
$\frac{(A-C)\overline{OM}}{T}$	0.140	-0.025	-0.142	-0.211	-0.280

第 5 表 $B/2T = 0.5$

a		-0.267	-0.300	-0.333	-0.367	-0.400
b		-0.200	-0.100	0.000	0.100	0.200
C_w		1.117	0.960	0.785	0.610	0.442
$\overline{OM}/T$		0.479	0.398	0.318	0.232	0.125
$\overline{OB}/T = A'/T$		0.554	0.485	0.424	0.369	0.314
$K = 0$	k_1	2.132	1.955	2.000	2.271	2.889
	l_1/T	0.464	0.373	0.318	0.274	0.283
	l_w/T	0.469	0.381	0.318	0.261	0.243
	$(\kappa_3/T)^2$	0.255	0.150	0.112	0.112	0.121
$K = \infty$	k_1	0.677	0.688	0.811	1.069	1.572
	l_1/T	0.522	0.432	0.393	0.377	0.365
	$(\kappa_3/T)^2$	0.670	0.259	0.174	0.211	0.269
A/T		0.471	0.485	0.495	0.502	0.506
C/T		0.491	0.641	0.782	1.132	1.877
C'/T		0.546	0.570	0.589	0.607	0.637
$\frac{(A-C)\overline{OM}}{T}$		-0.010	-0.062	-0.092	-0.147	-0.172

$$f_{ij} = - \int_c \phi_i d\phi_j$$

を計算すれば次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} f_{11} &= - \int_c \phi_1 \frac{d\phi_1}{d\theta} d\theta = \frac{\pi c^2}{2} \{(1-a)^2 + 3b^2\} = k_1(0) \mathcal{V}, \\ k_1(0) &= \frac{(1-a)^2 + 3b^2}{1-a^2 - 3b^2} \xrightarrow{b=0} \left(\frac{1-a}{1+a} \right), \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 14)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{13} &= - \int \phi_1 d\phi_3 = - \int \phi_3 d\phi_1 \\ &= - \frac{8c^3}{3} \left[a(1-a) + b \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{5} a - a^2 \right) + b^2 \left(\frac{3}{5} a - \frac{12}{7} \right) \right], \\ \frac{l_1(0)}{T} &= - \frac{16}{3\pi} \frac{\left[\{a(1-a) + b \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{5} a - a^2 \right) + b^2 \left(\frac{3}{5} a - \frac{12}{7} \right)\} \right]}{(1-a+b) \{(1-a)^2 + 3b^2\}} \xrightarrow{b=0} - \frac{16}{3\pi} \frac{a}{(1-a)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 15)$$

$$f_{33} = - \int \phi_3 d\phi_3 = \frac{16c^4}{\pi} \left\{ a^2(1+b)^2 + \frac{8}{9} ab(1+b) + \frac{16}{9} b^2 \right\},$$

これを

$$f_{33}(0) = k_1(0) \kappa_3^3(0) \mathcal{V}$$

のように書くと上式から

$$\frac{\kappa_3^2(0)}{T^2} = \frac{32}{\pi^2} \frac{\left\{ a^2(1+b)^2 + \frac{8}{9}ab(1+b) + \frac{16}{9}b^2 \right\}}{\{(1-a)^2 + 3b^2\}(1-a+b)^2} \xrightarrow{b \rightarrow 0} \frac{32}{\pi^2} \frac{a^2}{(1-a)^4}, \quad (\text{A} \cdot 16)$$

等々となって O. Grim の結果に一致する¹⁶⁾。

計算値についてもすでに一部ある^{7), 17)}が、他の諸量とまとめて第 1~5 表に掲げておいた。

付録 B. $K = \infty$ の時の速度ポテンシャルなど

$K \rightarrow \infty$ の時は $K \rightarrow 0$ の時と違って簡単に極限移行するわけにはゆかない。

しかし波が関係するのはおよそ水面下 $1/K$ の所までであると考えられ、それより下では水面で $\phi = 0$ になるような速度ポテンシャルで近似されることが考えられる¹⁵⁾。

この時誤差は $1/K$ のオーダーであると考えられる。一方波の振幅のような量を除いた他の積分量について $1/K$ より浅い水面近くにおける部分が寄与する量もまた $1/K$ のオーダーと考えられる。

