

浅吃水船の2次元造波抵抗理論について

(木村康之教授に捧ぐ)

別 所 正 利*

(平成3年3月3日受付;平成3年5月10日再受付)

On the Two-Dimensional Theory of Wave Resistance of a Shallow Draft Ship

(Dedicated to Professor Yasuyuki Kimura)

By Masatoshi BESSHO

A shallow draft ship is usually represented by a pressure distribution on a free surface in theory of wave resistance. However, if we give a ship form with her sinkage arbitrarily, we can not obtain a solution satisfying Kutta condition. Hence, we introduce a source singularity so that we may have a unique solution satisfying that condition. This singularity represents the mean surface depression in the down stream. Introducing this singularity, the boundary integral equation, the equation to determine a sinkage and trim and the resistance are dealt with theoretically.

1. 序 論

従来高速で滑走する船型は水面の圧力分布で表わされるとして多くの研究がある。しかし滑走艇を考えると容易にわかるように速度による浸水面の変化が大変大きくて問題の数学的定式化が大変困難である。元来これらの理論は翼理論の手法にならって構成されているので与えられた翼面の垂直速度によって解が一意的に定まる^{1),2),3)}。

しかし滑走板では水面に対する上下位置、3次元では Rise of Floor 等は重要な要素であるけれどもその定式化では考慮する事が出来ない。そこで鈴木等は浸水長さの変化を考えに入れてこれらを満たす逐次解法を提案している⁴⁾。しかし実用の大型高速艇船型では船首部の吃水は深くて水線面積は殆ど変化しないと考えられるが船尾はいわゆる Transom Stern (Destroyer Stern) となって水を切って進む。

しかし浅吃水なので水面の圧力分布で表現出来ると

考えられるが従来このような場合についての研究は見られない。本報はこのような浅吃水船が定速で進む場合の境界値問題の定式化を試み、力とモーメントおよび抵抗についての理論を論ずるものである。その為には従来考慮しなかったポテンシャルを船首部に加える必要があり、それは船が水を堰き止める、つまり上流側水面が下流側のそれより高くなるような性質をもつものである。これはまた従来造波抵抗理論における線積分項と呼ばれているものに対応している⁵⁾。それを導入して境界値問題を定式化し、与えられた排水量と重心をもつ船型の与えられた速度における、トリム等姿勢を求むる方法を示し、抵抗についても新しい成分が入って来る事を示す。

最後に平板(箱船)について高速における近似解を求める事にする。

2. 速度ポテンシャルと境界値問題

トランサム船尾を有し、船首が水線付近で略々垂直

* 防衛大学校 機械工学教室 教授

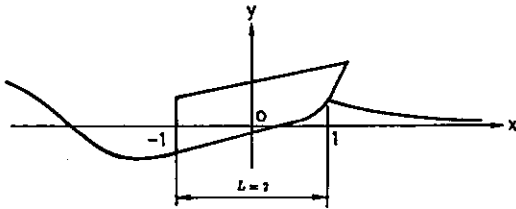


Fig. 1 Co-ordinate System

で速度によって浸水長 $L (= 2)$ が変化しないように船型を考えよう。図1のように一様速度 $V (= 1)$ の流れに浮いているものとし、船の堰き止め効果によって下流側水面は A だけ降下しているものとする。

複素速度ポテンシャルを

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y), \quad \frac{df}{dz} = -u + iv \quad (1)$$

のように定義し、水面における水面上昇を η とする

$$\phi_x(x, 0) - K\phi(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{for } |x| > 1 \\ -p(x) & \text{for } |x| < 1 \end{cases} \quad (2)$$

水面上昇量 η と流れ関数の関係は

$$\phi(x, 0) = -\eta(x) \quad (3)$$

となる。

ここに重力の定数 g はこの単位系では $K (= g/V^2)$ となる。また水の密度 ρ も 1 とする。

さて従来は翼理論にならって速度ポテンシャルは (6) の右辺第 1 項のみとり、与えられた底面形状 $\eta(x)$ に対し

$$\frac{\partial \eta(x)}{\partial x} = -\phi_x(x, 0) = \phi_y(x, 0) \quad (4)$$

なる式を積分方程式として解き、クッタの流出条件を満たす解を得ていた。そしてこの解を用いて水面変化を計算すると始めて船の基準位置からの上昇(下降)量がわかることになる。逆に言うとも最初から船の上下位置を指定するクッタの条件を満たす解は得られない。また自由航走する船では走っている時も排水量と重心位置が静止時のそれに一致しなければならないが従来の方法では浸水長を変化させて力の平衡を保つ以外に方法はない。

