防衛大学校理工学研究報告
第 3 巻 第 1 号
昭和 40 年 5 月

波の中の船の横揺れ運動の理論について

別　所　正　利*

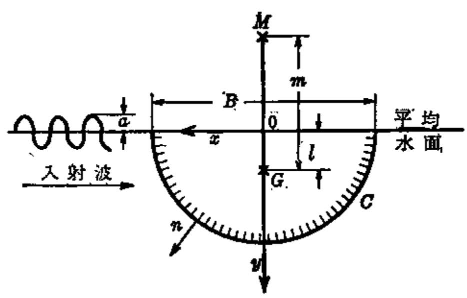
(昭和40年3月20日受付)

1. 序　言　波の中における船の横揺れに関する従来の理論は所謂フルード・クリロッフの仮定，すなわち波長が船の幅に比して大きい時は船体による波の反射などを無視し得ると言う仮設に基づいて組立てられてをり，理論的には不都合であるけれども実験的事実を良く説明できる[1)2)7)]。また従来の理論では左右揺れは横揺れに殆んど影響を及ぼさないと考えられているが，静水中で自由揺れをしている時は良い[8)] としても波の中で揺れる時迄この考えを適用することには大きい疑問がある。

一方これらの問題に関する造波抵抗理論的研究は現在詳わしい数値計算に至る迄完備している[21)]と言って良い状態であるので，二次元線型理論の範囲内での詳細な検討が可能である。

この研究では具体的な数値には触れないで，できる限り総括的にこの問題を眺めて従来の理論との異同を検討して見たい。

2. 速度ポテンシャルの導入[16)]　右図のように座標軸をとり，物体は左右対称で且つ紙面に直角な方向に無限に筒形をなして続いていて，現象はすべて二次元的に起こるものとする。



圧力を P, 水の密度を ρ, 重力の定数を g, 速度ポテンシャルを Φ, 時間を t とし，二次の項を無視するとベルヌーイの式は

$$\frac{1}{\rho}P(x,y,t)=\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,y,t)+gy, \tag{2. 1}$$

となり，特に水面では圧力が一定であるから

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(x,0,t)+g\eta(x,t)=0, \tag{2. 2}$$

ただし η は水面の変位とする。

* 機械工学教室　助教授

一方，水面の下向きの速度は

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(x,t) = -\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,0,t), \tag{2. 3}$$

でなければならないから，これと (2. 2) とから η を消去すると次式が得られる。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(x,0,t) - g\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,0,t) = 0, \tag{3. 4}$$

今現象がすべて周期的に起こっているものとして

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x,y,t) &= \mathscr{R}\,[\varphi(x,y)e^{i\omega t}], \\ P(x,y,t) &= \mathscr{R}\,[p(x,y)e^{i\omega t}], \\ \eta(x,y,t) &= \mathscr{R}\,[a(x)e^{i\omega t}], \end{aligned}\right\} \tag{2. 5}$$

のように置いて考え，さらに添字 c および s でそれぞれ次のように実部および虚部を表わすことにする。

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \varphi_c(x,y) + i\varphi_s(x,y), \\ \Phi(x,y,t) &= \varphi_c\cos\omega t - \varphi_s\sin\omega t, \end{aligned}\right\} \tag{2. 6}$$

そうすると (2. 4) は

$$K\varphi(x,0) + \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,0) - \mu i\varphi(x,0) = 0, \tag{2. 7}$$

ただし $K = \omega^2/g = 4\pi^2/gT^2 = 2\pi/\lambda$, T: 周期，λ: 波長。

と書くことができる。この μ は波の出る方向を決める為のレーリーの摩擦係数である。

このようにおくと静水圧を除く圧力は (2. 1) によって

$$P(x,y,t) = \mathscr{R}\,[p(x,y)e^{i\omega t}] = \mathscr{R}\,[\rho i\omega\varphi(x,y)e^{i\omega t}]$$

すなわち

$$p(x,y) = \rho i\omega\varphi(x,y) \tag{2. 8}$$

同様にして水面変位は (2. 3), (2, 4) から (2. 5) を参照して，次のように与えられる。

$$a(x) = \frac{\omega}{ig}\varphi(x,0), \tag{2. 9}$$

3. グリーン函数[15)16)]　点 (x', y') に単位量の吸込みがある時の水面条件を満足する速度ポテンシャルは

$$G(x,y\,;x',y') = \log\left(\frac{r_1}{r_2}\right) - 2\lim_{\mu\to+0}\int_0^\infty \frac{e^{-k(y+y')}\cos k(x-x')}{k-K+\mu i}dk, \tag{3. 1}$$

ただし　$r_1^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2$, $r_2^2 = (x-x')^2 + (y+y')^2$,

で与えられるが以下これをグリーン函数と呼ぼう。

これは次の微分方程式を満足する。

$$\left(K + \frac{\partial}{\partial y} - \mu i\right)G(x,y\,;x',y') = \left(K - \frac{\partial}{\partial y'} - \mu i\right)\log\left(\frac{r_1}{r_2}\right), \tag{3. 2}$$

また実部と虚部にわけると，

$$\left.\begin{aligned} G &= G_c + iG_s, \\ G_c &= \log\left(\frac{r_1}{r_2}\right) - 2P.\int_0^\infty \frac{e^{-k(y+y')}\cos k(x-x')}{k-K}dk, \\ G_s &= 2\pi e^{-K(y+y')}\cos K(x-x'), \end{aligned}\right\} \tag{3. 3}$$

ただし上第2式中 $P.$ はコーシーの主値をとることを意味する。

定義から明らかなように G は点 (x', y') の近くで対数的に大きくなるが, 一方無限遠方では,

$$G(x, y\,;\,x', y') \xrightarrow[K|x-x'|\gg 1]{} 2\pi i e^{-K(y+y')-iK|x-x'|}, \tag{3. 4}$$

となり, 波は物体から外方に出ていくことを意味している。

この函数を使えば一般に

$$\varphi(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_c\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\right)G(x, y\,;\,x', y')ds(x', y'), \tag{3. 5}$$

