

浅い水面に浮んで動揺する平板に働く 流体力について

(牧山幸彌教授に捧ぐ)

別 所 正 利*

(昭和52年4月26日受理)

1. 序 論

近年洋上に浮んでいる型の構造物の需要が増えそれに伴ってその波浪中動揺性能の研究も大変盛んになってきた。

この研究では水上で動揺するときに物体に働く力また波から受ける力を先ず求めなければならない。

一般に浮遊構造物は水深のあまり深くないところに設置されると考えられるのでこれらの力を正確に求めるためには水深は有限としてその影響を加味する必要がある²⁾が、その影響はかなり複雑となるので今までのところは水深を無限と仮定した理論の方が多く見受けられる。

一方もう一つの極限として水深が十分浅くてできる波がいわゆる浅海波となる場合が考えられるがこの場合についての流体力の理論に関してまとまった記述はあまり見受けられない。

本報はこの点に着目して水深が十分浅い海面に平板が浮んでいる場合を考えそれが動揺する場合に水から受ける力や波から受ける力についての理論を展開しようとするものである。

先ず3次元的問題の定式化を行い具体的に円板についての解を求め、さらに長方形板の近似解について述べ最後に2次元問題について述べることにする。この最後の問題の解はJ.J. Stokerの本¹⁾に出ているがここではそれを付加質量とか波の強制力とかの形に整理しておいた。

2. 問題の定式化¹⁾

十分浅い水深 h の水面に境界曲線 C で囲まれた平板 S が浮んでいるとしよう。

図1のように座標系をとってその運動による速度ポテンシャルを ϕ 、水面上昇を ζ とする。

水面における速度は近似的に

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi = \frac{\partial}{\partial t} \zeta, \quad (2-1)$$

* 機械工学教室 教授

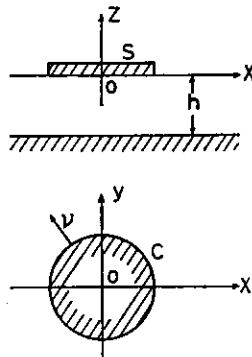


Fig. 1. Co-ordinate system

であるが浅水近似では速度ポテンシャルは z 方向に一様であると見なすのでこの式は陽に表れず連続の条件から次のような形に表される。

$$\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial t} \zeta(x, y, t) = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi(x, y, t), \quad (2-2)$$

また水面にかかる圧力が P であるとするベルヌーイの定理により近似的に

$$\frac{1}{\rho} P(x, y, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, y, t) + g \zeta(x, y, t), \quad (2-3)$$

ここに ρ は水の密度, g は重力の定数である。

それゆえ, 水面の圧力がなければ (2-2) と (2-3) 式から ζ を消去して Φ は S の外側で

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi(x, y, t) = \frac{1}{gh} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(x, y, t), \quad (2-4)$$

なる偏微分方程式を満たさねばならない。

一方 S の中では ζ は与えられるので (2-2) 式なるポアソンの方程式を満たさねばならないことになる。

しかしこれらは同じ水の運動を表現するものであるから境界 C 上で不連続となつてはならない。

すなわち

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \Phi, \Phi: C \text{ Continuous on } C, \quad (2-5)$$

これらの条件の他に波は外側に出ていくという条件を付加すれば解は一義的に定まることになる。

さて運動はすべて円周波数 ω で周期的に起こっているものとした線型的に論じているのであるからそれは運動の振幅 X に比例しているのだから次のように複素表示しかつ正規化しておこう。

浅い水面に浮んで動揺する平板に働く流体力について

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \operatorname{Re}[-i\omega X\phi(x, y)e^{i\omega t}], \\ \zeta &= \operatorname{Re}[XZ(x, y)e^{i\omega t}], \\ P &= \operatorname{Re}[Xp(x, y)e^{i\omega t}], \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

そうすると (2-4) 式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + K^2\right)\phi(x, y) = 0, \quad K = \omega/\sqrt{gh} \quad (2-7)$$

また (2-2) 式は

$$h\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi(x, y) = Z(x, y), \quad (2-8)$$

となる。

さて C の外側で ϕ は (2-7) を満たさねばならないがその一般解はよく知られているように

$$\phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(2)}(Kr) \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix}, \quad (2-9)$$

ここに $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とし, $H_n^{(2)}$ はハンケル関数である。

あるいはまたグリーンズの定理によって次のように表現することもできる。

$$\phi(x, y) = \frac{i}{4} \int_C \left\{ \phi(x', y') \frac{\partial}{\partial \nu} H_0^{(2)}(KR) - \frac{\partial \phi}{\partial \nu} H_0^{(2)}(KR) \right\} ds(x', y'), \quad (2-10)$$