したがって k_1, l_1, κ_3 などの量を $K \rightarrow \infty$ で水面に関して逆鏡像を考えて得られる速度ポテンシャルから計算するとその誤差は $1/K$ のオーダーであると考えられる。

さてそのような速度ポテンシャルを前同様

$$\left. \begin{aligned} f_1^\infty &= \phi_1^\infty + i\psi_1^\infty, \\ f_3^\infty &= \phi_3^\infty + i\psi_3^\infty \end{aligned} \right\} \quad (\text{B} \cdot 1)$$

とおくと境界条件は前と同じで

$$\left. \begin{aligned} \frac{\phi_1^\infty}{c} &= -(1-a \sin \theta + b \sin 3\theta, \\ \frac{\phi_3^\infty}{c^2} &= -a(1+b) \cos 2\theta - b \cos 4\theta, \end{aligned} \right\} \pi > \theta > 0, \quad (\text{B} \cdot 2)$$

であるが、今度は上下反対称なポテンシャルでなければならない。

そうすると回転動に対してはただちに

$$\left. \begin{aligned} \frac{f_3^\infty}{c^2} &= -i \left\{ \frac{a(1+b)}{\zeta^2} + \frac{b}{\zeta^4} \right\}, \\ \frac{\phi_3^\infty}{c^2} &= -a(1+b) \sin 2\theta - b \sin 4\theta, \\ \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\phi_3^\infty}{d\theta} \right) &= 2a(1+b) \sin 2\theta + 4b \sin 4\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B} \cdot 3)$$

がえられる。

左右動については

$$\begin{aligned} \sin \alpha \theta &= \sum_{n=0}^{\infty} A_p^\alpha \cos p\theta, \quad \alpha = 1, 3, 5 \dots \\ A_p^\alpha &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{p+\alpha} - \frac{1}{p-\alpha} \right), \quad p = 2n, \end{aligned}$$

なる展開を利用して

$$\left. \begin{aligned} \frac{f_1^\infty}{c} &= -i \sum_{n=0}^{\infty} \{(1-a) A_p^1 - b A_p^3\} \zeta^{-n}, \\ \frac{\phi_1^\infty}{c} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \{(1-a) A_p^1 - b A_p^3\} \sin p \theta, \\ \frac{\dot{\phi}_1^\infty}{c} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \{(1-a) A_p^1 - b A_p^3\} \cos p \theta, \\ \frac{1}{c} \frac{d\phi_1^\infty}{d\theta} &= -(1-a) \cos \theta + 3b \cos 3\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B} \cdot 4)$$

となることがわかる。

ここでこれらの級数の和は次式で求められる。

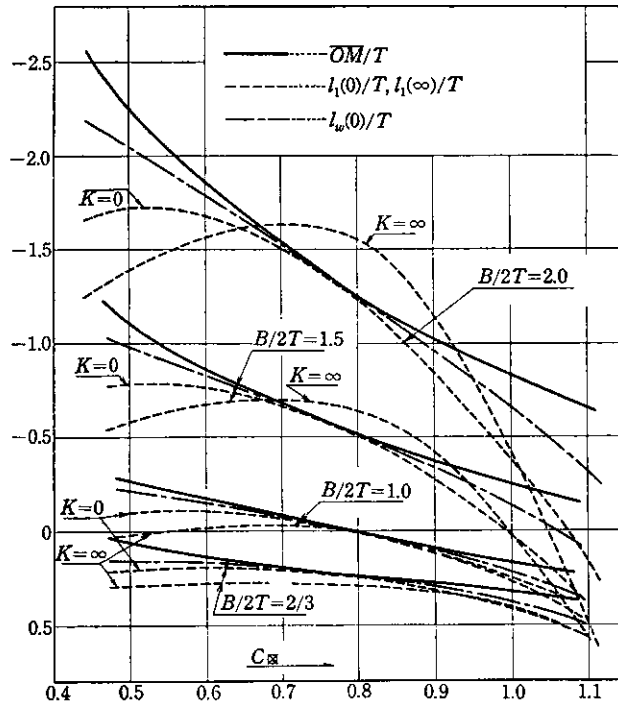
$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}^1 \zeta^{-2n} &= \frac{2}{\pi} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \log \left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1} \right) \right\}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}^3 \zeta^{-2n} &= \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{3} - \left(\zeta^2 - \frac{1}{\zeta^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\zeta^2 - \frac{1}{\zeta^2} \right) \log \left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B} \cdot 5)$$