なる表示が得られる。これはまた次のようにも書ける。

$$\varphi(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_c\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\right)\log\left(\frac{r_1}{r_2}\right)ds-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-ky}dk}{k-K+\mu i}[H^+(k)e^{-ikx}+H^-(k)e^{ikx}], \tag{3. 6}$$

ただし
$$H^{\pm}(k)=\int_c\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\right)e^{-ky\pm ikx}ds, \tag{3. 7}$$

またさらに
$$H^{\pm}(k)=H_c^{\pm}(k)+iH_s^{\pm}(k), \tag{3. 8}$$

とおいて H_c は φ_c に関する, H_s は φ_s に関する積分と考えよう(すなわちこの函数に関してのみ添字 c, s は実部虚部を意味しない。これは後出の h についても同様である)。

そうすると次の関係がある。

$$H^-(k)=\overline{H_c^+}(k)+i\overline{H_s^+}(k), \tag{3. 9}$$

また物体が左右対称であると考えているから, φ も対称性を持っと考えられ, 次のような関係がある。

$\varphi(x, y)=\varphi(-x, y)$ ならば

$$H^+(k)=H^-(k)=\int_c\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\right)e^{-ky}\cos kx ds, \tag{3. 10}$$

$\varphi(x, y)=-\varphi(-x, y)$ ならば

$$H^+(k)=-H^-(k)=i\int_c\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\right)e^{-ky}\sin kx ds, \tag{3. 11}$$

(3. 4) を使えば (3. 5) から次式がえられる。

$$\varphi(x, y)\quad\left.\begin{array}{l}\xrightarrow[x>0]{}\quad iH^+(K)e^{-Ky-iKx}\\ \xrightarrow[x<0]{}\quad iH^-(K)e^{-Ky+iKx}\end{array}\right\} \tag{3. 12}$$

この式から H^+ は x の正方向に進む波の H^- は負方向へ進む波の振幅に比例することがわかる。

最後に (3. 5) に (3. 3) を代入して実部虚部をわけて書くと (3. 8) を使って次のようになる。

$\varphi(x, y)=\varphi(-x, y)$ ならば

$$\left.\begin{aligned}\varphi_c(x, y)&=\frac{1}{2\pi}\int_c\left(\frac{\partial\varphi_c}{\partial n}-\varphi_c\frac{\partial}{\partial n}\right)G_c ds-e^{-Ky}\cos KxH_s^+(K),\\ \varphi_s(x, y)&=\frac{1}{2\pi}\int_s\left(\frac{\partial\varphi_s}{\partial n}-\varphi_s\frac{\partial}{\partial n}\right)G_c ds+e^{-Ky}\cos KxH_c^+(K),\end{aligned}\right\} \tag{3. 13}$$

また $\varphi(x,y)=-\varphi(-x,y)$ ならば

$$\left.\begin{aligned}\varphi_c(x,y)&=\frac{1}{2\pi}\int_c\left(\frac{\partial\varphi_c}{\partial n}-\varphi_c\frac{\partial}{\partial n}\right)G_c ds+ie^{-Ky}\sin KxH_s^+(K),\\ \varphi_s(x,y)&=\frac{1}{2\pi}\int_c\left(\frac{\partial\varphi_s}{\partial n}-\varphi_s\frac{\partial}{\partial n}\right)G_c ds-ie^{-Ky}\sin KxH_c^+(K),\end{aligned}\right\}\quad(3.\ 14)$$

4. 境界値問題[10]　前節で得たポテンシャルはさらに物体表面上の境界条件を満足しなければならぬ。線型性の仮定の下では自由度に応じた各運動に対応するポテンシャルを重ね合わせればよいから，それぞれのポテンシャルを独立に考えれば十分である。

さて運動としては次の場合が考えられるが，これらを簡単の為に以下添数字で表わすことにする。

i）x 軸に平行な動揺・・・・添字 1

ii）y 軸に平行な動揺・・・・添字 2

iii）原点のまわりの回転動揺・・・・添字 3

iv）物体が反射する波の運動・・・・添字 4

なお入射波の運動などは添字 0 で示す。

v）重心まわりの回転動揺・・・・添字 5

ただしこれは明らかに i）と iii）で表わされるが後の便利の為に考えておこう。

それぞれの場合の境界条件，すなわち物体表面の法線方向速度が物体自身のそれに等しいと言う条件は次のように表わされる。

i）振幅を $Xe^{i\omega t}$ とすると速度は $i\omega Xe^{i\omega t}$ であるから

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=-i\omega X\frac{\partial x}{\partial n},$$

であるが簡単の為に次のようにしておこう。

$$\varphi_1(x,y)=i\omega X\phi_1(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial n}\phi_1(x,y)=-\frac{\partial x}{\partial n},\tag{4. 1}$$

ii）振幅を $Ye^{i\omega t}$ とおくと同様にして

$$\varphi_2(x,y)=i\omega Y\phi_2(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial n}\phi_2(x,y)=-\frac{\partial y}{\partial n},\tag{4. 2}$$

iii）振幅を $\theta e^{i\omega t}$ とおくと

$$\varphi_3(x,y)=i\omega\theta\phi_3(x,y),\ \frac{\partial}{\partial n}\phi_3(x,y)=y\frac{\partial x}{\partial n}-x\frac{\partial y}{\partial n},\tag{4. 3}$$

iv）x の正方向からの入射波の振幅を新しく a とおくと (2. 9) によってそのポテンシャルは

$$\varphi_0(x,y)=\frac{iga}{\omega}\phi_0(x,y),\qquad \phi_0(x,y)=e^{-Ky+iKx},\tag{4. 4}$$

したがって

$$\varphi_4(x,y)=\frac{iga}{\omega}\phi_4(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial n}(\phi_0+\phi_4)=0,\tag{4. 5}$$

v）原点 O から重心 G 迄の巨離を l とおき，回転角を θ とすると

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_5(x,y)=i\omega\theta\phi_5(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial n}\phi_5=\frac{\partial}{\partial n}\phi_3+l\frac{\partial\phi_1}{\partial n},\\ &\varphi_5(x,y)=i\omega\theta\{\phi_3(x,y)+l\phi_1(x,y)\},\end{aligned}\right\}\tag{4. 6}$$