従って今考えているような船型では従来のポテンシャルの形ではクッタの条件を満たす解を得る事が出来ないで次のように新しい項を導入する。

さて、速度ポテンシャルと流れ関数は附録 A, B の核関数を使って次のように表わされるものとする。

$$f(z) = \int_{-1}^1 p(\xi) W(z - \xi) d\xi + A W^*(z - 1) \quad (5)$$

$$\phi(x, y) = \int_{-1}^1 p(\xi) S(x - \xi, y) d\xi + A T^*(x - 1, y) \quad (6)$$

$$\psi(x, y) = \int_{-1}^1 p(\xi) T(x - \xi, y) d\xi - A S^*(x - 1, y) \quad (7)$$

これらの式中右辺第 3 項は原点に吹き出しを有するポテンシャルでいわゆる線積分項であり、従来は考えに入れられた事のない項であるが附録 B で示すように下流側水面が押し下げられるようになるポテンシャルなので便宜上堰き止めポテンシャルと呼ぶ事にしよう。点特異性なのでこれがどのように船体に力を及ぼすかはよく判らないが、附録 B で考察する。

充分遠方の水面変位は (7) に (A. 9), (A. 11) を代入して

$$\eta(x) \xrightarrow{x \gg 1} \frac{-1}{\pi(Kx)^2} \int_{-1}^1 p(\xi) d\xi + \frac{A}{\pi K(x-1)} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \eta(x) \xrightarrow{x \ll -1} & \frac{1}{\pi(Kx)^2} \int_{-1}^1 p(\xi) d\xi \\ & + 2 \int_{-1}^1 p(\xi) \sin\{K(x - \xi)\} d\xi \\ & + A\{-1 + 2 \cos\{K(x - 1)\}\} \end{aligned} \quad (9)$$

となるが、今

$$F(k) = \int_{-1}^1 p(x) e^{ikx} dx \quad (10)$$

$$F^*(k) = F(k) - iAe^{ik} \quad (11)$$

とおくと (9) はまた次のように書ける。

$$\eta(x) \xrightarrow{x \ll -1} -A + O\left(\frac{1}{Kx^2}\right) + 2Im[F^*(K)e^{-iKx}] \quad (12)$$

さて、境界条件は静止時の船底のオフセットを $-f(x)$ とおき、トリムを τ , 上昇量を h とすると

$$\phi(x, 0) = -[-f(x) + \tau x + h], \quad |x| < 1 \quad (13)$$

で排水量 V と重心位置 $l_{c.b.}$ は

$$V = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (14)$$

$$Vl_{c.b.} = \int_{-1}^1 f(x)x dx \quad (15)$$

となる。従来は境界積分方程式は (4) 式を採用しているが本報では (13) の形に採る。即ち (7) に (13)

を代入して

$$f(x) - \tau x - h = \int_{-1}^1 p(\xi) T(x - \xi, 0) d\xi - AS^*(x-1, 0) \quad (16)$$

とし、これをクッタの条件

$$p(-1) = 0 \quad (17)$$

の下に解くものとする。上の積分方程式を次のように分解しておこう。

$$\int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} p_f(\xi) \\ p_r(\xi) \\ p_h(\xi) \\ p_0(\xi) \end{Bmatrix} T(x - \xi, 0) d\xi - \begin{Bmatrix} A_f \\ A_r \\ A_h \\ A_0 \end{Bmatrix} S^*(x-1, 0) = \begin{Bmatrix} f(x) \\ -x \\ -1 \\ (1-x^2)/2 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

この3つの方程式を解いて重ね合わせると(16)の解は

$$p(x) = p_f(x) + \tau p_r(x) + h p_h(x) \quad (19)$$

$$A = A_f + \tau A_r + h A_h \quad (20)$$

と表せる。この時の排水量とモーメントは自由航走しているならば静止時の(14)、(15)に一致しなければならないから次式が成り立つ。

$$\rho g V = \int_{-1}^1 p(x) dx = L_f + \tau L_r + h L_h \quad (21)$$

$$\begin{Bmatrix} L_f \\ L_r \\ L_h \end{Bmatrix} = \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} p_f \\ p_r \\ p_h \end{Bmatrix} x dx \quad (22)$$

$$\rho g V l_{o.b.} = \int_{-1}^1 p(x) x dx = M_f + \tau M_r + h M_h \quad (23)$$

$$\begin{Bmatrix} M_f \\ M_r \\ M_h \end{Bmatrix} = \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} p_f \\ p_r \\ p_h \end{Bmatrix} x^2 dx \quad (24)$$

この(21)と(23)から自由航走時のトリムと上昇量が計算出来る。浸水長が変化すると考える場合は鈴木³の提唱するように(20)のAが0となるように繰り返し計算をして姿勢を求めればよい。

3. 抵抗

抵抗は従来考えられて来た圧力のx方向成分と船首端の堰止め抗力(附録B)の和であると考えられるから(B)により

$$D = \int_{-1}^1 p(x) \eta_x(x) dx + KA \{ \eta(1) + A \} \quad (25)$$

ここに η_x は(4)、(7)より

$$\begin{aligned} \eta_x(x) &= - \int_{-1}^1 p(\xi) T_x(x - \xi, 0) d\xi + AS_x^*(x-1, 0) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(\xi)}{\xi - x} d\xi + K \int_{-1}^1 p(\xi) S(x - \xi, 0) d\xi \\ &\quad + KAT(x-1) \end{aligned} \quad (26)$$

さて附録Cにより

$$\int_{-1}^1 p(x) dx \int_{-1}^1 \frac{p(\xi)}{\xi - x} d\xi = \frac{\pi}{4} \sigma^2 \quad (27)$$

$$\sigma = \lim_{x \rightarrow 1} [p(x) \sqrt{1-x^2}] \quad (28)$$

$$\int_{-1}^1 p(x) dx \int_{-1}^1 p(\xi) S(x - \xi, 0) d\xi = |F(K)|^2 \quad (29)$$

最後に

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 p(x) T(x-1, 0) dx \\ &= \int_{-1}^1 p(x) T(1-x, 0) dx \\ &\quad + 2 \int_{-1}^1 p(x) \sin \{ K(1-x) \} dx \\ &= -\eta(1) + \frac{1}{2} A + i [F(K) e^{-iK} - \bar{F}(K) e^{iK}] \end{aligned} \quad (30)$$

これらから(25)は

$$\begin{aligned} D &= D_s + K |F(K)|^2 \\ &\quad + KA \left[\frac{3}{2} A + i \{ F e^{-iK} - \bar{F} e^{iK} \} \right] \end{aligned} \quad (31)$$

となるが(12)を使って整理すると

$$D_s = \frac{\pi}{4} \sigma^2 \quad (32)$$

$$D_w = K |F^*(K)|^2 \quad (33)$$

$$D_B = \frac{K}{2} A^2 \quad (34)$$

$$D = D_S + D_W + D_H \quad (35)$$

となり、抵抗は従来通りの飛沫、造波の 2 成分¹⁾の他に (34) で計算される抵抗が加わる。これは深さ A のダムの壁面に働く力に等しいので仮に水頭抵抗と呼ぶ事にしよう。

4. 可逆定理²⁾

今船体オフセット $\eta(x)$ 、 $\eta'(x)$ に対する圧力分布を $p(x)$ 、 $p'(x)$ としよう。船体傾斜は (26) で与えられるがその x の符号を変えたものを考えて見よう。

$$\begin{aligned} \eta_x(-x) = & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(-\xi)}{x-\xi} d\xi \\ & + K \int_{-1}^1 p(-\xi) S(\xi-x, 0) d\xi \\ & + KAT(-1-x, 0) \end{aligned} \quad (36)$$

この両辺に $p'(x)$ をかけて積分し右辺での積分順序を変更すると圧力がクッタの条件を満たすならば

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 p'(x) \eta_x(-x) dx \\ & = \int_{-1}^1 p(-\xi) [\eta'_\xi(\xi) - KA'T(\xi-1)] d\xi \\ & \quad + KA \int_{-1}^1 p'(x) T(-1-x) dx \end{aligned} \quad (37)$$

となるが右辺に A の掛かった積分は (7) により

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 p(-\xi) T(\xi-1) d\xi = \int_{-1}^1 p(\xi) T(-1-\xi) d\xi \\ & \quad = -\eta'(-1) + AS^*(-2, 0) \\ & \int_{-1}^1 p'(x) T(-1-x) dx = -\eta'(-1) \\ & \quad + A'S^*(-2, 0) \end{aligned} \quad (37^*)$$

となるから結局

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 p'(x) \eta_x(-x) dx + KA\eta'(-1) \\ & = \int_{-1}^1 p(-x) \eta'_x(x) dx + KA'\eta'(-1) \end{aligned} \quad (38)$$

を得る。これは翼理論の Munk の定理に対応する可逆定理である。普通逆流れを考えて導くがそれは x の符号を変えたものと同じである。

例えば揚力は $p'(x)$ として (18) の p_r を採るならば

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^1 p(x) p_x \\ &= \int_{-1}^1 p_r(-x) \eta'_x(x) dx - K\{A_r \eta'(-1) + A\} \end{aligned} \quad (39)$$

モーメントは (18) の p_c を採ると

$$\begin{aligned} M &= \int_{-1}^1 p(x) x dx \\ &= \int_{-1}^1 p_c(-x) \eta'_x(x) dx - KA_c \eta'(-1) \end{aligned} \quad (40)$$

また $p'(x)$ として (18) の p_h をとると

$$KA = - \int_{-1}^1 p_h(-x) \eta'_x(x) dx + KA_h \eta'(-1) \quad (41)$$

となって p_h が判っていれば任意の $\eta(x)$ に対して A が求められる。

5. 高速における近似解

境界積分方程式 (18) の核関数は附録 A に示すように正弦、余弦積分で表されるので容易に解ける。ここでは特に大変高速であるとしてそれらの式で O(K) 以上の小さい項を省略して p_r 、 p_h の近似値を求めよう。

$$\left. \begin{aligned} p_h(x) &= a_0^{(h)} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \\ p_r(x) &= a_0^{(r)} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \end{aligned} \right\} \quad x = -\cos \theta \quad (42)$$

と近似して附録 A の近似値を用いると

$$\left. \begin{aligned} a_0^{(h)} &= -\frac{2K}{3\pi} \left(r + \frac{1}{2} + \log \frac{K}{2} \right) \\ A_h &= \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

$$\left. \begin{aligned} a_0^{(r)} &= 1 \\ A_r &= \frac{2}{3} \left(r + \log \frac{K}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

全くの概略値ではあるが定性的には確かである。

例えばトリム τ の平板が $A = 0$ となるのに必要な上昇量 h は (20) より

$$h = \tau \frac{A_r}{A_h} = \tau \left(r + \log \frac{K}{2} \right) \quad (45)$$

となるがこれは $K = 1.12$ 、 $F = 1/\sqrt{2} K = 0.67$ より

高速では正となり、従来の結果に略々等しい。

また (43) より、トリムのない平板 (箱船) の揚力 ($L = \pi a_0^{(h)}$) は $K = 0.68$, $F = 0.86$ 以上の高速では正となる、つまり上昇すればする程揚力が増える事になりこれは航走不安定の限界速度である^{3), 5)}。

従来の理論値は種々あるのでどれに対応するかはよくわからないが不安定の大体の目安にはなろう。最後に抵抗は (11) より

$$F^*(K) \approx L + iA \quad L = \pi a_0 \quad (46)$$

と近似されるから (32~35) により

$$D \approx \frac{L^2}{\pi} + K(L^2 + A^2) + \frac{K}{2} A^2 \\ = \left(\frac{1}{\pi} + K \right) L^2 + \frac{3}{2} K A^2 \quad (47)$$

となる。(43), (44) の解を代入して見ると判るように高速の極限では (32) による飛沫抵抗だけになる。

6. 結 論

略々垂直な船首尾部をもち、船尾ではクッタの流出条件を満たすような船型の造波抵抗の理論模型を構成するために先ず2次元の場合について考察した。

従来浸水長が変化すると考えて通常の圧力分布型を考えた理論はあるが、今の場合に浸水長は変化しないと仮定するので新しく何等かの特異性を導入しなければならない。その為に従来いわゆる線積分項として論じられた吹き出し項を新しく堰止めポテンシャルと名付けて導入する事にした。それは水を上流側に押し戻して、下流側水面を上流側より低下させる役をしている。この導入により、船の上下位置を指定してもクッタの条件を満たす解を求める事が出来る。従ってまた静止時の排水量と重心を持つ船の自由航走時の姿勢を求める事も容易に出来る。最後に抵抗については従来考えられて来た飛沫、造波抵抗の他に水面低下量の自乗に比例する水頭抵抗とでも名付けられる成分が加わる。

参 照 文 献

- 1) 丸尾孟, 水面滑走板の圧力抵抗に関する一考察, 造船協会会報78号, 1947
- 2) M. Bessho and K. Nomura, A Contribution to the Theory of Two-Dimensional Hydro-Planing, Mem. of Defense Academy, vol. 10, 1970
- 3) 別所正利, 定常滑走板の理論に関する一考察, 西部造船協会会報, 54号, 1978
- 4) 鈴木勝雄, 大迫義谷, 2次元滑走板の姿勢変化について,

その1, その2, 防衛大理工学研究報告24巻3号, 1986

5) 別所正利, 鈴木勝雄, 2次元動揺滑走板の安定性について, 防衛大学校理工学研究報告25巻1号, 1987

6) 鈴木勝雄, 2次元 Neuman-Kelvin の問題に関する考察とその応用について, 昭和60年9月 (学位論文)

7) M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover 1970

付 録 A 核関数

$$S(x, y) + iT(x, y) \equiv W(z) \\ = \frac{1}{\pi i} \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_0^\infty \frac{e^{-ikz} dk}{k - K - \mu i}, \quad z = x + iy, y < 0 \quad (A.1)$$

$$\left(\frac{d}{dz} + iK \right) W(z) = \frac{i}{\pi z} \quad (A.2)$$

$$W^*(z) = K \int_z^\infty W(z) dz = T^*(x, y) - iS^*(x, y) \quad (A.3)$$

(A.2) により

$$W^*(z) = -iW(z) - \frac{1}{\pi} \log z \quad (A.4)$$

この右辺の対称項は無限下流で虚部が0となるように選んだものである。この $W^*(z)$ は見られるように原点に吹き出しのあるポテンシャルである。

(A.3) と (A.4) から

$$\left. \begin{aligned} S^*(x, y) &= S(x, y) + \frac{\theta}{\pi}, \quad z = re^{i\theta}, \quad -\pi < \theta < 0 \\ T^*(x, y) &= T(x, y) - \frac{1}{\pi} \log r \end{aligned} \right\} \quad (A.5)$$

特に $y = 0$ のときは S, T は正弦, 余弦積分で表わされ文献 (7) の記号を使えば x が正ならば

$$S(x, 0) + iT(x, 0) = \frac{1}{\pi} [f(Kx) - ig(Kx)], \quad x > 0 \quad (A.6)$$

x が負の時は次のようになる。

$$S + iT = -\frac{1}{\pi} [f(K|x|) + ig(K|x|)] \\ + 2e^{i\pi|x|}, \quad x < 0 \quad (A.7)$$

従って x が小さい時は

$$\left. \begin{aligned} S(x, 0) + iT(x, 0) &\rightarrow \frac{i}{\pi}(\gamma + \log Kx) + \frac{1}{2} & x > 0 \\ S(x, 0) + iT(x, 0) &\rightarrow \frac{i}{\pi}(\gamma + \log K|x|) + \frac{3}{2} & x < 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.8})$$

ここに $\gamma = 0.5772$ でオイラーの定数である。また x が充分大きい時は

$$\left. \begin{aligned} S(x, 0) + iT(x, 0) &\rightarrow \frac{1}{\pi Kx} + \frac{i}{\pi(Kx)^2} + \dots & x \gg 1 \\ &\rightarrow -\frac{1}{\pi K|x|} - \frac{i}{\pi(Kx)^2} & x \ll -1 \\ &\quad + 2e^{-iKx} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.9})$$

それ故 (A.5) より

$$\begin{aligned} S^*(x, 0) + iT^*(x, 0) \\ \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{i}{\pi}(\gamma + \log K) + O(K|x| \log K|x|) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

となって原点で有限連続である。また

$$\left. \begin{aligned} S^*(x, 0) + iT^*(x, 0) &\rightarrow -\frac{i}{\pi} \log x + \frac{1}{\pi Kx} + \dots & x \gg 1 \\ &\rightarrow -\frac{i}{\pi} \log + 2e^{-iKx} - 1 & x \ll -1 \\ &\quad - \frac{1}{\pi K|x|} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.11})$$

付録 B 堰き止めポテンシャル

(A.4) で定義した速度ポテンシャルを堰き止めポテンシャルと呼ぶ事にするがその流れ関数は

$$\psi(x, y) = -S^*(x, y) = K \int_{-\infty}^0 T(x - \xi, y) d\xi \quad (\text{B.1})$$

と書ける。(7) と較べて見ると判るようにこれは K ($= \rho g$) なる一定の圧力が原点から無限下流まで水面に働いている場合の速度ポテンシャルである。

Fig. 2 には水面変位を示すが付録 A により

$$\left. \begin{aligned} \eta(x) &\rightarrow \frac{1}{\pi Kx} & x \gg 1 \\ &\rightarrow \frac{2 \cos Kx - 1}{\pi K|x|} & x \ll -1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.2})$$

$$\eta(x) \rightarrow \frac{1}{2} + O(K|x| \log |x|) \quad (\text{B.3})$$

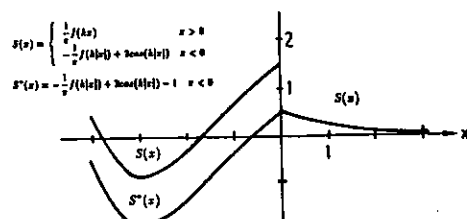


Fig. 2 Surface Elevation

なる近似値がある。また系外に出て行く流量は

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(x, 0) dx = -1 \quad (\text{B.4})$$

負、つまり系外から流量が供給されておりそれが下流側水面降下と平衡している。そこで抵抗としては一定圧力によって後流水面波形を支える力、即ち

$$D = K \int_{-\infty}^0 \eta_x(x) dx = K[\eta(-0) - \eta(-\infty)] = \frac{1}{2} K \quad (\text{B.5})$$

が原点に働いていると考えれば良いであろう。これは (34), (35) により、造波抵抗と水頭抵抗の和である。このような流れは半没垂直平板のまわりの流れのようなものの線型近似と考えられる。もっと一般的には Fig. 3 (b) のような流れとなり船首前方に堰き返し波をもつような流れとなると考えられる。これを滑走型の場合 (a) 図の場合と較べて見よう。(a) 図の場合はよく知られておるように飛沫となって系外に出て行く流量は線型理論では無視され、前方の水面は変位減み点 S を通る分岐流線 AS で近似する。

また線型近似では S 点の圧力は無限大となるが積分可能で抵抗は圧力の進行方向成分として計算出来る。(b) 図の今の場合、減み点 S は船首下端の角 (曲率半径の大変大きい所) にあると考えざるを得ない (さもないと角の所で大きい負圧を生じ結局そこへ減み点が吸い寄せられると考えられる)。船首前面に堰き止められた水は前の場合より大分多いと考えられるけれど線型理論で考える限りはやはり無視する他ないであろう。そして水面変位はやはり分岐流線 AS で近似す

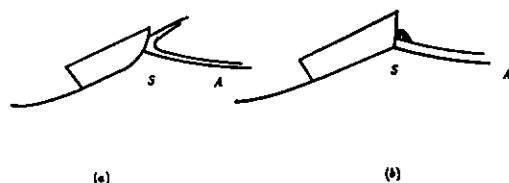


Fig. 3 Flow Pattern near Bow

る事になる。S点付近の速度は x 方向には有限で y 方向には高々対数的無限大に止まる。

付録C 抵抗積分

まずクッタの条件を満たす圧力分布は一般に

$$p(x) = \frac{a_0(1 - \cos \theta)}{\sin \theta} + \sum_{n=1} b_n \sin n\theta \quad (\text{C.1})$$

と表されるが

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(\xi)}{\xi - x} d\xi = a_0 + \sum_{n=1} b_n \cos n\theta \quad (\text{C.2})$$

更に積分すると

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(x) dx \int_{-1}^1 \frac{p(\xi)}{\xi - x} d\xi = \pi a_0^2 \quad (\text{C.3})$$

$$\sigma = \lim [p(x)\sqrt{1-x^2}] = 2a_0 \quad (\text{C.4})$$

$$S(x, 0) = -\frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin kx}{k-x} dk + \cos Kx \quad (\text{C.5})$$

となり、右辺第1項は奇関数である。それ故

$$\begin{aligned} J &= \int_{-1}^1 p(x) dx \int_{-1}^1 p(\xi) S(x-\xi, 0) d\xi \\ &= \int_{-1}^1 p(x) dx \int_{-1}^1 p(\xi) \cos K(x-\xi) d\xi \\ &= |F(K)|^2 \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$