ただし $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ 。

この式を用いると十分遠方のポテンシャルの近似値が計算できる。

すなわちハンケル関数の漸近展開を使って直ちに

$$\phi(x, y) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi Kr}} H(K, \theta) e^{-i(Kr + (\pi/4)\epsilon)}, \quad (2-11)$$

ここに

$$H(K, \theta) = \frac{i}{4} \int_C \left\{ \phi(x, y) \frac{\partial}{\partial \nu} - \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right\} \exp(iK\tilde{\omega}(\theta)) ds, \quad (2-12)$$

ここに $\tilde{\omega}(\theta) = x \cos \theta + y \sin \theta$ 。

それゆえ C 上の ϕ とその法線微分が分かれば遠方の速度ポテンシャルが求められるがこの値はまた (2-5) 式によって C 内部の値に連続しているので S 上の ϕ の値によっても表現できるはずである。

すなわち (2-12) 式の右辺をグリーンズの定理によって S 上の積分にかえ (2-8) 式を代入すれば

$$H(K, \theta) = \frac{1}{4i} \iint_S \left[K^2 \phi(x, y) + \frac{1}{h} Z(x, y) \right] \exp(iK\tilde{\omega}) dS, \quad (2-13)$$

を得る。

それゆえこの H 関数に限っていえば S 上の ϕ が分かれば計算できるわけである。

ところで C の内側 S 上での ϕ は (2-8) を満たすので一般に次のように書くことができる。

$$\phi(x, y) = \frac{1}{h} [f_0(x, y) + f(x, y)], \quad (2-14)$$

ここにラブラシアンを Δ とすると

$$\left. \begin{aligned} \Delta f_0(x, y) &= Z(x, y), \\ \Delta f(x, y) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2-15)$$

のようになる。すなわち f_0 はポアッソンの方程式の一つの特解とし、 f は任意の調和関数とする。

この f_0 の積分表示はよく知られているしまた後出のような例では大変簡単で視察によって見つかるのでここには記さない。

いづれにしても f_0 が求まれば (2-8) つまり境界条件は満たされたことになるので後は (2-5) つまり外側のポテンシャルに滑らかにつながるように f を決めればよいことになるので問題は結局調和関数 f の境界値問題に帰着する。

これを少し具体的に考える為に外側で ϕ が (2.9) のように表され、 f_0 が分かっているとすると C の内側では f は

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix}, \quad (2-16)$$

のように表されるだろうから C 上で (2-5) の条件を方程式とすれば未定係数 A_n, B_n は定まることになる。

この操作は見掛けよりはずっと簡単で後出の例に見るとおりである。

最後に具体的にでてくる C 上の境界条件を記しておく。

$$\left. \begin{aligned} Z(x, y) &= 1 \quad \text{for Heaving Osc.} \\ &= x \quad \text{for Pitching Osc.} \\ &= y \quad \text{for Rolling Osc.} \end{aligned} \right\} \quad (2-17)$$

振幅 a で α 方向からの入射波の速度ポテンシャルは

$$\Phi_0 = \frac{ga}{i\omega} \phi_0(x, y; \alpha) e^{i\omega t}, \quad (2-18)$$

$$\text{ここに} \quad \phi_0(x, y; \alpha) = \exp[iK(x \cos \alpha + y \sin \alpha)], \quad (2-19)$$

となるので散乱ポテンシャルも

$$\Phi_a = \frac{ga}{i\omega} \phi_a(x, y; \alpha) e^{i\omega t}, \quad (2-20)$$

と規格化しておくと C 上の境界条件は

$$Z(x, y) = 0,$$

つまり

$$\Delta \phi_a(x, y; \alpha) = -\Delta \phi_0 = K^2 \phi_0(x, y; \alpha), \quad (2-21)$$

となる。

3. 力とモーメントおよび積分定理

運動 j によって物体が水から受ける垂直方向の力 F_j およびモーメントは静水圧を除いて次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} F_j &= \iint_S P_j dx dy = -\rho \iint_S \frac{\partial}{\partial t} \phi_j dx dy = -\rho \omega^2 X_j f_{j3}, \\ \left. \begin{aligned} M_y \\ M_x \end{aligned} \right\} &= \iint_S P_j \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx dy = -\rho \omega^2 X_j \begin{pmatrix} f_{j4} \\ f_{j5} \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

ここに

$$f_{j4} = \iint_S \phi_j Z_4 dx dy, \quad (3-2)$$

ここに

$$Z_3 = 1, \quad Z_4 = x, \quad Z_5 = y, \quad (3-3)$$

なお以下 $j=3$ は上下動, $j=4$ は縦ゆれ, $j=5$ は横ゆれを意味するものとし下添字で夫々の運動を示す事とする。又境界条件は (2-17) によって与えられるものとする。

また波による上下方向の力および横ゆれ, 縦ゆれモーメントは入射波散乱波を (2-18), (2-20) 式のようにとると

$$\left. \begin{aligned} F_{w3} &= -\rho g a e_3, \\ M_{wy} &= -\rho g a e_4, \\ M_{wx} &= -\rho g a e_5, \end{aligned} \right\} \quad (3-4)$$

ここに

$$e_j = \iint_S (\phi_0 + \phi_d) Z_j dx dy, \quad (3-5)$$

と書ける。

さて C の外側で (2-7) 式を満たし (2-9) または (2-10) 式のような表現をもつ二つのポテンシャルを考えて次のような線積分を考えるとグリーンの定理により任意の曲線上

$$\int_C \left[\phi_i \frac{\partial}{\partial \nu} \phi_j - \phi_j \frac{\partial}{\partial \nu} \phi_i \right] ds$$

の積分に変えることができるのでそれを半径無限大の円周上にとると 0 になることが分かる。

それゆえ次の相反性が成り立つ。

$$\int_C \phi_i \frac{\partial}{\partial \nu} \phi_j ds = \int_C \phi_j \frac{\partial}{\partial \nu} \phi_i ds \quad (3-6)$$

一方 C の内側については (2-8) 式を使ってグリーンの定理を利用しかつ上式が成り立つことを考慮すれば

$$\iint_S \phi_j Z_i dx dy = \iint_S \phi_i Z_j dx dy, \quad (3-7)$$

なる相反定理が成り立つことが分かる。

この定理を (3-2) 式に適用すれば力およびモーメントの対称性が分かり

$$f_{ij} = f_{ji}, \quad (3-8)$$

また (3.5) 式に適用すれば

$$\iint_S \phi_a Z_j dx dy = h \iint_S \phi_j d\phi_a dx dy = K^2 h \iint_S \phi_j \phi_0 dx dy,$$

となるのでこれを (3-5) 式に代入し (2-13) 式で定義した関数を使うと

$$e_j = 4ihH_j(K, \alpha), \quad (3-9)$$

を得るがこれはよく知られた Haskind-花岡の関係であって 発散波高と波の強制力が比例していることを示している⁴⁾。

最後に同じくグリーンの定理により無限遠方で (2-11) 式のような展開を持つポテンシャルについて

$$\iint_S [\phi_i \bar{Z}_j - \bar{\phi}_j Z_i] dx dy = \frac{2h^2}{\pi K} \int_0^{2\pi} H_i(\theta) \bar{H}_j(\theta) d\theta, \quad (3-10)$$

となることが証明できる。ここに上棒は複素共役値をとることを意味するものとする。

この式の左辺は仕事積分に比例するのでこの式は物体または水のなす仕事が発散波の波高の積となることを示している。

4. 円板の解

2 節で定式化した境界値問題は円板、楕円板では解析的に解けるが後者ではマシウ関数を使わねばならず少し複雑になるので別の機会に譲ることにする。

本報では最も簡単な円板について逐次その解をあげることにしよう。以下円板の半径は 1 とする。

i) 上下動

$$\text{すなわち} \quad Z(x, y) = 1 \quad \text{for } r < 1, \quad (4-1)$$

速度ポテンシャルは (2.9), (2.14) 式を参照して直ちに

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{4h} (C + r^2), \quad \text{for } r \leq 1, \quad (4-2)$$

$$= AH_0^{(2)}(Kr), \quad \text{for } r > 1, \quad (4-3)$$

ここに A, C は定数でこれらの表現が $r=1$ で滑らかにつながる条件 (2-5) 式によって決められる。

すなわち

$$\left. \begin{aligned} 1 + C &= 4hAH_0^{(2)}(K), \\ 1 &= -2KhAH_1^{(2)}(K), \end{aligned} \right\} \quad (4-4)$$

これから直ちに次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} A &= -1/[2KhH_1^{(2)}(K)], \\ C &= -1 - 2H_0^{(2)}(K)/[KH_1^{(2)}(K)] \end{aligned} \right\} \quad (4-5)$$

これで速度ポテンシャルは求まったのでそれを (3-2), (2-12) 式に代入して f_{ij}, H_j を求めれば (3-1), (3-4), (3-9) 式によって流体力が分かる。

浅い水面に浮んで動揺する平板に働く流体力について

計算の結果は

$$f_{33} = \frac{-\pi}{8h} \left[1 + \frac{4H_0^{(2)}(K)}{KH_1^{(2)}(K)} \right], \quad (4-6)$$

$$H_1(K, \alpha) = 1/[2iKhH_1^{(2)}(K)], \quad (4-7)$$

となる²⁾。

(4-7) 式からわかるように当然のことながら波の強制上下力は波がどの方向からきても同じである。

ii) 縦ゆれ (今の場合は横ゆれも同じになる)

同様にして

$$Z(r, \theta) = r \cos \theta, \quad \text{for } r \leq 1, \quad (4-8)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi(r, \theta) &= \frac{1}{8h} (C + r^2) r \cos \theta, \quad \text{for } r \leq 1, \\ \phi(r, \theta) &= AH_1^{(2)}(Kr) \cos \theta, \quad \text{for } r > 1, \end{aligned} \right\} \quad (4-9)$$

滑らかに接続されるためには A, C は次のようにならなければならない。

$$\left. \begin{aligned} A &= -1/[4KhH_2^{(2)}(K)], \\ C &= -1 - 2H_1^{(2)}(K)/[KH_2^{(2)}(K)], \end{aligned} \right\} \quad (4-10)$$

これより流体力は

$$f_{44} = \frac{-\pi}{32h} \left[\frac{1}{3} + \frac{2H_1^{(2)}(K)}{KH_2^{(2)}(K)} \right], \quad (4-11)$$

$$H_1(K, \alpha) = i \cos \alpha / [4KhH_2^{(2)}(K)], \quad (4-12)$$

iii) 散乱

波の強制力は (3-9) により発散波の波高から求められるのでその目的からは散乱ポテンシャルを特に求める必要はないけれど解の形を知るために一応求めておこう。

また対称性から入射波はどの方向からきても同じである故 $\alpha=0$ としよう。

そうするとまず (2-21) から

$$Z(r, \theta) = \frac{\omega^2}{g} \exp(iKr \cos \theta), \quad \text{for } r \leq 1, \quad (4-13)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi(r, \theta) &= -\exp(iKr \cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n C_n r^n \cos n\theta, \quad \text{for } r \leq 1, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n A_n H_n^{(2)}(Kr) \cos n\theta, \quad \text{for } r \geq 1, \end{aligned} \right\} \quad (4-14)$$

ここに $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_n=2$ for $n \geq 1$ 。

とおいて係数 A_n, C_n を決めると

$$A_n = -i^n J_{n+1}(K) / H_{n+1}^{(2)}(K), \quad (4-15)$$

$$C_n = 2i^{n+1} / [\pi K H_{n+1}^{(2)}(K)], \quad (4-16)$$

を得る。

この解から例えば (3.5), (3.9) 式が同一であることを確かめることができる。

5. 2 次元問題

2 次元問題つまり十分長い長方形板が横から波を受ける場合も簡単に解ける場合の一つであり文献に示されたとおりである¹⁾ が以下少くし系統的に整理して記述しておく。

さて水面に長さ 2 の平板があるものとし規格化などは (2-6) 式のようにとるものとする。

平板の外側で速度ポテンシャルの満たすべき方程式は (2.7) 式の代わりに

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + K^2\right)\phi(x) = 0, \quad (5-1)$$

物理的に許容し得る解は (2-9) 式の代わりに

$$\phi(x) = A^\pm e^{\mp iKx}, \quad \text{for } x \leq 0, \quad (5-2)$$

となり、平板の内側では

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x) = \frac{1}{h} Z(x), \quad (5-3)$$

となり Z は境界条件として与えられるものであるが (2-14), (2-15) 式のように表されることは同様である。

しかし今度は偏微分方程式ではないのでずっと簡単であり、例えば (2-14) 式の f は

$$f(x) = Cx + D, \quad (5-4)$$

のように決ってしまう。

境界条件としては $|x| < 1$ に対して

$$Z(x) = \begin{cases} 1: \text{Heaving osc.} \\ x: \text{Pitching osc.} \end{cases} \quad (5-5)$$

となりまた x の正方向からの入射波を (2-18) のように正規化しておく (2-19) 式の代わりに

$$\phi_0^+(x) = \exp(iKx), \quad (5-6)$$

で同じく (2-20) 式のように正規化された散乱ポテンシャルの境界条件は次のようになる。

$$Z_a^+(x) = h \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_a^+(x) = K^2 h e^{iKx}, \quad (5-7)$$

力およびモーメントも (3-1), (3-4) 式のように正規化しておく (3-2), (3-5) 式の各係数は

$$f_{ij} = \int_{-1}^1 \phi_j Z_i dx, \quad (5-8)$$

$$e_j = \int_{-1}^1 (\phi_0^+ + \phi_a^+) Z_j dx, \quad (5-9)$$

と与えられ相反定理 (3-8) が先ず成立、また波の力については (3-9) 式を導いたのと同様にして外側のポテンシャルを (5-2) のようにとると

$$e_j = -2iKhA_j^+, \quad (5-10)$$

を得る。

また (3-10) 式の関係は部分積分によって次のようになる。

$$\int_{-1}^1 (\phi_i \bar{Z}_i - \bar{\phi}_i Z_i) dx = 2iKh[A_i^+ \bar{A}_i^+ + A_i^- \bar{A}_i^-], \quad (5-11)$$

以下具体的に解を並べていこう。

i) 斉次解

まず最初に (5-3) 式の右辺 Z が 0 のときにも解があることに注目しよう。以下この解を斉次解と呼ぶ。

このとき明らかに (5-4) 式と同じく

$$\phi(x) = Cx + D, \quad \text{for } |x| < 1, \quad (5-12)$$

となり、外側では (5-2) となるので滑らかに接続するためには

$$\left. \begin{aligned} C &= 0, \\ D &= -iKhA^+ e^{-iK}, \\ A^+ &= -A^-, \end{aligned} \right\} \quad (5-13)$$

でなければならない。

これは $Z=0$ に対する解であるから Z が 0 でない他のすべての解はこの解の任意定数倍だけ不定である。

一方、物理的に考えてみると $Z=0$ は底の平らな平板が左右ゆれをする場合に当たると考えられ、実際上述の解は左右反対称となっている。

しかしながら浅水近似では水深方向に x 方向の速度は一定とするので板の下面の水はあたかも固体であるかのように左右に動いていることになっている。

それに反して平板の喫水は水深に比し小さいと考えられるので実際の左右ゆれでは水はほとんど動かされないと予想される。

それゆえ以下ではこの解の部分は考えないことにする。

ii) 上下動

$Z=1$ であるから

$$\phi(x) = \frac{1}{h} \left(\frac{x^2}{2} + C \right), \quad \text{for } |x| < 1, \quad (5-14)$$

となり外側では同じく (5-2) 式とすると同様にして

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{i}{K} - \frac{1}{2}, \\ A^+ &= A^- = i e^{iK} / Kh, \end{aligned} \right\} \quad (5-15)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{s,s} &= \frac{1}{h} \left(\frac{2i}{K} - \frac{2}{3} \right), \\ e_s &= 2 e^{iK}, \end{aligned} \right\} \quad (5-16)$$

iii) 縦ゆれ

$Z=x$ と置くと

$$\phi(x) = \frac{1}{h} \left(\frac{x^3}{6} + Cx \right), \quad (5-17)$$

となり同様にして

$$\left. \begin{aligned} C &= -\frac{1}{6} - \frac{1}{3(1+iK)}, \\ A^+ &= -A^- = -e^{iK} / [(1+iK)3h], \end{aligned} \right\} \quad (5-18)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{44} &= \frac{-2}{9h} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{1+iK} \right), \\ e_4 &= \frac{2iK}{3(1+iK)} e^{iK}, \end{aligned} \right\} \quad (5-19)$$

iv) 散乱

Z は (5-7) 式によって与えられるので

$$\phi(x) = -e^{iKx} + C + Dx, \quad \text{for } |x| < 1, \quad (5-20)$$

と置くと

$$\left. \begin{aligned} C &= e^{iK}, \\ D &= \frac{iK}{1+iK} e^{iK}, \\ A^+ &= \frac{iK}{1+iK} e^{2iK}, \\ A^- &= \frac{e^{2iK}}{1+iK} - 1, \end{aligned} \right\} \quad (5-21)$$

を得る。

v) 反射波と透過波

これらの結果を使うと x の正方向からの単位波高の入射波に対し反射波高 (半波高) A_R と透過波のそれ A_T は次のように計算できる。

$$\left. \begin{aligned} A_R &= A_d^+ + K^2 h (Z A_s^+ + \theta A_4^+), \\ A_T &= (1 + A_d^-) + K^2 h (Z A_s^- + \theta A_4^-), \end{aligned} \right\} \quad (5-23)$$

あるいは辺々相加減して

$$\left. \begin{aligned} A_R + A_T &= -(1 + A_d^+ + A_d^-) + 2K^2 h Z A_s^+, \\ A_R - A_T &= -(1 + A_d^- - A_d^+) + 2K^2 h \theta A_4^+, \end{aligned} \right\} \quad (5-23)$$

となる。

ここに $A_d^\pm$ は (5-21) 式 $A_s^\pm$ は (5-15) 式 $A_4^\pm$ は (5-18) 式により与えられるものとし, Z, θ はそれぞれ上下, 縦ゆれの振幅とする。

それゆえ例えば

$$A_R = A_T = 0, \quad (5-24)$$

つまり反射波も透過波も消えるためにはそれぞれの式により次のように上下, 縦ゆれさせればよい。

$$\left. \begin{aligned} Z &= \frac{i}{2K} e^{iK}, \\ \theta &= \frac{(iK-1)}{6K^2} e^{iK}, \end{aligned} \right\} \quad (5-25)$$

6. 2 次元弾性平板

前節で取り扱った平板が弾性的に折れ曲がる場合もすでに教科書に解がのっている¹⁾が前節同様の趣旨で取り扱ってみよう。

平板の材料は均質で重量分布も一様であるとし、 x の正方向からの単位振幅の入射波によって運動しているとする、その運動方程式は次のように書ける。

$$\frac{EI}{\rho g} \frac{d^4}{dx^4} Z(x) - \frac{\omega^2 w}{\rho g^2} Z(x) + Z(x) + \frac{\omega^2}{g} \phi(x) = -\{\phi_0^+(x) + \phi_0^-(x)\}, \quad (6-1)$$

ここに E はヤング率、 I は単位幅当たりの断面 2 次モーメント、 w は単位幅当たり、単位長さ当たりの平板の重量とし、 Z は平板の上下変位、 ϕ は速度ポテンシャルで Z との間に (5-3) 式の関係があるものとする。

前節の例のように平板の変形がない場合と異なる点は Z がこのような複雑な形で与えられる点である。

しかし今の場合 (5-3) 式の関係があるので上式は解析的に解けることは文献のとおりである¹⁾。

しかしここでは有限又は無限水深の場合にも適用できる解法として次のように考えよう。

今正規直交関数系 $u_n(x)$ を考えて、つまり

$$\int_{-1}^1 u_n(x) u_m(x) dx = \delta(n, m), \quad (6-2)$$

次のように展開できるとしよう。

$$Z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n u_n(x), \quad (6-3)$$

この $u_n(x)$ を (5-3) 式の右边に代入して得られる速度ポテンシャルを $\phi_n(x)$ とすると次のように展開できる。

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \phi_n(x), \quad (6-4)$$

この直交関数系としては問題の性質から両端自由梁の固有関数系が適当と考えられるのでそれに上下、縦ゆれも加えて次のように定義しよう。

$$u_0(x) = 1/\sqrt{2}, \quad u_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x, \quad (6-5)$$

$$u_n(x) = \left(\frac{1}{\mu_n}\right)^4 \frac{d^4}{dx^4} u_n(x), \quad n \geq 2, \quad (6-6)$$

とし μ_n は上式の逐次の固有値とする (付録参照)。

(6-5) 式の解は前節で得てあるが添字が違っているので必要な量を記すと、定義式はやはり (5-8), (5-9) 式として

$$\left. \begin{aligned} f_{00} &= \frac{1}{h} \left(\frac{i}{K} - \frac{1}{3} \right), \\ f_{1,1} &= -\frac{1}{3h} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{1+iK} \right), \end{aligned} \right\} \quad (6-7)$$

$$\left. \begin{aligned} e_0 &= \sqrt{2} e^{iK}, \\ e_1 &= \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \frac{iK}{1+iK} e^{iK}, \end{aligned} \right\} \quad (6-8)$$

となる。

$n \geq 2$ に対しては前節同様にして解くと

$$\left. \begin{aligned} \phi_n(x) &= \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\mu_n}\right)^4 \frac{d^2}{dx^2} u_n(x), \quad \text{for } |x| < 1, \\ &= 0, \quad \text{for } |x| > 1, \end{aligned} \right\} \quad (6-9)$$

となって、大変興味深いことに発散波がなくなる。

つまり

$$e_n = 0, \quad \text{for } n \geq 2, \quad (6-10)$$

このことから $f_{n,m}$ は n または m が 2 以上では虚部はなくなる (付録参照)。

これらの結果を使って (6.1) の両辺に $u_n(x)$ をかけて積分すると次の連立方程式を得る。

$$\begin{aligned} D_n C_n + \frac{\omega^2}{g} \sum_{\substack{m=0 \\ n \neq m}}^{\infty} C_m f_{n,m} &= -e_0 \delta(0, n) \\ &\quad - e_1 \delta(1, n), \end{aligned} \quad (6-11)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= 1 - \frac{\omega^2}{g} \left(\frac{w}{\rho g} - f_{00} \right), \\ D_1 &= 1 - \frac{\omega^2}{g} \left(\frac{w}{\rho g} - f_{1,1} \right), \\ D_n &= 1 + \frac{\omega_n^2}{g} \times \frac{w}{\rho g} - \frac{\omega^2}{g} \left(\frac{w}{\rho g} - f_{n,n} \right), \end{aligned} \right\} \quad (6-12)$$

でまた

$$\frac{\omega_n^2}{g} = \frac{EI}{wL^4} (2\mu_n)^4, \quad n \geq 2, \quad (6-13)$$

つまり ω_n は空中におけるこの板の撓み振動の円周波数とする。

ここで Stoker¹⁾ のあげている数値をとって 4 次以上の振動を無視して動揺振幅と波の反射係数を計算してみると図 2, 3 のようになる。

$$\begin{aligned} h &= 40 \text{ ft}, \quad w = 85 \text{ pounds/ft}^2, \\ EI/(wL^4) &= 1.6452, \quad L = 50 \text{ ft}. \end{aligned}$$

この剛性値では撓み振動の影響はこの範囲では全く無視し得る。

というのは最低次の撓み振動に対して (6-12) 式の第 3 式の右辺が 0 となる波長は長さ L の 0.288 倍という短波長にくるからである⁵⁾。

そこで剛性がないと仮定すると図中点線のようにかなりの変化が見られるがこれは (6-11) 式において D_2 または D_3 が 0 になる近辺であって図には示さなかったがこの近くで撓み振動の振幅は急激に大きくなり逆に上下ゆれ、縦ゆれは小さくなっている。この

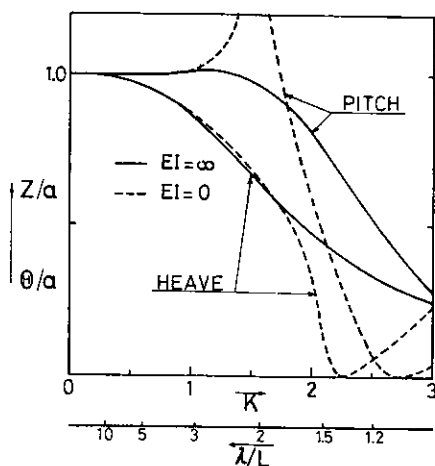


Fig. 2. Heave and pitch response

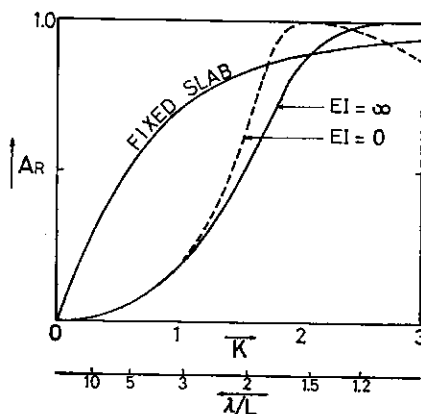


Fig. 3. Reflection coefficient

ことは高次振動を計算に入れても定性的には同じであろう。

波の反射率については固定した剛な平板が最も高く動揺をゆるすと長波長では小さくなってしまいます。しかし剛性がなくなると僅かに大きくなるがこの原因は上述のように動揺振幅が小さくなる点にあるようである。

というのは (6-10) 式で見たように撓み振動によっては波を起こさないで、その振幅の大きさは反射波に影響がなく、間接的に撓み振動が大きくなると平均振幅 C_0 , C_1 が小さくなって結果的に反射が大きくなっているのであるがその効果もあまり大きいものではないようにみえる。

7. 結 論

水深が十分小さくていわゆる浅水近似が適用できるような水面に浮んで波を受けて動揺する平板に働く流体力について系統的な記述を試み次のような結論を得た。

i) 3次元問題を定式化し力およびモーメントを与える式を求め、それらの間の相反性などを導いた。

それによると発散波高が波の強制力に比例するいわゆるハスキント・花岡の定理がこの場合も成り立つことを確かめた。

ii) 円板については具体的に解を求め流体力を計算し上下方向の力については一色らの結果に一致することを確認した。

iii) 2次元問題についても同様な記述をし文献の結果に一致することを確認した。

iv) さらに平板が弾性的に撓む場合を採り上げて文献とは別の解法の手順を示し近似値を求めた。

v) その結果によると剛性が動揺や反射波に影響を及ぼすのは一般には波長が平板の長さより短い場合でそれより長い波では剛性がなくなると影響が現れない。またその反射波に及ぼす影響はあまり大きくない。

参 考 文 献

- 1) J. J. Stoker: Water Waves, pp. 414-449, Interscience Publisher, Inc., New York, 1957.

- 2) H. Issiki, H. Maeda and J.H. Hwang: On the Heaving Motion of a Circular Disk in Shallow Water, 日本造船学会論文集第 136 号, 昭和 49 年 12 月.
- 3) 坪井忠二: 振動論, 河出書房, 昭和 17 年.
- 4) 別所正利: 動揺問題における波なし分布について, 日本造船学会論文集第 117 号, 昭和 40 年 6 月.
- 5) 別所正利: 船体剛性を考慮した波浪中船体運動の理論 (前進速度のない場合), 防衛大学校理工学研究報告第 11 巻, 昭和 48 年 9 月.

付録一 様梁の撓み振動の正規関数³⁾

教科書によれば本文 (6-6) 式の固有関数は

$$\left. \begin{aligned} u_{2n}(x) &= A_{2n} \cos \mu_{2n} x + B_{2n} \cosh \mu_{2n} x, \\ u_{2n+1}(x) &= A_{2n+1} \sin \mu_{2n+1} x + B_{2n+1} \sinh \mu_{2n+1} x, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-1})$$

とかけ両端自由の条件は

$$-\frac{d^2}{dx^2} u(\pm 1) = \frac{d^3}{dx^3} u(\pm 1) = 0, \quad (\text{A-2})$$

それゆえ

$$\left. \begin{aligned} \frac{B_{2n}}{A_{2n}} &= \frac{\cos \mu_{2n}}{\cosh \mu_{2n}}, \\ \frac{B_{2n+1}}{A_{2n+1}} &= \frac{\sin \mu_{2n+1}}{\sinh \mu_{2n+1}}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-3})$$

であり固有値方程式は次のようになる。

$$\cos 2\mu_n \cosh 2\mu_n = 1, \quad (\text{A-4})$$

固有値もよく知れていて表のようになり, A_n もすぐ計算できる。なお $n=2$ が最低次の固有振動である。

さて力の係数は (5-8) 式の定義式に (6-9) 式と (5-3) 式の関係を代入して

$$hf_{n,m} = \frac{1}{\mu_n^4} \int_{-1}^1 u_m \frac{d^2}{dx^2} u_n dx, \quad n, m \geq 2, \quad (\text{A-4})$$

となるが (A-1) ~ (A-4) 式を考慮すると最終的に

$$\left. \begin{aligned} hf_{2n,2m} &= \frac{4}{\mu_{2n}^4 - \mu_{2m}^4} \{ \mu_{2n} \tanh \mu_{2n} - \mu_{2m} \tanh \mu_{2m} \}, \\ hf_{2n+1,2m+1} &= \frac{4}{\mu_{2n+1}^4 - \mu_{2m+1}^4} \{ \mu_{2n+1} \coth \mu_{2n+1} - \mu_{2m+1} \coth \mu_{2m+1} \}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-5})$$

となりまた $m=0$ では

$$\left. \begin{aligned} hf_{2n,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\mu_{2n}^4} \int_{-1}^1 \frac{d^2}{dx^2} u_{2n} dx = \frac{2}{\mu_{2n}^4} \tanh \mu_{2n}, \\ hf_{2n+1,1} &= \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{1}{\mu_{2n+1}^3} \left(\coth \mu_{2n+1} - \frac{1}{\mu_{2n+1}} \right), \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-6})$$

などを得る表参照。

浅い水面に浮んで動揺する平板に働く流体力について

Table Numerical coefficients

n	2	3	4	5
μ_n	2.36502	3.92660	5.49781	7.06859
A_n	.99129	1.00039	.99998	.99999
B_n	.13170	.02789	.00579	.00120

$hf_{n,m}$

n	m		
	0	2	4
2	.06281	— .10993	.01889
4	.00219	.01889	— .02706

$hf_{n,m}$

n	m		
	1	3	5
3	.08538	— .04843	.00556
5	.00561	.00556	— .01718

On Hydrodynamical Forces acting on an Oscillating Flat-Plank Floating on a Shallow Water

(Dedicated to Professor Koya MAKIYAMA)

By Masatoshi BESSHO*

(Received Apr. 26, 1977)

Abstract

The theory of oscillation among waves of a flat plank floating on a shallow water is comparatively simpler than the one in the case of finite or infinite depth of water because of its shallow water approximation.

However it is only usefull for the limit of finite water depth but for the pratical application.

The author describes hydrodynamical forces acting on a plank systematically so that they may be made use of the calculation of its oscillation.

For a circular disc, actual solutions for heaving and pitching oscillation and diffraction of incident wave are given and hydrodynamical forces are calculated.

For a numerical example, the motion of an elastic slab with infinite breadth floating and oscillating on a shallow water are treated and concluded that its stiffness does not affect the mean amplitude of oscillation in usual except the case when it is flexible.

* Professor; Department of Mechanical Engineering, National Defense Academy.