故に

これらの条件から先ず次のようなことがわかる。

$$l\left\{\frac{\partial}{\partial n}\phi_i\right\}=\frac{\partial}{\partial n}\phi_{is}=0,\quad i=1,2,3,5,\cdots\tag{4. 7}$$

また問題 iv) ではさらにわけて考えて，

$\phi_4=\phi_{4A}+i\phi_{4B}$ とおけば (4. 5) は

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial n}\phi_{4A}=-\frac{\partial}{\partial n}e^{-Ky}\cos Kx,\\ &\frac{\partial}{\partial n}\phi_{4B}=-\frac{\partial}{\partial n}e^{-Ky}\sin Kx,\end{aligned}\right\}\tag{4. 8}$$

となるが，ここで ϕ_{4A}, ϕ_{4B} はそれぞれ虚部をもちうる。また船の対称性から次のことは明らかである。

$$\left.\begin{aligned}&\phi_i(x,y)=-\phi_i(-x,y),\quad i=1,3,5\\ &\phi_2(x,y)=\phi_2(-x,y),\end{aligned}\right\}\tag{4. 9}$$

$$\left.\begin{aligned}&\phi_{4A}(x,y)=\phi_{4A}(-x,y),\\ &\phi_{4B}(x,y)=-\phi_{4B}(-x,y),\end{aligned}\right\}\tag{4. 10}$$

このようなことを考えに入れて境界条件を (3. 13), (3. 14) に代入し，かつ点 (x,y) を c 上に持って来ると G_c の特異性から次のような積分方程式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}\phi_{ic}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_c\left(\frac{\partial}{\partial n}\phi_{ic}-\phi_{ic}\frac{\partial}{\partial n}\right)G_c ds+ie^{-Ky}\sin KxH^+_{is}(K),\\ &\frac{1}{2}\phi_{is}(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\int_c\phi_{is}\frac{\partial}{\partial n}G_c ds-ie^{-Ky}\sin KxH^+_{ic}(K),\ i=1,3,5\end{aligned}\right\}\tag{4. 11}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}\phi_{2c}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_c\left(\frac{\partial}{\partial n}\phi_{2c}-\phi_{2c}\frac{\partial}{\partial n}\right)G_c ds-e^{-Ky}\cos Kx\,H^+_{2s}(K),\\ &\frac{1}{2}\phi_{2s}(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\int_c\phi_{2s}\frac{\partial}{\partial n}G_c ds+e^{-Ky}\cos KxH^+_{2c}(K),\end{aligned}\right\}\tag{4. 12}$$

ただしここで

$$H_i^{\pm}(K)=\int_c\left(\frac{\partial}{\partial n}\phi_i-\phi_i\frac{\partial}{\partial n}\right)e^{-Ky\pm iKx}ds,\tag{4. 13}$$

また ϕ_4 については

$$\phi_4(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_c\left(\frac{\partial}{\partial n}\phi_4-\phi_4\frac{\partial}{\partial n}\right)Gds=-\frac{1}{2\pi}\int_c\left(\frac{\partial}{\partial n}\phi_0+\phi_4\frac{\partial}{\partial n}\right)Gds.$$

であり一方 ϕ_0 に関する同様な積分を計算すると

$$\frac{1}{2\pi}\int_c\left(\frac{\partial}{\partial n}\phi_0-\phi_0\frac{\partial}{\partial n}\right)Gds=0,\tag{4. 14}$$

であることがわかるので上式に加えて次式を得る。

$$\phi_4(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\int_c(\phi_0+\phi_4)\frac{\partial}{\partial n}Gds,\tag{4. 15}$$

また (4. 10) の条件によって ϕ_{4A}, ϕ_{4B} は互に独立としてよいから上と同じ式が独立に成立つ。

$$\left.\begin{aligned}\phi_{4A}&=-\frac{1}{2\pi}\int_c(e^{-Ky'}\cos Kx'+\phi_{4A})\frac{\partial}{\partial n}Gds,\\ \phi_{4B}&=-\frac{1}{2\pi}\int_c(e^{-Ky'}\sin Kx'+\phi_{4B})\frac{\partial}{\partial n}Gds,\end{aligned}\right\}\qquad(4.\ 16)$$

同様にして

$$\left.\begin{aligned}&H_4^{\pm}(K)=\int_c\left(\frac{\partial}{\partial n}\phi_4-\phi_4\frac{\partial}{\partial n}\right)e^{-Ky\pm iKx}ds=-\int_c(\phi_0+\phi_4)\frac{\partial}{\partial n}e^{-Ky\pm iKx}ds,\\ &H_4^{\pm}(K)=H_{4A}^{\pm}(K)+iH_{4B}^{\pm}(K),\end{aligned}\right\}\qquad(4.\ 12)$$

$$\left.\begin{aligned}H_{4A}^{+}(K)&=H_{4A}^{-}(K)=-\int_c(\phi_{0A}+\phi_{4A})\frac{\partial}{\partial n}e^{-Ky}\cos Kxds,\\ H_{4B}^{+}(K)&=-H_{4B}^{-}(K)=-i\int_c(\phi_{0B}+\phi_{4B})\frac{\partial}{\partial n}e^{-Ky}\sin Kxds,\end{aligned}\right\}\qquad(4.\ 18)$$

そこでこれらを実部虚部にわけてもう一度 (4. 8) を書きなおすと

$$\left.\begin{aligned}&\phi_{4A}=\phi_{4Ac}+i\phi_{4As},\ \phi_{4B}=\phi_{4Bc}+i\phi_{4Bs},\\ &\frac{\partial}{\partial n}\phi_{4Ac}=-\frac{\partial}{\partial n}e^{-Ky}\cos Kx=-\frac{\partial}{\partial n}\phi_{0A},\quad \frac{\partial}{\partial n}\phi_{4As}=0,\\ &\frac{\partial}{\partial n}\phi_{4Bc}=-\frac{\partial}{\partial n}e^{-Ky}\sin Kx=-\frac{\partial}{\partial n}\phi_{0B},\quad \frac{\partial}{\partial n}\phi_{4Bs}=0,\end{aligned}\right\}\qquad(4.\ 19)$$

となり，(4. 16) から，境界条件を表わす積分方程式をつくれば

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}(\phi_{0A}+\phi_{4Ac})&=-\frac{1}{2\pi}\int_c(\phi_{0A}+\phi_{4Ac})\frac{\partial}{\partial n}G_cds+e^{-Ky}\cos Kx(1-H_{4As}^{+}),\\ \frac{1}{2}\phi_{4As}&=-\frac{1}{2\pi}\int_c\phi_{4As}\frac{\partial}{\partial n}G_cds+e^{-Ky}\cos KxH_{4Ac}^{+},\end{aligned}\right\}\qquad(4.\ 20)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}(\phi_{0B}+\phi_{4Bc})&=-\frac{1}{2\pi}\int_c\phi_{0B}+\phi_{4Bc})\frac{\partial}{\partial n}G_cds+e^{-Ky}\sin Kx(1+iH_{4Bs}^{+}),\\ \frac{1}{2}\phi_{4Bs}&=-\frac{1}{2\pi}\int\phi_{4Bs}\frac{\partial}{\partial n}G_cds-ie^{-Ky}\sin KxH_{4Bc}^{+},\end{aligned}\right\}\qquad(4.\ 21)$$

このようにして得られた (4. 11), (4. 12), (4. 20), (4. 21) はすべてフレドホルムの第2種の積分方程式であるから一義的な解があると考えられ[15]，速度ポテンシャルが求められることになる。

然し一見してこれらのすべてが独立ではなく，互に従属なつまり比例関係で結ばれる方程式が幾つかある。

先ず (4. 11) 第2式において $i=1,3,5$ とおいたものは全く同じ形であるから例えば

$$\phi_{1s}(x,y)H_{3c}^{+}(K)=\phi_{3s}(x,y)H_{1c}^{+}(K),\ \text{on}\ c,\cdots$$

となり，これから H 函数をつくれば

$$\frac{H_{1s}^{+}(K)}{H_{1c}^{+}(K)}=\frac{H_{3s}^{+}(K)}{H_{3c}^{+}(K)}=\frac{H_{5s}^{+}(K)}{H_{5c}^{+}(K)},\qquad(4.\ 22)$$

なる関係があることがわかり，このことは計算によって確かめられている[20]。これらの関

係から運動5については勿論であるが解くべき方程式の数は一つ減るわけである。

次に (4. 20), (4. 21) のそれぞれ第1式と第2式は同じ形であるから c の上で

$$(\phi_{0A}+\phi_{4Ac})H_{4Ac}^{+}=\phi_{4As}(1-H_{4As}^{+}),$$
$$(\phi_{0B}+\phi_{4Bc})H_{4Bc}^{+}=i\phi_{4Bs}(1+iH_{4Bs}^{+}),$$

となり，H 函数では

$$\left.\begin{aligned}H_{4As}^{+}&=(H_{4Ac}^{+})^2+(H_{4As}^{+})^2,\\ iH_{4Bs}^{-}&=(H_{4Bc}^{+})^2+(H_{4Bs}^{+})_2,\end{aligned}\right\}\tag{4. 23}$$

のような関係がなりたち，さらにこれらは (4. 11), (4. 12) の各第2式のそれぞれ等しいから　$\phi_{4As}H_{2c}^{+}=\phi_{2s}H_{4Ac}^{+},\ \phi_{4Bs}H_{1c}^{+}=\phi_{1s}H_{4Bc}^{+},$

となって，(4. 20), (4. 21) は全く解く必要はないことがわかり，またこの式から

$$\frac{H_{4As}^{+}(K)}{H_{4As}^{+}(K)}=\frac{H_{2s}^{+}(K)}{H_{2c}^{+}(K)},\quad \frac{H_{4Bs}^{+}(K)}{H_{4Bc}^{+}(K)}=\frac{H_{1s}^{+}(K)}{H_{1c}^{+}(K)},\tag{4. 24}$$

が得られる。

今簡単の為に

$$\frac{H_{1s}^{+}(K)}{H_{1c}^{+}(K)}=\tan\alpha_1,\quad \frac{H_{2s}^{+}(K)}{H_{2c}^{+}(K)}=\tan\alpha_2,\tag{4. 25}$$

とおけば (4. 23) と (4. 24) から (4. 18) を頭において (4. 17) が次のように求められる。

$$H_4^{+}(K)=e^{i\alpha_2}\sin\alpha_2+ie^{i\alpha_1}\sin\alpha_1,\tag{4. 26}$$

このように波の反射の問題は他の運動に対する解があれば全く解く必要がないがこのことは力とモーメントを考える時にもっと明らかになる。

5. 力とモーメント[10) 18)]　物体に働らく圧力は (2. 8) で与えられるから，今 F_{ij} を i 方向あるいは原点，重心まわりの運動すなわち φ_i による j 方向の力あるいはモーメントとし，特に $i=4$ は入射波および反射波による力あるいはモーメントとするとそれぞれ次のように与えられるが，それらから簡単の為にさらに f_{ij} なる量を定義しよう。

$$\left.\begin{aligned}F_{11}&=-\rho i\omega\int_c\varphi_1\frac{\partial x}{\partial n}ds=\rho\omega^2X\int_c\phi_1\frac{\partial x}{\partial n}ds\\ &=-\rho\omega^2X\int_c\phi_1\frac{\partial}{\partial n}\phi_1 ds=WKXf_{11},\\ F_{1j}&=WKXf_{1j},\quad j=1,2,3,5,\end{aligned}\right\}\tag{5. 1}$$

ただし W は単位長さ当りの排水量とする。

同様にして

$$F_{2j}=WKYf_{2j},\quad j=1,2,3,5,\tag{5. 2}$$
$$F_{3,j}=WK\theta f_{3j},\quad F_{5j}=WK\theta f_{5,j},\quad j=1,2,3,5,\tag{5. 3}$$
$$F_{4j}=\rho i\omega\int_c(\varphi_0+\varphi_4)\frac{\partial}{\partial n}\phi_j ds=Waf_{4j},\quad j=1,2,3,5,\tag{5. 4}$$

したがって

$$\left.\begin{aligned}\nabla f_{ij}&=-\int_c\phi_i\frac{\partial}{\partial n}\phi_j ds,\\ \nabla f_{4j}&=-\int_c(\phi_0+\phi_4)\frac{\partial}{\partial n}\phi_j ds,\end{aligned}\right\}i,j=1,2,3,5,\tag{5. 5}$$

ここに ∇ は単位長さ当りの排水容積を表わすものとする。

さて物体が対称であるとすると明らかに

$$f_{12}=f_{21}=f_{32}=f_{52}=f_{25}=0, \tag{5. 6}$$

であって，これから上下揺れと左右揺れおよび横揺れは互に無関係であることになる。

次に入射波以外のポテンシャルはすべて外方に発散する波を持っていることから

$$\int_c\left(\phi_i\frac{\partial}{\partial n}\phi_j-\phi_j\frac{\partial}{\partial n}\phi_i\right)ds=0,\quad i,j=1,\cdots 5,$$

となることが証明できるから，(5. 5) によって

$$f_{ij}=f_{ji},\quad i,j=1,2,3,5, \tag{5. 7}$$

となりまた

$$\nabla f_{4j}=-\int_c\left(\phi_0\frac{\partial}{\partial n}\phi_j-\frac{\partial}{\partial n}\phi_0\phi_j\right)ds-\int_c\left(\phi_4\frac{\partial}{\partial n}\phi_j-\phi_j\frac{\partial}{\partial n}\phi_4\right)ds$$

となるから上の積分によって ϕ_0 の値を入れると (4. 13) の定義式に等しくなるが，少し記号をかえて，

$$\left.\begin{aligned}H_j^+(K)&=\nabla h_j^+(K),\quad j=1\sim 5,\\ f_{4j}&=-h_j^+(K),\quad j=1,2,3,5,\end{aligned}\right\} \tag{5. 8}$$

となる。

これがハスキントの公式[10)18)]であるが前節の関係を考えれば容易に理解できよう。衆知のように従来のフールド・クリロッフ理論では (4. 13) 右辺第2項は無視していた訳である[19)]。

さらに (4. 22) の関係があるから，今

$$H_3^+(K)/H_1^+(K)=h_3^+(K)/h_1^+(K)=l_w, \tag{5. 9}$$

とおくと l_w は明らかに実数となる[20)]。また (4. 6) を考えて (5. 8) に代入すれば

$$f_{43}=l_wf_{41},\quad f_{45}=(l+l_w)f_{41}, \tag{5. 10}$$

となる。すなわち波の強制力の水平成分と傾斜モーメントとは位相が等しいことがわかる。

最後に

$$\int_c\left(\phi_i\frac{\partial}{\partial n}\bar{\phi}_j-\bar{\phi}_j\frac{\partial}{\partial n}\phi_i\right)ds,\quad i,j=1\sim 5,$$

なる積分を考えると $\bar{\phi}_j$ は今度は内方に波が集まって来るようなポテンシャルであるから0にはならず，また境界条件 (4. 7) および (5. 7) を考えると上式は f_{ij} の虚部を与えることになり

$$\bar{f}_{ij}-f_{ij}=i\nabla(h_i^+\bar{h}_j^++h_i^-\bar{h}_j^-),\quad i,j=1,2,3,5, \tag{5. 11}$$

となる。これは物体のなす仕事が出てゆく波のエネルギーに等しいことを意味している。

また $i,j=4$ については (4. 23) によって自明な関係が得られる。

6. 波長が大きい時[11)12)13)18)20)]　すなわち $K\to 0$ の時は (2. 7) から水面で $\partial\phi/\partial y\fallingdotseq 0$ となるので水面が固体壁である時のポテンシャルに近づく[4)14)]。

そのようなポテンシャルを使えば第1近似として力やモーメントは次のように与えられる。

さて先ず

$$\nabla f_{11}=\int_c\phi_1\frac{\partial x}{\partial n}ds$$

は元来附加質量の定義式であるから x 方向のその係数を k_1 とすると

$$f_{11} \fallingdotseq k_1, \tag{6. 1}$$

同様に

$$f_{22} \fallingdotseq k_2, \tag{6. 2}$$

となるが k_2 は $K=0$ で無限大になるので K の函数と考えなければ意味がない[8]。

$$f_{33} \fallingdotseq k_3' r^2, \quad f_{55} \fallingdotseq k_3 r^2, \quad r^2 = I/W, \tag{6. 3}$$

ただし I は物体の重心に関する慣性モーメントとする。

次に f_{13} は f_{11} なる力が水面下 l_1 の所に働いていると考えると (6. 1) を使って,

$$f_{13} = f_{31} \fallingdotseq -l_1 k_1, \quad f_{15} \fallingdotseq f_{51} \fallingdotseq (l-l_1) k_1, \tag{6. 4}$$

のように書くことができる。

次に

$$\nabla f_{41} = -\nabla h_1^+(K) \fallingdotseq ik \int_c \left(\phi_1 \frac{\partial x}{\partial n} + x \frac{\partial x}{\partial n} \right) ds$$

となるから, (6.1) を使えば

$$f_{41} = -h_1^+(K) \fallingdotseq iK(1+f_{11}) \fallingdotseq iK(1+k_1), \tag{6. 5}$$

同様にして

$$f_{42} = -h_2^+(K) \fallingdotseq B/\nabla - K(1+f_{22}) \fallingdotseq B/\nabla - K(1+k_2), \tag{6. 6}$$

ここに B は船の幅とする。

また

$$f_{43} = -h_3^+(K) \fallingdotseq iK(\overline{OM}+f_{13}) \fallingdotseq iK(\overline{OM}-l_1 k_1), \tag{6. 7}$$

よって

$$f_{45} = -h_5^+(K) \fallingdotseq iK\{m-(l_1-l)k_1\}, \tag{6. 8}$$

ここに M はメタセンター, m はメタセンター高さとする。(6. 5) と (6. 7), (6. 8) から (5. 10) の l_w は,

$$\left.\begin{aligned} l_w &= f_{43}/f_{41} \fallingdotseq (\overline{OM}-l_1 k_1)/(1+k_1), \\ l+l_w &= f_{45}/f_{41} \fallingdotseq \{m-(l_1-l)k_1\}/(1+k_1), \end{aligned}\right\} \tag{6. 9}$$

このようにして h_i が求まると (5. 11) によって f_{ij} の虚部つまりダムピングの項の近似値が次のように得られる。また Lewis Form については正確な計算値も与えられている[5) 8) 10) 20)]。

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{I}\{f_{11}\} &= \nabla |h_1^+|^2 \fallingdotseq \nabla K^2 (1+k_1)^2, \\ \mathscr{I}\{f_{22}\} &= \nabla |h_2^+|^2 \fallingdotseq \nabla \{B/\nabla - K(1+k_2)\}^2, \\ \mathscr{I}\{f_{33}\} &= \nabla |h_3^+|^2 \fallingdotseq \nabla K^2 (\overline{OM}-l_1 k_1)^2, \\ \mathscr{I}\{f_{55}\} &= \nabla |h_5^+|^2 \fallingdotseq \nabla K^2 \{m-(l_1-l)k_1\}^2, \end{aligned}\right\} \tag{6. 10}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{I}\{f_{13}\} &= \mathscr{I}\{f_{31}\} = \nabla h_1^+ \bar{h}_3^+ \fallingdotseq \nabla K^2 (1+k_1)(\overline{OM}--l_1 k_1), \\ \mathscr{I}\{f_{15}\} &= \mathscr{I}\{f_{51}\} = \nabla h_1^+ \bar{h}_5^+ \fallingdotseq \nabla K^2 (1+k_1)\{m-(l_1-l)k\}, \end{aligned}\right\} \tag{6. 11}$$

7. 運動方程式[20]　5 節で定義した力およびモーメントと静的浮力を考えに入れて規則波中の運動方程式を立てると, $e^{i\omega t}$ なる項を除けば次のようになる。

$$-\frac{\omega^2}{g} I\theta + Wm\theta = F_{55} + F_{15} + F_{45},$$

$$
\left.\begin{aligned}
&-\frac{\omega^2}{g}WX=F_{11}+F_{51}+F_{41},\\
&-\frac{\omega^2}{g}WY+\rho gBY=F_{22}+F_{42},
\end{aligned}\right\}\tag{7. 1}
$$

(5. 1)～(5. 4) を使って書きかえれば，次のようになるがここで $f_{51}=f_{15}$ である。

$$
\left.\begin{aligned}
&\theta(Kr^2+Kf_{55}-m)+KXf_{15}=-af_{45},\\
&KX(1+f_{11})+K\theta f_{51}=-af_{41},\\
&Y(K+Kf_{22}-B/\nabla)=-af_{42}
\end{aligned}\right\}\tag{7. 2}
$$

これを解けば

$$
\left.\begin{aligned}
&\theta=\theta_w E_5/D_1,\quad \theta_W=Ka,\\
&X=aE_1/D_1,\quad Y=aE_2/D_2,
\end{aligned}\right\}\tag{7. 3}
$$

ただし

$$
\left.\begin{aligned}
&D_1=Kf_{15}{}^2-(1+f_{11})(Kr^2+Kf_{55}-m),\\
&D_2=B/\nabla-K(1+f_{22}),
\end{aligned}\right\}\tag{7. 4}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&E_1=\{r^2-m/K+f_{55}-(l+l_w)f_{51}\}f_{41},\\
&E_2=f_{42},\\
&E_5=\{(l+l_w)(1+f_{11})-f_{15}\}f_{41}/K,
\end{aligned}\right\}\tag{7. 5}
$$

さて (7. 5) において (5. 10), (5. 11) を利用するとと

$$
\left.\begin{aligned}
&\mathscr{I}\{E_1/f_{41}\}=\mathscr{I}\{f_{55}-(l+l_w)f_{51}\}=0,\\
&\mathscr{I}\{KE_5/f_{41}\}=\mathscr{I}\{(l+l_w)f_{11}-f_{15}\}=0,
\end{aligned}\right\}\tag{7. 6}
$$

なるから添字 c, s で実部虚部を表わすことにすると，次のようになる。

$$
\left.\begin{aligned}
&E_1=\left\{r^2-\frac{m}{K}+f_{55c}-(l+l_w)f_{51c}\right\}f_{41},\\
&KE_5=\{(l+l_w)(1+f_{11c})-f_{15c}\}f_{41}
\end{aligned}\right\}\tag{7. 7}
$$

同様な関係によって

$$
\left.\begin{aligned}
&\mathscr{R}\{D_1\}=Kf_{15c}{}^2-(1+f_{11c})(Kr^2+Kf_{55c}-m),\\
&\mathscr{I}\{D_1\}=2Kf_{15c}f_{15s}-Kf_{55s}(1+f_{11c})-f_{11s}(Kr^2+Kf_{55c}-m),
\end{aligned}\right\}\tag{7. 8}
$$

となるから特に同調点を考えて見ると，

すなわち $\mathscr{R}\{D_1\}=0$ の時は

$$
\left.\begin{aligned}
&K_Rf_{15c}{}^2=(1+f_{11c})(K_Rr^2+K_Rf_{55c}-m),\\
&\mathscr{I}\{D_1\}=-K_R{}^3\nabla E_5\bar{E}_5/(1+f_{11c}),\\
&E_1=-K_Rf_{15c}E_5/(1+f_{11c}),
\end{aligned}\right\}\tag{7. 9}
$$

ただし $K_R=4\pi^2/gT_R{}^2$, T_R は同調周期とする。

のようになるので (7. 3) に代入すると

$$
\left.\begin{aligned}
&\theta/\theta_w=E_5/D_1=i(1+f_{11c})/(K_R{}^3\nabla\bar{E}_5),\\
&X/a=E_1/D_1=-if_{15c}/(K_R{}^2\nabla\bar{E}_5),
\end{aligned}\right\}\tag{7. 10}
$$

が得られる。

また上下揺れでは簡単に同調時 $(K=K_H)$ には

$$
Y/a=E_2/D_2=i/(K_H\nabla\bar{E}_2),\tag{7. 11}
$$

となることがわかる。

これらの式から少くとも二次元完全流体中では波の強制力が小さくなると大きく揺れることになる[11]。

最後に前節で得た近似値を使って波長の大きい所でもう少し具体的に考えて見よう。

K の高次の項を無視すると

$$\left.\begin{aligned} D_1 &\doteqdot Kk_1^2(l_1-l)^2-(1+k_1)\{Kr^2(1+k_3)-m\}, \\ D_2 &\doteqdot B/V-K(1+k_2), \end{aligned}\right\} \tag{7. 12}$$

$$\left.\begin{aligned} KE_5/f_{41} &\doteqdot (l+l_w)(1+k_1)+(l_1-l)k_1 = m, \\ E_1/f_{41} &\doteqdot k_1m(l_1-l)/(1+k_1)-D_1/K(1+k_1), \end{aligned}\right\} \tag{7. 13}$$

$$\left.\begin{aligned} f_{41} &= -h_1^+(K) \doteqdot iK(1+k_1), \\ E_2 &= f_{42} \doteqdot B/V-K(1+k_2), \end{aligned}\right\} \tag{7. 14}$$

したがって上下ゆれは上式から

$$Y \doteqdot a, \tag{7. 15}$$

となって，渡辺の得た式と少し異なっている[1] が既に詳しく調べられているのでここではこれ以上考えない[11][19]。

次に（7. 12）第1式を

$$D_1 \doteqdot (1+k_1)(1+k_3)r^2(K_R-K), \tag{7. 16}$$

$$K_R = 4\pi^2/gT_R^2 \doteqdot \{m+Kk_1^2(l_1-l)^2/(1+k_1)\}/(1+k_3)r^2, \tag{7. 17}$$

と書きなおし左右揺れを拘束した時の周期 T_0

$$K_0 = 4\pi^2/gT_0^2 \doteqdot m/(1+k_3)r^2, \tag{7. 18}$$

と比較すると明らかに T_R の方が小さいがその差は僅かなものと考えられる[3]。

さて（7. 3）から近似値を使って次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned} \theta/\theta_w &\doteqdot f_{41}m/K(1+k_1)(1+k_3)r^2(K_R-K) \doteqdot im/(1+k_3)r_2(K_R-K), \\ X/a &\doteqdot -i+iKm/(1+k_1)(1+k_3)r^2(K_R-K), \end{aligned}\right\} \tag{7. 19}$$

この後の式も渡辺の解と少し異なっている[1]。

然し第1式の方は $I'=(1+k_3)r^2W$, とおいて書きかえれば

$$\theta/\theta_w \doteqdot iWmg/I'(\omega_R^2-\omega^2), \tag{7. 20}$$

となるから，従来の運動方程式で有効波傾斜係数を1とおいた式に等しい[1][2][7]。

さらに詳しい計算結果[20]を見ても（7. 13）第1式中 l_w, l_1 などは K によってあまり変わらないようであるから，かなり精度よく，

$$E_5 \doteqdot \frac{m}{K}f_{41}, \tag{7. 21}$$

と見ることができそうであり，また f_{41} を（6. 5）のかわりに γ なる係数を導入して次のようにおいてしまうと

$$E_5 = im\gamma(1+k_1), \tag{7. 22}$$

この γ は従来の理論における有効波傾斜係数と全く同じ役割を果すことになり，実際計算値[20]を見ても従来慣用されている値と同程度のものになるようである。

このようにして横揺れだけは従来の理論と同形の方程式が得られるが γ を最も大きく支配するのはこの理論では波の強制力の水平成分であると考えられる。

最後に同調時には（7. 10），（7. 22）によって，

$$\left.\begin{aligned}\theta/\theta_w &\fallingdotseq -1/(K_R{}^2\gamma m\Delta),\\ X/a &\fallingdotseq -k_1(l_1-l)/\{K_R{}^2\gamma m(1+k_1)\nabla\},\end{aligned}\right\}\tag{7. 23}$$

となるから完全流体中ではメタセンターが高い程，またγが大きい程ゆれ方が少ないと言える。

然し簡単に推定できるように普通の船で考えるとこの倍率は非常に大きい値になるので，自明のことながらビルジキールなどの効果を考えに入れてさらに実験的に理論を再構成する必要があろう。

8. 漂流力

丸尾によれば船が波に押し流される力[1]は反射波の波高の自乗に比例する[18]。すなわち

$$R=\frac{1}{2}\rho g|A^+|^2,\tag{8. 1}$$

前節迄の結果から

$$A^+=iK\nabla\{Xh_1{}^+(K)+\theta h_5{}^+(K)+Yh_2{}^+(K)\}+ia\nabla h_4{}^+(K),\tag{8. 2}$$

であるから，前節の解を代入すると

$$A^+=ia\nabla\{h_4{}^++K(E_1h_1{}^++KE_5h_5{}^+)/D_1-K(h_2{}^+)^2/D_2\},\tag{8. 3}$$

この計算は大変面倒であろうし，またよく知れているようにこの力は一般には同調時以外は小さいと考えられる[1]ので簡単の為に以下同調時に限って考えて見よう。

今

$$A^+=a(I+II+III),\tag{8. 4}$$

とおくと (7. 10), (7. 11), (4. 26) を使って，

$$\left.\begin{aligned}I&=iK\nabla(E_1h_1{}^++KE_5h_5{}^+)/D_1=E_5/\overline{E}_5=h_1{}^+/\overline{h}_1{}^+=-e^{2i\alpha_1},\\ II&=-iK\nabla(h_2{}^+)^2/D_2=h_2{}^+/\overline{h}_2{}^+=e^{2i\alpha_2},\\ III&=i\nabla h_4{}^+=-e^{i\alpha_1}\sin\alpha_1+ie^{i\alpha_2}\sin\alpha_2,\end{aligned}\right\}\tag{8. 5}$$

のようになって I, II では同調時に反射波の振幅が入射波のそれに等しいと言う結果になる。

一般には $K_H>K_R$ であるから簡単の為に II と α_2 を無視すると

$$A^+\fallingdotseq -a(e^{i\alpha_1}+\sin\alpha_1)e^{i\alpha_1},\tag{8. 6}$$

$$R\fallingdotseq\frac{1}{2}\rho ga^2(1+2\sin\alpha_1\cos\alpha_1+\sin^2\alpha_1),\tag{8. 7}$$

となるがこの α_1 は $K=0$ で $0°$, $K=\infty$ で $-90°$ と考えてよいように見える。

逆に I と α_1 が無視できるとすると上下揺れ同調時には

$$A^+\fallingdotseq a(e^{i\alpha_2}+i\sin\alpha_2)e^{i\alpha_2},\tag{8. 8}$$

$$R\fallingdotseq\frac{1}{2}\rho ga^2(1+3\sin^2\alpha_2),\tag{8. 9}$$

が得られ，α_2 は $K=0$ で $0°$, $K=\infty$ で $180°$ と考えられる。

このような水平力の他にやはり周期的でない一様な垂直力と傾斜偶力が存在すると考えられる[16]が，この後者は元良の実験にも現われているように見える[7]ので今後検討の余地があると思われる。

9. 結　言

無限に長い船が真横から波を受ける場合，すなわち二次元問題に限って線型理論の範囲内で船の周期運動に関する速度ポテンシャルを考え，その船体表面条件を

表わす積分方程式を検討して，入射波の散乱を表わすポテンシャルが静水中で船が動揺する場合のそれで表わされることがわかった。

この関係によれば，波の強制力が静水中で動く船の起こす波の高さに比例すると言うハスキントの公式は容易に理解できる。

このハスキントの公式を使って，さらに運動方程式を解いて検討した結果，横揺れについては従来の方程式と形式的には一致することがわかった。

然し従来の有効波傾斜係数に相当する係数 γ は主として波の強制力の水平成分がフルード・クリロッフ理論に基づく値と違う割合であると解釈される。

さて，もしも (7. 2) 第1式で左右ゆれがないとすると波の強制モーメントは (6. 8) で与えられるような値であるから重心を適当に選べば簡単に0にすることができる[13]。完全流体中ではこの時同調しているとするとダムピングが波の強制力の自乗に比例しているので，振幅は無限大になることになる。然しビルジキールのようなもので波以外のダムピングを与えることが出来れば揺れ方を少くすることができると考えられる[11][12]。

実際には左右揺れがあるので波の強制モーメントは (7. 22) のように与えられ，これを小さくすることは難しいように思われる。

然しながらこの有効波傾斜係数に対応する係数 γ は明らかに船体横断面形状に大きく依存するであろうからビルジキールの効果の機構[12]と共に今後の研究課題として残される。

最後に本研究については発案当初から東京大学元良教授に種々貴重な御助言を頂きました。此処に記して謝意を表します。

以　上

参 照 文 献

1) 渡辺恵弘： 造船協会々報 49 号 (昭和7年).
2) 〃 ： 〃 56 号 (昭和 10 年).
3) 上野敬三： 〃 67 号 (昭和 15 年).
4) 菱田敏男： 〃論文集 85 号 (昭和 27 年).
5) 〃 ： 〃 86 号 (前) (昭和 28 年).
6) 〃 ： 〃 86 号 (後) (昭和 29 年).
7) 元良誠三： 船体運動力学，共立出版 (昭和 32 年).
8) 田才福造： 造船協会論文集 105 号 (昭和 34 年).
9) 〃 ： 〃 110 号 (昭和 36 年).
10) 別所正利： 波の強制力其の他に関する覚書 (昭和 39 年8月未刊).
11) 元良誠三，小山健夫： 昭和 40 年春期造船協会講演予定.
12) 別所正利： 〃 〃
13) 一色 浩： 東大工学部船舶卒業論文 (昭和 40 年3月).
14) F. Ursell: Quart. Journal of Methematics and Applied Mechanics, vol. 2, pt. 3 (1949).
15) F. Ursell: Quart. Journal of Mathematics and Applied Mechanics, vol. 7, pt. 4 (1954).
16) J. V. Wehausen and E. V. Laitone: "Surface Waves" p. 533 and 558, Handbuch der Physik, Springer (1960).
17) H. Maruo: Journal of Ship Research, vol. 4, No. 3 (1960).
18) J. N. Newman: Journal of Ship Research, vol. 6, No. 3 (1962).
19) S. Motora: Journal of Ship Research, vol. 8, No. 1 (1964).
20) K. Tamura: The Calculation of Hydrodynamical Forces and Moments acting on the Two Dimensional Body (Unpublished).
21) M. D. Haskind: Technical and Research Bulletin No. 1～12, SNAME (1953).

防衛大学校理工学研究報告　第3巻　第1号

On the Theory of Rolling Motion of Ships among Waves

By Masatoshi BESSHO*

Abstract

The author introduces the integral equations which determine the velocity potentials of the rolling, swaying and heaving oscillation and the diffraction of the incident wave, and finds out that the diffraction potential is represented by the ones of the swaying and heaving oscillations.

This relation explains well Haskind's formula that the wave force and moment are proportionol to the wave height produced by the oscillations of the ship respectively.

He also solves the equation of the motions and finds out that the equation of the rolling motion is very similar to the one used up to the present, but the coefficient corresponding to that of the effective wave slope depends mostly on the swaying force of the incident wave.

* Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering.