防衛大学校理工学研究報告
第11巻 第2号
昭和 48 年 9 月

船体剛性を考慮した波浪中船体運動の理論

(前進速度のない場合)

(故玉井教授に捧ぐ)

別 所 正 利*

(昭和 48 年 2 月 28 日受付)

序 論

船が巨大になるにつれてその剛性は相対的に低下している。そのような船が波の中を航行している時は船体は波と共に撓むであろう。

本文においては船が弾性的に撓むことを考えた場合の船の運動および船体の撓みの計算法について考察を試みた。

簡単のために前進速度がない場合でかつ縦波中の運動についてのみ議論を進めたが，他の場合に拡張するのに大きい困難はないであろう。

この場合ストリップ法を使えば容易に運動方程式が得られるけれども得られる方程式が非線型（準線型）であってその解法は必ずしも容易ではない。

今回はハミルトンの原理から直接運動方程式を導く方法を試みた。この方法によれば変分法によって解けるので近似計算に便利であろう。

またハスキントの関係を利用して発散波のイムパルス応答から規則波中の船体応答を求める式を導いて見た。

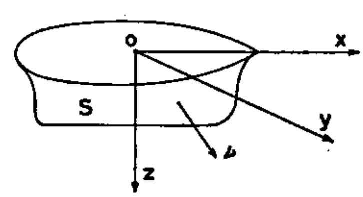
前進速度のある場合はこの式は少々問題があるので後報にゆずるが原理的には同様な式が得られるはずである。

1. 速度ポテンシャルとフーリェ変換[1,2,7]

右図のような座標系をとろう。

線型近似によって圧力は

$$\frac{1}{\rho}p(x, y, z, t) = \phi_t(x, y, z, t) + gz \tag{1}$$



第1図 座標系

水面条件は

$$\phi_t|_{z=0} = -g\zeta(x, y) \tag{2}$$

$$\zeta_t = -\phi_z|_{z=0} \tag{3}$$

よって

$$\phi_{tt} - g\phi_z = 0 \quad \text{on } z = 0 \tag{4}$$

---

* 防衛大学校 機械工学教室 教授

ここに ϕ は速度ポテンシャル，ζ は水面変位とする。

物体の表面条件は ν を外向き法線として

$$\phi_\nu = -\sum_{j=1}^{3} u_j(x, y, z, t) x_{j\nu}, \quad \text{on } S \tag{5}$$

但し $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$, u_j は各方向の S 上の成分速度とする。

今はストリップ法的に考えて船の各断面は形を変えないで上下動のみをすると考えて境界条件として次式をとる。

$$\phi_\nu = -\dot{\zeta}(x, t) z_\nu, \tag{5'}$$

ここに $\dot{\zeta}(x, t)$ は船の中性軸の上下動の速度とする。

一般的に考えて $t=0$ まで $\phi=\phi_t=0$ であるとしてそれらのフーリェ変換を求めておこう。

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{L}\phi = \int_0^\infty \phi(x, y, z, t) e^{-i\omega t} dt = \Phi(x, y, z, \omega) = \bar{\Phi}(x, y, z, -\omega) \\ &\text{逆変換は} \\ &\mathscr{L}^{-1}\Phi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi e^{i\omega t} d\omega = \phi(x, y, z, t) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

のように定義しておくと

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{L}\phi_t &= i\omega\Phi \\ \mathscr{L}\phi_{tt} &= -\omega^2 \Phi \\ \mathscr{L}p &= \rho\mathscr{L}\phi_t = \rho i\omega\Phi \end{aligned}\right\} \tag{6'}$$

但しこの p は静圧を除く動圧のみとする。

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{L}\zeta &= Z(x, \omega) \\ \mathscr{L}\dot{\zeta} &= -\zeta(x, 0) + i\omega Z(x, \omega) \\ \mathscr{L}\ddot{\zeta} &= -i\omega\zeta(x, 0) - \omega^2 Z \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

但し $\dot{\zeta}(x, 0)=0$ とする

水面条件は

$$\frac{\omega^2}{g}\Phi(x, y, 0, \omega) + \Phi(x, y, 0, \omega) = 0 \tag{8}$$

今

$$\mathscr{L}u_j = U_j(x, y, z, \omega) \tag{9}$$

とおくと

$$\Phi_\nu|_{\mathrm{on}\,S} = \mathscr{L}\phi_\nu = -\sum_{j=1}^{3} U_j x_{j\nu} \tag{10}$$

となるが (5′) を採用するので次のように簡単になる。

$$\Phi_\nu|_{\mathrm{on}\,S} = -\dot{Z}(x, \omega) z_\nu \tag{10'}$$

ここに $\dot{Z}=\mathscr{L}\dot{\zeta}$ を意味するものとする。

この周波数領域におけるポテンシャルはノイマン函数 N を使って次のように表示出来る。

$$\Phi(P)=-\iint_S \Phi_\nu(Q)\,N(P,Q)\,ds(Q) \tag{11}$$

但し

$$P\equiv(x,y,z),\quad Q\equiv(x',y',z')$$

N は遠方で次の漸近値をもっている。

$$N(P,Q)\xrightarrow[P\to\infty]{}\sqrt{\frac{k}{2\pi\rho i}}\,\mathrm{e}^{-kz-ik\rho}\Phi_D(Q,\varphi) \tag{12}$$

ここに

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi$$

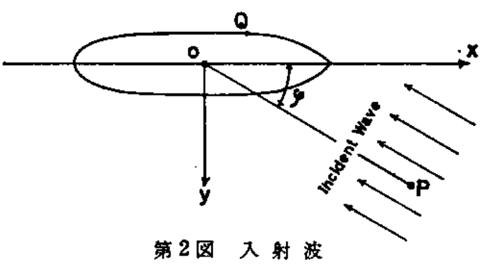
$$\Phi_D(Q,\varphi)=\Phi_e(Q,\varphi)+\Phi_d(Q,\varphi) \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_e(Q,\varphi)=\exp\left[-kz'+ik(x'\cos\varphi+y'\sin\varphi)\right]\\&\Phi_{D\nu}|_S=0,\quad k=\omega^2/g\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

また $\Phi(-\omega)=\overline{\Phi(\omega)}$ である。

(14) 式の Φ_e は右図のように x 軸と φ なる角をなして打寄せて来る入射波である。

また (12) 式は原点から出て行く円筒波である。



第2図　入 射 波

(12) 式を (11) 式に代入すると

$$\Phi(P)\xrightarrow[P\to\infty]{}\sqrt{\frac{k}{2\pi\rho i}}\,\mathrm{e}^{-kz-ik\rho}D(k,\varphi) \tag{15}$$

$$D(k,\varphi)=-\iint_S \Phi_D(Q,\varphi)\,\Phi_\nu(Q)\,ds(Q) \tag{16}$$

この D を使えば波高 Z_w は

$$Z_w=\frac{\omega}{gi}\Phi|_{z=0}\longrightarrow\frac{\omega^2}{ig\sqrt{2\pi\rho gi}}\,\mathrm{e}^{-ik\rho}D(k,\varphi) \tag{17}$$

物理面では

$$\begin{aligned}\zeta_w(P,\varphi)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty Z_w\,\mathrm{e}^{i\omega t}d\omega=\frac{\mathscr{R}}{\pi}\int_0^\infty Z_w\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,d\omega\\&=\mathscr{R}\,\frac{1}{\pi gi\sqrt{2\pi\rho gi}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ik\rho+i\omega t}\,D(k,\varphi)\,\omega^2 d\omega,\end{aligned} \tag{18}$$

これは近似的にフレネル積分で表示出来るから定常点法で次のように漸近値が求まる。

$$\zeta_w(P,\varphi)\xrightarrow[(gt^2/4\rho)\gg1]{}\mathscr{R}\left[\frac{gt^2}{8\pi\rho^3 i^{3/2}}\,\mathrm{e}^{i(gt^2/4\rho)}D\left(\frac{gt^2}{4\rho^2},\varphi\right)\right], \tag{19}$$

2. ストリップ法と力および相反定理[7,1,2]

各断面（変形しないとし）に働く下向きの水の力は静水圧を除いて

$$f(x,\ t) = -\int_C pz_\nu ds(x) = -\rho\int_C \phi_t z_\nu ds \tag{1}$$

$$\mathscr{L}f = F(x,\ \omega) = -\rho i\omega\int_C \Phi z_\nu ds \tag{2}$$

ストリップ法では

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi \fallingdotseq 0 \tag{3}$$

として２次元問題の解を利用するので１節 (10′) と相反定理によって

$$\begin{aligned} F(x) &= \rho i\omega\int_C \Phi_T\Phi_\nu ds = -\rho i\omega\dot{Z}\int_C \Phi_T z_\nu ds \\ &= -\rho i\omega\dot{Z}(x)\,C_0(x) \end{aligned} \tag{4}$$

$$C_0(x) = \int_C \Phi_{T0} z_\nu ds \tag{5}$$

ここに下添字 T は 2 次元ポテンシャルを意味し

$$\Phi_{T0\nu} = -z_\nu$$

とする。

波の力については入射波の波高を次のようにおくと

$$\left.\begin{aligned} &\zeta_I(x,\ y,\ \alpha,\ t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\,\mathrm{e}^{ik\varpi(\alpha)+i\omega t}\,d\omega \\ &\tilde{\omega}(\alpha) = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad k = \omega|\omega|/g \\ &\bar{A}(\omega) = A(-\omega) \\ &\mathscr{L}\zeta_I = Z_I(x,\ y,\ \alpha,\ \omega) = A(\omega)\,\mathrm{e}^{ik\varpi(\alpha)} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

この速度ポテンシャルは

$$\left.\begin{aligned} &\phi_I = \frac{ig}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\,\mathrm{e}^{-|k|z+ik\varpi(\alpha)+i\omega t}\frac{d\omega}{\omega} \\ &\mathscr{L}\phi_I = \Phi_I = \frac{ig}{\omega}A(\omega)\,\Phi_e(x,\ y,\ \alpha) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Φ_e は１節 (14) で与えられる。

つまりこれは α の方向から来る平面波の集まりである。

この入射に対する船の反射波のポテンシャルを Φ_d とすると合せてポテンシャルは次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_w = \frac{ig}{\omega}\,\Phi_D(x,\ y,\ \alpha) \\ &\Phi_D = \Phi_e + \Phi_d \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

波の力は（以下 z 方向の力のみを考える）

$$\left.\begin{aligned} f_w(x,t) &= -\rho\int_C \phi_{wt} z_\nu ds \\ F_w(x,\omega) &= -\rho i\omega\int_C \Phi_w z_\nu ds \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(8) によって

$$\begin{aligned} F_w &= \rho g A(\omega)\int_C \Phi_D(x,y,\alpha) z_\nu ds \\ &= \rho g A(\omega) D(x,\alpha) \end{aligned} \tag{10}$$

ここに

$$\begin{aligned} D(x,\alpha) &= \int_C \Phi_D(x,y,\alpha) z_\nu ds \\ &= -\int_C \Phi_D \Phi_{0\nu} ds\ , \end{aligned} \tag{11}$$

但し　　$\Phi_{0\nu} = -z_\nu$

以下この D の k の小さい所における近似値を strip 法で求めて見よう。

(11) 式中 Φ_D の内の Φ_e については明らかに (3) 式が成立たない。

しかし Φ_d については strip 法で求めても不自然ではなかろう。

そうすると

$$\begin{aligned} \int_C \Phi_d \Phi_{0\nu} ds &\fallingdotseq \int_C \Phi_{Td}\Phi_{T0\nu} ds = \int_C \Phi_{T0}\Phi_{Td\nu} ds \\ &\fallingdotseq -\int_C \Phi_{T0}\Phi_{e\nu} ds \end{aligned} \tag{12}$$

$$\Phi_{d\nu} = -\Phi_{e\nu} \fallingdotseq -\Phi_e(x,y,\alpha)\left[-|k|z_\nu + iky_\nu \sin\alpha + \cdots\right]$$

$$k \to 0$$

$$x_\nu \to 0$$

であるから

$$\begin{aligned} D(x,\alpha) &\fallingdotseq \int_C (\Phi_e z_\nu + \Phi_{T0}\Phi_{e\nu})\, ds \\ &\fallingdotseq \int_C [z_\nu - \Phi_{T0}|k|z_\nu]\, \Phi_e ds \end{aligned} \tag{13}$$

がえられる。

この右辺第２項は渡辺理論では

$$\int_C \Phi_{T0} z_\nu \Phi_e ds = \gamma_w C_0(x)\, e^{ikx\cos\alpha} \tag{14}$$

と近似しており，k の小さい所では Φ_e を展開して

$$\gamma_w = \int_C \Phi_{T0} z_\nu (1-|k|z)\, ds$$

となるから

$$\gamma_w = 1 - \frac{|k|}{C_0(x)} \int_C \Phi_{T_0} z z_\nu ds \tag{15}$$

となる。

この γ_w を仮に渡辺の修正係数を呼んでおこう。

(13) 右辺第1項はフルード・クリロッフの力であって (14) 式にならってスミス修正 γ_s を使って

$$\int_C z_\nu \Phi_s ds = \gamma_s B(x)\, \mathrm{e}^{ikx\cos\alpha} \tag{16}$$

B は船の幅とする。

と表わせるからやはり k の小さい限りでは

$$\gamma_s \fallingdotseq 1 - |k| \frac{A(x)}{B(x)}, \tag{17}$$

$A(x)$ は横切面積とする。

(14) と (16) を合せて (13) は次のように書ける。

$$D(x, \alpha) \fallingdotseq \gamma_m B(x)\, \mathrm{e}^{ikx\cos\alpha} \tag{18}$$

但し

$$\begin{aligned} \gamma_m &= \gamma_s - |k| \gamma_w \frac{C_0(x)}{B(x)} \\ &\underset{k\to 0}{\fallingdotseq} 1 - |k| \left[\frac{A(x) + \gamma_w C_0(x)}{B(x)} \right], \end{aligned} \tag{19}$$

となる。この係数を元良の考察[3]に因んで元良の修正係数と呼ぶことにしよう。

以上は近似理論であるがもし3次元のポテンシャルが求まったとすると次のような議論になる。

まず相反定理は

$$\iint_S \Phi_i \Phi_{j\nu} ds = \iint_S \Phi_j \Phi_{i\nu} ds \tag{20}$$

である。境界条件は次のように与えられるものとしよう。

$$\Phi_{j\nu} = -Z_j(\xi) z_\nu \tag{21}$$

(簡単のためにやはり横断面は変形せず z 方向にのみ変位をおこすものと仮定する)

この時力は船が変形しない場合のように単純ではないので次のように一般化したものを考えねばならない。

つまり

$$F_j = \int F(\xi)\, Z_j(\xi)\, d\xi \tag{22}$$

各断面に働く力 F ((2) 式で与えられるような) を Z_j なる重味をつけた加重平均を考える。従って特に $Z_j=1$ は z 方向の力であり $Z_i=\xi$ はモーメントとなる。

さて (20), (21) を使えば

$$F_j = -\rho i\omega \int_S \Phi Z_j z_\nu ds = \rho i\omega \iint_S \Phi_j \Phi_\nu ds = -\rho i\omega \sum_k C_{jk}, \tag{23}$$

但し

$$\left.\begin{aligned} C_{jk} &= C_{kj} = \iint_S \Phi_j Z_k z_\nu ds \\ \Phi_\nu|_S &= -\sum_k Z_k z_\nu \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

また波による力についても同様に (22) の定義による力は

$$\begin{aligned} F_{wj} &= \rho g A(\omega) \iint_S \Phi_D Z_j z_\nu ds \\ &= \rho g A(\omega) D_j(\alpha) \end{aligned} \tag{25}$$

但し

$$\begin{aligned} D_j(\alpha) &= -\iint_S \Phi_D(\alpha) \Phi_{j\nu} ds \\ &= \iint_S (\Phi_j \Phi_{e\nu} - \Phi_e \Phi_{j\nu}) ds \end{aligned} \tag{26}$$

1 節 (17) により Φ_j によって出来る波は

$$Z_{wj} \to \frac{k}{i\sqrt{2\pi\rho g i}} e^{-ik\rho} D_j(\alpha) , \tag{27}$$

これが Haskind の関係[2]である。

3. 運動方程式[1]

ハミルトンの変分原理によれば運動は次のように表わされる。

$$\delta \int_0^t (T - V - S) dt = \delta \int_0^t W dt \tag{1}$$

ここに

T: 全系の運動エネルギー
V: 全系の位置エネルギー
S: 歪エネルギー
W: 外力のなす仕事

今の場合縦運動のみ考えて船の上下の位置 $\zeta(x, t)$ とし

$w(x)$: 重量分布
$B(x)$: 水 線 幅
$A(x)$: 横切面積

とすると船体については

$$T_B = \frac{1}{2g} \int w(x) \zeta^2(x, t) dx \tag{2}$$

$$V_B = -\int w(x) \zeta(x, t) dx \tag{3}$$

$$S = \frac{1}{2} \int EI(x) \zeta_{xx}^2(x, t) dx \tag{4}$$

E は船体材料のヤング率, $I(x)$ は断面２次モーメントとする。

この他に水の Lagrangean L_W を加えねばならない。

$$T-V=T_B-V_B+L_W \tag{5}$$

とおくと

$$L_W=\iiint p\,dxdydz=\rho\iiint\left(\phi_t-\frac{1}{2}q^2+gz\right)dxdydz \tag{6}$$

で与えられる。

先ず静水圧に関する部分は, 船体 S の平衡位置を $z_0(x, y)$ とおくと, そのオフセットは

$$z(x, y)=z_0(x, y)+\zeta(x, t)$$

であるから

$$\begin{aligned}\rho g\iiint z\,dxdydz&=-\frac{\rho g}{2}\iint_S z^2dxdy-\frac{\rho g}{2}\iint_F \zeta^2dxdy\\&=-\frac{\rho g}{2}\iint_S(z_0^2+2z_0\zeta+\zeta^2)\,dxdy-\frac{\rho g}{2}\iint_F\zeta^2dxdy\\&=-\frac{\rho g}{2}\iint_{\bar{F}}z_0^2dxdy-\rho g\int A(x)\zeta(x, t)\,dx\\&\quad-\frac{\rho g}{2}\int B(x)\zeta^2(x, t)\,dx-\frac{\rho g}{2}\iint_F\zeta^2dxdy\ ,\end{aligned} \tag{7}$$

ここに F は自由表面とし $\bar{F}$ は船の水線面とする。

また

$$\iiint\phi_t\,dx\,dydz=\frac{d}{dt}\iiint\phi\,dxdydz-\iint_S\phi\phi_\nu ds-\iint_F\phi\phi_z dxdy\ ,$$

であるから, 今

$$V_S=\rho g\int A(x)\zeta(x, t)\,dx+\frac{\rho g}{2}\int B(x)\zeta^2(x, t)\,dx \tag{8}$$

とおき (7) の右辺の定数項は関係ないので除いて考えることにすると (ϕ の水面条件を使って)

$$\begin{aligned}L_{WD}=L_W+V_S&=\rho\frac{d}{dt}\iiint\phi\,dxdydz-\frac{\rho}{2}\iint_S\phi\phi_\nu ds\\&\quad-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\iint_F\phi\phi_t dxdy\end{aligned} \tag{9}$$

が得られる。

従って運動の始めと終りに $\phi=\phi_t=0$ となるとすれば

$$\int_0^t L_{WD}\,dt=-\frac{\rho}{2}\int_0^t dt\iint_S\phi\phi_\nu ds \tag{10}$$

となって S 上の積分のみで決まる。

外力 $q(x)$ のなす仕事 W は

$$W=\int q(x)\zeta(x,t)\,dx \tag{11}$$

これらを (1) に代入して ζ について変分をとると運動方程式がえられる訳である。 L_{WD} の変分は少々面倒であるが次のようになる。

まず

$$\int_0^t dt\left[\iint_S \phi\delta\phi_\nu ds-\iint_S \phi_\nu\delta\phi ds\right]=0$$

であるので ϕ の境界条件1節 (5′) から

$$\begin{aligned}\delta\int L_{WD}dt&=-\rho\int dt\iint_S \phi\delta\phi_\nu ds=\rho\int dt\iint \phi\delta\dot{\zeta}z_\nu ds\\&=-\rho\int dt\iint_S \phi_t\delta\zeta z_\nu ds=\int dt\int f(x,t)\delta\zeta(x,t)\,dx\end{aligned}$$

ここに f は2節 (1) による断面に働く力である。

他の変分は容易に求まって次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned}&\frac{w(x)}{g}\ddot{\zeta}(x,t)+m_{xx}(x,t)+\gamma B(x)\zeta(x,t)+f(x,t)\\&\quad=\gamma A(x)-w(x)+q(x,t)\ ,\end{aligned} \tag{12}$$

ここに $\gamma=\rho g$ でまた

$$m(x,t)=EI(x)\zeta_{xx}(x,t)$$

で曲げモーメントであり両端で $m=(d/dx)m=0$ とする。

上式において $\gamma A,\ w$ は時間に関係ないから以後

$$\begin{aligned}&\zeta(x,t)=\zeta_D(x,t)+\zeta_S(x,0)\ ,\\&[EI(x)\zeta_{Sxx}(x)]_{xx}+\gamma B(x)\zeta_S(x)=\gamma A(x)-w(x)\end{aligned} \tag{13}$$

のような静的な撓み ζ_S を差引いて ζ_D のみを考えることにする。

つまり (12) を

$$\frac{w(x)}{g}\ddot{\zeta}(x,t)+m_{xx}(x,t)+\gamma B(x)\zeta(x,t)+f(x,t)=q(x,t) \tag{14}$$

と簡略化した方程式で考える訳である。

これをフーリェ変換すると

$$\frac{w(x)}{g}\ddot{Z}(x,\omega)+M_{xx}(x,\omega)+\gamma B(x)Z(x,\omega)-\rho i\omega C_0(x,\omega)\dot{Z}(x,\omega)=Q(x,\omega) \tag{15}$$

特に初期条件が 0 ならば

$$\left[-\omega^2\left\{\frac{w(x)}{g}+\rho C_0(x)\right\}+\gamma B(x)\right]Z(x,\omega)+M_{xx}(x,\omega)=Q(x,\omega) \tag{16}$$

となりストリップ法的に考えたのと全く同じ結果が得られる。

簡単のために上式を

$$LZ(x,\omega)=Q(x,\omega)$$

と書くことにしよう。

$$L\equiv-\frac{\omega^2}{g}\{w(x)+\rho gC_0(x)\}+\gamma B(x)+\frac{d^2}{dx^2}\left\{EI(x)\frac{d^2}{dx^2}\right\} \tag{17}$$

規則波中の応答については 2 節 (10) により

$$LZ(x,\omega)=\rho gA(\omega)D(x,\alpha) \tag{18}$$

となる。

また，イムパルス外力に対しては

$$\left.\begin{aligned} q(x,t)&=\delta(t)\delta(x-\xi)\\ Q(x,\omega)&=\delta(x-\xi)\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

であるから

$$LZ(x,\omega)=\delta(x-\xi) \tag{20}$$

最後に $t=0$ で船体にある力をかけて $\zeta(x,0)$ だけ変形させておいてそれを急に離す場合を考えると (15) 式において

$$\dot{Z}=i\omega Z-\zeta(x,0)$$

$$\ddot{Z}=-\omega^2Z=i\omega\zeta(x,0)$$

$$q=0$$

であるから

$$LZ(x,\omega)=i\omega\left\{\frac{w(x)}{g}+\rho C_0(x)\right\}\zeta(x,0) \tag{21}$$

等々の運動方程式が得られる。

これらの方程式は一般に準線型であるので常係数の場合のように簡単には解けないし，また梁の強制振動の問題であって複雑であり，変分法を用いた近似解法の方が実用的であろう[8]。

従って例えば

$$\left.\begin{aligned}\zeta(x,t)&=\sum_j a_j(t)Z_j(x)\\ Z(x,\omega)&=\sum_j A_j(\omega)Z_j(x)\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

のように展開して元の変分原理によって A_j を決めることになる。

このような問題では普通周波数応答が必要なものであり上述のままの変分原理は不便である。

周波数領域では変分原理は次のように簡単になる。

$$I=\int\left[\left[-\frac{\omega^2}{2}\left\{\frac{w(x)}{g}+\rho C_0(x,\omega)\right\}+\frac{\gamma}{2}B(x)\right]Z^2(x,\omega)+\frac{M^2(x,\omega)}{2EI(x)}\right]dx \tag{23}$$

$$W = \int Q(x, \omega)\, Z(x, \omega)\, dx \tag{24}$$

から

$$\delta I = \delta W \tag{25}$$

とすればよい。これから (16) 式がえられることは明らかであろう。

なお (16) 式の両辺に $\bar{Z}$ をかけて x について積分し，その虚部を較べると

$$-\rho\omega^2 \mathscr{I}_m \int C_0(x, \omega) |Z(x, \omega)|^2 dx = \mathscr{I}_m \int Q(x, \omega)\, \bar{Z}(x, \omega)\, dx \tag{26}$$

となるがこれは外力のなす仕事が船体の動きによって生ずる波のエネルギーとなって消費されることを示している。

4. グリーン関数による解の表示[4)]

3 節 (20) の解をグリーン関数 G と呼ぶことにしよう。

すなわち

$$LG(x, \xi) = \delta(x-\xi) \tag{1}$$

また

$$lg(x, \xi) = \delta(x-\xi) \tag{2}$$

$$l \equiv \gamma B(x) + \frac{d^2}{dx^2}\left\{EI(x)\frac{d^2}{dx^2}\right\} \tag{3}$$

の解 $g(x, \xi)$ は静的単位荷重による Influence function つまりグリーン関数である。

L も l も自己随伴形式であるから次の相反性がある。

$$g(x, \xi) = g(\xi, x), \quad G(x, \xi) = G(\xi, x) \tag{4}$$

また

$$\left.\begin{aligned} &\int\left[\zeta(\xi)\, lg(x, \xi) - g(x, \xi)\, l\zeta(\xi)\right] d\xi = 0 \\ &\int\left[Z(\xi)\, LG(x, \xi) - G(x, \xi)\, LZ(\xi)\right] d\xi = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

これらの関数を使えば前節の解は次のように表わせる。

3 節 (13) の解は

$$\zeta_s(x) = -\gamma \int\left\{\frac{w(\xi)}{g} - A(\xi)\right\} g(x, \xi)\, d\xi \tag{5}$$

3 節 (18) の解を Z^W と記すと

$$Z^W(x) = \rho g A(\omega) \int D(\xi, \alpha)\, G(x, \xi)\, d\xi \tag{6}$$

3 節 (21) の解を Z^0 と記すと

$$Z^0(x) = i\omega \int\left\{\frac{w(\xi)}{g} + \rho C_0(\xi)\right\} \zeta(\xi, 0)\, G(x, \xi)\, d\xi \tag{7}$$

所で特に $\zeta(\xi, 0)$ が ξ 点における単位荷重によるものとすれば

$$l\zeta(\xi, 0) = \delta(\xi - \xi'), \quad \zeta(\xi, 0) = g(\xi, \xi') \tag{8}$$

また

$$L - l \equiv -\omega^2 \left\{ \frac{w(\xi)}{g} + \rho C_0(\xi) \right\} \tag{9}$$

であるから (7) は

$$Z^\delta(x) = \frac{1}{i\omega} \int [G(x, \xi) L\zeta(\xi, 0) - G(x, \xi) l\zeta(\xi, 0)] d\xi$$

となるが

$$\int G(x, \xi) L\zeta(\xi, 0) d\xi = \int \zeta(\xi, 0) LG d\xi = \zeta(x, 0) = g(x, \xi'), \int Gl\zeta d\xi = G(x, \xi')$$

なる故

$$Z^\delta(x) = \frac{1}{i\omega}[g(x. \xi') - G(x, \xi')]$$

よって

$$\left.\begin{aligned} &\dot{Z}^\delta(x) = i\omega Z^\delta - \zeta(x, 0) = -G(x, \xi') \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

また ξ' の近くでモーメント m をかけて離すとすると上式で

$$Z^m(x) = mG_{\xi'\xi'}(x, \xi'), \tag{11}$$

(10), (11) の Kotchin 関数は

$$\left.\begin{aligned} D^\delta(\alpha) &= -\iint_S \Phi_D(x, \alpha) z_\nu G(x, \xi') ds(x) \\ D^m(\alpha) &= m \iint_S \Phi_D(x, \alpha) z_\nu G_{\xi'\xi'}(x, \xi') ds(x) \end{aligned}\right\}$$

2 節 (11) によってこれは

$$\left.\begin{aligned} D^\delta(\alpha) &= -\int D(x, \alpha) G(x, \xi') dx \\ D^m(\alpha) &= m \int D(x, \alpha) G_{\xi'\xi'}(x, \xi') dx \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

と書けるから (6) 式と較べて

$$\left.\begin{aligned} D^\delta(\alpha) &= -\frac{Z^W(\xi')}{\rho g A(\omega)} \\ D^m(\alpha) &= \frac{m}{\rho g A(\omega)} Z^W_{\xi'\xi'}(\xi') \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

これを 1 節 (17) と較べるとこの場合 α 方向へ出て行く波の波高は α 方向から来た波による周波数応答に比例していることがわかる[1]。

5. 相似則[6]と逐次近似解法

規則波中の運動方程式について相似則を調べよう。3節 (18) を書き下すと

$$-\omega^2\left\{\frac{w(x)}{g}+\rho C_0(x)\right\}Z(x)+\frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\frac{d^2}{dx^2}Z\right]-\gamma B(x)Z(x)$$
$$=\rho g A(\omega)D(x,\alpha)\ , \tag{1}$$

であるから，普通に行なわれているように相似模型について船長 L と波長 λ の比

$$kL=L\frac{\omega^2}{g}=2\pi L/\lambda \tag{2}$$

を等しくし，また λ と波高 $[Ad\omega]$ の比を等しくして試験を行なうとして，Z が相似になるためには (1) を次のように書きかえて

$$\left[-kL\ \left\{\frac{W(L\xi)+\rho g C_0(L\xi)}{W/L}\right\}\frac{EI_0}{WL^2}\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{EI(\xi)}{EI_0}\right)\frac{d^2}{d\xi^2}+\frac{\gamma B(L\xi)}{W}L^2\right]Z(L\xi)$$
$$=\frac{\gamma A(\omega)L^2}{W}D(L\xi,\alpha)\ , \tag{3}$$

ここに W は排水量，I_0 は ⊠ の $I(x)$，
となるから，今

$$\frac{WL^2}{EI_0}=\varepsilon \tag{4}$$

が同じならば運動はすべて相似になる。

(1) はまた運動の如何に拘らず梁としての船の変位の平衡方程式でもあるから ε が等しければ3節 (13) により

$$\zeta_S\propto\varepsilon L \tag{5}$$

であり，また上下撓み振動数を f とすると

$$f\propto\omega\propto\sqrt{\frac{gEI_0}{WL^3}}=\sqrt{\frac{g}{\varepsilon L}}\ , \tag{6}$$

あるいは

$$\frac{f^2L}{g}\propto\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\ , \tag{6'}$$

となって從強度，振動の上でも相似になっている。

普通は船体の撓みの影響は小さいと考えられるので (1) 式を解くに当り

$$Z(x)=Z_0+\Theta x+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n Z_n(x) \tag{7}$$

のように ε なるパラメーターで展開出来るとしよう。

これを (1) 式に代入して ε の同じ order の項を等置すると

$$\varepsilon\frac{d^2}{dx^2}EI(x)\frac{d^2}{dx^2}Z_1=\left[\omega^2\left\{\frac{w}{g}+\rho C_0\right\}-\gamma B\right]\{Z_0+\Theta x\}+\gamma AD(x,\alpha) \tag{8}$$

$$\varepsilon \frac{d^2}{dx^2} EI(x) \frac{d^2}{dx^2} Z_{n+1} = \left[\omega^2 \left\{ \frac{w}{g} + \rho C_0 \right\} - \gamma B \right] Z_n \,, \quad \text{for} \quad n \geq 1 \tag{9}$$

が得られる。$Z_n(n \geq 1)$ はすべて船首尾端で梁としての自由端の条件を満たすものとする。

そうすると (8) 式に 1 あるいは x をかけて積分すると左辺は消えて

$$\int \left[-\omega^2 \left\{ \frac{w}{g} + \rho C_0 \right\} + \gamma B \right] (Z_0 + \Theta x) \left[\begin{matrix} 1 \\ x \end{matrix} \right] dx = \gamma A \int D(x, \alpha) \left[\begin{matrix} 1 \\ x \end{matrix} \right] dx \,, \tag{10}$$

となるがこれは撓みを考えない時の運動方程式そのものである。従ってこの解を代入して (8) の右辺を 2 回積分したものが従来計算している波浪中の曲げモーメントである。

これをさらに 2 回積分して (9) 式に代入しもう 2 回積分すれば第 2 近似の曲げモーメントが出て来る。

結　言

船体の弾性を考慮に入れた場合従来のストリップ法で運動方程式を求めるのは容易であるし，また梁としての船体の曲げの方程式も元々ストリップ法であるのでそれで充分であると思われる。

しかし得られる方程式は一船に常係数でない 4 階準線型の微分方程式（一般には微積分方程式）であるので実際上は数値解法によらざるをえない。最近の計算機によればこれは困難な問題ではないけれども，ここでは弾性学で使う変分法との連繋を示す意味でハミルトンの変分原理から運動方程式を誘導した。この方法によれば種々の近似解法を安心して使用出来るし，またもっと正確な理論や複雑な例えば横断面も変形するような問題を組立てることも容易になる。

またこの方法では初期値問題を考えるのも容易で特に興味のあるのはハスキントの関係を利用すれば静水中において船の動きに従って出来る波を解析すれば規則波中の応答がわかることで最近の船の過渡応答の研究の一助ともなるであろう。

なお実船についての計算例では現在の所剛性の影響は極めて小さい[9]。

最後に今回の試験は真能教授との討論に端を発するもので，同教授に心から謝意を表する。

参　照　文　献

1) 別所正利: “船体運動のイムパルス応答とその発散波について” 昭和 48 年防大理工学研究報告（予定）
2) 別所正利: Mem. of the Defense Academy, Vol. 8, No. 1, 1968.
3) 元良，小山: 造協論文集 117 号，昭和 40 年.
4) S. チモシェンコ: “工業振動学” 東京図書，1954.
5) 林，村，共著: “変分法” コロナ社，昭和 43 年 8 版.
6) 庄子義正: “波浪によっておきる振動について” 防大研究科卒業論文，昭和 46 年 3 月.
7) 日本造船学会: 耐航性シムポジウムテキスト (1969).
8) 末次一誠: 関西造協論文集，昭和 29 年 10 月講演.
9) 別所正利: 造船研究協会研究資料 No. 163，第 131 部会報告，昭和 47 年 3 月.

Theory of the Motion among Waves of a Ship which is Considered as not Rigid but Flexible

(Dedicated to the late Professor Y. Tamai)

By Masatoshi BESSHO*

(Received Feb. 28, 1973)

Abstract

When we treat with a ship motion among waves it is usual to consider a ship as rigid, but may be necessary to consider her as flexible today when her size is growing bigger and bigger and her rigidity is lowering relatively.

This is a theory of the longitudinal motion among waves of a ship in such case.

The equation of motion is deduced from Hamiltonian principle, formulae for frequency and impulse response are deduced and the dimensional similarity and solving method are added shortly.

* Professor; Dept. of Mechanical Engineering, the Defense Academy.