このポテンシャルを使えば次のように諸量が与えられる。

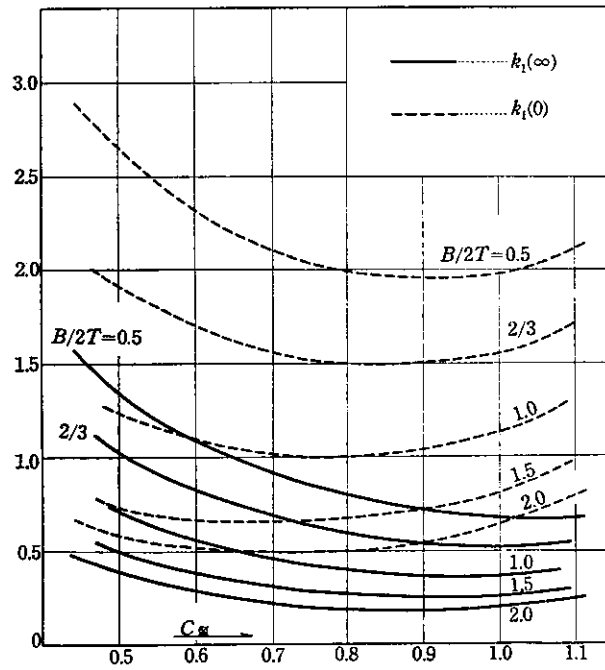
$$\left. \begin{aligned} f_{11} &= - \int \phi_1^\infty d\phi_1^\infty = \frac{2c^2}{\pi} \left\{ (1-a+b)^2 + \frac{16}{3} b^2 \right\} = k_1(\infty) \nabla, \\ k_1(\infty) &= \frac{4}{\pi^2} \frac{\left\{ (1-a+b)^2 + \frac{16}{3} b^2 \right\}}{(1-a^2-3b^2)} \xrightarrow{b \rightarrow 0} \frac{4}{\pi^2} \frac{(1-a)}{(1+a)}, \\ f_{13} &= -c^3 \left[\frac{4}{3} a(1-a)(1+b) + \frac{8}{15} b(1-a) + \frac{12}{5} ab(1+b) - \frac{24}{7} b^2 \right], \\ \frac{l_1(\infty)}{T} = \frac{f_{13}}{k_1 \nabla T} &= - \frac{2\pi}{3} \frac{\left[a(1-a) + \frac{2}{5} b + \frac{12}{5} ab - a^2 b + \frac{9}{5} ab^2 - \frac{18}{7} b^2 \right]}{(1-a+b) \left\{ (1-a+b)^2 + \frac{16}{3} b^2 \right\}} \\ &\xrightarrow{b \rightarrow 0} - \frac{2\pi}{3} \frac{a}{(1-a)^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B} \cdot 7)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{33} &= \pi c^4 \{ a^2(1+b)^2 + 4b^2 \} = k_1(\infty) \nabla \kappa_3^2(\infty), \\ \frac{\kappa_3^2(\infty)}{T^2} &= \frac{\pi^2}{2} \frac{\{ a^2(1+b)^2 + 4b^2 \}}{\left\{ (1-a+b)^2 + \frac{16}{3} b^2 \right\} (1-a+b)^2} \xrightarrow{b \rightarrow 0} \frac{\pi^2}{2} \frac{a^2}{(1-a)^4} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B} \cdot 8)$$

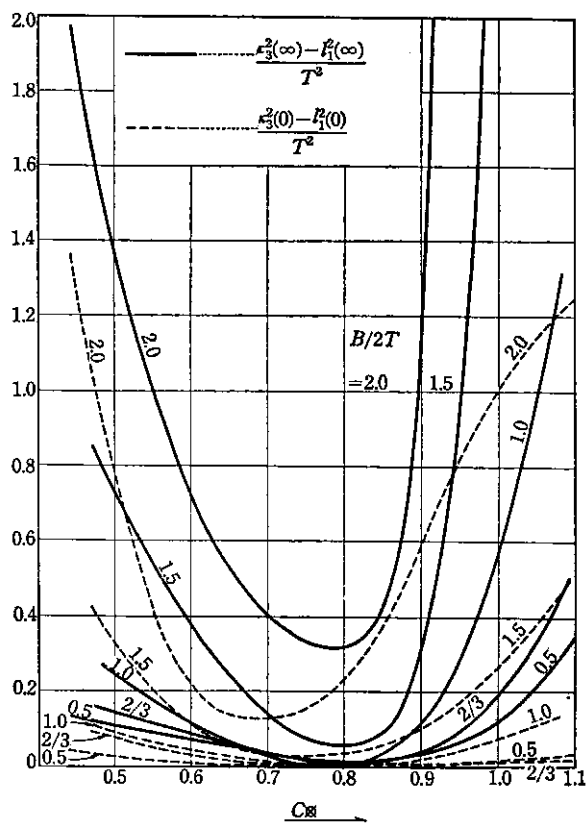
これらの量も第 1~5 表中に計算しておいた。また第 4~6 図には $K=0$ の値と共に描いて比較しておいた。



第 4 図



第 5 図



第 6 図

付録 C. A, C の計算

(6・9), (6・11) の定義式に付録 A における $K=0$ の速度ポテンシャルを代入すればよい。

そこで今次のようにおこう。

$$I = \int_c xy \frac{\partial x}{\partial n} dS = \nabla \overline{OB} \quad (C \cdot 1)$$

$$II = \int_c \phi_1^0 \frac{\partial}{\partial n} (xy) dS, \quad (C \cdot 2)$$

$$III = \int_c xy \frac{\partial x_3}{\partial n} dS = \int_c xy (y dy + x dx), \quad (C \cdot 3)$$

$$IV = \int_c \phi_3^0 \frac{\partial}{\partial n} (xy) dS. \quad (C \cdot 4)$$

そうすると

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{(I+II)}{(1+k_1)T} \\ C &= -\frac{k_1 l_1}{OM} + \frac{(III+IV)}{OMT} \end{aligned} \right\} \quad (C \cdot 5)$$

あるいは $C = C' + C'' + C'''$ とわけると

$$\left. \begin{aligned} C' &= \frac{III}{(OMT)}, \\ C'' &= \frac{IV}{(OMT)}, \\ C''' &= -\frac{k_1 Al_1}{OM} \end{aligned} \right\} \quad (C \cdot 6)$$

のように与えられる。

Lewis 断面については (A・2) によって

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{c^2} xy &= (1-2b-a^2) \sin 2\theta - 2ab \sin 4\theta - b^2 \sin 6\theta, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial(xy)}{\partial n} \frac{dS}{d\theta} &= (1+2b+a^2) \sin 2\theta + 4ab \sin 4\theta + 3b^2 \sin 6\theta \end{aligned} \right\} \quad (C \cdot 7)$$

となるから、その他についても付録 A にしたがって計算すれば次のように求められる。

このうち I はすでに付録 A で計算されているから後をあげると

$$I + II = \frac{2}{3} c^3 \left[4 \left\{ (1+a^2) + b \left(2 + \frac{8}{5} a \right) + \frac{27}{35} b^2 \right\} - (1+a+b)^3 \right] \quad (C \cdot 8)$$

一方

$$(1+k_1)T = \pi c^2 (1-a)$$

なる関係があるので

$$\begin{aligned} \frac{A}{T} &= \frac{I+II}{(1+k_1)T} = \frac{2 \left[4 \left\{ (1+a^2) + b \left(2 + \frac{8}{5} a \right) + \frac{27}{35} b^2 \right\} - (1+a+b)^3 \right]}{3\pi(1-a)(1-a+b)} \\ &\xrightarrow{b \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \frac{\left(1 + \frac{a^2}{3} \right)}{(1-a)} \end{aligned} \quad (C \cdot 9)$$

次に

$$III = \int_c xy \frac{\partial x_3}{\partial n} dS = -\frac{\pi}{2} c^4 a (1-a^2-b-a^2 b-6b^2) \xrightarrow{b \rightarrow 0} -\frac{\pi}{2} c^4 a (1-a^2). \quad (C \cdot 10)$$

$$\begin{aligned} IV &= \int_c \phi_3^0 \frac{\partial}{\partial n} (xy) dS \\ &= -\frac{8c^4}{\pi} \left[a(1+b)(I+2b+a^2) + \frac{4}{9} (b+2b^2+3a^2 b+2a^2 b^2) \right] \end{aligned}$$

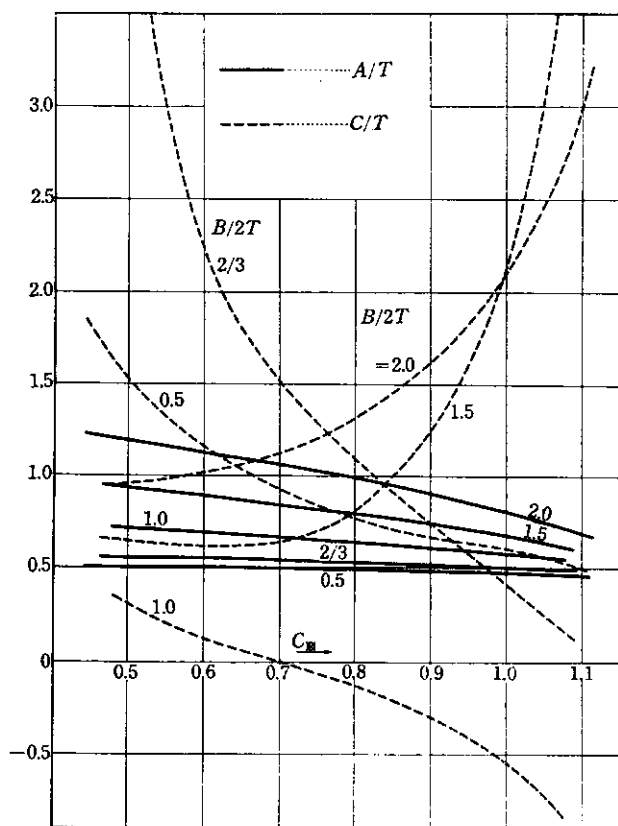
$$+\frac{7}{15}ab^2(1+b)+\frac{32}{9}ab^2-\frac{16}{25}b^3\Big]\xrightarrow{b\rightarrow 0}-\frac{8c^4}{\pi}a(1+a^2). \quad (\text{C}\cdot 11)$$

この二式を (C・5), (C・6) に代入すれば C は計算できる。特に $b=0$, すなわち楕円の値をあげれば

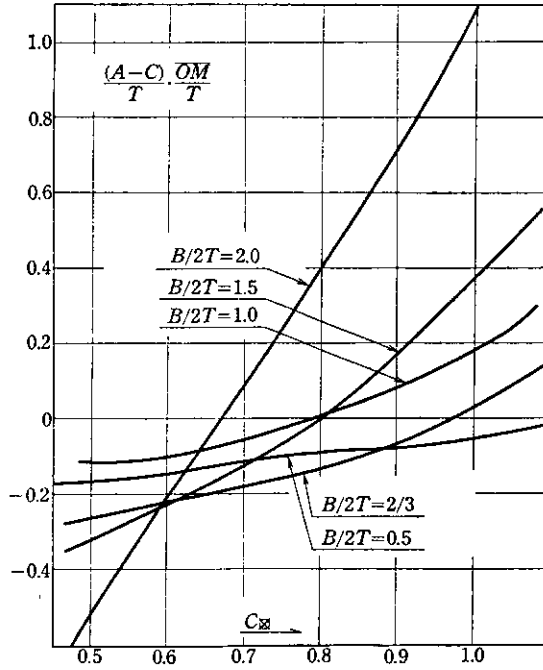
$$\left. \begin{aligned} \frac{C'}{T} &= \frac{3\pi}{16}(1-a)^2 \\ \frac{C''}{T} &= \frac{3}{\pi} \frac{(1-a)(1+a^2)}{(1+a)} \\ \frac{C'''}{T} &= -\frac{\left(1+\frac{a^2}{3}\right)}{(1+a)}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{C}\cdot 12)$$

となるが, この C'/T の式は a を 0 としておいてから後で $b=0$ とおくと 0 になる。いずれにして円の場合 ($a=b=0$) の場合 C なる値は意味がないので問題はない。

これらの値を計算して第 1~5 表および第 7, 8 図に示す。



第 7 図



第 8 図

付録 D. 附加質量の近似値

K の小さい所で、ダムピングは元来小さいので (4.1) の近似値でも十分間に合うように思えるが、附加質量はかなり細かい変化をしているので $K=0$ の値だけでは物足りない。

正確な値は境界値問題を解かねばならないし、また Lewis 断面についてはすでに与えられているが、変化の様子あるいは関数形を求めるのは Kramers-Kronig の関係を利用した方が便利である。

J. Kotik らによれば附加質量とダムピングは ω -平面 ($\omega = \sqrt{gK}$) で互に共軛な正則関数であるので例えば次の関係がある¹⁸⁾。

$$k_1(K) - k_1(\infty) = \frac{1}{\pi V} \int_0^\infty \frac{|H_1(k)|^2}{k - K} dk, \quad (D \cdot 1)$$

あるいは

$$k_1(K) - k_1(0) = \frac{1}{\pi V} \int_0^\infty \frac{|H_1(k)|^2}{k(k - K)} dk, \quad (D \cdot 2)$$

ここに k_1 は左右動の附加質量係数、 $|H_1|^2$ はダムピングとし、積分はコーシーの意味の主値をとるものとする。

さて左右動では (4.1) のように与えられるので

$$H_1(k) = k H_1^*(k), \quad (D \cdot 3)$$

とおくと H_1^* は $k=0$ で有限になる。

そこで J. Kotik らの方法にしたがって K の小さい所の近似値は (D・2) を変形して

$$k_1(K) - k_1(0) \doteq \frac{K}{\pi V} \int_0^8 |H_1^*(k)|^2 dk - \frac{K^2}{\pi^2 V} \left[|H_1^*(0)|^2 \log K - \int_0^8 \log k d|H_1^*(k)|^2 \right] \quad (\text{D} \cdot 4)$$

つまり

$$k_1(K) = k_1(0) + \alpha K - K^2 [\beta \log K + \gamma], \quad (\text{D} \cdot 5)$$

のような形に書ける。

例えば半径 r の半没円筒では $K=0$ のポテンシャルを使うと

$$\left. \begin{aligned} H_1(k) &= -2ikr \int_r^8 \frac{\sin kx}{x} dx, \\ \frac{1}{\pi V} \int_0^\infty |H_1^*(k)|^2 dk &= \frac{4}{\pi} r, \end{aligned} \right\} \quad (\text{D} \cdot 6)$$

と計算できるから (D・5) の α は

$$\alpha = \frac{4}{\pi} r, \quad (\text{D} \cdot 7)$$

となり、正確な計算値と較べて見ても $Kr=0.1$ 位まで良い近似値である。

しかし、 β, γ などについてはこのように簡単には行かず、ダムピングのもっと正確な値を使わなければならないように見える。

いずれにしても正確さはともかくも (D・5) のような形に表わされることがわかっているれば便利であろう。

序でながら K の大きい所では J. Kotik らによって

$$k_1(K) \doteq k_1(\infty) - \frac{c}{K}, \quad (\text{D} \cdot 3)$$

の形の近似式がある。

また回転運動に対する付加慣性についても全く同様な式が成立つ。

**On the Theory of Rolling Motion of Ships
among Waves
(The Second Report)**

By Masatoshi BESSHO*

Abstract

In the first report, the author found out that the exciting moment of waves in the rolling motion of a ship could be written as γ -times as the statical inclining moment in the manner as usual up to the present.

In the present report, he gives the approximate value of this coefficient when a ship rolls among waves with a very long period and finds out that it may become zero by a suitable combination of the metacentric height and the radius of gyration. Besides, he calculates the metacenter of the Lewis's section form and compares it with the center of the added mass which lies under the metacenter usually but is coincident with the metacenter in the elliptic section form.

Finally, he considers the possible effect of the bilge-keel on the exciting force of the wave and this effect seems to explain well a cause of its roll reducing effect.

* Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering.