

第 1 編
紀 要 の 部

A New Approach to the Problem of Ship Wave

By Masatoshi BESSHO

(Received November 9, 1961)

Abstract

The author deals with the problem of the waveless ship.

This is a historically old but always interesting problem in theory and application.

Introducing an auxiliary function from which we have the velocity potential or singularity distribution by the operation adjoint to the one to be satisfied by the potential at the free surface, he gives the waveless condition for the singularity distributions of various types in two and three dimensional case of steady motion, and also some characters and examples.

The adjoint operator to the one for the free surface condition plays naturally an important role in solving wave problems of all types, and we may hope a new approach to them.

Introduction

The principal theme of this paper is a problem of the waveless distribution, that is, a singularity distribution which leaves no regular wave system in the rear.

This problem was studied at an earlier stage of ship wave researches by Lord Kelvin and Sir Havelock in two dimensional problem, but after them no one seems to have been interested with.

This is, however, clearly an important problem especially for the theoretical point of view, even though the waveless ship would not be obtained in practice.

The author seeks a condition under which a singularity distribution is waveless, introducing an auxiliary function from which we have the velocity potential by the operation adjoint to the one for the free surface condition of the potential.

The introduction of this auxiliary function is a very natural way to solve the problem as the differential equation, but we have not found it explicitly in the literature.

In this paper, we deal only with the wave problem when a ship moves along a straight course with constant speed in calm sea, while the method proposed here are applicable to other problems, say, in unsteady motion.

1. Two dimensional problem, in general

Consider the two dimensional fluid motion due to a fixed cylinder with some section placed on the surface of a uniform stream with great depth.

Take the origin in the cylinder and on the undisturbed surface of the stream, with Ox horizontal and Oy vertically upwards and suppose the stream to be of the unit velocity in the negative direction of Ox .

We write the complex velocity potential of the motion as follows,

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (1.1)$$

where $z = x + iy$, φ is the velocity potential and ψ is the stream function.

The solution must satisfy two conditions at the free surface.

Firstly, the pressure must be constant, namely,

$$p/\rho = \text{const.} - gy - q^2/2 + \mu\varphi = \text{const.} \quad (1.2)$$

where ρ is the fluid density, g is the gravity constant, q is the velocity and μ is an artificial frictional coefficient to avoid a mathematical indeterminacy of the solution and to tend to zero after the calculation.

Neglecting the second order quantity, this is approximately

$$p/\rho = \text{const.} - gy - \partial\varphi/\partial x + \mu\varphi, \quad (1.3)$$

The second condition is a kinematical one, this is, neglecting higher order terms,

$$d\eta(x)/dx = \partial\varphi(x, 0)/\partial y, \quad \text{or} \quad \eta(x) = -\psi(x, 0), \quad (1.4)$$

where η is the surface elevation.

Taking an appropriate constant and putting (1.4) into (1.3), the free surface condition is to be

$$\text{Re.}[(d/dz + ig - \mu)f(z)] = 0, \quad \text{for } y=0, \quad (1.5)$$

where Re. means the real part to be taken.

The function regular in the fluid and satisfying the above condition is given in the next form,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta + \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_0^\infty \frac{\kappa + g - \mu i}{\kappa - g - \mu i} \overline{F(\kappa)} e^{-i\kappa z} d\kappa, \quad (1.6)$$

where C is the boundary curve of the cylinder and the fluid,

$$F(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_C f(z) e^{-i\kappa z} dz, \quad (1.7)$$

and the bar above the character stands for the complex conjugate value to be taken.

In the far down stream, this potential leaves the regular wave, it is from (1.6)

$$\eta(x) \doteq \text{Re.}[4\pi g \overline{F(g)} e^{-igx}], \quad \text{for } gx \ll -1, \quad (1.8)$$

If a is the amplitude of the regular wave at a great distance behind the cylinder, the

wave resistance R is given by one quarter of $\rho g a^2$.

Accordingly, from the above formula we have

$$R = 4\pi^2 \rho g^2 F(g) \overline{F(g)}, \quad (1.9)^{3)}$$

Now the problem of the wave resistance is to find a function or an amplitude of the wave $F(g)$ by (1.7) with the potential satisfying the condition on the boundary C . But, to satisfy this condition is a difficult problem, and the solutions obtained up to the present are only of a submerged circular cylinder and a hydrofoil.^{3), 4)}

On the other hand, when we notice to the waveless problem, it seems easier to deal with. That it to say, the system is waveless from (1.9), if we have

$$F(g) = 0, \quad (1.10)$$

To deal more generally with this problem, we introduce an auxiliary function $h(z)$ by the next definition,

$$(d/dz - ig)h(z) = f(z), \quad (1.11)$$

we are to note that the operation to $h(z)$ is adjoint to the operation to $f(z)$ in (1.5).

Put (1.11) into (1.7) and integrate by parts, we have

$$2\pi F(\kappa) = [h(x)e^{-i\kappa x}]_{x=x_2}^{x_1} + i(\kappa - g) \int_C h(z)e^{-i\kappa z} dz, \quad (1.12)$$

where x_1 and x_2 are the coordinates of the points on the curve C intersecting the axis Ox .

When κ equals to g , we have

$$2\pi F(g) = h(x_1)e^{-igx_1} - h(x_2)e^{-igx_2}, \quad (1.13)$$

Consequently, if $h(x_1)$ and $h(x_2)$ vanish, the distribution is waveless by (1.10).

Meanwhile, the complex velocity potential is represented by this function in the same manner as before, namely

$$f(z) = (d/dz - ig)m(z) + w(z), \quad (1.14)$$

where

$$m(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{h(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\overline{h(\zeta)}}{z - \overline{\zeta}} d\overline{\zeta}, \quad (1.15)$$

it is easy to see that

$$\text{Re}.[m(z)] = 0, \quad \text{for } y = 0, \quad (1.16)$$

and

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{h(x)}{z - x} \right]_{x=x_2}^{x_1} + \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_0^\infty \frac{\kappa + g - \mu i}{\kappa - g - \mu i} e^{-i\kappa z} d\kappa \left[h(x)e^{i\kappa x} \right]_{x=x_2}^{x_1} \quad (1.17)$$

We see thus $f(z)$ consists of two parts. The one is the term with $m(z)$, and this

vanishes at infinity by (1.15). The other is $w(z)$, this contains the regular wave term by (1.17).

If the system is waveless, (1.14) reduces to

$$f(z) = (d/dz - ig)m(z), \quad (1.18)$$

where $m(z)$ satisfies (1.16).

F. Ursell's solution for the problem of an oscillating circular cylinder is based on this separation of the velocity potential, so that we may also solve the same problem as it in the steady motion.

2. Pressure distribution, in two dimension.

Consider here the planing surface with infinitely large spect aspect ratio.

The pressure at $y=0$ is given by (1.3) and (1.4) except an arbitrary constant,

$$p(x)/\rho \equiv P(x) = \text{Re} \cdot [-(d/dz + ig)f(x)], \quad \text{for } 1 > x > -1, \quad (2.1)$$

We can easily construct the function $\Pi(z)$ having $P(x)$ as the boundary value at $y=0$, that is

$$\Pi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{P(x)dx}{z-x}, \quad (2.2)$$

By the analytical continuation of (2.1) into the whole fluid domain, we have

$$(d/dz + ig - \mu)f(z) = -\Pi(z), \quad (2.3)$$

This is a differential equation, and solved as

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 P(\xi) S[g(z-\xi)] d\xi, \quad (2.4)^{4), 7)}$$

where

$$S(gz) = \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_0^\infty \frac{e^{-i\kappa z} d\kappa}{\kappa - g - \mu i}, \quad (2.5)$$

this function satisfies the next inhomogeneous equation,

$$(d/dz + ig)S(gz) = -1/z, \quad (2.6)$$

Introduce here the function h by (1.11), and put into (2.1), we have

$$P(x) = -\text{Re} \cdot [(d^2/dx^2 + g^2)h(x)],$$

or writing $\sigma(x)$ for the real part of h changed in the sign,

$$P(x) = (d^2/dx^2 + g^2)\sigma(x), \quad (2.7)$$

This is an inhomogeneous differential equation of oscillation for $\sigma(x)$, so that it may be

uniquely determined for the given $P(x)$ with an arbitrary boundary condition, say, $\sigma(\pm 1) = 0$.

Put (2.7) into (2.4), integrate by parts, and we have with (2.6)

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \left[\frac{d\sigma}{d\xi} S[g(z-\xi)] \right]_{\xi=-1}^1 + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\{g\sigma(\xi) + i d\sigma/d\xi\}}{z-\xi} d\xi, \quad (2.8)$$

The ship surface condition is (1.4), namely, from the above formula

$$-\gamma(x) = \text{Re} \left\{ \frac{-1}{\pi} \left[\frac{d\sigma}{d\xi} S[g(x-\xi)] \right]_{\xi=-1}^1 \right\} + g\sigma(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\sigma/d\xi}{x-\xi} d\xi, \quad (2.9)$$

This is in principle the same form as the equation of wing theory, and it is comparatively easy to solve. The method of the solution used by H. Maruo is naturally deduced from this equation.⁶⁾

We consider now the waveless problem, the condition is to be from (2.8)

$$\sigma(\pm 1) = \frac{d\sigma}{dx} (\pm 1) = 0, \quad (2.10)$$

and the form of the planing surface is given by (2.9), that is,

$$-\gamma(x) = g\sigma(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\sigma/d\xi}{x-\xi} d\xi, \quad (2.11)$$

Integrating (2.7) and (2.11) with (2.10), we have

$$\int_{-1}^1 P(x) dx = g^2 \int_{-1}^1 \sigma(x) dx, \quad (2.12)$$

$$-g \int_{-1}^1 \gamma(x) dx = g^2 \int_{-1}^1 \sigma(x) dx + \frac{2g}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma(x)}{1-x^2} dx, \quad (2.13)$$

When the speed is very low or g is very large, we may have an approximate relation from (2.7) and (2.11), that is,

$$P(x) \doteq -g\gamma(x) \doteq g^2\sigma(x), \quad (2.14)$$

This states that the surface depression nearly equals to the statical pressure head, but this may be not true near the singularity.

For example, we consider the next function,

$$\sigma(x) = (1-x^2)^2, \quad (2.15)$$

Then, we have from above formulae

$$P(x) = g^2(1-x^2)^2 + 4(3x^2-1), \quad (2.16)$$

$$-g\gamma(x) = g^2(1-x^2)^2 + \frac{g}{\pi} \left[8(2/3-x^2) + 4x(1-x^2) \log \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right], \quad (2.17)$$

$$\int_{-1}^1 P(x) dx = (16/15)g^2, \quad -g \int_{-1}^1 \gamma(x) dx = (16/15)g^2 + (8/3\pi)g, \quad (2.18)$$

In this example, the pressure is finite at end points, so that we may not have the splash resistance too.⁷⁾

Lastly, we will note to the following equation. If we carry out the adjoint operation to both sides of (2.3), we have

$$(d^2/dz^2 + g^2)f(z) = -(d/dz - ig)\Pi(z), \quad (2.19)$$

It is easily seen that this equation corresponds to (1.14) and gives also the integral equation of the same type as (2.9).

We assume here that the pressure is distributed in the finite range, while Lord Kelvin and Prof. Havelock gave examples of the distribution in an infinite range. It is clear that their examples are included in our theory.

3. Half immersed vertical plate.

F. Ursell solved the two dimensional problem of the wave reflection by a fixed vertical plate half immersed in the water.⁸⁾ It is natural in our theory to take such a method he used there, and we will consider the similar problem for an application of our theory.

Consider a plate half immersed in a uniform stream and occupying the segment 0 to -1 on the y -axis.

The complex velocity potential is given by (1.6) and (1.7), but in this case the curve C consists of the face and back of the plate, and the stream function is to take the same value on both sides.

Hence, denoting the difference of the velocity potential between the face and back ϕ , we have from (1.6) and (1.7)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^0 \frac{\phi(\eta)}{z - i\eta} d\eta + \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_0^\infty \frac{\kappa + g - \mu i}{\kappa - g - \mu i} \overline{F(\kappa)} e^{-i\kappa z} d\kappa, \quad (3.1)$$

where

$$F(\kappa) = \frac{i}{2\pi} \int_{-1}^0 \phi(\eta) e^{\kappa \eta} d\eta, \quad (3.2)$$

We can assume naturally

$$\phi(-1) = 0, \quad (3.3)$$

The boundary condition is to be

$$\partial\phi/\partial x = \partial\psi/\partial y = -1, \text{ or } \psi = -y - \alpha, \text{ on } 0 > y > -1, \quad (3.4)$$

where α is a constant not arbitrary but to be determined in what follows.

We may find the left hand expression of (1.15) is given by this condition and this is from (3.1)

$$(d/dz + ig)f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^0 \phi(\eta) d\eta \cdot \left[\frac{ig}{z - i\eta} + \frac{ig}{z + i\eta} + \frac{1}{(z + i\eta)^2} - \frac{1}{(z - i\eta)^2} \right], \quad (3.5)$$

Integrating this equation and after the some calculations, we have their real part as

$$[\psi(y)]_0'' - g \int_0^y \psi(\eta) d\eta = \frac{g}{2\pi} \log(1 - y^2) \cdot \int_{-1}^0 \phi(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^0 m(\eta) \frac{\eta d\eta}{\eta^2 - y^2}, \quad (3.6)$$

where

$$m(y) = \phi(y) + g \int_y^0 \phi(\eta) d\eta, \quad (3.7)$$

This solution may be found easily but somewhat laborious, and we will consider here only their approximate wave resistance at very low speed.

If we have the solution m by (3.6), ϕ is given from (3.7) as

$$\phi(y) = \frac{d}{dy} \left[e^{gy} \int_0^y m(\eta) e^{-g\eta} d\eta \right], \quad (3.8)$$

Accordingly, we have from (3.2) after the some calculations

$$F(\kappa) = \frac{i}{2\pi(g + \kappa)} \left[\kappa \int_{-1}^0 e^{g\eta} m(\eta) d\eta + g e^{-(g + \kappa)} \int_{-1}^0 e^{-g\eta} m(\eta) d\eta \right], \quad (3.9)$$

When g takes a very large value, the greatest term of m , the solution of (3.6), is

$$m(-\cos \theta) \doteq (g/2) \sin 2\theta, \quad (3.10)$$

where one of the terms containing the constant α is of the same order, but we omit it merely for simplicity.

Put it into (3.9), after some approximations we have

$$F(g) \doteq i/2\pi g, \quad (3.11)$$

and the wave resistance

$$R \doteq \rho g, \quad (3.12)$$

On the other hand, the usual approximation for ϕ is

$$\phi(-\cos \theta) \doteq 2 \sin \theta, \quad (3.13)$$

In the same way as before, we have from (3.2) and (1.9)

$$F(g) \doteq i/\pi g, \quad \text{and} \quad R \doteq 4\rho g, \quad (3.14)$$

Thus we see that the exact value of the wave resistance is nearly one quarter of the usual approximate one. This is a similar result as that of F. Ursell got.⁹⁾

4. Three dimensional problem, in general.

Consider now the three dimensional problem of the ship fixed on the surface of a uniform

stream with great depth.

Take the origin of the right handed Cartesian coordinates on the waterline plane of the ship with Ox horizontal and Oz vertically upwards and suppose the stream to be of unit speed in the negative direction of Ox .

Write the velocity potential of the disturbed fluid motion $\varphi(x, y, z)$ and the surface elevation $\zeta(x, y)$, we have in the same way as (1.2), (1.3) and (1.5) at the free surface, we assume it $z=0$,

$$p/\rho \doteq \text{const.} - g\zeta - \partial\varphi/\partial z + \mu\varphi = 0, \quad (4.1)$$

$$\partial\zeta/\partial x \doteq \partial\varphi/\partial z, \quad (4.2)$$

$$(\partial^2/\partial x^2 + g \cdot \partial/\partial z - \mu \cdot \partial/\partial x)\varphi(x, y, 0) = 0, \quad (4.3)$$

For example, the velocity potential at the point $P \equiv (x, y, z)$ with a unit source placed at the point $Q \equiv (x, y, z)$ is well known, that is,

$$S(P, Q) = \frac{1}{r(P, Q)} - \lim_{\mu \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\kappa \cos^2 \theta + g + \mu i \cos \theta}{\kappa \cos^2 \theta - g + \mu i \cos \theta} e^{i\kappa(z+z') + i\kappa(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}')} d\kappa d\theta, \quad (4.4)$$

where $r(P, Q) = \overline{PQ}$, $\tilde{\omega} = x \cos \theta + y \sin \theta$, $\tilde{\omega}' = x' \cos \theta + y' \sin \theta$.

Differentiate (4.4) with P , we have

$$\lim_{\mu \rightarrow +0} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + g \frac{\partial}{\partial z} - \mu \frac{\partial}{\partial x} \right) S(P, Q) \right] = (\partial^2/\partial x^2 + g \partial/\partial z) \frac{1}{r(P, Q)} - (\partial^2/\partial x^2 - g \partial/\partial z) \frac{1}{r(P, \bar{Q})}, \quad (4.5)$$

where $\bar{Q}$ stands for the mirror image point of Q with respect to the plane $z=0$, and this equation vanishes on the free surface, $z=0$, naturally.

According to the foregoing analysis, we define the auxiliary function as

$$(\partial^2/\partial x^2 - g \partial/\partial z)\mu(x, y, z) = \varphi(x, y, z), \quad (4.6)$$

Then, we may proceed and have results in the same way as in the two dimensional case, but it gives a complicated formula, and so we will not deal with any farther in general, but consider a more concrete case.

5. Pressure distribution, in three dimension.

The velocity potential has been found, making use of the function $S(P, Q)$, to be

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi g} \iint_{S(z'=0)} P(x', y') \frac{\partial}{\partial x'} S(P, Q) dx' dy', \quad (5.1)^{(10)}$$

where $P(x, y)$ stands for $p(x, y)/\rho$ and $S(P, Q)$ reduces to

$$S(P, Q) = \lim_{\mu \rightarrow +0} \frac{-g}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\kappa z + i\kappa(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}')}}{\kappa \cos^2 \theta - g + i\mu \cos \theta} d\kappa d\theta, \quad (5.2)$$

The boundary condition over the surface S is (4.1), and this is written as follows,

$$-g\zeta(x, y) = P(x, y) - \frac{1}{4\pi g} \iint_S P(x', y') \left[\frac{\partial^2}{\partial x'^2} S(P, Q) \right]_{x=0} dx' dy', \quad (5.3)$$

The wave resistance R is given by the formula,¹⁰⁾

$$R = \frac{\rho g^2}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |F(g \sec^2 \theta, \theta)|^2 \sec^5 \theta d\theta, \quad (5.4)$$

where

$$F(\kappa, \theta) = \iint_S P(x, y) e^{-i\kappa \bar{y}} dx dy, \quad (5.5)$$

and $|F|$ stands for the absolute value of F .

Now introduce the function $\mu(x, y)$ by the next equation, bearing in mind (4.1) (4.2) and (4.6),

$$P(x, y) = [\partial^4 / \partial x^4 + g^2 (\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2)] \mu(x, y), \quad (5.6)$$

Putting this into (5.5) and integrating by parts, we have

$$\begin{aligned} F(\kappa, \theta) = & \int e^{-i\kappa \bar{y}} dy [\partial^3 / \partial x^3 + i\kappa \cos \theta \cdot \partial^2 / \partial x^2 + (g^2 - \kappa^2 \cos^2 \theta) (\partial / \partial x + i\kappa \cos \theta)] \mu(x, y) \\ & + g^2 \int_C e^{-i\kappa \bar{y}} dx (\partial / \partial y + i\kappa \sin \theta) \mu(x, y) + \kappa^2 (\kappa^2 \cos^4 \theta - g^2) \iint_S \mu(x, y) e^{-i\kappa \bar{y}} dx dy, \end{aligned} \quad (5.7)$$

where C means the periphery of the surface S .

When κ equals to $g \sec^2 \theta$, the last term vanishes and we find the waveless condition as follows,

$$(\partial^3 / \partial x^3) \mu = (\partial^2 / \partial x^2) \mu = (\partial / \partial x) \mu = (\partial / \partial y) \mu = \mu = 0, \text{ on } C. \quad (5.8)$$

We have also the velocity potential as follows,

$$\begin{aligned} \varphi(P) = & \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - g \frac{\partial}{\partial z} \right) \iint_S \mu(x', y') \left(\frac{\partial}{\partial x'} \right) \left[\frac{1}{r(P, Q)} \right] dx' dy' \\ & + \frac{1}{4\pi g} \int_C \left[\frac{\partial^3 \mu}{\partial x'^3} + g^2 \frac{\partial \mu}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial x'^2} + g^2 \mu \right) \left(\frac{\partial}{\partial x'} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial x'} \left(\frac{\partial}{\partial x'} \right)^2 - \mu \left(\frac{\partial}{\partial x'} \right)^3 \right] \frac{\partial}{\partial x'} S(P, Q) dy' \\ & + \frac{g}{4\pi} \int_C \left(\frac{\partial \mu}{\partial y'} - \mu \frac{\partial}{\partial y'} \right) \frac{\partial}{\partial x'} S(P, Q) dx', \end{aligned} \quad (5.9)$$

The first term is regular and vanishes at infinity, but other terms having the singularity on the curve C leave the wave system in the rear.

Thus, we see that the waveless condition (5.8) is a natural consequence.

For example, put

$$\mu(x, y) = (b^2 - y^2)^2 (1 - x^2)^4, \quad (5.10)$$

for a rectangular plate with the length 2 and the breadth $2b$, we have waveless system, and the pressure is given by (5.6) and the surface elevation by (5.3).

We may have many other examples easily, but all of these distribution have no lift. That is, integrating (5.6) with (5.8),

$$\iint_S P(x, y) dx dy = 0, \quad (5.11)$$

This is the different point with (2.12) in the two dimensional case.

Lastly, let us consider the waveless distribution of a slightly different type.

If the pressure distribution has a point symmetry, (5.5) is independent of θ , namely,

$$F(\kappa) = \iint P(r) e^{-i \kappa r \cos(\theta - \varphi)} r dr d\varphi = 2\pi \int_0^\infty P(r) J_0(\kappa r) r dr, \quad (5.12)$$

where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \tan^{-1} y/x$ and J is the Bessel function of the first kind.

It is easily seen from (5.4) and (5.5) that the waveless condition in this case is to be

$$F(\kappa) = 0, \quad \text{for } \kappa > g, \quad (5.13)$$

Now we see, F is the Hankel transform of P from (5.12), so that we may have inversely

$$P(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty F(\kappa) J_0(\kappa r) \kappa d\kappa, \quad (5.14)$$

If the function $F(\kappa)$ satisfies (5.13), this reduces to

$$P(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^g F(\kappa) J_0(\kappa r) \kappa d\kappa, \quad (5.15)$$

Inversely, if this equation holds, the condition (5.13) is deduced by the reciprocal transformation, that is to say, the pressure distribution of the form (5.15) is waveless.

For example, put $F(\kappa)$ a constant, we have

$$F(\kappa) = 1, \quad P(r) = \frac{g}{2\pi r} J_1(gr), \quad (5.16)$$

and the total pressure is finite, that is from (5.12).

$$\int_0^\infty P(r) r dr = F(0) = 1, \quad (5.17)$$

In this case, however, the range of the distribution extends to infinity.

6. Mitchell type ship.

We mean with this word a ship represented by the singularity distribution over some area, say rectangle, in the $x-z$ plane. The ship of this type is one of the frequently used

in the theory and the experiment as the model of the so-called displacement ship.

The velocity potential caused by the doublet distribution $\eta(x, z)$ is written as follows,

$$\varphi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{-t}^0 \int_{-1}^1 \eta(x', z') \frac{\partial}{\partial x'} S(P, Q) dx' dz', \quad (6.1)^{10)}$$

The function η equals approximately to the half breadth of the ship as usually known.

The wave resistance is given by the next formula,

$$R = \frac{4\rho g^4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |F(g \sec^2 \theta, \theta)|^2 \sec^5 \theta d\theta, \quad (6.2)^{10)}$$

where

$$F(\kappa, \theta) = \int_{-t}^0 \int_{-1}^1 \eta(x, z) e^{\kappa z - i\kappa x \cos \theta} dx dz, \quad (6.3)$$

Introduce now the auxiliary function by the next equation,

$$\eta(x, z) = (\partial/\partial z - \partial^2/g\partial x^2)\sigma(x, z), \quad (6.4)$$

and we see that this is a generalised equation of heat conduction.

This equation may be easily solved, and σ is uniquely determined except suitable boundary and initial conditions, say,

$$\sigma(x, -t) = 0, \quad (\partial/\partial x)\sigma(\pm 1, z) = 0, \quad (6.5)$$

Put (6.4) into (6.3) with (6.5), and integrate by parts, we have

$$\begin{aligned} F(\kappa, \theta) = & \frac{\kappa}{g} (\kappa \cos^2 \theta - g) \int_{-t}^0 \int_{-1}^1 \sigma(x, z) e^{\kappa z - i\kappa x \cos \theta} dx dz \\ & + \int_{-1}^1 \sigma(x, 0) e^{-i\kappa x \cos \theta} dx - \int_{-t}^0 \left[\sigma(x, z) e^{\kappa z - i\kappa x \cos \theta} \right]_{x=-1}^1 dz. \end{aligned} \quad (6.6)$$

By the similar calculation, we have from (6.1),

$$\begin{aligned} \varphi(P) = & \frac{1}{2\pi} (\partial/\partial z - \partial^2/g\partial x^2) \int_{-t}^0 \int_{-1}^1 \sigma(x', z') \frac{\partial}{\partial x'} [1/r(P, Q) - 1/r(P, \bar{Q})] dx' dz' \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \sigma(x', 0) \frac{\partial}{\partial x'} S(P, Q) \Big|_{x'=0} dx' + \frac{1}{2\pi g} \int_{-t}^0 \left[\sigma \frac{\partial^2}{\partial x'^2} S \right]_{x'=-1}^1 dz'. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Consequently, the regular wave system is determined by the values of σ on the fore and aft perpendiculars and the load water line.

If these values vanish on those lines, we have a waveless distribution, that is, when

$$\sigma = 0, \text{ on } z=0, z=-t \text{ and } x=\pm 1; \partial\sigma/\partial x=0, \text{ on } x=\pm 1, \quad (6.8)$$

The total displacement of these distributions vanishes as the same way as in (5.11), namely, by the integration of (6.4) with (6.8) we have

$$\int_{-t}^0 \int_{-1}^1 \eta(x, z) dx dz = \int_{-1}^1 \sigma(x, 0) dx = 0, \quad (6.9)$$

For example, we have a waveless system by putting

$$\sigma(x, z) = (1 - x^2)^2 z(1 + z/t), \quad (6.10)$$

and $\eta(x, z)$ is given by (6.4).

When the speed is very low and g is very large, we have the approximate relation except near the end points $x = \pm 1$,

$$\eta(x, z) \doteq (\partial/\partial z)\sigma(x, z), \quad (6.11)$$

These distributions are very useful in application, although we have no waveless ship with displacement. Namely, we have had a very wide arbitrariness to determine the ship form with some resistance, because these waveless distributions do not change their wave resistance, if we add it to or subtract from any distribution.

Meanwhile, if we deal with the distribution in an infinitely long range, we have the waveless one with a finite displacement as follows.

Consider the function $\eta(x, z)$ is of the type,

$$\eta(x, z) = T(z)H(x), \quad (6.15)$$

and write

$$f(p) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)e^{-ipx} dx. \quad (6.16)$$

Then, we have also the waveless condition as before,

$$f(p) = 0, \quad \text{for } p > g. \quad (6.17)$$

The relation (6.16) is of the Fourier transform, so that we may have its inverse transform as

$$H(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{ipx} dp. \quad (6.18)$$

In the consequence, the condition (6.17) is satisfied, if we have a representation of the next form,

$$H(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-g}^g f(p)e^{ipx} dp. \quad (6.19)$$

For example, put

$$f(p) = 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1/2)} [1 - (p/g)^2]^{\nu-1/2}, \quad (6.20)$$

Then, we have

$$H(x) = g \frac{\Gamma(\nu+1)}{(gx/2)^\nu} J_\nu(gx), \quad \int_{-\infty}^{\infty} H(x) dx = 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1/2)}, \quad (6.21)$$

In the foregoing discussion, we have assumed that the distribution is represented by an integrable function, but it is used to assumed that it is succesively differentiable in almost all cases up to the present.

This is a severe restriction especially for the mathematical point of view,¹¹⁾ but it is also true that the half breadth curve of the actual ship surface seems to be represented by such a function. Accordingly, we will give some formulas of such case in addition.

At first, all of the foregoing conclusions, of course, hold good.

Secondly, we have an interested formula with its wave resistance as follows.

Integrate (6.3) by parts assuming the differentiability, we have

$$\begin{aligned} F'(g \sec^2 \theta, \theta) = & -\frac{1}{2g\kappa} \int_{-t}^0 \int_{-1}^1 f_1(x, z) e^{\kappa z - i p x} dx dz + \frac{1}{2\kappa} \int_{-1}^1 [\eta(x, z) e^{\kappa z}]_{z=-1}^1 e^{-i p x} dx \\ & + \frac{1}{2g\kappa} \int_{-t}^0 e^{\kappa z} [e^{-i p x} (\partial/\partial x + i p) \eta(x, z)]_{x=-1}^1 dz, \end{aligned} \quad (6.22)$$

where $\kappa = g \sec^2 \theta$, $p = g \sec \theta$ and

$$f_n(x, z) = (\partial^2/\partial x^2 + g \cdot \partial/\partial z)^n \eta(x, z), \quad \text{for } n: \text{ positive integer}, \quad (6.23)$$

Continuing this process, assumed the function $f_n(x, z)$ tends to zero, we have finally in symbolic writing,

$$F'(g \sec^2 \theta, \theta) = \left[\left[e^{\kappa z - i p x} \left(\frac{1}{\kappa + \partial/\partial z} + \frac{g}{p^2 + \partial^2/\partial z^2} \right) \left(\frac{i p + \partial/\partial x}{2g\kappa + g \cdot \partial/\partial z + \partial^2/\partial x^2} \right) \eta(x, z) \right]_{x=-1}^1 \right]_{z=-t}^0, \quad (6.24)$$

Now, introduce a function μ by the equation.

$$\eta(x, z) = (\partial^2/\partial x^2 + g^2)(\partial/\partial z + g)\mu(x, z), \quad (6.25)$$

put it into (6.24) and tend θ to zero, and we have

$$F'(g, 0) = \frac{g}{2} \left[\left[e^{\theta z - i \theta x} (\partial/\partial x + i g) \mu(x, z) \right]_{x=-1}^1 \right]_{z=-t}^0, \quad (6.26)$$

Hence, if μ and $\partial\mu/\partial x$ vanish at four end points, we get

$$F'(g, 0) = 0, \quad (6.27)$$

If the speed is very low and g is very large, the wave resistance is determined by the value of F' near the point $\theta=0$ approximately, so that we may hope to get a distribution having a small wave resistance by the method as the above.

It is a simple matter to get a function satisfying the above condition, for an example, we have of the following types

$$\mu(x, z) = (1 - x^2)^2 \text{func.}(z), \quad \mu(x, z) = z(t+z) \text{func.}(x), \quad (6.28)$$

Conclusion

We have considered a waveless problem of the ship in steady motion on calm sea, and concluded as follows,

1. The velocity potential could be separated into two parts by the aid of the auxiliary function. The one is the part regular and vanishing at infinity, and the other the part containing the wave system in the rear.

2. Consequently, we have been able to construct a waveless system considerably at ease.

3. It may also propose a usefull method to solve wave problems. For an example, we get the integral equation for solving the problem of a half immered vertical plate in two dimensional case.

4. The waveless pressure system is shown with examples in two and three dimension, and it is found that the total pressure is finite in the former case but vanishes in the latter.

5. The total displacement of a Mitchell type waveless ship is shown to be zero too.

6. Meanwhile, if the range of the singularity distribution extends to infinity, we can get a waveless system with a finite total pressure or displacement in three dimensional case.

7. For the Mitchell type ship represented by a successively differentiable doublet distribution, the formula of the wave resistance is deformed in a neat expression, and we have a simple method to find a distribution with a comparatively small wave resistance.

References

- 1) W. Thomson; Math. and Phis. Papers, vol. 4, p. 387, (1910)
- 2) T.H. Havelock; Proc. Roy. Soc. A, vol. 93, (1917)
- 3) T.H. Havelock; Proc. Roy. Soc. A, vol. 157, (1936)
- 4) N.E. Ketchin; Tech. Rep. Bulletin No. 1-8, Soc. Nav. Arch. Mar. Eng., (1951)
- 5) F. Ursell; Jour. Mech. and Appl. Math., vol. 7, (1954)
- 6) H. Maruo; Memo. of Facu. of Eng., Yokohama Univ., vol. 1, p. 42, (1952)
- 7) H. Maruo; Jour. Soc. Nav. Arch. of Japan, vol. 78, (1947)
- 8) F. Ursell; Proc. of Cambridge Phil. Soc., vol. 43, p. 374, (1947)
- 9) F. Ursell; Proc. Roy. Soc. A, vol. 220, p. 90, (1953)
- 10) T.H. Havelock; Proc. Roy. Soc. A, vol. 138, p. 339, (1932)
- 11) S. Karp, J. Kotik and J. Lurye; Manuscript and Abstract of third Symposium on Naval Hydrodynamics, p. 56, (Sept. 1960)

“On the Problem of the Minimum Wave making Resistance of Ships”

By Masatoshi BESSHO

(Received August 21, 1962)

Abstract

The author discusses on the the minimum problem of the wave resistance of three types of the singularity distribution.

He finds no minimum solution in general, but in the cases with some restrictions. He points out also the difficulty of the numerical computation, and asserts that there may be quasi-waveless solutions.

The principal idea of this paper is based on the fact that a singularity distribution gives a value of wave resistance, but inversely a value of wave resistance does not correspond to one distribution but to infinitely many ones. This is said exactly in the former paper and approximately in the present.

Introduction. The problem to minimize the wave making resistance of ships has made a great progress in recent works, but also thrown back many questions to the theory^{8), 10)}.

The author intends to pick up and find out their difficulties as far as possible.

First of all, we must classificate problems and questions.

The problems are distinguished by the types of ships and the types of minimum conditions. Firstly, we consider three cases for the types of ships, or mathematically, of their singularity distribution.

- I a) Mitchell-Havelock distributions for the model of displacement ships¹²⁾,
- b) pressure distributions for surface ships,
- c) submerged ships.

Secondly, our minimum problem assumes naturally the given velocity and length or Froude number, and the given displacement or total sum of the singularity distribution of the given type.

Under these circumstances, problems are considered for which

- II a) A) there is not another restriction,
- B) the moment of the distribution is given,
- C) the second moment is given.

These conditions are concerned with integrated quantities of the distribution, but by the familiar notation to naval architects we may ask the next problem,

- II b) under the same conditions as I a) A), the block coefficient must be taken as a given

value⁸⁾.

Since the displacement is given, assuming the given draft, this condition determines the breadth. This is not of integrated quantity, so that this problem may differ from the ones described above.

Lastly, we ask the following questions for these problems.

1) Have the minimum problem a solution?

This is a question partly solved by S. Karp and others¹⁰⁾, so that we may ask as "In which cases the problem has a solution?"

2) If we have the solution, is it uniquely determined?

G. Weinblum and others have described the instability of their numerical solution, that is, they obtained fairly different minimum ship forms respectively⁸⁾. From what cause such phenomenon appears?

3) In these connection, we must remind the theory of the waveless ship by T. Inui⁹⁾. If a ship would have no wave resistance, then has the minimum problem their meaning?

What is the relation between the minimum wave resistance ship form and the waveless ship form?

These are concerns of the author, and he discusses them under the various types of distributions cited above.

Chapter 1. Submerged ship

The wave resistance of a submerged ship is somewhat simpler than the usual floating ship, and discussed in detail numerically and theoretically in the literatures^{4), 11)}.

In all of those works, they have discussed with doublet distributions on the given segment of the longitudinal axis.

Hence, we suffice too with such simplified treatment.

1.1 Influence function. Consider the water flow of unit velocity, and take the origin of the coordinates at the center of the doublet distribution occupying the segment $|x| \leq 1$, submerged under the water surface with immersion f , x -axis horizontally and upper stream direction, z -axis vertically upwards.

The wave resistance of the distribution is given by the formula¹¹⁾,

$$R = \frac{\rho g^4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |F(g \sec^2 \theta, \theta)|^2 \sec^3 \theta d\theta, \quad (1.1.1)$$

$$F(\kappa, \theta) = \int_{-1}^1 H(x) e^{-\kappa f - i\kappa x \cos \theta} dx, \quad (1.1.2)$$

where ρ is the water density and g the gravity constant of our unit system, and so Froude number, Fr , based on the ship length equals to $1/\sqrt{2g}$.

$H(x)$ equals approximately to the sectional area as usually known.

Now, if we add a small quantity $\Delta H(x)$ to $H(x)$ in the vicinity of x , neglecting higher order term, the wave resistance will increase ΔR .

Taking the variation of (1.1.1), we have

$$\Delta R = 2\rho g G(x) \Delta H(x) \Delta x, \quad (1.1.3)$$

and

$$\begin{aligned} G(x) &= Re. \frac{g^3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(g \sec^2 \theta, \theta) e^{-\rho f \sec^2 \theta + i g x \sec \theta} \sec^5 \theta d\theta \\ &= \frac{g^3}{\pi} \int_{-1}^1 H(\xi) P_{-5}(g \overline{x - \xi}, 2gf) d\xi, \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

where the function P_{-5} is seen in Appendix A.

Hence, the function $G(x)$ tells us the wave resistance variation for small variation of the distribution. We will call $G(x)$ hereafter the influence function according to E. Hogner²⁾.

We may write now (1.1.1) with the aid of this function as

$$R = \rho g \int_{-1}^1 G(x) H(x) dx. \quad (1.1.5)$$

Now let us consider the minimum problem II) a) A).

Then the wave resistance must be stationary for any variation of the distribution. Accordingly, we can assert the influence function must be constant over the length of distribution, that is,

$$G(x) = C. \quad (1.1.6)$$

Write the displacement volume or total sum of the distribution as

$$\nabla = \int_{-1}^1 H(x) dx. \quad (1.1.7)$$

If (1.1.6) would hold good, then the wave resistance might be from (1.1.5)

$$R = \rho g \nabla C, \quad (1.1.8)$$

so that C must be positive.

Thus, the problem reduces to solve the integral equation (1.1.6) with (1.1.4)

Now, the kernel P_{-5} in (1.1.4) is regular in x , therefore $G(x)$ is to be regular in x too, assumed the integrability of the right hand expression.

If $G(x)$ would be constant in $|x| \leq 1$, and it might be constant at infinity too. But $P_{-5}(gx, 2gf)$ vanishes at infinity, so that we may conclude this constant to be zero. Therefore $H(x)$ should be zero identically.

Namely, we have no solution of the problem except the one vanishing identically.

However, the integral equation (1.1.6) with (1.1.4) might have a solution numerically in almost every case, in fact, G. Weinblum solved those problems⁴⁾. What is the relation between the fact that there are those numerical solutions and the fact that the minimum solution is to be identically zero?

1.2 Quasi-waveless solution. If there is no minimum value of the wave resistance, it seems that the least value might be zero.

In fact, we will show the wave resistance to make small at our disposal.

Consider the next distribution

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \frac{\cos 2n\theta}{\sin \theta}, \quad x = -\cos \theta, \quad (1.2.1)$$

Since the kernel of (1.1.4) is expanded as (A. 10), integrating term by term, we have

$$\begin{aligned} G(x) &= g^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r=0}^m \frac{(-1)^m g^{2m} U_{m+2}(2gf) x^{2r} a_{2r}}{2^{2m-2r} (2r)! (n+m-r)! (m-n-r)!} \\ &= g^3 \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(gx)^{2r}}{(2r)!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n} C_{2n, 2r}, \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

where

$$C_{2n, 2r} = (g/2)^{2n} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (g/2)^{2s} \frac{U_{r+n+s+2}(2gf)}{s! (2n+s)!}. \quad (1.2.3)$$

Now, taking a sufficiently large integer N , and put

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n C_{2n, 2r} = 0, \quad \text{for } r=0, \dots, (N-1). \quad (1.2.4)$$

Then we have from (1.2.2)

$$G(x) = g^3 O \left[\frac{(gx)^{2N}}{(2N)!} \right]. \quad (1.2.5)$$

Therefore, since the series expansion (1.2.2) is shown convergent, this value will be sufficiently small by selecting appropriately large N .

Take M unknown a_n 's ($M > N$), and we have a solution except $(M-N+1)$ undetermined coefficients, for we have $(N+1)$ equations (1.2.4) with (1.1.7).

If the influence function would be small, and the wave resistance might be small by (1.1.5).

Thus, we may have many solutions by appropriate selections of M and N , and reduce the wave resistance smaller at our disposal.

In these circumstances, we call these solutions quasi-waveless for a convenience.

However, we can not expect that the solutions obtained converge to a definite distribution, because the minimum solution should be zero identically.

1.3 The case of small immersion. The numerical computations of the above method will be very laborious when the immersion is small. There is another method to obtain the distributions with the smaller wave resistance.

Define the function

$$\Gamma(x) = \frac{1}{\pi g} \int_{-1}^1 H(\xi) P_{-1}(g \overline{x - \xi}, 2gf) d\xi, \quad (1.3.1)$$

$$(d/dx)^4 \Gamma(x) = G(x). \quad (1.3.2)$$

If we put with arbitrary constants a_n as

$$\Gamma(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \quad (1.3.3)$$

then we have by (1.3.2)

$$G(x) = 0, \quad (1.3.4)$$

and so by (1.1.5)

$$R = 0. \quad (1.3.5)$$

The integral equation (1.3.1) with (1.3.3) has a solution numerically in almost every cases, but may be shown to have only identically vanishing solution by the same way as in § 1.1 theoretically.

Meanwhile, if the immersion tends to zero, the integral equation has a solution not identically zero by **Appendix B**.

Accordingly, when the immersion becomes small enough, we may expect a solution like the one in its limit.

And now we call these solutions quasi-waveless too.

Chapter 2. Mitchell-Havelock type distribution¹²⁾

We consider the doublet distribution over the rectangle on the $x-z$ plane, and simulates the displacement ship.

2.1 General discussion. The wave resistance is the same form as (1.1.1) with

$$F(\kappa, \theta) = \int_{-t}^0 \int_{-1}^1 H(x, z) e^{-\kappa z - i\kappa x \cos \theta} dx dz, \quad (2.1.1)$$

where t is the ratio of the draft to the half length, and $H(x, z)$ equals approximately to the breadth of the ship.

Define the influence function as (1.1.4),

$$G(x, z) = \frac{g^3}{\pi} \int_{-t}^0 \int_{-1}^1 H(\xi, \zeta) P_{-3}(g \overline{x - \xi}, -g \overline{z + \zeta}) d\xi d\zeta, \quad (2.1.2)$$

then the wave resistance is written as

$$R = \rho g \int_{-1}^0 \int_{-1}^1 H(x, z) G(x, z) dx dz. \quad (2.1.3)$$

The minimum value is attained, when

$$G(x, z) = C: \text{Constant}, \quad (2.1.4)$$

under the condition

$$F = \int_{-1}^0 \int_{-1}^1 H(x, z) dx dz. \quad (2.1.5)$$

Then

$$R = \rho g F C. \quad (2.1.6)$$

At first, we have the next differential equation from (A. 2),

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) G(x, z) = 0, \quad \text{for } z < 0. \quad (2.1.7)$$

Moreover, introduce the auxiliary function vanishing at $x = \pm \infty$ by the next equation¹²⁾

$$H(x, z) = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{g} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \sigma(x, z), \quad (2.1.8)$$

and we may write

$$G(x, z) = \frac{g^3}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\xi, 0) P_{-3}(g\bar{x} - \xi, -gz) d\xi. \quad (2.1.9)$$

Since the above formula is regular in x with the appropriate class of the function σ , we will deduce the same conclusion as of the preceding chapter.

In fact, if we pick up the distributions uniform in z and represented by Fourier transforms of functions which have the next quality

$$F(\kappa, \theta) = 0, \quad \text{for } \kappa > g, \quad (2.1.10)$$

we may have waveless distributions extending to infinity but confined practically in $|x| \leq 1$ by suitable combinations of such functions¹²⁾.

2.2 The case of infinite draft. Thus, it seems that the minimum problem has no solution in general, but this fact does not hold always in more restricted cases.

Consider that the distribution is uniform in z and extends to infinitely great depth, and this is the case discussed by S. Karp and others mathematically and solved numerically¹⁰⁾.

Here, we consider it analytically in more detail.

Integrating (2.1.2) and (2.1.3), we have

$$c_w = \frac{R}{\frac{\rho}{2}(\bar{B}/2)^2} = (8g^2/\bar{B}) \int_{-1}^1 H(x) \Gamma(x) dx, \quad (2.2.1)$$

where

$$\Gamma(x) = \frac{1}{\pi \bar{B}} \int_{-1}^1 H(\xi) P_{-1}(g \overline{x - \xi}, 0) d\xi, \quad (2.2.2)$$

Assume the next expansion by Mathieu functions, hereafter we follow the notations of the text by McLachlan⁵⁾,

$$H(-\cos \theta) = \frac{\bar{B}}{\sin \theta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n ce_n(\theta, q), \quad q = g^2/4. \quad (2.2.3)$$

Then, the mean breadth defined as

$$\bar{B} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 H(x) dx, \quad (2.2.4)$$

proposes a condition between the coefficients in (2.2.3), that is,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} A_0^{(2n)} = 2/\pi. \quad (2.2.5)$$

By the way, define the next quantity

$$\delta = \bar{B}/H(0) = 1 / \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} ce_{2n}(\pi/2, q) \right], \quad (2.2.6)$$

this equals approximately to the water plane area coefficient.

Moreover, we define the first and second moment as follows,

$$\int_{-1}^1 H(x) x dx = -4\bar{B}\alpha, \quad \alpha = (\pi/8) \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} A_1^{(2n+1)}, \quad (2.2.7)$$

$$\int_{-1}^1 H(x) x^2 dx = 8\bar{B}m^2, \quad m^2 = 1/8 + (\pi/32) \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} A_2^{(2n)}. \quad (2.2.8)$$

Now, put (2.2.3) into (2.2.2) and use (B. 13), we have

$$\Gamma(-\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n a_n ce_n(\theta, q). \quad (2.2.9)$$

Owing to the orthogonality of Mathieu functions, the wave resistance is written from (2.2.1) with this equation as

$$c_w = 4\pi g^2 \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n a_n^2. \quad (2.2.10)$$

Hence, the minimum problem reduces to a simple calculation.

A) Obtain the minimum of (2.2.10) under the condition (2.2.5).

As explained in the preceding chapter or obtained by Lagrange's method, we have it, when

$$\Gamma(-\cos \theta) = \lambda: \text{ Constant}, \quad (2.2.11)$$

then

$$c_w = 16g^2\lambda. \quad (2.2.12)$$

Since

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_0^{(2n)} c e_{2n}(\theta, q) = 1/2,$$

comparing with (2.2.9), we have

$$a_{2n+1} = 0, \quad a_{2n} = 2\lambda A_0^{(2n)} / \mu_{2n} \equiv a_{2n}^*, \quad (2.2.13)$$

Putting this into (2.2.5), we have the constant, that is,

$$\lambda = 1/(\pi C_{0,0}), \quad C_{0,0} = \sum_{n=0}^{\infty} [A_0^{(2n)}]^2 / \mu_{2n}, \quad (2.2.14)$$

putting this value into (2.2.12),

$$c_w = 16g^2 / (\pi C_{0,0}) \equiv c_{w_0}. \quad (2.2.15)$$

Lastly, the coefficient by (2.2.6) becomes

$$\delta = \pi C_{0,0} / 2D_0 \equiv \delta_0, \quad D_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_0^{(2n)} c e_{2n}(\pi/2, q) / \mu_{2n}. \quad (2.2.16)$$

B) Solve the same problem with the other condition (2.2.7).

It is to be, by Lagrange's method,

$$\Gamma(-\cos \theta) = \lambda_1 + \lambda_2 \cos \theta. \quad (2.2.17)$$

Then,

$$c_w = 16g^2\lambda_1 + 32g^2\alpha\lambda_2, \quad (2.2.18)$$

The constant λ_1 is given by (2.2.14) as easily seen, and since

$$\cos \theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_1^{(2n+1)} c e_{2n+1}(\theta, q),$$

comparing with (2.2.9), we have

$$a_{2n+1} = \lambda_2 A_1^{(2n+1)} / \mu_{2n+1}, \quad (2.2.19)$$

and that from (2.2.7)

$$\lambda_2 = 8\alpha / (\pi C_{1,1}), \quad C_{1,1} = \sum_{n=0}^{\infty} [A_1^{(2n+1)}]^2 / \mu_{2n+1}. \quad (2.2.20)$$

When we write as

$$c_{w1} = 16g^2 / (\pi C_{1,1}), \quad (2.2.21)$$

we have from (2.2.18) with (2.2.15) finally

$$c_w = c_{w0} + 16\alpha^2 c_{w1}. \quad (2.2.22)$$

C) Consider A problem with the other condition (2.2.8), then we have in the same way,

$$F(-\cos \theta) = \lambda_1 + \lambda_2 \cos 2\theta, \quad (2.2.23)$$

and

$$c_w = 16g^2(\lambda_1 - \lambda_2) + 128g^2\lambda_2 m^2. \quad (2.2.24)$$

Since

$$\cos 2\theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_2^{(2n)} c e_{2n}(\theta, q),$$

we have the coefficients in like manner as in A), that is,

$$a_{2n+1} = 0, \quad a_{2n} = [2\lambda_1 A_0^{(2n)} + \lambda_2 A_2^{(2n)}] / \mu_{2n}. \quad (2.2.25)$$

Using these formulae, we have

$$\lambda_1 = 1/(\pi C_{0,0}) - 2\gamma C_{0,2}/(\pi \mathcal{A}), \quad \lambda_2 = 2C_{0,0}/(\pi \mathcal{A}), \quad (2.2.26)$$

where

$$\gamma = 16(m^2 - m_0^2), \quad (2.2.27)$$

m_0 is the value of (2.2.8) taken for the solution A, namely

$$m_0^2 = 1/8 + C_{0,2}/(16C_{0,0}), \quad (2.2.28)$$

and

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A} &= C_{0,0} C_{2,2} - C_{0,2}^2, \\ C_{0,2} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_0^{(2n)} A_2^{(2n)} / \mu_{2n}, \quad C_{2,2} = \sum_{n=0}^{\infty} [A_2^{(2n)}]^2 / \mu_{2n}, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.29)$$

Then, we have from (2.2.25) with (2.2.15)

$$c_w = c_{w0} + \gamma^2 c_{w2}, \quad (2.2.30)$$

where

$$c_{w2} = 16g^2 C_{0,0} / (\pi \mathcal{A}). \quad (2.2.31)$$

Here, we rewrite (2.2.25) as

$$\left. \begin{aligned} a_{2n} &= a_{2n}^* + \gamma b_{2n}^*, \\ b_{2n}^* &= \frac{2}{\pi \mathcal{A} \mu_{2n}} [C_{0,0} A_2^{(2n)} - C_{0,2} A_0^{(2n)}]. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.32)$$

Table

$4q$ g $F\gamma$	1 1 0.7071	4 2 0.500	10 $\sqrt{10}$ 0.3976	16 4 0.3536	24 $\sqrt{24}$ 0.3195	36 6 0.2887	50 $\sqrt{50}$ 0.2659	64 8 0.2500	80 $\sqrt{80}$ 0.2364	100 10 0.2236	
μ_0	0.644094	0.998125(1)	0.814806(2)	0.132126(2)	0.193168(3)	0.189457(4)	0.202547(5)	0.294995(6)	0.419816(7)	0.478425(8)	
μ_1	1.096150	0.732746	0.194796	0.470898	0.851693(2)	0.992818(3)	0.122314(3)	0.199029(4)	0.313925(5)	0.397238(6)	
μ_2	0.547239	0.686380	0.662995	0.397181	0.138960	0.234523(1)	0.342655(2)	0.624663(3)	0.109448(3)	0.154365(4)	
μ_3	0.344356	0.385909	0.500315	0.582640	0.510346	0.227603	0.547913(1)	0.120592(1)	0.237545(2)	0.373999(3)	
μ_4	0.254270	0.268533	0.306237	0.360255	0.448653	0.495383	0.320119	0.128702	0.344321(1)	0.634796(2)	
μ_5	0.202113	0.208842	0.224475	0.244169	0.279845	0.358126	0.442317	0.402119	0.230739	0.712211(1)	
μ_6	0.167868	0.171617	0.179844	0.189269	0.204374	0.235323	0.290597	0.362817	0.406359	0.305693	
μ_7	—	0.145917	0.150846	0.156245	0.164335	0.179028	0.202103	0.235452	0.290416	0.363293	
μ_8	—	0.127026	0.130230	0.133654	0.138613	0.147071	0.159004	0.174202	0.197839	0.241970	
c_{w_0}	6.5518	4.4226	1.1384	0.34299	0.85324(1)	0.14156(1)	0.23083(2)	0.46094(3)	0.87171(4)	0.13191(4)	
c_{w_2}	2.789	12.73	23.60	20.36	12.01	4.566	1.441	0.4719	0.1398	0.0330	
δ_0	1.606	1.114	0.7960	0.6827	0.6039	0.5378	0.4910	0.4591	0.4323	0.4074	
m_0	0.7109	0.6358	0.5371	0.4837	0.4401	0.3997	0.3694	0.3480	0.3298	0.3123	
$16c_{w_2}/g^3$	44.60	25.46	11.94	5.090	1.636	0.3349	0.6522(1)	0.1475(1)	0.3126(2)	0.0528(3)	
c_p	0.5917	0.6031	0.6078	0.5813	0.5409	0.4931	0.4566	0.4305	0.4085	0.3869	
c_w	$\delta=$ 0.5 0.6 0.7 0.8	20.26 14.43 11.24 9.395	53.46 28.29 15.80 9.438	46.35 14.90 3.563 1.142	12.26 2.038 0.3974 2.261	1.639 0.8688(1) 0.7623 2.224	0.6213(1) 0.1046 0.4658 0.9176	0.2905(2) 0.6283(1) 0.1657 0.2758	0.3574(2) 0.2610(1) 0.5553(1) 0.8488(1)	0.2083(2) 0.8602(2) 0.1603(1) 0.2312(1)	0.7188(3) 0.2134(2) 0.3609(2) 0.4970(2)
γ	$\delta=$ 0.5 0.6 0.7 0.8	-2.2170 -1.6803 -1.2971 -1.0096	-1.963 -1.369 -0.9456 -0.6277	-1.384 -0.7638 -0.3206 0.0118	-0.7648 -0.2885 0.0517 0.3069	-0.3596 -0.0114 0.2374 0.4240	-0.1025 0.1407 0.3145 0.4448	0.0204 0.2049 0.3367 0.4356	0.0812 0.2331 0.3416 0.4230	0.1196 0.2471 0.3381 0.4064	0.1462 0.2534 0.3300 0.3874
a_0^*	0.89565	0.93186	1.05195	1.13513	1.20958	1.28477	1.34651	1.39366	1.43700	1.48113	
a_1^*	0.09256	0.04368	0.00792	0.00286	0.00141	0.00088	0.00065	0.00052	0.00043	0.00035	
a_2^*	0.00105	0.00268	0.00151	0.00061	0.00017	0.00003	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	
a_3^*	0.00001	0.00003	0.00005	0.00039	0.00002	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	
b_0^*	-0.05566	-0.19362	-0.32323	-0.38490	-0.45604	-0.55957	-0.67128	-0.77320	-0.88073	-1.00420	
b_1^*	0.63372	0.59764	0.50740	0.47106	0.50503	0.63798	0.80724	0.96082	1.11919	1.29827	
b_2^*	0.02856	0.12674	0.23008	0.18878	0.09742	0.03211	0.01299	0.00828	0.00669	0.00591	
b_3^*	0.00021	0.00366	0.01698	0.04590	0.02089	0.01157	0.00455	0.00157	0.00047	0.00014	
b_4^*	0.00000	0.00004	0.00006	0.00101	0.00135	0.00116	0.00058	0.00037	0.00016	—	

The numbers (n) in parenthesis indicate that the results must be multiplied by 10^{-n} , for example 0.3441(2) means 0.003441.

We show some values calculated by the tables of Mathieu functions in Table and Figure, in which the values of c_{ν} refer to the quantity δ , more familiar than γ , with the aid of the next formula,

$$1/\delta = 1/\delta_0 + 2\gamma(C_{0,0}D_2 - C_{0,2}D_0)/(\pi A), \quad (2.2.33)$$

where δ_0 is given by (2.2.16), and

$$D_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2,2)} c e_{2n}(\pi/2, q)/\mu_{2n}. \quad (2.2.34)$$

2.2.1 Approximate relations. Let us consider the approximate relations by making use of the results given in Appendix C.

At first, suppose g is sufficiently small, then

$$\left. \begin{aligned} \text{A)} \quad \lambda &\doteq \frac{2}{\pi} \log(4/\gamma g), \\ \alpha_0^* &\doteq 2\sqrt{2}/\pi, \quad \alpha_{2n}^* \doteq 0, \quad \text{for } n \geq 1, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.1.1)$$

$$H(-\cos \theta) \doteq 2/(\pi \sin \theta), \quad (2.2.1.2)$$

and

$$c_{w0} \doteq \frac{32g^2}{\pi} \log(4/\gamma g), \quad \log \gamma = C: \text{ Euler's Const.} \quad (2.2.1.3)$$

with

$$\delta_0 \doteq \pi/2. \quad (2.2.1.4)$$

This is the case considered by S. Karp and others¹⁰⁾.

$$\text{B)} \quad \lambda_2 \doteq 4\alpha/\pi, \quad \alpha_1 \doteq 8\alpha/\pi, \quad \alpha_{2n+1} = 0, \quad \text{for } n \geq 1, \quad (2.2.1.5)$$

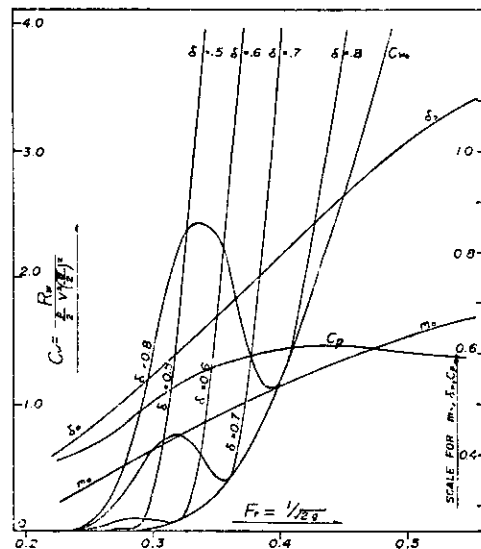
and

$$c_{w1} \doteq 128g^2/\pi. \quad (2.2.1.6)$$

In the same way, we may obtain the approximate values for the problem C. However, since we neglect higher order terms in (2.2.1.1) to (2.2.1.4), we cannot expect their accuracy up to the degree written down.

In other words, as seen in (2.2.1.6) compared with (2.2.1.3), the longitudinal variation of the displacement distribution does not affect appreciably to the wave resistance in very high speed.

Secondly, suppose g is very large, then we can observe in the Table that the wave re-



Figure

sistance correspond to Mathieu function of lower order is exceedingly smaller than the one of higher order when the order is not so large.

Hence, we have an almost minimum value whenever we take for the distribution a Mathieu function of lower order as far as possible.

Asymptotic characters of various quantities are as follows;

$$\text{A)} \quad a_0^* \doteq (\pi g)^{\frac{1}{2}}/\pi, \quad a_{2n}^* \doteq 0, \quad \text{for } n \geq 1, \quad (2.2.1.7)$$

$$c_{w_0} \doteq 64g^2 \exp.(-2g), \quad (2.2.1.8)$$

$$\delta_0 \doteq \sqrt{(\pi/2g)}, \quad (2.2.1.9)$$

$$\text{B)} \quad c_{w_1} \doteq 64g^4 \exp.(-2g), \quad (2.2.1.10)$$

$$\text{C)} \quad c_{w_2} \doteq 16g^6 \exp.(-2g), \quad (2.2.1.11)$$

$$m_0^2 \doteq 1/(4g), \quad (2.2.1.12)$$

and

$$\delta \doteq \sqrt{(\pi/2g)} \left/ \left(1 - \frac{\gamma}{4}g \right) \right. . \quad (2.2.1.13)$$

Owing to their exponential term, these values of the wave resistance are very small compared with the existing ones in very low speed in spite of infinite draft.

2.2.2 The problem II b). Consider the problem to minimize the wave resistance with given $\bar{B}$ or δ . This is the problem considered by G. Weinblum⁹⁾.

Introduce Lagrange's constants and proceed in usual manner, we have

$$a_{2n} = [2\lambda_1 A_0^{(2n)} + \lambda_2 c e_{2n}(\pi/2, q)] / \mu_{2n} . \quad (2.2.2.1)$$

Put this into (2.2.9), the influence function becomes to

$$\Gamma(-\cos \theta) = \lambda_1 + \lambda_2 \sum_{n=0}^{\infty} c e_{2n}(\pi/2, q) c e_{2n}(\theta, q) . \quad (2.2.2.2)$$

The last series is rewritten by changing the order of summation and using the orthogonality relations as follows,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c e_{2n}(\pi/2, q) c e_{2n}(\theta, q) &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} A_{2s}^{(2n)} \cos 2s\theta \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \cos 2r\theta \\ &= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin (2N+1)(\theta - \pi/2)}{\sin (\theta - \pi/2)} \right] . \end{aligned} \quad (2.2.2.3)$$

This series does not converge to any smooth function, however N becomes large. The same difficulty will appear in the case of which $H(x)$ vanishes at end points.

Accordingly, we may expect that the numerical solution in these cases will show the instability as observed by G. Weinblum⁹⁾.

Meanwhile, the wave resistance converges to a finite value, namely, putting (2.2.2.3) into (2.2.1), we have by making use of Dirichlet integral,

$$c_w = 8g^2(2\lambda_1 + \pi\lambda_2/2\delta),$$

and then determining the constants from (2.2.5) and (2.2.6), finally

$$c_w = c_{w0} + 4\pi g^2 C_{0,0} \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta_0} \right)^2 / (C_{0,0} E - D_0^2), \quad (2.2.2.4)$$

where

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} [ce_{2n}(\pi/2, q)]^2 / \mu_{2n}. \quad (2.2.2.5)$$

2.3 The case of finite draft. The preceding analysis is very clear and easy to compute numerically, but unfortunately usual ships have very shallow draft and it seems hardly to apply such results.

Therefore, consider the case of the distribution draftwise uniform and of their draft t for a moment.

We have in the same manner as in the preceding the wave resistance coefficient as

$$c_w = \frac{8g}{B} \int_{-1}^1 H(x) \Gamma(x) dx, \quad (2.3.1)$$

where

$$\Gamma(x) = \frac{g}{\pi B} \int_{-1}^1 H(\xi) K_{-1}(g \overline{x - \xi}, gt) d\xi, \quad (2.3.2)$$

with

$$K_{-1}(u, \tau) = P_{-1}(u, 0) - 2P_{-1}(u, \tau) + P_{-1}(u, 2\tau). \quad (2.3.3)$$

Owing to the singularity of this kernel, we may expect that there will be a minimum solution, but here we will consider no accurate numerical value but only some approximate characters.

Firstly, when the speed is very high and g is small, we cannot treat as in the preceding, because we have no simple approximate expression of (2.3.3) for the usual magnitude of the draft. But, when the draft is sufficiently small, we have another simple results, and this problem will be left in § 2.4.

Secondly, when g is sufficiently large and the distribution is expanded by Mathieu functions as (2.2.3), we have, considered only even functions,

$$c_w = 4\pi g^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{2n} a_{2m} M_{2n, 2m}, \quad (2.3.4)$$

where

$$M_{2n, 2m} = 2 \left[\frac{A_0^{2n} A_0^{2m}}{ce_{2n}(\pi/2, q) ce_{2m}(\pi/2, q)} \right] \int_0^\infty (1 - e^{-gt \cosh^2 u})^2 Ce_{2n}(u, q) Ce_{2m}(u, q) du. \quad (2.3.5)$$

If we put (C. 8) into (2.3.5), we obtain

$$M_{2n, 2m} \doteq \frac{(-1)^{n+m}}{g} ce_{2n}(0, q) ce_{2m}(0, q) L_{2n-2m}(gt), \quad (2.3.6)$$

where

$$L_{2\nu}(gt) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - e^{-gt \sec^2 \theta})^2 \cos 2\nu\theta d\theta. \quad (2.3.7)$$

The last function is deduced from the error function as easily seen, and when gt is sufficiently larger than one,

$$L_{2\nu}(gt) \doteq \begin{cases} 0, & \text{for } \nu \neq 0, \\ 1, & \text{for } \nu = 0, \end{cases} \quad \text{for } gt \gg 1, \quad (2.3.8)$$

Accordingly, the conclusions for the case of infinite draft hold good.

When gt is very small but g is very large, this functions is proportional to $\sqrt{gt}$ and of the same order for ν , which is not so large.

Hence, the fundamental character, the lower the order of Mathieu function the smaller the wave resistance, would not change.

2.3.1 Two classes of the wave resistance. The use of Mathieu function is very convenient theoretically as explained, but not for the purpose of numerical computation.

In this circumstance, we remind naturally the simple Fourier expansion.

Assume the next expansion

$$H(x) = \frac{\bar{B}}{\sin \theta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta, \quad x = -\cos \theta. \quad (2.3.1.1)$$

Then, we will easily find the next formulae in like manner as (2.3.4),

$$c_w = 8g^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n a_m R_{n, m}, \quad (2.3.1.2)$$

where

$$R_{n, m} = \text{Re. } i^{n-m} \int_0^\infty J_n(g \cosh u) J_m(g \cosh u) (1 - e^{-gt \cosh^2 u})^2 du. \quad (2.3.1.3)$$

Consider that both g and gt are very large, and using the asymptotic expansions of Bessel functions, we have

$$\left. \begin{aligned} R_{n, m} &= 0, & \text{for } (n-m): \text{ odd integer,} \\ R_{n, m} &\doteq (1/2g) \left[1 + (-1)^n \frac{2}{\pi} P_0(2g, 0) + \dots \right], & \text{for } (n-m): \text{ even.} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.1.4)$$

Namely, all of the function $R_{n,m}$ are nearly equal each other for even or odd suffixes respectively, which are not so large.

Thence, for example we have, taken N even functions,

$$c_w \doteq 8g^2 R_{0,0} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N a_{2n} a_{2m}, \quad \text{for } 2N \ll g, \quad (2.3.1.5)$$

This vanishes, for example, when

$$\sum_{n=0}^N a_{2n} = 0, \quad \text{or } H(\pm 1) = 0, \quad (2.3.1.6)$$

namely, c_w becomes to zero with respect to the order g , but in general not to the lower order, and at most it will be

$$c_w = 0(1). \quad (2.3.1.8)$$

Continuing this procedure, we will have the distributions which have sharper ends and are finer and that their wave resistance of the next order,

$$c_w = 0(g^{-n}), \quad n: \text{some positive integer}, \quad (2.3.1.8)$$

These belong to a different class with the exponential ones obtained in § 2.2, and will be higher than those in increasing g .

And we are easily seen that the distributions represented by polynomials belong also to this class¹²⁾.

2.4 The case of small draft. When the draft is sufficiently small, the minimum problem has another interesting feature.

Assume $4\tau/u^2$ is very small in (2.3.3), and we have an approximation by (A. 9), that is,

$$K_{-1}(u, \tau) \doteq \tau^2 P_{-5}(u, 0). \quad (2.4.1)$$

Thence, we may rewrite (2.3.1) and (2.3.2) as follows,

$$R = \rho g \int_{-1}^1 H(x) \Gamma(x) dx, \quad (2.4.2)$$

where

$$\Gamma(x) = (g^3/\tau) \int_{-1}^1 H(\xi) P_{-5}(g x - \xi, 0) d\xi, \quad (2.4.3)$$

and $H(x)$ equals approximately to the sectional area, or if we consider this problem as the limit of the pressure distribution, it equals to the water head of the lift per unit length. We write its total sum as

$$\int_{-1}^1 H(x) dx = \nabla. \quad (2.4.4)$$

Consider (2.4.3) as the integral equation for the given $\Gamma(x)$, and $H(x)$ may be determined except the function (B. 11) from the result of Appendix, and that this undetermined function contributes nothing to the wave resistance by (2.4.2), because it does not to $\Gamma(x)$.

The waveless distribution can not have a finite displacement¹²⁾, but these can do.

However, the integral of (2.4.3) has not a definite value, if $H(x)$ and its derivatives do not vanish at end point owing to the singularity of P_{-5} .

These conditions are counted four, and the arbitrary constants in (B. 11) four too, so that we may have a unique solution.

For the purpose of calculation, rewrite (2.4.2) to (2.4.4), integrating partially,

$$R = \rho \int_{-1}^1 H''(x) \Gamma^*(x) dx, \quad (2.4.5)$$

$$\Gamma^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H''(\xi) P_{-1}(g \overline{x - \xi}, 0) d\xi, \quad (2.4.6)$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 H''(x) x^2 dx, \quad (2.4.7)$$

with the conditions

$$\left. \begin{aligned} H(\pm 1) &= H'(\pm 1) = 0, \\ \int_{-1}^1 H''(x) dx &= \int_{-1}^1 H''(x) x dx = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.4.8)$$

Assume the expansion

$$H''(-\cos \theta) = \mathcal{V} \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n} c e_{2n}(\theta, q), \quad q = g^2/4, \quad (2.4.9)$$

then, (2.4.7) and (2.4.8) are written

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 H''(x) dx &= \pi \mathcal{V} \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n} A_0^{(2n)} = 0, \\ \int_{-1}^1 H''(x) x^2 dx &= (\pi \mathcal{V}/4) \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n} A_2^{(2n)} = 2\mathcal{V}. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.10)$$

Consider the minimum problem under these conditions, and it is solved in the similar way as the problem C in § 2.2, then we have

$$\Gamma^*(-\cos \theta) = \frac{\lambda_1}{2} + \lambda_2 \cos 2\theta, \quad (2.4.11)$$

$$d_{2n} = (\lambda_1 A_0^{(2n)} + \lambda_2 A_2^{(2n)}) / \mathcal{V} \mu_{2n}, \quad (2.4.12)$$

$$\lambda_1 = -8\mathcal{V} C_{0,2}/(\pi \mathcal{A}), \quad \lambda_2 = 8\mathcal{V} C_{0,0}/(\pi \mathcal{A}), \quad (2.4.13)$$

and

$$R=4\rho\mathcal{V}\lambda_2, \quad \text{or} \quad R/[\rho g\mathcal{V}(\mathcal{V}/8)]=16c_{w2}/g^3, \quad (2.4.14)$$

and that, comparing with (2.2.32), we see

$$d_{2n}=4b_{2n}^*. \quad (2.4.15)$$

Finally, we define the coefficient, which equals approximately to the prismatic coefficient of the ship form,

$$c_p=\mathcal{V}/2H(0), \quad H(0)=\mathcal{V}\sum_{n=0}^{\infty}d_{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}ce_{2n}(\theta, q)\cos\theta d\theta. \quad (2.4.16)$$

These quantities have been studied in detail in § 2.2.1, and values of (2.4.14) and (2.4.16) are shown in the Table.

Consider here only the case when g is very small, then we have

$$\Gamma^*(-\cos\theta)\doteq(4\mathcal{V}/\pi)\cos 2\theta, \quad (2.4.17)$$

$$\left. \begin{aligned} H''(-\cos\theta)\doteq(8\mathcal{V}/\pi)\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}, \\ H(-\cos\theta)\doteq(2\mathcal{V}/\pi)\left(\sin\theta-\frac{1}{3}\sin 3\theta\right), \end{aligned} \right\} \quad (2.4.18)$$

$$R/[\rho g\mathcal{V}(\mathcal{V}/8)]\doteq 128/(\pi g), \quad (2.4.19)$$

and

$$c_p\doteq 3\pi/16. \quad (2.4.20)$$

The value of (2.4.19) might be very high compared with the one of (2.2.1.3). Moreover, it will be seen much higher than that considered in § 2.3, when g is very large, but it should be remembered that the value of (2.4.14) decreases exponentially as g increases, and so it will be smaller than the class like (2.3.1.8) in the range of very low speed.

Chapter 3. Pressure distribution

The velocity potential of the pressure distribution is represented by the one of the doublet in x -direction on the water surface¹²⁾, and therefore the wave resistance has the same form as the one of the preceding chapter.

Thence, the discussion like in § 2.1 might hold generally. We do not repeat here such discussion, and proceed to simpler cases.

3.1 The distribution with large aspect ratio. Consider the case in which the wave length generated is sufficiently longer than the longitudinal length of the distribution, so that we may put as

$$\int p(x, y)e^{-i\kappa x\cos\theta}dx=\rho gH(y), \quad (3.1.1)$$

where $p(x, y)$ means the pressure per unit area.

Then, we have in the same way as in the preceding chapter,

$$R = \rho g \int_{-1}^1 H(y) G(y) dy, \quad (3.1.2)$$

$$G(y) = \frac{g^3}{\pi} \int_{-1}^1 H(\eta) P_{-5}(0, g\sqrt{y-\eta}, 0) d\eta, \quad (3.1.3)$$

where we take the half breadth for unit length.

The minimum value of (3.1.2) will be attained, when

$$G(y) = C: \text{Constant}, \quad (3.1.4)$$

under the conditions

$$\nabla = \int_{-1}^1 H(y) dy, \quad (3.1.5)$$

and

$$H(\pm 1) = 0. \quad (3.1.6)$$

The last condition is the one by which the integral (3.1.3) has a proper meaning.

The integral equation (3.1.4) is solved in **Appendix B**, and has the next solution by (B. 21), that is,

$$H(-\cos \theta) = \frac{2}{g^3 \sin \theta} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2CA_0^{(2n)} + ac_{2n}) ce_{2n}(\theta, -q)/\lambda_{2n}, \quad (3.1.7)$$

where a is an arbitrary constant and $q = (g/4)^2$.

Two constants C and a are determined by (3.1.5) and (3.1.6), that is,

$$\left. \begin{aligned} \nabla &= \frac{\pi}{g^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [4C(A_0^{(2n)})^2 + ac_{2n}A_0^{(2n)}]/\lambda_{2n}, \\ 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2CA_0^{(2n)} + ac_{2n}) ce_{2n}(0, -q)/\lambda_{2n}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.8)$$

Then, the wave resistance is given as

$$R = \rho g \nabla C. \quad (3.1.9)$$

If the condition (3.1.6) would be removed, we have a quasi-waveless solution in the same meaning as in § 2.4.

These are in neat forms mathematically, but not so practical, because the speed range to be considered for such distributions is generally very high. Hence, consider that g is sufficiently small, and we may have an approximate solution by making use of results in **Appendix C**, but it is too cumbersome to calculation.

It is easier to calculate by making use of the next approximation

$$K_0(gy/2) \doteq -\log [7gy/4], \quad \log 7: \text{Euler's constant,}$$

Then, it is a simple calculation to find

$$H(-\cos \theta) \doteq (2V/\pi) \sin \theta, \quad (3.1.10)$$

$$C \doteq gV/2\pi, \quad (3.1.11)$$

and

$$R \doteq (4g/\pi) \rho gV(V/8). \quad (3.1.12)$$

The solution (3.1.10) was obtained by H. Maruo³⁾, and, as he said, the wave resistance is very small compared with the ones in the preceding chapter.

3.2 Symmetrical distribution over a circular disc. The last problem we consider is the case of the distribution symmetrical about the origin over a circular disc with unit radius.

The wave resistance is given as

$$R = \frac{\rho g^4}{\pi} \int_0^\pi |F(g \sec^2 \theta, \theta)|^2 \sec^5 \theta d\theta, \quad (3.2.1)$$

where

$$F(\kappa, \theta) = \frac{1}{\rho g} \iint p(x, y) e^{-i\kappa(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy.$$

Putting $p(x, y) = \rho g H(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, and integrating on the circle, we have¹²⁾

$$F(\kappa, \theta) \equiv F(\kappa) = 2\pi \int_0^1 H(r) J_0(\kappa r) r dr, \quad (3.2.2)$$

Now, if we expand as

$$H\left(\sin \frac{\theta}{2}\right) = \frac{2\pi}{\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \theta), \quad (3.2.3)$$

where P_n means Legendre function, and put this into (3.2.2), we have¹²⁾

$$F(\kappa) = \frac{2\pi}{\kappa} \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{2n+1}(\kappa). \quad (3.2.4)$$

The displacement is calculated as

$$V = 2\pi \int_0^1 H(r) r dr = \pi a_0/2, \quad (3.2.5)$$

and the wave resistance

$$R = \rho \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{n+m} a_n a_m R_{n,m}, \quad (3.2.6)$$

where

$$R_{n,m} = (-1)^{n+m} \frac{g^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{2n+1}(g \sec^2 \theta) J_{2m+1}(g \sec^2 \theta) \sec \theta d\theta. \quad (3.2.7)$$

For a while, we consider as g is very large.

Then, we have an asymptotic expansion for $R_{n,m}$, when its suffixes are not so large, that is,

$$R_{n,m} \doteq \left[1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2g}} \sin \left(2g + \frac{\pi}{4} \right) + \cdots \right]. \quad (3.2.8)$$

The situation is similar to the case § 2.3.1, so that we may have similar conclusions, that is, the lower the pressure near the periphery becomes, the smaller the wave resistance reduces.

Nextly, we introduce the influence function.

$$R = 2\pi \rho g \int_0^1 H(r) G(r) r dr, \quad (3.2.9)$$

$$G(r) = 2g \int_0^1 H(r') K^*(r, r') r' dr', \quad (3.2.10)$$

where

$$K^*(r, r') = g^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(gr \sec^2 \theta) J_0(gr' \sec^2 \theta) \sec^5 \theta d\theta. \quad (3.2.11)$$

This integral does not converge, therefore introducing the next function

$$K(r, r') = \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_1(gr \sec^2 \theta) J_1(gr' \sec^2 \theta) \sec \theta d\theta, \quad (3.2.12)$$

we define it by differentiation as follows,

$$K^*(r, r') = \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \right) \left(\frac{1}{r'} \frac{d}{dr'} r' \right) K(r, r'). \quad (3.2.13)$$

Since

$$J_1(\kappa r) J_1(\kappa r') = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi J_0(\kappa R) \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi e^{i\kappa R \cos u} \cos \varphi d\varphi du,$$

where

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi},$$

and

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{iz \sec^2 \theta} \sec \theta d\theta = e^{\frac{iz}{2}} \int_0^\infty e^{\frac{iz}{2} \cosh 2v} dv = \frac{\pi i}{4} e^{\frac{iz}{2}} H_0^{(1)}(z/2)$$

putting these into (3.2.12), we have

$$K(r, r') = \frac{i}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi e^{\frac{ig}{2} R \cos u} H_0^{(1)}\left(\frac{gR \cos u}{2}\right) \cos \varphi d\varphi du. \quad (3.2.14)$$

The minimum will be attained when

$$G(r) = C: \text{Constant}, \quad (3.2.15)$$

under the condition (3.2.5), and given as (3.1.9).

The integral representation of (3.2.14) is not always convenient, but usefull in the limit when g is very small.

Then, we have the next approximation

$$\frac{i}{4\pi} e^{\frac{ig}{2} R \cos u} H_0^{(1)}\left(\frac{g}{2} R \cos u\right) \doteq \frac{1}{2\pi^2} \log\left(\frac{\gamma}{4} g R \cos u\right), \quad \log \gamma: \text{Euler's Const.},$$

so that $K(r, r')$ may be integrated as

$$\begin{aligned} K(r, r') &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \log\left(\frac{\gamma}{4} g R \cos u\right) \cos \varphi d\varphi du \\ &= \begin{cases} r'/(4r), & \text{for } r > r', \\ r/(4r'), & \text{for } r < r', \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

by the well known integral.

Put the above kernel into (3.2.13) and (3.2.10), and consider (3.2.15), then it is integrated as

$$\frac{1}{2} Cr = \frac{g}{r} \int_0^r H(r') r' dr', \quad (3.2.17)$$

The solution of this integral equation is easily found, that is,

$$H(r) = C/g. \quad (3.2.18)$$

The constant is determined by (3.2.5), namely

$$C \doteq g\mathcal{V}/\pi, \quad (3.2.19)$$

Putting this value into (3.1.9), we have finally

$$R \doteq (4g/\pi) \rho g\mathcal{V}(\mathcal{V}/8). \quad (3.2.20)$$

This is coincident with (3.1.12), so that we may have the same resistance in both cases when the breadth of each distribution is the same. In fact, it is easily found that the distribution (3.2.18) integrated in x equals to the one of (3.1.10).

Conclusion. We have studied various minimum problems of the wave making resistance as far as possible, and had conclusions as follows.

1. In general, the minimum problem of the wave resistance has no solution, so that we may always obtain the distribution with smaller resistance than any one theoretically.
2. Since their magnitude will be of various order, we will be necessary to distinguish them, that is, the singularity distributions which represent some ships should be classified by the magnitude of their wave resistance.
3. In some cases, we have the minimum solution, and these solutions present one of such classes.
4. It will be expected that the numerical solution may be unstable in various cases. This is a natural consequence of the conclusion 1., that is, the difference between any two solutions for one problem might be of the lower order in its numerical value of the wave resistance.

These conclusions will be considered one of the extensions of those in the former paper in which we saw many examples of waveless distributions¹²⁾.

The author thanks to Prof. Maruo for his kind discussions and suggestions especially for the problem of § 2.4.

References

- 1) T. Havelock: Proc. Roy. Soc., vol. 103 (1923).
- 2) E. Hogner: Proc. Roy. Soc., vol. 155 (1938).
- 3) H. Maruo: Jn. Soc. Nav. Arch. of Japan, vol. 81 (1949). [in Japanese]
- 4) G. Weinblum: D.W. Taylor Mod. Bas. Report 758 (1951).
- 5) N.W. McLachlan: "Theory and Application of Mathieu Functions" Oxford (1951).
- 6) Nat. Bur. Stands.: "Tables relating to Mathieu Functions" Columbia Univ., New York (1951).
- 7) J. Dörr: Zeits. für angew. Math. Phys. Bd. 3 (1952).
- 8) G. Weinblum and others: Jahrb. schiffbautech. Gesells. Bd. 51 (1957).
- 9) T. Inui and others: Jn. Soc. Nav. Arch. of Japan, vol. 108 (1960). [in Japanese]
- 10) S. Karp and others: Manus. and Absts. of 3rd. Symp. on Naval Hydromechanics, (1960).
- 11) M. Bessho: Doctoral thesis (Feb. 1961). [in Japanese]
- 12) M. Bessho: Mems. of Defence Academy, Japan, vol. 2 (1962).

Appendix A. Auxiliary functions. We define the functions P_n by the next integrals,

$$\left. \begin{aligned} P_{2n}(x, y, t) &= (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t \sec^2 \theta} \sin(x \sec \theta) \cos(y \sec^2 \theta \sin \theta) \cos^{2n} \theta d\theta, \\ P_{2n+1}(x, y, t) &= (-1)^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t \sec^2 \theta} \cos(x \sec \theta) \cos(y \sec^2 \theta \sin \theta) \cos^{2n+1} \theta d\theta, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 1})$$

where $t > 0$ and n, m : integer.

When the confusion does not occur, we describe as

$$P_n(x, 0, 0) \equiv P_n(x), \quad P_n(x, 0, t) \equiv P_n(x, t).$$

$P_n(x)$ is introduced and discussed by T. H. Havelock¹⁾, and $P_n(x, t)$ by the author¹¹⁾.

Firstly, we have the relations by differentiation

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} P_n &= P_{n-1}, \quad \frac{\partial}{\partial t} P_n = P_{n-2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_n = \frac{\partial}{\partial t} P_n, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) P_n &= 0, \\ \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) P_n &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 2})$$

Nextly we consider only P_{-1} , and then other functions will be derived by the above relations.

We may write from (A. 1) changing the variable

$$P_{-1}(x, y, t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \exp. [-\rho \cosh(2u - i\gamma) + ix \cosh u] du,$$

where $2\rho = \sqrt{t^2 + y^2}$, $\tan \gamma = y/t$ and $x, y, t > 0$.

Since

$$\exp. [-z \cosh \varphi] = I_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n(z) \cosh n\varphi,$$

and

$$I_n(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{v^2}{8z}} J_{2n}(v) dv,$$

putting these into the above representation, we have

$$P_{-1}(x, y, t) = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} e^{-\frac{t}{2} + \rho} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{8\rho}} Y_0(R) dv, \quad (\text{A. 3})$$

where

$$R = \sqrt{x^2 + v^2 - 2xv \cos \frac{\gamma}{2}}.$$

Expanding $Y_0(R)$ by the addition theorem, and integrating term by term, we have two expansions,

$$P_{-1}(x, y, t) = -\frac{\pi}{2} e^{-\frac{t}{2}} \left[I_0(\rho) Y_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\rho) Y_{2n}(x) \cos n\gamma \right], \quad (\text{A. 4})$$

$$P_{-1}(x, y, t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \left[K_0(\rho) J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_n(\rho) J_{2n}(x) \cos n\gamma \right]. \quad (\text{A. 5})$$

It is easily seen that the former does not converge, but gives asymptotic expansion,

when $x^2/(4\sqrt{y^2+t^2})$ is very large.

Thus, if ρ vanishes in any fixed x , we have

$$P_{-1}(x, 0, 0) = -\frac{\pi}{2} Y_0(x), \quad (\text{A. 6})$$

Other limits are

$$P_{-1}(0, 0, t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} K_0(t/2), \quad (\text{A. 7})$$

$$P_{-1}(0, y, 0) = \frac{1}{2} K_0(y/2), \quad (\text{A. 8})$$

When y vanishes, we have another expansions¹¹⁾ from (A. 1), as easily seen,

$$P_n(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} P_{n-2m}(x, 0), \quad (\text{A. 9})^{2)}$$

$$\left. \begin{aligned} P_{2n}(x, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} U_{m-n}(t), \\ P_{2n+1}(x, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} U_{m-n-1}(t), \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 10})$$

where

$$U_m(t) = (-1)^m P_{-2m-1}(0, t), \quad (\text{A. 11})$$

The expansion (A. 9) is also asymptotic.

Appendix B. Integral equations. Consider the integral equation

$$f(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi P_{-1}(g \cos \theta - \cos \vartheta) \varphi(\vartheta) d\vartheta, \quad (\text{I})$$

This is solved by J. Dörr⁷⁾, here we give another method to obtain the same result.

Let us evaluate the next integral

$$I_n(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi P_{-1}(g \cos \vartheta - \cos \vartheta) ce_n(\vartheta, q) d\vartheta, \quad q = g^2/4, \quad (\text{B. 1})$$

where ce_n means Mathieu function, and all notations are followed to the text by McLachlan⁵⁾.

Since

$$P_{-1}(x) = \int_0^\infty \cos(x \cosh u) du,$$

by (A. 1), putting into (B. 1) and using next formulae⁵⁾

$$Ce_{2n}(z, q) = \frac{ce_{2n}(\pi/2, q)}{\pi A_0^{(2n)}} \int_0^\pi \cos(g \cosh z \cos u) ce_{2n}(u, q) du,$$

$$Fey_{2n}(z, q) = -\frac{2ce_{2n}(\pi/2, q)}{\pi A_0^{(2n)}} \int_0^\infty \cos(g \cosh z \cosh u) Ce_{2n}(u, q) du,$$

we have

$$I_{2n}(iz) = -\frac{\pi}{2} \left[\frac{A_0^{(2n)}}{ce_{2n}(\pi/2, q)} \right]^2 Fey_{2n}(z, q), \quad (B. 2)$$

When z is imaginary,

$$\text{Re. } [Fey_{2n}(-i\theta, q)] = \frac{Fey_{2n}(0, q)}{ce_{2n}(0, q)} ce_{2n}(\theta, q),$$

therefore we have

$$I_{2n}(\theta) = \mu_{2n} ce_{2n}(\theta, q), \quad (B. 3)$$

$$\mu_{2n} = -\frac{\pi}{2} \left[\frac{A_0^{(2n)}}{ce_{2n}(\pi/2, q)} \right]^2 \frac{Fey_{2n}(0, q)}{ce_{2n}(0, q)}. \quad (B. 4)^n$$

In the same way, we have

$$\left. \begin{aligned} I_{2n+1}(\theta) &= \mu_{2n+1} ce_{2n+1}(\theta, q), \\ \mu_{2n+1} &= -\frac{\pi}{2} \left[\frac{kA_1^{(2n+1)}}{ce'_{2n+1}(\pi/2, q)} \right]^2 \frac{Fey_{2n+1}(0, q)}{ce_{2n+1}(0, q)}, \end{aligned} \right\} \quad (B. 5)^n$$

In another way, since

$$\mu_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi I_n(\theta, q) ce_n(\theta, q) d\theta,$$

integrating in θ and ϑ , we have

$$\left. \begin{aligned} \mu_{2n} &= 2 \left[\frac{A_0^{(2n)}}{ce_{2n}(\pi/2, q)} \right]^2 \int_0^\infty Ce_{2n}^2(u, q) du, \\ \mu_{2n+1} &= 2 \left[\frac{kA_1^{(2n+1)}}{ce'_{2n+1}(\pi/2, q)} \right]^2 \int_0^\infty Ce_{2n+1}^2(u, q) du. \end{aligned} \right\} \quad (B. 6)$$

The similar integral equation

$$F(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi P_{-5}(g \cos \theta - \cos \vartheta) \psi(\vartheta) d\vartheta, \quad (II)$$

are easily solved by the same method as used by J. Dörr⁷⁾.

Consider the integral

$$I_n^{(4)}(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi P_{-5}(g \cos \theta - \cos \vartheta) ce_n(\vartheta) d\vartheta, \quad (B. 7)$$

then we have by differentiation of (B. 1)

$$I_n^{(4)}(\theta) = \frac{1}{g^4} \left(\frac{d}{dx} \right)^4 I_n(\theta), \quad x = -\cos \theta. \quad (B. 8)$$

Hence, we have formally by (B. 3)

$$I_n^{(4)}(\theta) = \frac{\mu_n}{g^4} \left(\frac{d}{dx} \right)^4 ce_n(\theta, q). \quad (\text{B. 9})$$

However, the solution of (II) does not determined up to the function which becomes to zero by differentiation as (B. 8), that is,

$$a'_0 + a'_1 x + a'_2 x^2 + a'_3 x^3 = a_0 + a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + a_3 \cos 3\theta, \quad (\text{B. 10})$$

where a 's are arbitrary constants.

Since⁵⁾

$$\begin{aligned} 1 &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} A_0^{(2n)} ce_{2n}(\theta, q), \\ \cos 2r\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} ce_{2n}(\theta, q), \quad \text{for } r \geq 1, \\ \cos (2r+1)\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)} ce_{2n+1}(\theta, q), \quad \text{for } r \geq 0, \end{aligned}$$

the undetermined function will be

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_{2n}} (2a_0 A_0^{(2n)} + a_2 A_2^{(2n)}) ce_{2n}(\theta, q) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_{2n+1}} (a_1 A_1^{(2n+1)} + a_3 A_3^{(2n+1)}) ce_{2n+1}(\theta, q), \quad (\text{B. 11})$$

Nextly, consider the integral equation

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi K_0 \left(\frac{g}{2} \frac{\cos \theta - \cos \vartheta}{\cos \theta - \cos \vartheta} \right) \varphi(\vartheta) d\vartheta, \quad (\text{III})$$

In like manner as the former, define the integral

$$J_{2n}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi K_0 \left(\frac{g}{2} \frac{\cos \theta - \cos \vartheta}{\cos \theta - \cos \vartheta} \right) ce_{2n}(\vartheta, -q) d\vartheta, \quad (\text{B. 12})$$

where $q = (g/4)^2 = k^2$.

Since

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos (2k \cos \theta \sinh u) ce_{2n}(\theta, -q) d\theta &= \frac{(-1)^n A_0^{(2n)}}{ce_{2n}(0, q)} Ce_{2n}(u, q), \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos (2k \cosh z \sinh u) Ce_{2n}(u, q) du &= \frac{(-1)^n A_0^{(2n)}}{ce_{2n}(0, q)} Fek_{2n}(z, -q), \end{aligned}$$

and

$$\text{Re. } [Fek(-i\theta, -q)] = \frac{Fek_{2n}(0, -q)}{ce_{2n}(0, -q)} ce_{2n}(\theta, -q),$$

we have

$$J_{2n}(\theta) = \lambda_{2n} c e_{2n}(\theta, -q), \quad (\text{B. 13})$$

with

$$\lambda_{2n} = \frac{\pi}{2} \left[\frac{A_0^{(2n)}}{c e_{2n}(0, q)} \right]^2 \frac{F e k_{2n}(0, -q)}{c e_{2n}(0, -q)}, \quad (\text{B. 14})$$

or

$$\lambda_{2n} = \left[\frac{A_0^{(2n)}}{c e_{2n}(0, q)} \right]^2 \int_0^\infty C e_{2n}^2(u, q) du = \frac{\mu_{2n}}{2} \left[\frac{c e_{2n}(\pi/2, q)}{c e_{2n}(0, q)} \right]^2, \quad (\text{B. 15})$$

Lastly, consider the equation

$$F(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi P_{-5}(0, g y - \eta, 0) \psi(\vartheta) d\vartheta, \quad (\text{IV})$$

and define the integral

$$J_{2n}^*(\theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi P_{-5}(0, g y - \eta, 0) c e_{2n}(\vartheta, -q) d\vartheta, \quad (\text{B. 16})$$

where $y = -\cos \theta$, $\eta = -\cos \vartheta$.

Since

$$\begin{aligned} P_{-5}(0, g y, 0) &= \int_0^\infty \cos \left(\frac{g y}{2} \sinh 2u \right) \cosh^4 u du \\ &= \frac{3}{16} K_0(g y/2) - \frac{1}{16} K_2(g y/2) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{g^2} \frac{d^2}{dy^2} \right) K_0(g y/2). \end{aligned} \quad (\text{B. 17})^{39}$$

Hence, we have

$$\left. \begin{aligned} F(\theta) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{g^2} \frac{d^2}{dy^2} \right) f(\theta), \\ J_{2n}^*(\theta) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{g^2} \frac{d^2}{dy^2} \right) J_{2n}(\theta). \end{aligned} \right\} \quad (\text{B. 18})$$

These are differential equations, so that their solution consists of homogeneous solutions and a special one.

For example, put in (IV)

$$F(\theta) = C: \text{ Constant}, \quad (\text{B. 19})$$

then we have the solution of (B. 18) as follows,

$$f(\theta) = 2C + a \cosh(g y / \sqrt{2}), \quad (\text{B. 20})$$

where a is an arbitrary constant.

Since

$$1 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_0^{(2n)} ce_{2n}(\theta, -q),$$

and

$$\cosh(g \cos \theta / \sqrt{2}) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_{2n} ce_{2n}(\theta, -q),$$

where

$$c_{2n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cosh\left(\frac{g}{\sqrt{2}} \cos \theta\right) ce_{2n}(\theta, -q) d\theta = \frac{A_0^{(2n)}}{ce_{2n}(0, q)} Ce_{2n}(\sinh^{-1} \sqrt{2}, q),$$

we have the solution of (IV) as

$$\psi(\theta) = 2 \sum_{u=0}^{\infty} (-1)^u (2CA_0^{(2u)} + ac_{2u}) ce_{2u}(\theta, -q) / \lambda_{2u},$$

Appendix C. Approximate relations of Mathieu functions. Almost all formulae in the following are found in the texts^{5), 6)}, but some important results not found. That is the reason why we rewrite them.

Firstly, if $q(=k^2)$ is sufficiently small, we have⁵⁾

$$\left. \begin{aligned} ce_0(\theta, q) &\doteq 1/\sqrt{2}, \\ ce_m(\theta, q) &\doteq \cos m\theta, \quad \text{for } m \geq 1, \end{aligned} \right\} \quad (C. 1)$$

$$\left. \begin{aligned} Ce_m(u, q) &\doteq p'_m J_m(ke^u), \\ Fe y_m(u, q) &\doteq p'_m Y_m(ke^u), \end{aligned} \right\} \quad (C. 2)$$

where

$$p'_0 \doteq 1/[\sqrt{2} J_0(k)], \quad p'_m \doteq 1/J_m(k), \quad \text{for } m > 0, \quad (C. 3)$$

and

$$\left. \begin{aligned} ce_0(0, q) &\doteq ce_0(\pi/2, q) \doteq A_0^{(0)} = 1/\sqrt{2}, \\ ce_{2n}(0, q) &\doteq ce_{2n}(\pi/2, q) \doteq 1, \quad A_0^{(2n)} \doteq J_{2n}(k), \quad \text{for } n \geq 1. \end{aligned} \right\} \quad (C. 4)$$

Then, (B. 4) reduces to

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 &\doteq -\log(\gamma k/2), \quad \log \gamma = C: \text{Egler's constant}, \\ \mu_m &\doteq -(\pi/2) J_m(k) Y_m(k) \doteq 1/2m, \quad \text{for } m \geq 1. \end{aligned} \right\} \quad (C. 5)$$

Even if q is negative, these relations are valid, and so we have from (B. 15)

$$\lambda_m \doteq \mu_m/2. \quad (C. 6)$$

Secondly, if q is sufficiently large, but m or n not so large, we have

$$ce_m(\theta, q) \doteq \frac{C_m}{\cos^{m+1} \theta} \left[e^{g \sin \theta} \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)^{2m+1} + e^{-g \sin \theta} \left(\sin \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)^{2m+1} \right], \quad (C. 7)$$

$$Ce_m(z, q) \doteq \frac{C_m}{2^{m-\frac{1}{2}} \sqrt{\cosh z}} \cos \left[g \sinh z - (2m+1) \tan^{-1} \left(\tanh \frac{z}{2} \right) \right], \quad (C. 8)$$

where

$$\left. \begin{aligned} C_{2n} &= (-1)^n 2^{2n-\frac{1}{2}} \frac{ce_{2n}(0, q) ce_{2n}(\pi/2, q)}{\sqrt{\pi k} A_0^{(2n)}}, \\ C_{2n+1} &= (-1)^{n+1} 2^{2n+\frac{1}{2}} \frac{ce_{2n+1}(0, q) ce'_{2n+1}(\pi/2, q)}{k \sqrt{\pi k} A_1^{(2n+1)}}. \end{aligned} \right\} \quad (C. 9)$$

Put θ and z equal to zero in (C. 7) and (C. 8), then we have

$$C_m \doteq 2^{m-\frac{1}{2}} ce_m(0, q), \quad (C. 10)$$

and also from (C. 9)

$$\left. \begin{aligned} ce_{2n}(\pi/2, q) &\doteq (-1)^n \sqrt{\pi k} A_0^{(2n)}, \\ ce'_{2n+1}(\pi/2, q) &\doteq (-1)^{n+1} k \sqrt{\pi k} A_1^{(2n+1)}. \end{aligned} \right\} \quad (C. 11)$$

Nextly, integrating (C. 7), we have

$$\left. \begin{aligned} A_0^{(2n)}/ce_{2n}(0, q) &\doteq e^{2k} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) / [\pi 2^{n+1} (2k)^{n+\frac{1}{2}}], \\ A_1^{(2n+1)}/ce_{2n+1}(0, q) &\doteq e^{2k} \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) / [\pi 2^n (2k)^{n+\frac{1}{2}}]. \end{aligned} \right\} \quad (C. 12)^{6)}$$

Moreover, we have by the recurrence formula⁵⁾

$$A_2^{(2n)} \doteq 2A_0^{(2n)} [-1 + (8n+2)/\sqrt{q} + \dots]. \quad (C. 13)$$

In the neighbourhood of $\theta = \pi/2$, we have the other approximation, that is

$$\left. \begin{aligned} ce_m(\theta, q) &\doteq \frac{(\pi k/2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{m!}} D_m(z), \quad z = 2\sqrt{k} \cos \theta, \\ D_m(z) &= (-1)^m e^{\frac{z^2}{4}} (d/dz)^m e^{-\frac{z^2}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (C. 14)^{6)}$$

where

Hence, we have at $\theta = \pi/2$,

$$\left. \begin{aligned} ce_{2n}(\pi/2, q) &\doteq (-1)^n (\pi k/2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(2n)!} / (2^n n!), \\ ce'_{2n+1}(\pi/2, q) &\doteq (-1)^{n+1} \sqrt{k} (\pi k/2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(2n+1)!} / (2^{n-1} n!). \end{aligned} \right\} \quad (C. 15)$$

Putting these into (C. 11), we have

$$\left. \begin{aligned} A_0^{(2n)} &\doteq \sqrt{(2n)!} / [(2^n n!) (2\pi k)^{\frac{1}{2}}], \\ A_1^{(2n+1)} &\doteq \sqrt{(2n+1)!} / [(2^{n-1} n!) (2\pi k)^{\frac{1}{2}} \sqrt{k}], \end{aligned} \right\} \quad (C. 16)$$

then, from (C. 12)

$$\left. \begin{aligned} ce_{2n}(0, q) &\doteq \frac{2^{3n+1}}{\sqrt{(2n)!}} k^n (2\pi k)^{\frac{1}{2}} e^{-2k}, \\ ce_{2n+1}(0, q) &\doteq \frac{2^{3n+3}}{\sqrt{(2n+1)!}} k^{n+\frac{1}{2}} (2\pi k)^{\frac{1}{2}} e^{-2k}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{C. 17})$$

Lastly, put (C. 8) into (B. 6) and integrate, and we have

$$\mu_m \doteq \frac{1}{2k} [ce_m(0, q)]^2,$$

and by (C. 17) this equals approximately to

$$\mu_{2n} \doteq \frac{2^{4n+2} \sqrt{\pi} (2k)^{2n-\frac{1}{2}}}{(2n)!} e^{-4k}, \quad \mu_{2n+1} \doteq \frac{2^{4n+5} \sqrt{\pi} (2k)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!} e^{-4k}, \quad (\text{C. 18})$$

and also

$$\lambda_{2n} \doteq (2n)! \sqrt{(\pi/2k)} / [2^{2n+2} (n!)^2], \quad (\text{C. 19})$$

An Essay to the Theory of Ship Forms in View of the Wave-Making Resistance Theory

By Masatoshi BESSHO

(Received Feb. 26, 1963)

Abstract

The author tries to verify two leading principles of Taylor's method of the series models experiment in research work of the residual, that is wave making, resistance of ships in view of the wave making resistance theory.

The one is the principle to deform the midship section keeping the sectional area curve unchanged without sacrifice of the wave resistance, and deduced theoretically from the invariant character of the wave resistance.

The other is the one to deform the shape of the sectional area curve with least sacrifice of the wave resistance, so that this one may be the same as to obtain the optimum ship form, and deduced from the solution of the minimum problem of the wave resistance mathematically.

1. Introduction The theory of the wave making resistance has been able to estimate unsatisfactorily the experimental values in their quantity except few cases by now. These defects of our theory, of course, might be caused merely from a mathematical incompleteness to be conquered in near future, but the theory which we have now used in itself has an approximate character so that we may not proceed any farther from some stage.

In spite of these defects, the theory has thrown bright light on characters of the wave making resistance of ships.

In the other hand, the experimental method of ship resistance research had established by D.W. Taylor in his famous book¹⁾, and this has been almost only one guide to the practical problems, but none of its fundamental ideas has been examined by the theory since then.

The object of this paper is a trial to this problem, so that we may have better understandings and expect farther progress in this science.

For this reason and the theoretical difficulties well known, we consider only ships of the so-called displacement type by doublet distributions proportional to the breadth over the longitudinal vertical center plane of the ship. Accordingly, the results we will obtain in the following have merely the relative character and no quantitative basis.

2. Taylor's method of experiment First of all, we must remember the Taylor's idea¹⁾.

He gives five factors affecting the resistance of a ship which has a given displacement and speed, namely,

- 1 length
- 2 area of midship section or prismatic coefficient
- 3 the ratio beam to draft
- 4 the shape of midship section
- 5 the details of shape toward the extremities

The first factor relates to relative importance between frictional and residual resistance, then we assume the length fixed too, because we consider only the residual or wave making resistance.

Now, he states that the third to fifth factor are of minor importance compared with the second factor which is most important as regards the residual resistance.

This idea, saying in more detail the longitudinal distribution of the displacement is dominant factor for the residual resistance, has been a leading principle in practice.

We call this hereafter the sectional area curve hypothesis, because we have not had proper theoretical basis for this idea.

On the ground based upon these experiences, he proposes the method of experiment by the so-called series models. He introduces a parent ship form which might be an optimum practically and derives from it various forms in two ways.

The one is to change the proportion of breadth and draft, but to keep its shape and fullness coefficient, so that the residual resistance may not change so much by the above hypothesis.

The other is inversely to change its shape and fullness coefficient by relocating ordinates of the sectional area curve. This might cause any change of the wave resistance, but it might be done naturally as the way in which the resistance would not change so much as far as possible.

We will call these laws to deform the shape in these ways the deformation principle, then it will be easy to see that these may be deduced from variational principle mathematically. Moreover, the parent form may also be deduced from the variational calculus.

Namely, his method is essentially a variational one, so that we may have some contributions to these problems from the recent two papers^{5), 6)}.

Before treating the variational problems, we will treat them by the classical way in two succeeding paragraphs.

3. Sectional area curve and water line curve Suppose a doublet distribution $\gamma(x, z)$ over a rectangle on the x - z plane, then its wave resistance is given by the formula,

$$R = \frac{4\rho g^4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |F(g \sec^2 \theta, \theta)|^2 \sec^5 \theta d\theta, \quad (3.1)$$

where

$$F(\kappa, \theta) = \int_{-t}^0 \int_{-1}^1 \eta(x, z) e^{\kappa z - i\kappa x \cos \theta} dx dz, \quad (3.2)$$

we assume the velocity and the half length of the distribution as the unit, and ρ is the density of the water, g is the gravity constant in this unit system, then Froude number equals to $1/\sqrt{2g}$, and t is the draft to the half length.

As usually done, we assume hereafter that the doublet strength $\eta(x, z)$ equals to the half breadth of ship considered approximately.

Now, assume the expansion

$$\left. \begin{aligned} \eta(x, z) &= P_0(1+2z/t)\eta_0(x) + P_1(1+2z/t)\eta_1(x) + \dots, \\ \eta_n(x) &= \frac{2}{(2n+1)} \int_{-t}^0 \eta(x, z) P_n(1+2z/t) dz/t, \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

where P_n means Legendre polynomial.

Put it into (3.2), then we have

$$F(\kappa, \theta) = \frac{1}{\kappa} [T_0(\kappa t) F_0(\kappa \cos \theta) + T_1(\kappa t) F_1(\kappa \cos \theta) + \dots], \quad (3.4)$$

where

$$F_n(\kappa \cos \theta) = \int_{-1}^1 \eta_n(x) e^{-i\kappa x \cos \theta} dx, \quad (3.5)$$

and

$$T_n(\kappa t) = \kappa \int_{-t}^0 P_n(1+2z/t) e^{\kappa z} dz = \sqrt{\pi \kappa t} e^{-\frac{\kappa t}{2}} I_{n+\frac{1}{2}}(\kappa t/2), \quad (3.6)$$

because we have the expansion

$$\exp. (pu) = \sqrt{\frac{\pi}{2p}} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) I_{m+\frac{1}{2}}(p) P_m(u),$$

and the orthogonality of Legendre function, where $I_{m+\frac{1}{2}}$ means Bessel function with imaginary argument.

Then, we have the next approximations,

$$T_0(z) \doteq z, \quad T_n(z) \doteq 2(z/2)^{n+1} / [(2n+1)(2n-1)\dots 1], \quad \text{for } z \doteq 0, \quad (3.7)$$

and

$$T_0(z) \doteq T_n(z) \doteq 1, \quad \text{for } z \gg 1 \text{ and } n, \quad (3.8)$$

Now, if the velocity is high and the draft is small, the value of g and gt is small, so that we may neglect T_1 compared with T_0 , and we have an approximation

$$F(\kappa, \theta) \doteq \frac{1}{\kappa} T_0(\kappa t) F_0(\kappa \cos \theta), \quad (3.9)$$

with

$$\left. \begin{aligned} F_0(\kappa \cos \theta) &= \int_{-1}^1 \eta_0(x) e^{-i\kappa x \cos \theta} dx, \\ \eta_0(x) &= \frac{2}{t} \int_{-t}^0 \eta(x, z) dz, \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

and

$$R \doteq \frac{4\rho g^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} T_0^2(gt \sec^2 \theta) |F_0(g \sec \theta)|^2 \sec \theta d\theta. \quad (3.11)$$

Here, the function $\eta_0(x)$ is the sectional area divided by the draft, so that we may say that the wave sesistance at very high speed and of small draft may be determined approximately by the sectional area curve and the draft. Moreover, put (3.7) into (3.11), we have

$$R \doteq \frac{4\rho g^4 t^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |F_0(g \sec \theta)|^2 \sec^5 \theta d\theta, \quad (3.12)$$

This integral diverges unless $\eta_0(x)$ and its derivatives at both end points vanish, but it has no more relation to the draft, and has been proposed by H. Maruo as the so-called slender ship theory⁴⁾.

On the contrary, if the velocity is very low and the draft is sufficiently large, that is, gt is much larger than the unit, making use of (3.8), we have

$$F(\kappa, \theta) \doteq \frac{1}{\kappa} \int_{-1}^1 \eta(x, 0) e^{-i\kappa x \cos \theta} dx \equiv \frac{1}{\kappa} F_w(\kappa \cos \theta), \quad (3.13)$$

because we see

$$\eta(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1) \eta_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(x),$$

and then

$$R \doteq \frac{4\rho g^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |F_w(g \sec \theta)|^2 \sec \theta d\theta, \quad (3.14)$$

Hence, we have the well known character that the wave resistance in low speed is depend on the load water line curve $\eta(x, 0)$ and not on the draft approximately.

In practical cases, the value of gt at the service speed nearly equals to unit, so that we may apply the above approximations in the sense that the speed is high when it is higher than the service and vice versa.

Meanwhile, the former approximation, say the sectional area curve approximation, is very similar to the sectional area curve hypothesis, but its validity is confined itself in the limited speed range as we saw.

4. Pseudo-Taylor series distribution Let us see the other interesting example which is an direct application of the theory.

Consider the distribution

$$\eta(x, z) = \frac{A_0}{2t} (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}, \quad \nu > -1/2, \quad \text{for } 0 > z > -t, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

$$= 0, \quad \text{for } z < -t,$$

where A_0 is the midship sectional area, and ν is a parameter.

This group of curves with various ν values is similar to Taylor's prismatic curves especially in medium prismatic coefficient as we see in Fig. 1, so that we would be able to deduce analogical characters of the wave resistance from this group.

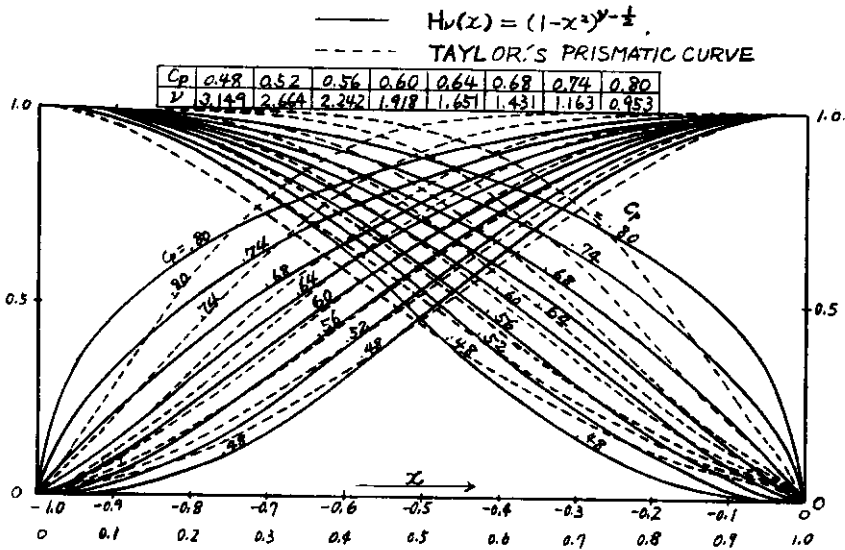


Fig. 1.

Now, put (4.1) in (3.2), we have

$$F(\kappa, \theta) = c_p \frac{A_0 T_0(\kappa t)}{\kappa t} A_\nu(\kappa \cos \theta), \quad (4.2)$$

where

$$A_\nu(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{(x/2)^\nu} J_\nu(x),$$

$$c_p = \sqrt{2} A_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dx = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1/2)}{2\Gamma(\nu+1)}, \quad (4.3)$$

J_ν means Bessel function, ∇ the displacement and c_p the prismatic coefficient.

Then, we have the resistance integral in the next form,

$$R/[\rho g \nabla (\nabla/L^3)] = \frac{8g^3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{gt} T_0(gt \sec^2 \theta) A_\nu(g \sec \theta) \right]^2 \sec \theta d\theta, \quad (4.4)$$

where L means the length of ship.

In the practical cases, the value of g is greater than ν and unit, so that we may have the approximation from the property of Bessel function, that is,

$$A_\nu(x) \doteq \frac{2\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi} (x/2)^{\nu+\frac{1}{2}}} \cos \left(x - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right),$$

using this formula and integrating (4.4) by the stationary phase method, we have

$$R/[\rho g \nabla (\nabla/L^3)] \doteq \frac{8}{\pi} \frac{\Gamma(2\nu+1)}{g^{2\nu-2}} \left[\frac{1-e^{-g^2}}{gt} \right]^2 \left[1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{g} c_p} \sin \left(2g + \frac{\pi}{4} - \nu\pi \right) \right],$$

for $g \gg 1$ and ν , (4.5)

This formula suggests characteristic properties of the wave resistance obtained by the series experiment.

Firstly, using the approximation (3.7) at sufficiently high speed, we see the wave resistance per unit displacement is nearly proportional to the displacement length ratio.

Secondly, the first factor in the above formula has a minimum at some value of ν in any fixed speed, namely, there is an optimum ν , or c_p .

However, its value will be extremely small compared with the experiment, but this seems to be clear if we compare two groups with smaller value of c_p in Fig. 1.

Thirdly, we see from the last factor that the amplitude of hump and hollow in the resistance is nearly proportional to Froude number and the inverse of c_p , and the speed of its hump and hollow depends on the speed and the prismatic coefficient.

5. Deformation principle As considered in paragraph 2, the first deformation principle which is a synonym of the sectional area curve hypothesis should be based upon the invariant character of the wave resistance.

We find it in the author's paper⁵⁾, so that we may follow and apply its results.

Suppose the function $\sigma(x, z)$ defined as the solution of the next differential equation,

$$\eta(x, z) = \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{g} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \sigma(x, z), \quad (5.1)$$

with the boundary values

$$\sigma(x, -t) = \sigma(\pm 1, z) = \sigma(x, 0) = \frac{\partial}{\partial x} \sigma(\pm 1, z) = 0, \quad (5.2)$$

then the distribution does not leave the regular wave system and consequently has not the wave resistance, namely, the function F defined by (3.2) vanishes.

Hence, the wave resistance of some distribution is invariant, however we add to or subtract from it such distribution multiplied by any constant.

We call this procedure the invariant deformation, and let us consider its property.

Suppose $\sigma(x, z)$ which has the boundary conditions (5.2), and represented as the next form,

$$\sigma(x, z) = X(x)T(\zeta), \quad \zeta = (z+t)/t, \quad (5.3)$$

where we may not lose the generality by such partition of the function, and the conditions (5.2) are satisfied, whenever we have

$$X(\pm 1) = (d/dx)X(\pm 1) = T(1) = T(0) = 0. \quad (5.4)$$

It is very easy to pick up functions satisfying the above conditions, but the function η should be confined itself in somewhat narrow class.

Now, integrating (5.1) and using the above conditions, we have simply the sectional area

$$A_s(x) = \int_{-t}^0 \eta(x, z) dz = -\frac{t}{g} X''(x) \int_0^1 T(\zeta) d\zeta, \quad (5.5)$$

and the total displacement

$$\int_{-1}^1 A_s(x) dx = 0, \quad (5.6)$$

namely, we can not change the total displacement by this deformation, but can do the sectional area curve, and that this change of the area will be small if the speed is low and the draft is small.

Nextly, the moment of the sectional area about midship is also

$$\int_{-1}^1 x A_s(x) dx = 0, \quad (5.7)$$

which means that the position of the center of buoyancy can not be removable.

However, the water plane area is given as

$$A_w(z) = \int_{-1}^1 \eta(x, z) dx = -\frac{T'(\zeta)}{t} \int_{-1}^1 X(x) dx, \quad (5.8)$$

and its moment about midship as

$$\int_{-1}^1 x \eta(x, z) dx = -\frac{T'(\zeta)}{t} \int_{-1}^1 x X(x) dx. \quad (5.9)$$

The latter does not always vanish, that is, the position of the center of floatation can be removable.

Now, keeping these properties in mind, let us see examples.

For our purpose, consider here the functions

$$\left. \begin{aligned} X_0(x) &= \xi^4(1-\xi)^2, \\ X_1(x) &= 1-4\xi^3+3\xi^4, \\ X_2(x) &= 1-10\xi^3+15\xi^4-6\xi^5, \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

where

$$\xi = \frac{x-b}{1-b}, \text{ for } x > b, \text{ and } \xi = \frac{-a-x}{1-a}, \text{ for } x < -a,$$

a and b are some positive constants smaller than unit.

Moreover, let $T_1(\zeta)$ be the function of which derivatives are composed of three segments and have the next values

$$\left. \begin{aligned} T_1(0) &= T_1(1) = 0, & T_1'(0) &= 5, \\ T_1'(0.2) &= 1 \text{ and } T_1'(0.4) = T_1'(1) = -1, \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

and also

$$T_2(\zeta) = \zeta(1-\zeta),$$

Example 1) Put $b=0.5$ and let us deform the quarter fore body using X_0 and T_1 at Froude number 0.212. We may deform a ship partly as far as the function as a whole

$$\begin{aligned} \text{M.S. No. 1342} \\ \frac{C_b}{L} &= 0.80 \\ \frac{L}{B} &= 7.2 \\ \frac{B}{d} &= 2.46 \\ \frac{L}{d} &= 17.7 \end{aligned}$$

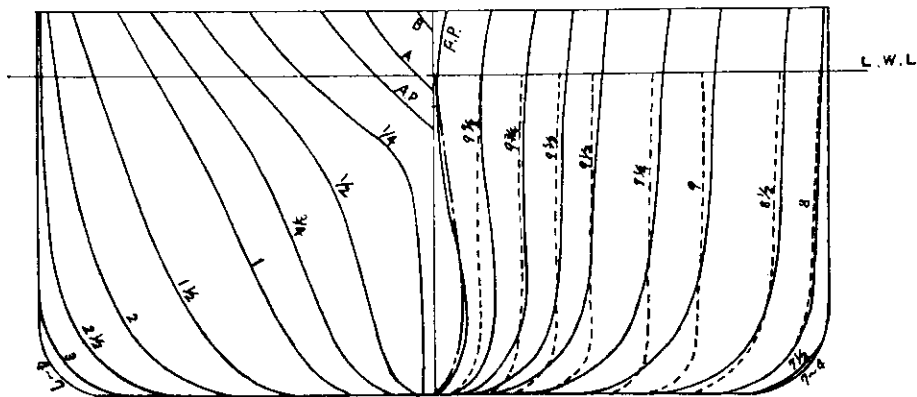


Fig. 2.

preserves the conditions (5.2) or (5.4).

The ship form showed in Fig. 2 by the full lines is of an oil tanker with the block coefficient $0.80^{3)}$, and the object is to deform this bulbous bow to an ordinary. Here, we replace the section form at F. P. to the chain line form which is similar to that in the area and the form and also represented by $T_1(\zeta)$, merely because the full line is too complex to be represented by a simple formula, and we may not loose its essential character by this substitution.

Now, calculate $\eta(x, z)$ by (5.1), and multiply an appropriate constant and add to the off-sets of the full lines as the way in which the area bounded by the chain line at F. P. vanishes, then we have a new body plan represented by the dotted lines which should have the same wave resistance as the full lines form in the range of our approximate theory.

This has an ordinary bow, as we expect, and that extremery U-shape frames and somewhat of Youkevitch form.

In a similar way as this procedure, we may deform a bulbous bow to an ordinary, and inversely we may draw a bulbous bow from the ordinary bow form as far as its area is not so much larger.

Example 2) Put $a=b=0.5$, and let us deform another oil tanker form³⁾ shown by the full lines in Fig. 3, using X_1, T_1 for the fore part and X_2, T_1 for the after part at Froude number 0.184, as the way in which the breadth is broadend about 10%.

The dotted lines give the deformed body plan as the same way as the above, and it

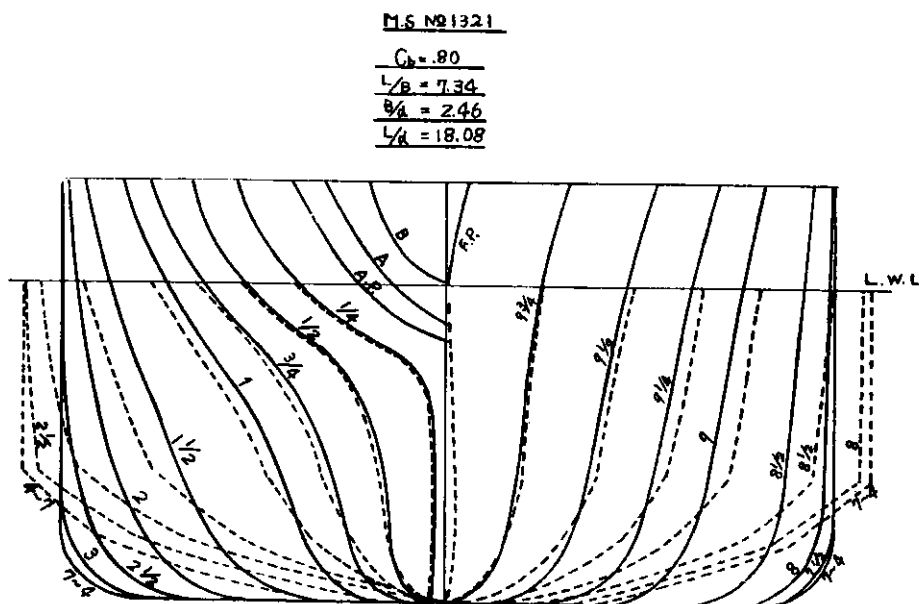


Fig. 3.

resistance increases rapidly, and that this character would not change so much if the draft is not deep but rather very shallow.

Namely, this character of the optimum distribution states directly the second deformation principle.

Other writers²⁾ write also that the difference of two optimum distribution suffices also a minimum condition, so that we may construct easily any other optimum one by simple interpolation or extrapolation.

Hence, the method of deformation used in practice which depends merely on the idea of the fairness of curve or the experiences would find a powerfull orientation from these theory, and that it should be noticed that its theory is the same as the one of the parent form which would be also an optimum.

Now, define the doublet distributions as follows,

$$\left. \begin{aligned} H_i(x) &= \varphi_i(\theta) / \sin \theta, & x &= -\cos \theta, & i &= 0, 1, 2, 3, 4. \\ \varphi_i(\theta) &= \sum_n \alpha_n^{(i)} c e_n(\theta, q), & q &= g^2/4, \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

where

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{2n}^{(0)} &= a_{2n}^*, & \alpha_{2n+1}^{(0)} &= 0, \\ \alpha_{2n}^{(1)} &= 0, & \alpha_{2n+1}^{(1)} &= a_{2n+1}^*, \\ \alpha_{2n}^{(2)} &= b_{2n}^*, & \alpha_{2n+1}^{(2)} &= 0, \\ \alpha_{2n}^{(3)} &= a_{2n}^* + \gamma b_{2n}^*, & \alpha_{2n+1}^{(3)} &= 0, \\ \alpha_{2n}^{(4)} &= \alpha_{2n}^{(3)}, & \alpha_{2n+1}^{(4)} &= -\frac{\varphi_3(0)}{\varphi_1(0)} a_{2n+1}^*, \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

the coefficients a_n^* , b_n^* and γ are defined and given in the former paper⁶⁾, in which a_{2n+1}^* are given here in the table.

For the practical purposes, it is preferable to represent by simple trigonometrical series,

Table

g	Fr.	c_{w_1}	a_1^*	a_3^*	a_5^*	a_7^*
1	0.7071	5.4095	0.61656	0.63268	0.00053	—
2	0.5000	14.670	0.61952	0.16586	0.00595	0.00006
$\sqrt{10}$	0.3976	10.849	0.64548	0.10145	0.01083	0.00032
4	0.3536	5.4129	0.74218	0.04071	0.00835	0.00041
$\sqrt{24}$	0.3195	2.0412	0.88398	0.01451	0.00436	0.00034
6	0.2887	0.50936	1.06089	0.00589	0.00131	0.00018
$\sqrt{50}$	0.2659	0.11541	1.22267	0.00379	0.00030	0.00007
8	0.2500	0.029499	1.35534	0.00310	0.00008	0.00003
$\sqrt{80}$	0.2364	0.0069759	1.48492	0.00266	0.00003	0.00001
10	0.2236	0.0013192	1.62408	0.00229	0.00002	0.00000

then we may rewrite (6.1) as follows,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i(\theta) &= \sum_m a_m^{(i)} \cos m\theta, \\ a_m^{(i)} &= \sum_n \alpha_n^{(i)} A_m^{(n)}, \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

where $A_n^{(n)}$ is the coefficient of $\cos m\theta$ in trigonometrical expansion of Mathieu function of n -th order.

Thence, it is a matter of simple computation to obtain these distributions, and they are shown in figures. Let us see them.

The case $i=0$ H_0 shown in Fig. 5 are optimum at each speed, when the area of these curve, that is approximately the water plane area, is given. Its coefficient of area is given as $\delta \div \sqrt{\pi}$ Fr. in usual speed, namely the lower the smaller this optimum value becomes, or in other words, the finer the smaller the wave resistance in low speed.

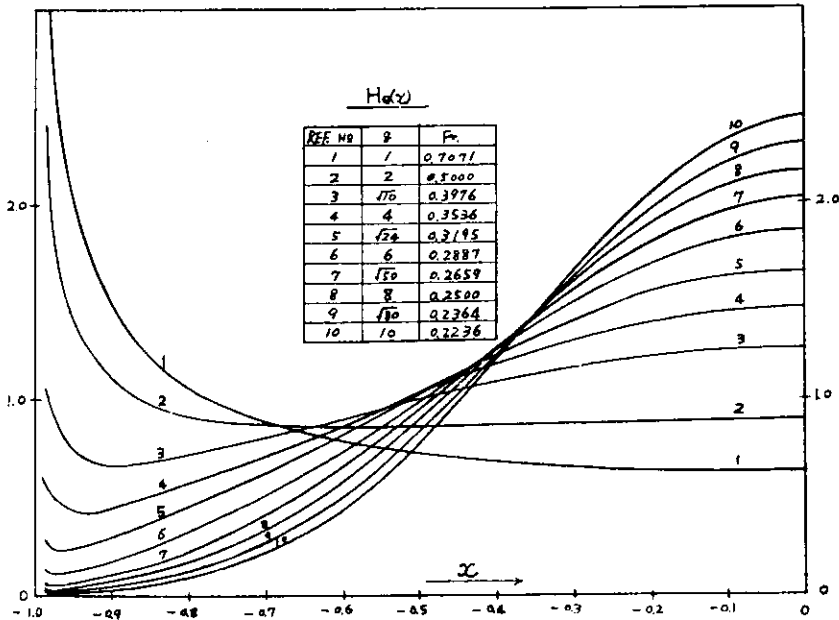


Fig. 5.

The case $i=1$ In general, the optimum distribution should be symmetrical about midship, but if we hope to obtain the distribution not symmetrical, it is optimum to add this anti-symmetrical distribution H_1 shown in Fig. 6.

For example, add this to H_0 so as to vanish at A. P., then we have H_0^* shown in Fig. 12. These curves have fine aft shape except in high speed, and may be efficient for the frictional resistance, but the wave resistance increases nearly twice of the former.

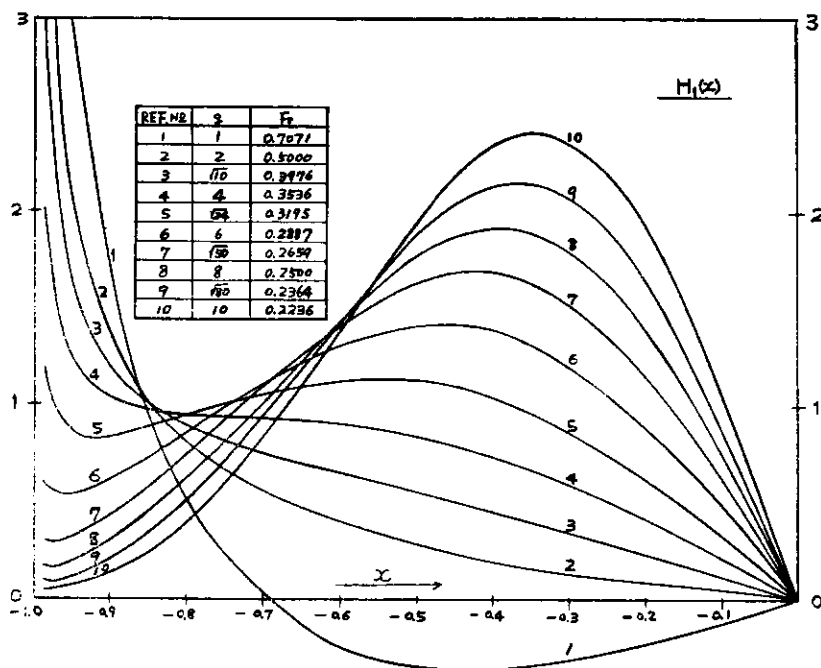


Fig. 6.

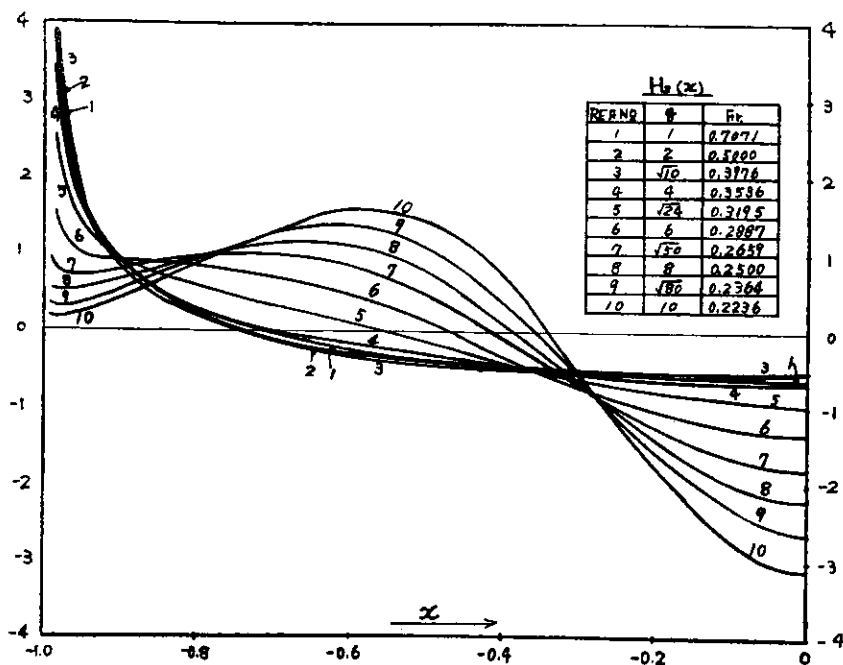


Fig. 7.

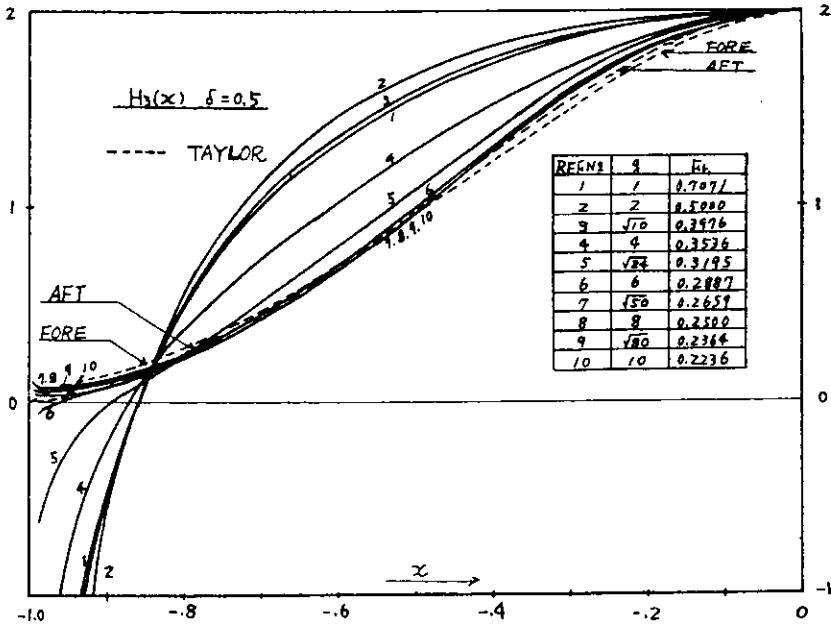


Fig. 8.

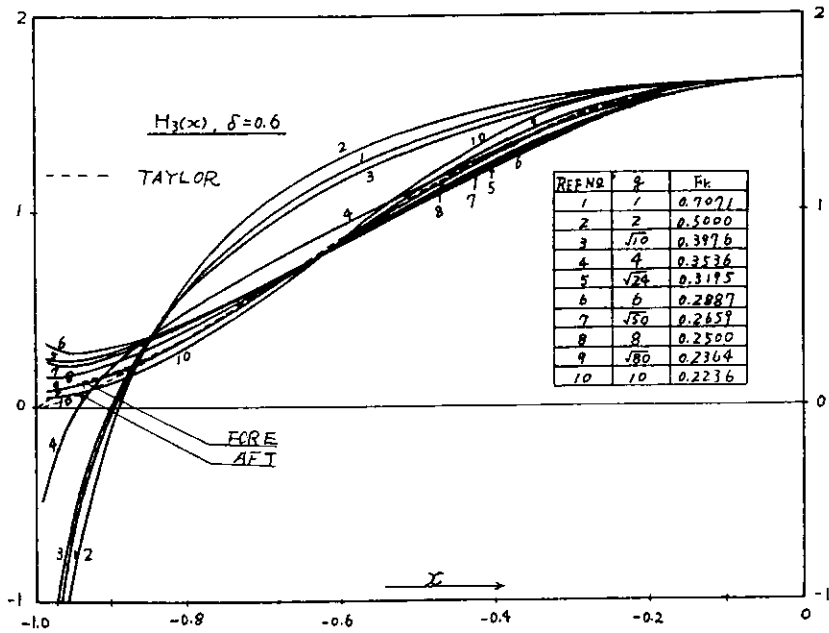


Fig. 9.

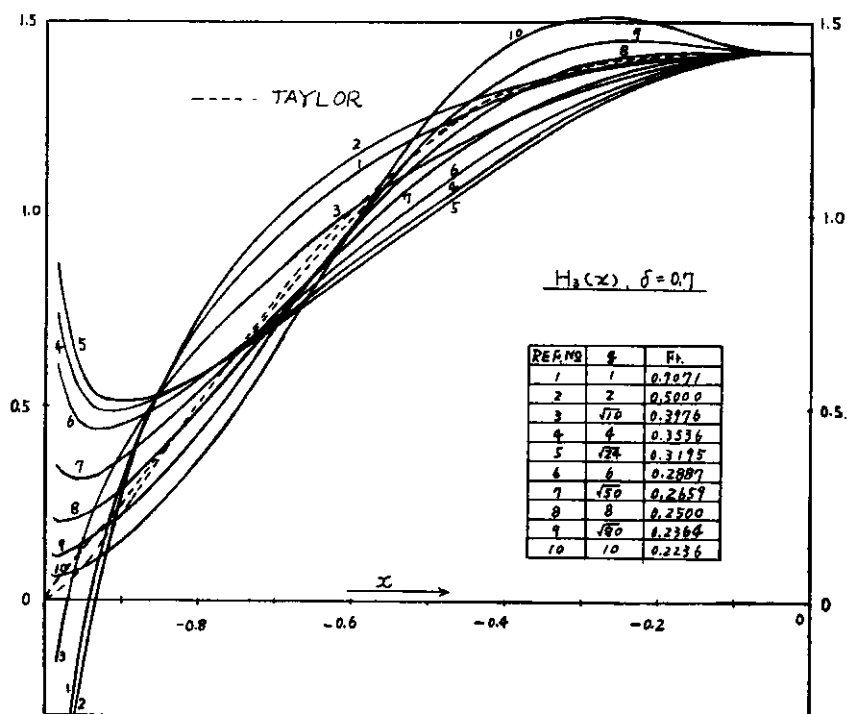


Fig. 10.

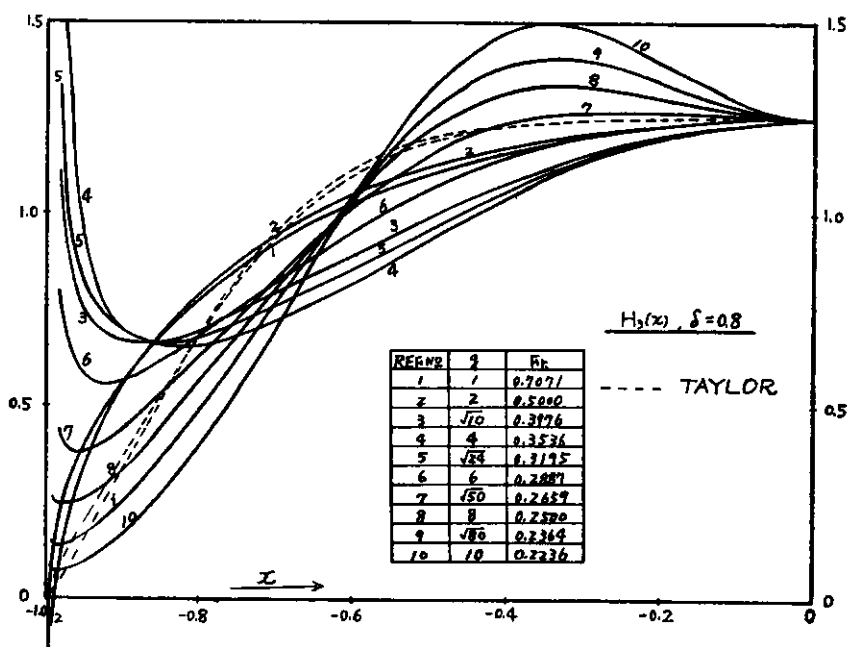


Fig. 11.

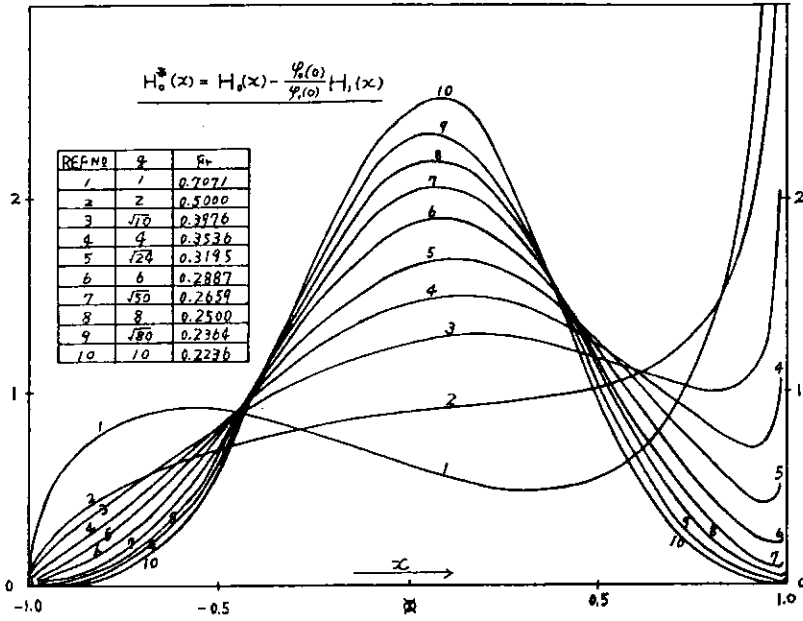


Fig. 12.

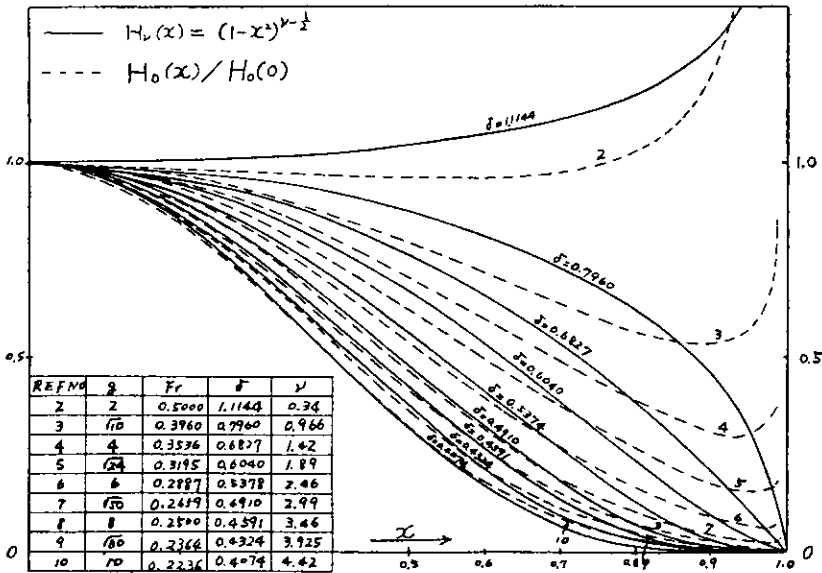


Fig. 13.

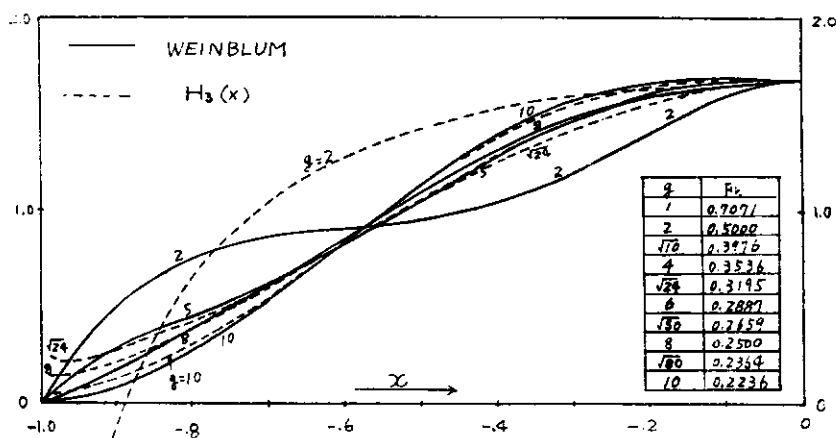


Fig. 14.

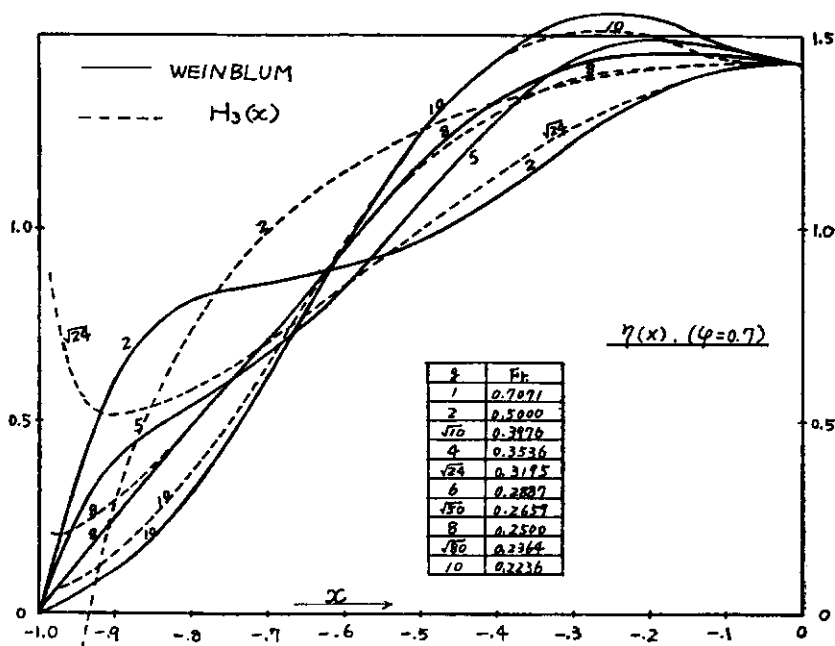


Fig. 15.

The case $i=2$) Since H_0 are too fine to the practical application in low speed, it will be necessary to shift the displacement to the fore and aft from the middle part.

The distributions H_2 shown in Fig. 7 give the mean for this purpose with the minimum sacrifice of the wave resistance.

The case $i=3$) H_3 shown in Fig. 8 to 11 are computed so as to have a given area coefficient by the above method. Here, we see in these figures that some of them take negative value in some portion.

Although the distribution having negative value has no practical application, yet we may also find that such cases are all when the given area coefficient is smaller than the optimum one at the very speed, so that it may be no serious defect. Namely, if we can choose larger δ with smaller resistance, why we will choose smaller δ with larger resistance?

The case $i=4$) Add H_1 to H_3 so as to vanish at A. P., then we have H_4 , but it is found that the distribution thus obtained has almost always negative value but only in the case when the given δ equals nearly to the optimum. Accordingly, we do not shown them at all, but H_0^* already described in Fig. 12.

Now, let us see Fig. 14 and 15, in which we see G. Weinblum's results of similar computation²⁾ compared with our results.

In his computations, the draft is assumed one twentieth of the length, but both distributions are very similar except when his curve has a distinguished swan neck, that is the symptom that taking fuller form the wave resistance may be smaller.

Nextly, we show Taylor's prismatic curves in Fig. 8 to 10 compared with H_3 . These all curves show the similarity between both curves especially in medium fullness coefficient, in such cases we find a remarkable correspondence in spite of our assumptions unreasonable to compare.

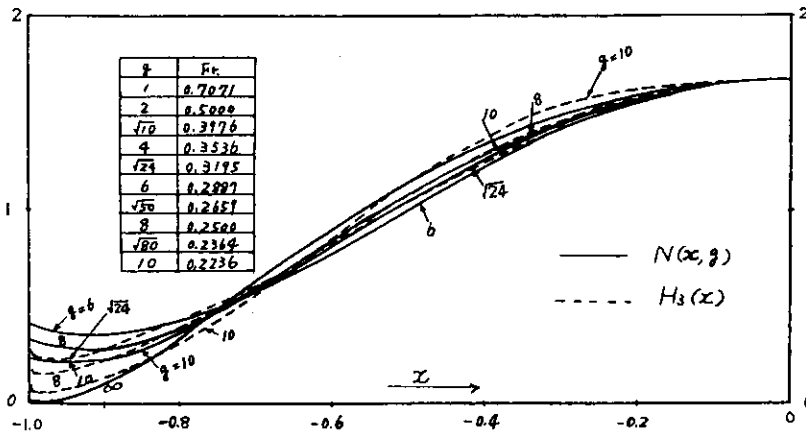


Fig. 16.

Lastly, it is interesting here to remember that the distributions defined in (4.1) are also similar to the optimum ones in very low speed as we see in Fig. 13, and also the distributions defined in the following and shown in Fig. 16, which are similar to the optimum but not corresponding speed, where we should remember that these ones have vanishing transverse wave at the given speed⁵⁾.

$$\eta(x, g) = a_0 \left[M(x) + \frac{1}{g^2} M''(x) \right] + a_2 \left[N(x) + \frac{1}{g^2} N''(x) \right], \quad (6.4)$$

where

$$M(x) = (1-x^2)^2 \quad \text{and} \quad N(x) = x^2(1-x^2)^2, \quad (6.5)$$

and a_0 and a_2 are determined so as to $\eta(0, g) = 1/0.6$.

Thus, we may have a clear concept of the optimum distribution and the second deformation principle, and that may conclude that such properties correspond to the experimental results characteristically in spite of our assumptions.

7. Conclusions We may summary the conclusions as follows.

1) We may say that the principles of Taylor's method of the series model experiment will be founded on the means to deform a ship shape so as to keep its wave resistance invariant or least variation.

2) The first principle to keep the wave resistance invariant, of which Taylor says that the resistance is determined nearly by the midship sectional area, may be verified by the theorem which gives wave free distribution except the shape in the extremities, but this detailed shape affects also to the resistance as Taylor says, so that we may have more deep understanding into the wave resistance including the last factor.

3) The second principle to keep the wave resistance least variation may be deduced from the solution of the minimum problem as a matter of course, so that it will be the same problem as the optimum ship form.

The theory of the optimum doublet distribution may give a simple method to deform the ship shape in such a way, and at the same time to obtain the optimum form, but its results should be understand characteristically because of its approximation with regard to the correspondence between the ship form and the doublet distribution.

Thus, the theory of the wave resistance seems very usefull when we are combining it to the method of the experiment, and we may expect any future progress in this field.

Concluding this short essay, the author must thank with his heart to Prof. Inui, Maruo and Yamasaki for their kind persuations and discussions.

References

- 1) D.W. Taylor: "The speed and power of ships" Washington, 1933.
- 2) G. Weinblum and others: Jahrbuch des schiffbautech. Gesells. Bd. 51, 1957.
- 3) Shipbuilding research association of Japan; Report No. 31, Nov. 1960.
- 4) H. Maruo: Journal of Zosen Kyokai, vol. 112, 1962.
- 5) M. Bessho: Memoirs of Defence Academy, vol. 2, No. 2, 1962, Yokosuka, Japan.
- 6) M. Bessho: Memoirs of Defence Academy, vol. 2, No. 3, 1963, Yokosuka, Japan.

一様流れの中の半没円筒および 垂直平板の造波抵抗について

別所 正利* 水野 俊明**

(昭和 37 年 12 月 18 日受付)

緒 論

造波抵抗の 2 次元問題は 3 次元のそれに比してかなり簡単になる一方、流れの様子は 3 次元問題と非常に異ってきて、とくに我々のように船の問題を目的とする場合は殆んど参考にならないように見えるけれども幾つかの点で興味ある事実を知ることができる。

まず第 1 節では解析的に解ける場合として半没垂直平板を、第 2 節では数値解法の例として半没円筒を扱った。

前者の例では幾ら低速になっても吃水線付近で全く鏡像近似とは異っていることがよく判る。また後の例ではとくに流れの不定さに興味がある。

1. 垂 直 平 板

座標軸の原点を水面にとり、 y 軸を垂直上方に正ととる。流れは x 軸の負の方向に向い、無限上流で単位速度をもつものとする。平板は y 軸上で原点から垂直下方水中に立ち、単位長さをもつものとする。水面条件を満足する速度ポテンシャルは次のように書けよう¹⁾。

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^0 m(\eta) d\eta \left(\frac{1}{z-i\eta} - \frac{1}{z+i\eta} \right) + \frac{\kappa_0}{\pi i} \int_{-1}^0 m(\eta) d\eta S\{\kappa_0(z+i\eta)\} \quad (1.1)$$

ただし

$$S(\kappa_0 z) = \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_0^\infty \frac{e^{-i\kappa z} d\kappa}{\kappa - \kappa_0 - \mu i}, \quad y < 0 \quad (1.2)$$

κ_0 はこの単位系の重力の常数とする。

さて、 S は次の微分方程式を満足する。

$$\left(\frac{d}{dz} + i\kappa_0 \right) S(\kappa_0 z) = -\frac{1}{z} \quad (1.3)$$

そこでこの左辺の演算を (1.1) の両辺に施すと

$$\frac{df}{dz} + i\kappa_0 f = \frac{iz}{\pi} \int_{-1}^0 m(\eta) d\eta \left\{ \frac{\kappa_0}{(\eta^2 + z^2)} - \frac{2}{(\eta^2 + z^2)^2} \right\} \quad (1.4)$$

* 機械工学科教室 助教授

** 機械工学科教室 助手

この実部は水面条件であるから当然水面で消える。然し板の上では消えないで次のような境界条件を満足しなければならない。今流れ関数を ψ とし無限遠で水面下 α の所を流れていた流線が板の上にくると考えれば左辺の実部は

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} - \kappa_0 \psi = -1 + \kappa_0(y + \alpha), \quad 0 > y > 1 \quad (1.5)$$

さて (1.4) を一度積分して右边第1項は部分積分して実部をとると、積分は主値の意味に解して、

$$\begin{aligned} & -\frac{\kappa_0}{2} y^2 + (\kappa_0 \alpha - 1)y - \alpha \\ & = \frac{\kappa_0}{2\pi} \log |1 - y^2| \int_{-1}^0 m d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^0 \left\{ m(\eta) + \kappa_0 \int_{\eta}^0 m d\eta \right\} \frac{\eta d\eta}{\eta^2 - y^2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

この積分方程式はよく知られた形であってその解は、

$$\begin{aligned} m(y) + \kappa_0 \int_y^0 m dy &= -\frac{\kappa_0}{2} \cot \theta \cos 2\theta - \frac{4}{\pi} (1 - \kappa_0 \alpha) \left\{ \cot \theta - \cos \theta \log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right\} \\ &+ \kappa_0 \left(1 - \frac{2\theta}{\pi} - \frac{2}{\pi} \cot \theta \log 2 \right) \int_{-1}^0 m dy + 2\alpha \cot \theta \\ & y = -\cos \theta \end{aligned} \quad (1.7)$$

問題を簡単にするために板の下端で

$$m(-1) = 0 \quad (1.8)$$

とおこう。そうすればこの条件から α は決ってくるがその前に上の式は

$$\begin{aligned} m(y) + \kappa_0 \int_y^0 m dy &= \kappa_0 \sin \theta \cos \theta + \frac{4}{\pi} (1 - \kappa_0 \alpha) \cos \theta \log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \\ &+ \kappa_0 \left(1 - \frac{2}{\pi} \theta \right) \int_{-1}^0 m dy \end{aligned} \quad (1.9)$$

となってこれから m を解き、更に右边第3項の常数を決めれば

$$\left. \begin{aligned} m(-\cos \theta) &= M_1(\theta) + (1 - \kappa_0 \alpha) M_2(\theta), \\ M_1(\theta) &= \kappa_0 \left[C_2(\theta) - \frac{C_2(0)}{C_0(0)} C_0(\theta) \right], \\ M_2(\theta) &= \frac{4}{\pi} \left[C_{-1}(\theta) - \frac{C_{-1}(0)}{C_0(0)} C_0(\theta) \right] \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} C_0(\theta) &= e^{-\kappa_0 \cos \theta} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} e^{\kappa_0 \cos \vartheta} d\vartheta, \\ C_2(\theta) &= -e^{-\kappa_0 \cos \theta} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} e^{\kappa_0 \cos \vartheta} \cos 2\vartheta d\vartheta, \\ C_{-1}(\theta) &= e^{-\kappa_0 \cos \theta} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} e^{\kappa_0 \cos \vartheta} \left\{ \sin \vartheta \log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2} \right) - 1 \right\} d\vartheta \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

α は (1.8) の条件からこれらの解を入れて

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \left[1 - \frac{C_{-1}(0)}{C_0(0)} \log 2 + \frac{\kappa_0 \pi}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{C_2(0)}{C_0(0)} \log 2 \right) \right] \div$$

一様流れの中の半没円筒および垂直平板の造波抵抗について

$$\div \left[1 + \frac{2\kappa_0}{\pi} \left(1 + \frac{C_{-1}(0)}{C_0(0)} \log 2 \right) \right] \quad (1.12)$$

これらの函数は虚変数のベッセル函数等で表現できるが (1.11) の不定積分は面倒なのでここでは数値的に積分し、その結果を表 1, 表 2 に示してある。此等で見ると実際の分布の変動は僅かなものであるから、以下式の上で漸近関係を確かめよう。

さて κ_0 が充分小さければ

$$C_0(0) \approx -\frac{\pi}{2}, \quad C_2(0) \approx C_{-1}(0) \approx 0, \quad \alpha = \frac{2}{\pi} \quad (1.13)$$

$$C_0(\theta) \approx \left(-\frac{\pi}{2} - \theta \right), \quad C_2(\theta) \approx \sin \theta \cos \theta, \quad C_{-1}(\theta) \approx \cos \theta \log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.14)$$

よって

$$m(-\cos \theta) \approx \frac{4}{\pi} \cos \theta \log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.15)$$

となつて、最初に (1.6) 式で κ_0 を省略して得る方程式の解に一致する。

次に κ_0 が充分大きいとすると

$$C_0(0) \approx -C_2(0) \approx -C_{-1}(0) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\kappa_0}}, \quad \alpha \approx \pi(1 + \log 4)/8(1 + \log 2) \quad (1.16)$$

充分深い所では $\kappa_0 \sin \theta \gg 1$ として

$$\begin{aligned} C_0(\theta) &\approx \frac{1}{\kappa_0 \sin \theta}, \quad C_2(\theta) \approx -\frac{\cos 2\theta}{\kappa_0 \sin \theta}, \\ C_{-1}(\theta) &\approx \frac{1}{\kappa_0} \left[\log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \right] \end{aligned} \quad (1.17)$$

よって

$$m(-\cos \theta) \approx 2 \sin \theta - \frac{4}{\pi} \alpha \log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.18)$$

この式の右辺第 1 項は (1.6) で形式的に κ_0 の最高次の項のみをとり出して作った方程式の解で、以下鏡像近似解と呼ぶ。うんと浅い所では (1.17) よりむしろ (1.14) が適当とみなされるから

$$m(-\cos \theta) \approx \kappa_0 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \left[2 - \frac{4}{\pi} \alpha \log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right], \quad \kappa_0 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \ll 1 \quad (1.18)$$

また後続波の波高から造波抵抗 R を出すと

$$R/4\pi^2 \rho g = \kappa_0^2 \{ F(\kappa_0) + (1 - \kappa_0 \alpha) G(\kappa_0) \}^2 \quad (1.20)$$

$$F(\kappa_0) + (1 - \kappa_0 \alpha) G(\kappa_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} m(-\cos \theta) e^{-\kappa_0 \cos \theta} \sin \theta d\theta \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} F(\kappa_0) &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos 2\theta + \frac{C_2(0)}{C_0(0)} \right) (e^{-\kappa_0 \cos \theta} - e^{-2\kappa_0 + \kappa_0 \cos \theta}) d\theta \\ G(\kappa_0) &= \frac{1}{\pi^2 \kappa_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sin \theta \log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - 1 - \frac{C_1(0)}{C_0(0)} \right\} (e^{-\kappa_0 \cos \theta} - e^{-2\kappa_0 + \kappa_0 \cos \theta}) d\theta \end{aligned} \quad (1.22)$$

表 1

	$\theta(\text{indeg})/\kappa_0$	0.25	0.5	0.75	1.0	1.5	2.0	4.0	$100 \times \frac{1}{2 \sin \theta}$
$M_1(\theta) \times 10^3$	90.0	0	0	0	0	0	0	0	2,000
	82.5	33	69	106	145	227	311	650	1,983
	75.0	64	130	197	266	403	536	995	1,932
	60.0	108	214	317	416	602	767	1,225	1,732
	45.0	122	237	344	444	620	766	1,112	1,414
	30.0	104	199	285	363	496	599	823	1,000
	15.0	59	113	161	203	273	326	434	518
	7.5	31	58	82	103	138	164	216	261
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$M_2(\theta) \times 10^3$					$\left[1000 \cos \theta \log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right] \downarrow$				
	90.0	0	0	0	0	0	0	0	0
	82.5	457	460	462	463	463	460	429	453
	75.0	667	664	659	652	635	615	514	668
	60.0	817	793	768	742	689	635	446	838
	45.0	756	719	681	645	575	510	319	794
	30.0	567	530	495	461	399	346	202	606
	15.0	302	279	258	238	202	173	97	326
	7.5	153	141	130	120	101	86	48	166
	0	0	0	0	0	0	0	0	0

表 2

$m(-\cos \theta) \times 1000$								
$\theta(\text{indeg})/\kappa_0$	0.25	0.5	0.75	1.0	1.5	2.0	4.0	
90.0	0	0	0	0	0	0	0	$\alpha(\kappa_0=0)$ $= \frac{2}{\pi}$ $= 0.6366$
82.5	418	385	353	324	272	226	96	
75.0	625	586	549	518	464	422	331	
60.0	795	759	727	703	669	649	649	
45.0	759	731	708	694	676	672	700	
30.0	581	563	549	542	534	535	562	$\alpha(\kappa_0=\infty)$ $= 0.5535$
15.0	314	304	298	295	292	294	309	
7.5	160	155	151	150	149	148	154	
0	0	0	0	0	0	0	0	
1000α	632	626	619	613	602	593	573	
$10^4 \times F(\kappa_0)$	113	195	251	289	327	336	279	
$10^4 \times G(\kappa_0)$	863	740	638	553	421	327	141	
$10^4 \times F_0(\kappa_0)$	2253	2039	1853	1691	1426	1220	740	
$10^4 \times G_0(\kappa_0)$	888	782	692	614	490	396	191	
$10^5 \times R/\rho g$	109	305	487	624	753	747	365	

特に κ_0 が充分大きければ

$$F(\kappa_0) \approx \frac{1}{2\pi\kappa_0}, \quad G(\kappa_0) \approx \frac{1}{\pi^2\kappa_0^2} (\log 2\gamma\kappa_0 - 2) \\ \log \gamma = C = \text{オイラーの常数} \quad (1.23)$$

よって

$$R/\rho g \approx \left\{ 1 + \frac{2}{\pi\kappa_0} (1 - \kappa_0\alpha) (\log 2\gamma\kappa_0 - 2) \right\}^2 \quad (1.24)$$

ただし α は (1.16) で与えられるものとする。

また (1.21) でそれぞれ第1近似値を入れれば

$$\left. \begin{aligned} F_0(\kappa_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta e^{-\kappa_0 \cos \theta} d\theta \xrightarrow{\kappa_0 \gg 1} \frac{1}{\pi\kappa_0} \\ G_0(\kappa_0) &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \log \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) e^{-\kappa_0 \cos \theta} \sin \theta d\theta \xrightarrow{\kappa_0 \gg 1} \frac{2}{\pi^2\kappa_0^2} (\log 2\gamma\kappa_0 - 1) \end{aligned} \right\}$$

此等の値は表2に示す通りである。此等の計算は (1.21) 式により表1の値から数値積分して求めた。

2. 半没円筒

座標は前と同じにとり単位半幅の円筒の中心が原点にあるものとする。速度ポテンシャルは m を実函数として

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{m(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{m(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta} - z} d\bar{\zeta} \\ - \frac{\kappa_0}{\pi i} \int_{-1}^1 m(\bar{\zeta}) d\bar{\zeta} S\{\kappa_0(z - \bar{\zeta})\} \quad (2.1)$$

$\bar{\zeta}$ は ζ の共軛複素数とし、 S は (1.2) 式によるものとする。

円筒の上でこの積分の虚部を求めれば左辺は流れ函数となるから、前節と同じく無限遠の水面下 α の流線が円筒の上にくるものとする

$$2(\sin \theta + \alpha) = m(\theta) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 m(\vartheta) \{1 + K(\theta, \vartheta)\} d\vartheta \quad (2.2)$$

$$x + iy = e^{i\theta}, \quad \bar{z} = e^{-i\theta}, \quad -\pi < \theta < 0$$

$$\left. \begin{aligned} K(\theta, \vartheta) &= 2\kappa_0 \{B(\theta, \vartheta) \cos \vartheta - A(\theta, \vartheta) \sin \vartheta\} \\ S\{\kappa_0(z - \bar{z})\} &= A(\theta, \vartheta) + iB(\theta, \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)^{1)}$$

此等の函数値は文献2等に詳しい表があるが、今必要な部分では間隔が粗いのでここでは展開式から直接計算した。(2.2) を解くに当っては円筒上に 30° おきに7個の点をとって (2.2) の右辺の積分はシンプソン法則で積分して一次方程式とし、これを解いて求めた。 κ_0 が2以上では水面の近くで点が足りないようであるので計算は $\kappa_0=2$ で止めた。また (2.2) の解は左辺 $2 \sin \theta$ のものと 2α のものとはそれぞれ独立に求めて $2 \sin \theta$ に対する解を m 、 $\alpha=1$ に対する解を n と記して表3にその結果を示した。

さて、(2.2) 式において κ_0 が充分小さければ常に

$$K(\theta, \vartheta) \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

となるから

表 3

	$\theta(\text{indeg})$ $/K_0$	0.2	0.8	1.0	1.2	1.5	1.6	2.0
$m(\theta)$	0	7.91	35.00	76.6	131.4	23.9	49.91	16.00
	- 30	6.31	23.95	49.0	77.0	37.1	23.46	5.44
	- 60	5.13	15.64	29.0	39.8	13.9	7.34	- 0.32
	- 90	4.50	8.18	10.9	7.4	- 4.4	- 4.81	- 3.84
	- 120	4.49	0.52	- 8.3	- 26.1	- 21.2	- 15.21	- 5.65
	- 150	5.13	- 7.82	- 31.2	- 67.2	- 39.8	- 25.64	- 5.54
	- 180	6.41	- 14.97	- 57.4	- 123.0	- 69.9	- 43.5	- 5.07
$n(\theta)$	0	- 11.00	- 72.1	- 173.1	- 320.9	- 199.7	- 139.3	- 50.3
	- 30	- 9.99	- 50.7	- 112.1	- 189.5	- 101.8	- 67.0	- 18.8
	- 60	- 9.23	- 34.6	- 67.9	- 99.8	- 40.3	- 23.3	- 2.1
	- 90	- 8.61	- 19.2	- 27.1	- 20.7	9.0	10.5	8.7
	- 120	- 8.14	- 2.3	17.5	62.6	55.7	40.9	15.7
	- 150	- 7.98	17.1	71.9	165.5	108.4	72.8	17.9
	- 180	- 8.46	34.5	134.2	305.9	193.8	126.7	20.0

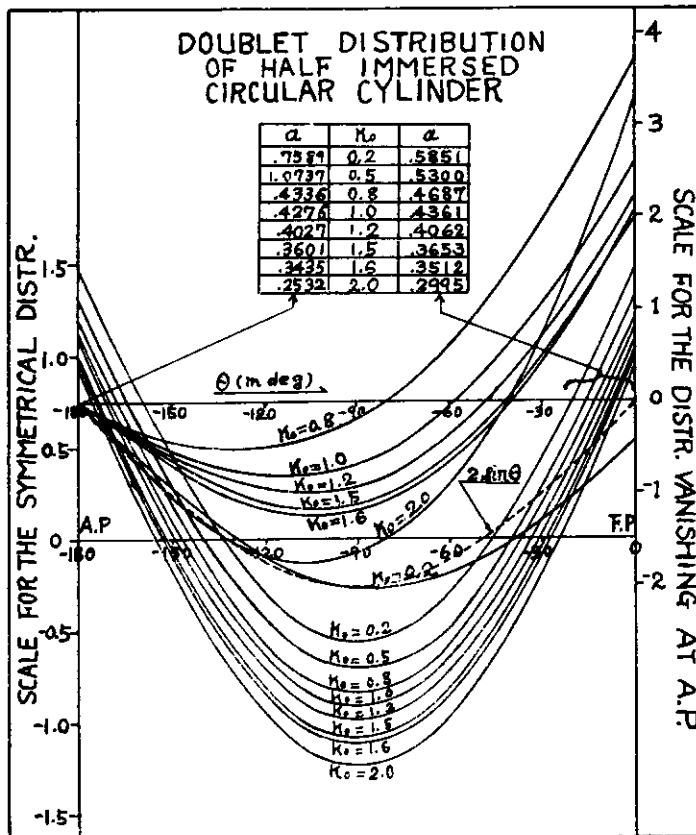


図 1

$$2(\sin \theta + \alpha) = m(\theta) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 m(\vartheta) d\vartheta \quad (2.5)$$

となつてこの解は

$$m(\theta) = 2 \sin \theta + C, \quad \alpha = \frac{2}{\pi} \quad (2.6)$$

となる。ただし C は任意常数である。

κ_0 が充分大きい時で、かつ波長に比して深い所では

$$K(\theta, \vartheta) \rightarrow -1, \quad \kappa_0 |y + \eta| \gg 1 \quad (2.7)$$

然しこの場合水面の近くでは上の関係は成立しないで、後端は波の影響を受ける点を除けば、前節の場合と同じような関係にあるようである。(2.7) が仮に水面迄成立つとすれば

$$m(\theta) = 2 \sin \theta + 2\alpha \quad (2.8)$$

これが鏡像近似解である。

さて α 、あるいは円筒上にどの流線がくるかを決めるのは全く物理的な問題であろうが、ここでは特に後端で m が零になるような場合と、前後端で等しくなる場合を計算して図 1 に示した。表 3 では全く整理のつかない解も夫々綺麗に揃ってきて、特に後者の場合は略々計算誤差の範囲内で確実に対称となり、かつ (2.6) 式の形 (ただし C, α は速度によって変る) で表わされる事が判った。

次に造波抵抗は後続波の波高から

$$R/4\pi^2 \rho g = \kappa_0^2 |F_1(\kappa_0) + iF_2(\kappa_0) + \alpha\{G_1(\kappa_0) + iG_2(\kappa_0)\}|^2 \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} F_1(\kappa_0) + iF_2(\kappa_0) &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^0 m(\zeta) e^{-i\kappa_0 \zeta} d\zeta \\ G_1(\kappa_0) + iG_2(\kappa_0) &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^0 n(\zeta) e^{-i\kappa_0 \zeta} d\zeta \end{aligned} \quad (2.10)$$

(2.9) 式右辺は絶対値の自乗をとるものとする。 α は不定であるから、この中には R を最小にするものがある筈である。それは簡単な計算で

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{(F_1 G_1 + F_2 G_2)}{(G_1^2 + G_2^2)}, \\ \frac{R_{\min}}{4\pi^2 \rho g} &= \kappa_0^2 \frac{(F_1 G_2 - F_2 G_1)^2}{(G_1^2 + G_2^2)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

これは実は対称分布に一致して、抵抗は高速を除けば誤差範囲内で略々零になる。図 2 にはそれらの値を示した。なお、第 1 近似値とは (2.8) 式で $\alpha=0$ として (2.10) を求めて計算した値である。

結 論

以上のような計算によって 2 次元問題に関する知識はかなり増えた訳であ

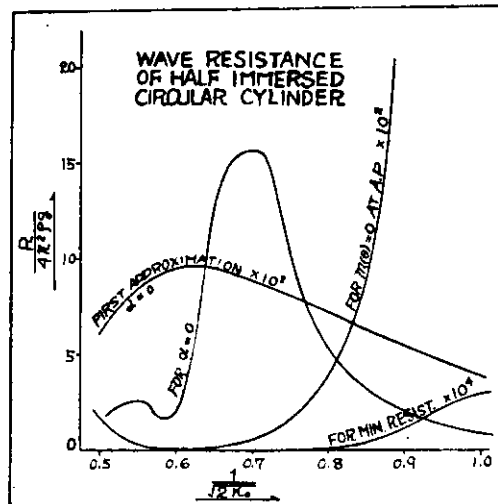


図 2

る。それらを要約すれば、半没体の速度ポテンシャルは

1. 高速で問題なく重力を無視した自由表面条件を満足するようなポテンシャルに近づいてゆく。
2. 低速では、一般に充分深い所では略々鏡像近似解に近づくとし、また特異点を充分離れていれば水面に近くても平均的極限としてそれに近づく。然し一般には水面と物体との交点は特異点であるからこの近くでは複雑な関係になっている。この場合、解は常に任意常数を含んでいるので、その決め方によっても上の関係は幾分変わってくる。
3. 低速の造波抵抗については上記の任意常数のとり方によって種々変わってくる。従って一般には、その中で最も抵抗の小さい値がある。またそのような任意常数がある場合は鏡像解を使った抵抗値よりオーダーが一つ大きくなる。然し垂直平板でそのない場合、少なくとも水面の流線が上流から後流迄連続しているような場合は鏡像近似の抵抗値の $1/4$ となる。

以上の考察は著者の一人の従来の主張³⁾⁴⁾ に一つの理論的基礎を提供するものと考えることができよう。

参 考 文 献

1. T. H. Havelock.; Proc. Roy. Soc. A, Vol. 155, 1936.
2. "Tables of the exponential integral for Complex argument." A. M. S. 51, National Bureau of Standards. 1958.
3. 別所正利 造船協会論文集 105号 (昭和34年)
4. 別所正利 造船協会論文集 106号 (昭和35年)

Abstract

In this paper, the authors deal with two dimensional problems in the theory of the wave making resistance.

At first, the solution for a half immersed vertical plate is given analytically, and shown its character, which differs from that of the mirror image approximation in very low speed.

Secondly, the problem of a half immersed circular cylinder is solved numerically, the arbitrariness in this case is an interesting theme.

This character admits various stream around a cylinder, and one of those has a symmetric doublet distribution and the minimum wave resistance.

無限吃水極小造波抵抗船型について

別 所 正 利*

(昭和 39 年 3 月 18 日受付)

1. 緒 言

船の造波抵抗の極小値問題は近年になって著るしく進展した。

然しながら、これ等の理論では一般に 2 重吹出しで船型を代表させて取扱かっているの
で、解が得られたとしても、それがどのような船型を表わしているかという事はまた大変
面倒な問題である²⁾⁻⁵⁾。

著者は深さ方向に一樣で且つ無限に深い所まで続いている 2 重吹出し分布について、造
波抵抗の極小値問題を解いて、その分布形状を求めた^{3),4)}。この場合もやはり水面の近く
では波の影響があってその形状を求めるのは難かしいが、充分深い所では略々 2 次元的な
流れになっていると考えられる。

そして特に最適速度付近を考えると、そこでは波は非常に小さくなっている筈であるか
ら、その流線に及ぼす影響も、相対的に小さいであろうと考えられる。そこでこの充分深
い所の流線を船型に対する第 1 近似としてもあまり大きい誤ちは犯されないであろう²⁾。

さてこのような流線による近似と従来の 2 重吹出し強さと船の半幅が比例するという近
似（以下線型近似と呼ぶ）との関係についてはよく調べられている¹⁾。

然しそれ等の研究では船首尾のとがった船のみがとり扱かれていて、我々の場合のよ
うに先端に少し丸味があるような場合^{2),5)}は考えられないので、ここに報告する次第であ
る。

2. 流線の計算方法

文献 1) には吹出し分布が与えられた場合の流線を求める簡単な方法が示されているが、
今の場合は残念ながら使えない。

さて直線上に同じく流れに平行な軸を持つ 2 重吹出し分布があるとしよう。

今 x 軸を流れに平行に上流側を正ととり y 軸はそれに直角な右手座標系を考えて 2 重吹
出し分布を $m(x)$ とし、複素速度ポテンシャル $f(z)$, $z=x+iy$, を考えよう。

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{m(\xi)}{z-\xi} d\xi \quad (1)$$

一樣流れのポテンシャルは z であるから、物体の周りの流線は

$$\mathcal{J}\{z+f(z)\}=0 \quad (2)$$

なる積分方程式の解として与えられる。

* 機械工学科助教授

$$\text{今} \quad z = -\cosh t, \quad \xi = -\cos \vartheta \quad (3)$$

のように変数を換えて、次のような展開が出来るとすると

$$m(-\cos \vartheta) = \beta \delta \frac{\varphi(\vartheta)}{\sin \theta} \quad (4)$$

$$\delta_0 = 1/\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (5)$$

$$\varphi(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\vartheta \quad (6)$$

$$a_0 = \frac{z}{\pi} \quad (7)$$

(1) 式は項別積分によって

$$f(-\cosh t) = -\beta \delta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n e^{-nt}}{\sinh t} \quad (8)$$

となる。

ここに β は線型近似では船の幅と長さの比であり δ_0 は面積係数となる。

今 $t = \tau - i\theta$, 即ち,

$$x = -\cosh \tau \cos \theta, \quad y = \sinh \tau \sin \theta \quad (9)$$

において (2) の積分方程式を書きかえると,

$$\sinh \tau = \frac{\beta \delta_0}{\sinh^2 \tau + \sin^2 \theta} \{ \cosh \tau C(\tau, \theta) + \cot \theta \sinh \tau S(\tau, \theta) \} \quad (10)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} C(\tau, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-n\tau} \cos n\theta, \\ S(\tau, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n\tau} \sin n\theta, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

となる。

上式を逐次近似法で解いて流線を求めた。

この時第1近似としては, θ が 0° 及び 180° の付近 (実際には対称な場合だけ考えたので約 $10^\circ \sim 20^\circ$) を除けば線型近似即ち $\tau=0$ として右边を計算して次の近似値を求めた。

次に $\theta=0^\circ$ 付近では $\theta=0^\circ$ の τ を次のようにして求めて, それを第1近似にとった。即ち $\theta=0$ では

$$\sinh \tau_1 = \sqrt[3]{\beta \delta_0 C(0, 0)} \quad (12)$$

$$\sinh \tau_n + 1 = \sqrt[3]{\beta \delta_0 [\cosh \tau_n C(\tau_n, 0) + \sinh \tau_n C(\tau_n, 0)]} \quad (13)$$

但し

$$C'(\tau, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n e^{-n\tau} \cos n\theta \quad (14)$$

3. 結果の表示

計算は次の組合せについて

- i) 制限なしの場合
- ii) $\delta_0 = 0.5$

iii) $\delta_0=0.6$ iv) $\delta_0=0.7$ v) $\delta_0=0.8$

夫々, $\beta=0.1, 0.15, 0.2$ の場合について計算をした。

第1の場合は線型近似面積のみを与えた場合の各速度における最適分布であり, その他の場合は面積係数に頭書のような制限を設けた場合のそれである。但しこの後の場合面積係数そのものを制限したのでは具合が悪いので実際には所望の面積係数になるように縦2次モーメントを制限してある^{2), 5)}。

分布係数 a_n は第1表に示し, 計算結果は整理してオフセットをとり直したものを第2

第1表 $a_n \times 10^5$ (その1) 制限なし

$g \backslash n$	1	2	$\sqrt{10}$	4	$\sqrt{24}$	6	$\sqrt{50}$	8	$\sqrt{80}$	10
0	63662	63662	63661	63662	63661	63662	63663	63662	63662	63662
2	1387	-24378	-53883	-67762	-78015	-86653	-92584	-96488	-99649	-102496
4	34	1648	7570	13647	20743	29333	37053	43100	48625	54119
6	-1	-47	-499	-1327	-2898	-5586	-8853	-12026	-15431	-19321
8	0	1	19	75	244	665	1367	2230	3344	4843
10		0	0	-3	-13	-54	-146	-290	-519	-884
12				0	0	3	11	28	60	121
14						0	0	-1	-6	-13
16								0	0	1

第1表 $a_n \times 10^5$ (その2)

δ_0	$g \backslash n$	$\sqrt{24}$	6	$\sqrt{50}$	8	$\sqrt{80}$	10
0.5	0			63663	63662	63662	63662
	2			-91286	-91319	-92035	-93188
	4			35485	35508	35743	36432
	6			-8202	-8172	-7699	-6964
	8			1227	1183	863	121
	10			-127	-120	-18	268
	12			9	8	-10	-75
	14			0	0	1	11
	16					0	-1
0.6	0	63661	63662	63662	63662	63662	63662
	2	-78740	-77695	-79541	-81651	-83917	-86363
	4	21032	21798	21306	21305	22010	23463
	6	-2968	-3210	-2317	-963	543	2097
	8	252	289	-45	-776	-1782	-3340
	10	-14	-18	43	198	517	1112
	12	0	0	-6	-28	-84	-218
	14			1	3	9	29
	16			0	0	-1	-3

第1表 $a_n \times 10^5$ (その3)

δ_0	g n	$\sqrt{10}$	4	$\sqrt{24}$	6	$\sqrt{50}$	8	$\sqrt{80}$	10
0.7	0	63661	63662	63661	63662	63662	63662	63662	63663
	2	-74298	-64468	-62902	-66631	-71151	-74745	-78123	-81486
	4	4415	13526	14739	12491	11177	11160	12209	14196
	6	- 450	- 1147	- 1460	- 276	1887	4187	6426	8571
	8	33	53	88	- 174	- 954	- 2175	- 3670	- 5814
	10	- 1	- 2	- 4	26	164	425	898	1716
	12	0	0	0	- 2	- 18	- 53	- 138	- 321
	14				0	2	5	25	42
	16					0	0	- 1	- 4
0.8	0	63661	63662	63661	63662	63662	63662	63662	63663
	2	-53132	-48207	-51023	-58335	-64855	-69564	-73774	-77831
	4	7686	12929	10019	5513	3576	3548	4852	7252
	6	- 501	- 254	- 329	1924	5041	8050	10841	13423
	8	18	- 54	- 35	- 522	- 1635	- 3225	- 5086	- 7668
	10	0	4	3	59	255	595	1184	2168
	12		0	0	- 4	- 26	- 73	- 177	- 397
	14				0	2	7	19	52
	16					0	0	- 3	- 5

表(第1図)に示してあるが、小さい図からよみとったのでその精度はあまりよくない。

表中 g とあるのは分布の長さを基準にしたフルード数 F_r と

$$F_r = 1/\sqrt{2g}$$

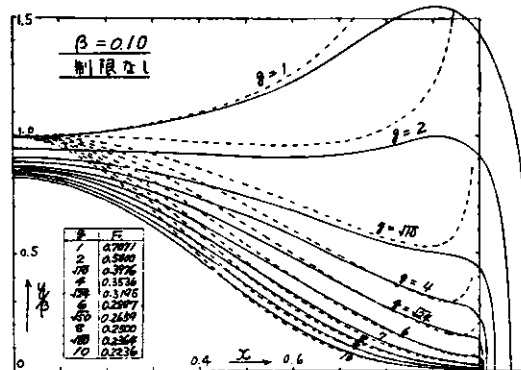
のような関係がある。

第3表(第2図)には実際の流線で囲まれた面積 A の面積係数 δ 及び縦2次モーメント Am^2 等を線型近似量と比較した値を示す。

即ち、

A : 流線で囲まれた面積の 1/4

$\delta = A/(y(0) \times x_{max})$ 面積係数

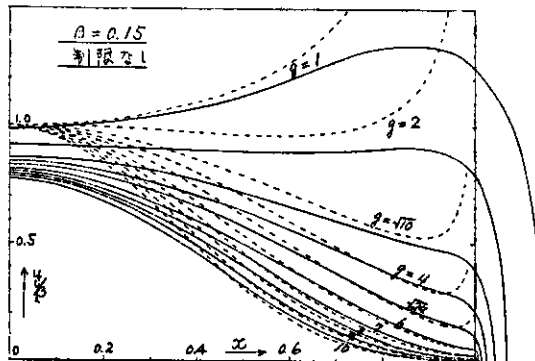


第1図 (その1)

無限吃水極小造波抵抗船型について

第2表 $y/\beta \times 10^3$ (その 1)

	$Fr.$	$\frac{x}{\beta}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	1.0	x_{max}
制限なし $\beta=0.1$	.7071	1	997	1,000	1,020	1,049	1,090	1,150	1,230	1,350	1,480	1,560	1,530	1,439	1.112
	.5000	2	943	940	938	930	920	912	910	923	950	1,000	985	920	1.068
	.3976	$\sqrt{10}$	908	900	880	840	800	745	680	613	550	505	490	440	1.033
	.3536	4	890	880	850	802	735	665	580	480	390	310	290	240	1.008
	.3195	$\sqrt{24}$	875	860	825	767	685	590	484	377	275	189	160	140	1.007
	.2887	6	865	850	800	725	631	517	395	283	180	98	70	63	1.004
	.2659	$\sqrt{50}$	855	840	778	690	581	458	339	212	120	55	34	22	1.002
	.2500	8	845	821	761	668	540	410	278	168	80	31	20	10	1.001
	.2364	$\sqrt{80}$	837	810	745	640	505	368	232	129	55	20	10	5	1.000
	.2236	10	829	800	732	619	469	324	191	94	38	10	5	2	1.000
同上 $\beta=0.15$	.7071	1	987	999	1,014	1,041	1,076	1,128	1,199	1,276	1,347	1,367	1,330	1,249	1.147
	.5000	2	920	913	913	907	899	893	893	893	906	905	876	807	1.091
	.3976	$\sqrt{10}$	867	860	847	814	770	720	665	600	540	487	462	391	1.043
	.3536	4	847	840	813	763	709	645	566	475	392	311	285	219	1.025
	.3195	$\sqrt{24}$	830	820	787	733	597	579	481	380	279	190	159	107	1.013
	.2887	6	813	800	758	682	597	507	401	286	185	103	73	55	1.006
	.2659	$\sqrt{50}$	800	787	739	665	565	453	331	217	125	57	35	26	1.003
	.2500	8	793	773	720	639	529	407	280	172	86	33	20	10	1.001
	.2364	$\sqrt{80}$	783	763	705	613	497	367	237	133	60	20	10	3	1.001
	.2236	10	773	753	683	587	464	327	200	100	40	10	3	2	1.000
制限なし $\beta=0.2$	.7071	1	988	994	1,005	1,030	1,069	1,105	1,157	1,213	1,250	1,243	1,205	1,139	1.189
	.5000	2	894	892	890	882	875	874	863	861	860	841	808	743	1.112
	.3976	$\sqrt{10}$	835	830	813	784	748	700	645	589	530	473	438	370	1.054
	.3536	4	810	805	780	743	693	629	552	472	389	310	270	217	1.031
	.3195	$\sqrt{24}$	793	783	753	705	643	565	478	378	282	195	160	110	1.010
	.2887	6	775	763	728	670	594	500	395	290	190	105	75	62	1.008
	.2659	$\sqrt{50}$	760	745	705	638	555	447	330	223	128	60	38	23	1.003
	.2500	8	745	732	688	613	520	405	283	175	89	35	20	10	1.002
	.2364	$\sqrt{80}$	738	720	674	593	488	365	239	135	60	20	10	5	1.001
	.2236	10	729	710	655	569	460	329	203	102	40	10	5	0	1.000



第1図 (その 2)

第2表 $y/\beta \times 10^3$ (その2)

	$Fr.$	$\frac{x}{g}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	1.0	x_{max}
$\delta_0 =$	.2659	$\sqrt{50}$	854	836	784	700	591	469	343	224	131	64	44	35	1.002
	.5	.2500	8	同上											
	$\beta =$	.2364	$\sqrt{80}$	855	833	787	703	596	471	343	221	124	55	39	1.002
	.1	.2236	10	858	841	792	711	603	479	340	212	112	43	25	1.001
$\delta_0 =$	.2659	$\sqrt{50}$	803	786	741	670	576	463	345	229	136	66	46	33	1.003
	.5	.2500	8	同上											
	$\beta =$	.2364	$\sqrt{80}$	805	788	747	674	583	470	346	226	127	59	35	1.003
	.15	.2236	10	807	787	750	680	587	470	346	220	116	47	27	1.001
$\delta_0 =$	.2659	$\sqrt{50}$	761	745	710	645	559	458	344	235	140	69	45	35	1.003
	.5	.2500	8	同上											
	$\beta =$	.2364	$\sqrt{80}$	763	748	711	650	564	463	345	230	135	61	39	1.003
	.2	.2236	10	765	750	716	655	570	464	345	225	120	45	26	1.002

第2表 $y/\beta \times 10^3$ (その3)

	$Fr.$	$\frac{x}{g}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	1.0	x_{max}
$\delta_0 =$ $\beta =$.1	.3195	$\sqrt{24}$	875	865	825	767	686	588	483	373	270	180	155	150	1.010
	.2887	6	873	862	823	762	680	582	476	368	269	188	175	167	1.011
	.2659	$\sqrt{50}$	878	870	830	771	692	593	485	370	260	167	137	129	1.008
	.2500	8	880	871	838	782	705	606	490	366	244	142	105	89	1.006
	.2364	$\sqrt{80}$	885	878	845	796	720	622	494	354	222	112	73	55	1.004
	.2236	10	890	885	860	814	736	628	490	335	193	84	47	28	1.002
$\delta_0 =$ $\beta =$ 1.5	.3195	$\sqrt{24}$	830	815	785	733	661	575	477	373	273	180	147	125	1.013
	.2887	6	829	813	784	731	657	570	470	371	273	193	168	145	1.015
	.2659	$\sqrt{50}$	831	820	790	739	665	579	479	370	265	172	138	111	1.012
	.2500	8	836	827	797	748	678	589	483	365	249	140	107	73	1.008
	.2364	$\sqrt{80}$	840	833	805	791	690	599	485	357	228	116	77	40	1.005
	.2236	10	847	838	817	773	705	608	483	337	200	85	50	17	1.003
$\delta_0 =$ $\beta =$.2	.3195	$\sqrt{24}$	791	780	755	706	641	562	472	374	275	190	159	120	1.018
	.2887	6	790	778	751	704	639	557	467	370	275	199	169	133	1.019
	.2659	$\sqrt{50}$	793	783	756	709	645	565	472	370	268	175	140	103	1.015
	.2500	8	797	788	762	719	656	575	478	368	253	150	110	75	1.010
	.2364	$\sqrt{80}$	803	793	768	728	668	581	478	358	235	120	80	46	1.007
	.2236	10	817	803	781	740	676	590	478	343	205	90	51	25	1.004

但し $y(0)$ は $x=0$ における半幅で, x_{max} は最大半長

$$k = \frac{\beta \delta_0}{A} - 1: \text{見掛質量係数}$$

δ_0 : 線型近似の面積係数

β : " " の幅長さ比

M : 縦2次モーメントの1/4

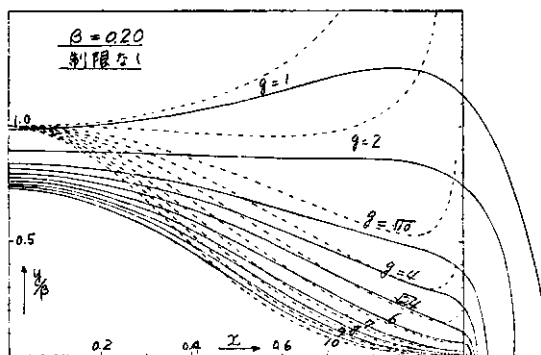
無限吃水極小造波抵抗船型について

第2表 $y/\beta \times 10^3$ (その 4)

	$Fr.$	$\frac{x}{g}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	1.0	x_{max}	
$\delta_0 =$ $\beta =$	.7	.3536	4	891	881	854	807	745	670	584	496	410	350	341	294	1.022
		.3195	$\sqrt{24}$	889	879	850	800	736	659	575	488	410	366	361	332	1.027
		.2887	6	887	885	861	817	758	685	596	500	405	325	303	261	1.019
		.2659	$\sqrt{50}$	901	880	871	840	786	710	616	505	383	267	223	179	1.013
	.1	.2500	8	907	903	890	864	812	739	627	496	355	213	165	101	1.008
		.2364	$\sqrt{80}$	915	914	908	885	836	750	631	480	318	167	114	48	1.005
		.2236	10	925	928	930	913	861	767	629	450	275	121	71	15	1.003
		$\delta_0 =$ $\beta =$	.7	.3536	4	849	838	822	775	718	651	574	491	408	350	329
.3195	$\sqrt{24}$			847	836	814	771	713	643	565	484	408	362	354	313	1.034
.2887	6			853	844	830	791	730	663	583	495	404	324	297	235	1.026
.2659	$\sqrt{50}$			861	854	836	804	753	685	600	497	385	272	223	169	1.018
.15	.2500		8	868	861	850	821	776	705	609	493	357	223	167	115	1.012
	.2364		$\sqrt{80}$	877	876	865	842	796	719	613	476	320	174	117	68	1.007
	.2236		10	888	887	884	864	816	732	609	454	281	129	77	31	1.004
	$\delta_0 =$ $\beta =$		.1	.3536	4	814	805	785	748	696	636	565	486	407	343	315
.3195		$\sqrt{24}$		812	801	780	745	691	626	555	481	410	358	336	290	1.042
.2887		6		818	810	790	755	707	645	572	488	403	325	290	231	1.034
.2659		$\sqrt{50}$		827	818	801	772	733	665	586	491	383	275	225	164	1.023
.2		.2500	8	834	820	805	785	745	681	601	492	360	233	174	111	1.016
		.2364	$\sqrt{80}$	844	838	825	800	755	693	601	471	331	185	125	65	1.007
		.2236	10	855	853	845	821	779	705	593	453	290	139	80	34	1.005

$$m^2 = M/A$$

m_0^2 : 同じ量の線型近似における値



第1図 (その 3)

第2表 $y/\beta \times 10^3$ (その5)

	$Fr.$	$\frac{x}{g}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	1.0	x_{max}
$\delta_0 = .8$ $\beta = .1$	.3976	$\sqrt{10}$	910	899	874	844	799	744	682	598	550	516	510	422	1.033
	.3536	4	901	897	869	829	775	710	644	576	544	550	586	572	1.041
	.3195	$\sqrt{24}$	904	899	874	837	789	730	663	598	550	532	545	483	1.037
	.2887	6	914	910	905	871	835	781	716	628	527	450	425	347	1.026
	.2659	$\sqrt{50}$	926	925	923	909	875	824	742	642	498	366	308	241	1.017
	.2500	8	935	939	945	943	915	856	760	644	455	293	223	159	1.011
	.2364	$\sqrt{80}$	948	950	971	974	947	881	770	603	405	226	150	92	1.007
	.2236	10	962	975	999	1,007	979	898	770	567	350	168	96	35	1.004
$\delta_0 = .8$ $\beta = .15$	.3976	$\sqrt{10}$	866	842	840	820	774	722	661	603	543	495	467	395	1.045
	.3536	4	862	855	833	800	750	695	633	573	535	532	528	493	1.050
	.3195	$\sqrt{24}$	865	862	839	807	763	711	648	589	542	510	500	446	1.055
	.2887	6	878	875	866	839	814	754	681	610	547	466	407	321	1.036
	.2659	$\sqrt{50}$	892	890	879	869	840	789	715	615	493	365	307	223	1.024
	.2500	8	903	905	906	899	870	813	728	607	455	299	229	146	1.016
	.2364	$\sqrt{80}$	917	919	925	921	893	830	733	588	413	239	161	89	1.010
	.2236	10	933	939	953	950	919	845	725	573	359	175	106	37	1.005
$\delta_0 = .8$ $\beta = .2$	.3976	$\sqrt{10}$	836	825	815	785	750	702	645	590	539	481	449	389	1.056
	.3536	4	829	821	805	773	731	678	615	565	540	510	491	451	1.068
	.3195	$\sqrt{24}$	833	820	810	780	740	690	630	580	540	496	470	420	1.062
	.2887	6	846	840	830	810	775	730	671	597	517	435	390	318	1.046
	.2659	$\sqrt{50}$	861	860	850	835	810	753	690	600	487	365	305	218	1.031
	.2500	8	873	872	868	858	829	779	700	593	455	314	234	150	1.021
	.2364	$\sqrt{80}$	888	885	883	876	850	792	705	576	416	247	170	93	1.013
	.2236	10	903	905	910	905	870	805	705	554	377	190	117	50	1.007

第3表 (その1)

制限なし

			$\beta=0.1$			$\beta=0.15$			$\beta=0.2$		
g	δ_0	m_0^2	δ	$k \times 100$	$(m/m_0)^1$	δ	$k \times 100$	$(m/m_0)^2$	δ	$k \times 100$	$(m/m_0)^2$
1	1.606	.5055	1.194	21.3	.867	1.111	25.4	.665	1.071	27.7	.881
2	1.114	.4043	.973	13.7	.913	.945	17.4	.912	.928	20.8	.918
$\sqrt{10}$	.796	.2884	.778	9.1	.983	.781	12.7	.991	.780	16.0	1.003
4	.683	.2339	.701	8.6	.948	.703	11.9	1.042	.711	15.0	1.056
$\sqrt{24}$	.604	.1936	.632	8.4	1.053	.638	12.7	1.077	.661	15.2	1.091
6	.538	.1597	.570	8.7	1.070	.581	13.1	1.107	.596	15.5	1.134
$\sqrt{50}$	.491	.1364	.527	8.8	1.087	.543	12.8	1.122	.554	16.3	1.156
8	.459	.1211	.495	9.6	1.094	.509	13.6	1.133	.525	17.2	1.169
$\sqrt{80}$	.432	.1087	.469	10.1	1.105	.484	14.0	1.145	.497	17.9	1.175
10	.407	.0975	.445	10.3	1.106	.459	14.7	1.152	.472	18.4	1.186

第3表 (その2)

g	δ_0	m_0^2	$\beta=0.1$			$\beta=0.15$			$\beta=0.2$		
			δ	$k \times 100$	$(m/m_0)^2$	δ	$k \times 100$	$(m/m_0)^2$	δ	$k \times 100$	$(m/m_0)^2$
8	0.5	.1414	.537	8.9	1.087	.550	12.8	1.120	.564	16.2	1.153
$\sqrt{80}$	"	.1386	.534	9.3	1.087	.549	12.8	1.118	.562	16.3	1.155
10	"	.1341	.532	9.4	1.032	.546	13.4	1.124	.559	16.8	1.151
$\sqrt{24}$	0.6	.1908	.629	8.1	1.064	.638	11.3	1.082	.661	14.7	1.112
6	"	.1949	.649	8.4	1.056	.638	11.8	1.076	.649	14.9	1.099
$\sqrt{50}$	"	.1877	.633	8.3	1.057	.638	11.9	1.082	.647	15.2	1.105
8	"	.1794	.625	8.5	1.059	.634	12.3	1.084	.646	15.5	1.112
$\sqrt{80}$	"	.1705	.621	8.7	1.063	.635	11.9	1.085	.638	16.4	1.117
10	"	.1609	.615	9.4	1.065	.621	11.4	1.092	.625	17.0	1.120

第3表 (その3)

g	δ_0	m_0^2	$\beta=0.1$			$\beta=0.15$			$\beta=0.2$		
			δ	$k \times 100$	$(m/m_0)^2$	δ	$k \times 100$	$(m/m_0)^2$	δ	$k \times 100$	$(m/m_0)^2$
4	0.7	.2468	.708	8.5	1.009	.715	11.9	1.028	.720	15.1	1.041
$\sqrt{24}$	"	.2530	.706	8.7	1.004	.715	11.9	1.023	.719	15.0	1.037
6	"	.2383	.714	8.5	1.018	.716	11.7	1.034	.719	15.1	1.054
$\sqrt{50}$	"	.2206	.703	9.0	1.036	.711	12.3	1.053	.716	15.7	1.072
8	"	.2065	.703	8.9	1.039	.706	12.8	1.065	.713	16.4	1.087
$\sqrt{80}$	"	.1932	.695	9.6	1.046	.698	13.5	1.070	.696	17.3	1.100
10	"	.1800	.685	10.1	1.049	.687	14.3	1.078	.690	18.1	1.103
$\sqrt{10}$	0.8	.2914	.776	9.7	.975	.800	14.9	.951	.781	16.0	1.004
4	"	.3106	.777	9.7	.961	.778	13.1	.969	.778	16.2	.980
$\sqrt{24}$	"	.2996	.777	9.9	.960	.780	12.9	.980	.779	16.1	.996
6	"	.2709	.782	9.1	.994	.785	12.0	1.015	.780	15.9	1.022
$\sqrt{50}$	"	.2453	.779	9.1	1.019	.774	13.2	1.032	.773	16.7	1.046
8	"	.2269	.775	9.2	1.033	.767	13.6	1.045	.764	17.5	1.065
$\sqrt{80}$	"	.2103	.760	10.3	1.037	.754	14.6	1.057	.750	18.7	1.078
10	"	.1944	.747	10.8	1.039	.741	15.2	1.069	.738	19.3	1.095

4. 考 察

第1図には点線で線型近似値即ち分布の強さをも同時に描いてあるが、これからも判る通り大体の傾向はあまり変わらないで従来云われている通りの傾向を有している。

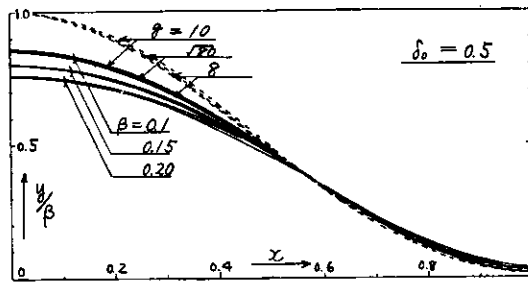
細かく見て行くと

a) 面積係数

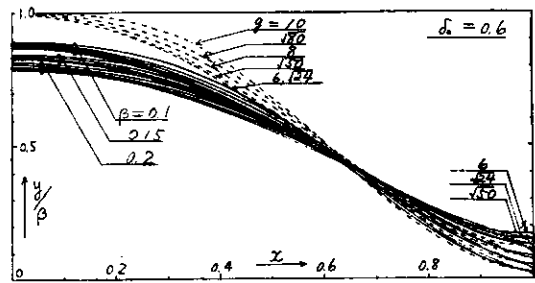
δ と δ_0 は、 β が変わってもあまり変らず δ_0 が大きい所では δ の方が δ_0 より小さく、 δ_0 の小さい所では逆になっている。(第2図その1)

b) 見掛質量係数

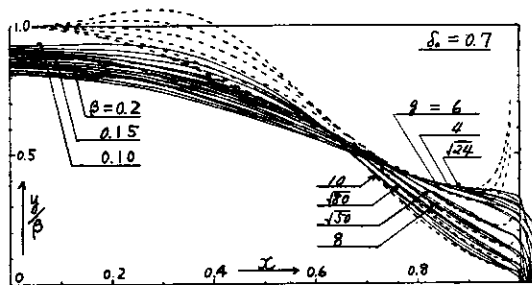
前節の終りで定義した k は長さ方向の見掛質量係数であって楕円柱の場合は幅長さ比に等しいものである。



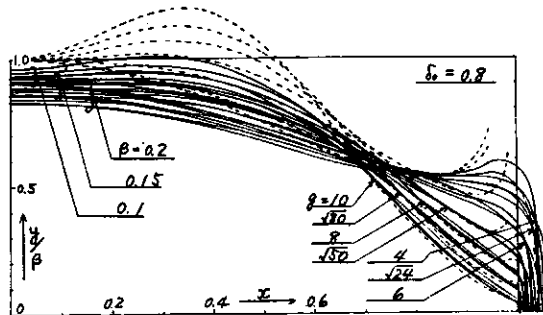
第1図 (その 4)



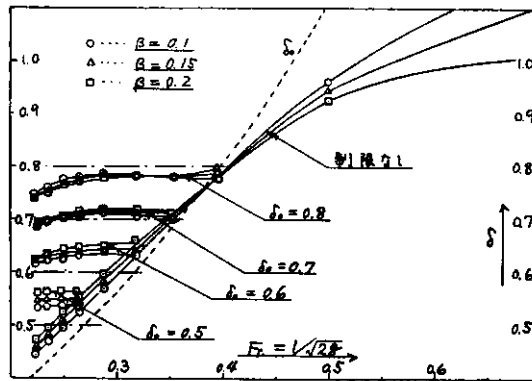
第1図 (その 5)



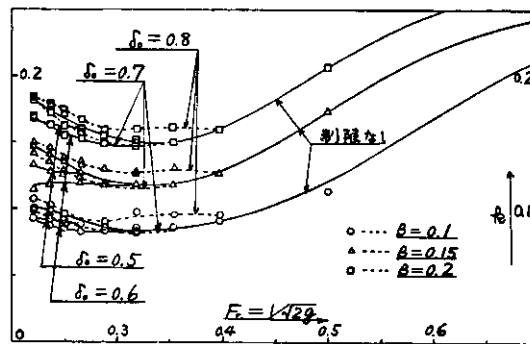
第1図 (その 6)



第1図 (その 7)



第2図 (その 1)

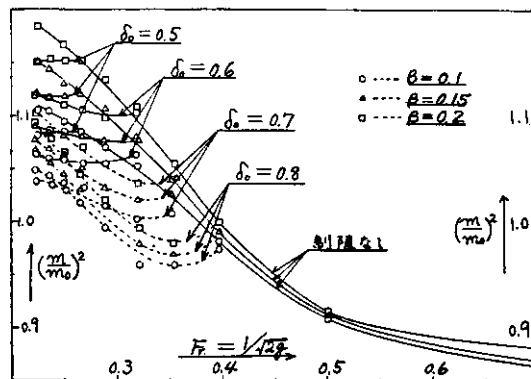


第2図 (その 2)

実際 δ_0 の如何に係わらず大体その程度である。(第2図その 2)

c) x_{max} .

我々の分布が従来考えられていたものと違う点そしてまた面倒な点は分布が両端で無限大になる事であるが、実際には図に見られる通り、物体は $|x| < 1$ の外側に僅かに出る曲線を描く。



第2図 (その 3)

この外側に出る量は(12)式による近似値で割合正しく与えられる。(第2表参照)

d) $(m/m_0)^2$

δ_0 の大きい所では大体1乃至それよりも小さいが δ_0 の小さい所では略々 $1+k$ と同程度の値である。(第2図その3)

5. 結 言

以上のかなりの量の流線計算の結果をまとめて見ると、

- i) δ_0 があまり大きくなければ最大幅は線型近似より略々幅長さ比位小さくなる。
- ii) 端近くでは大体線型近似に等しい。
- iii) 最大長さの点は略々(12)式から求められる。
- iv) 面積係数は δ_0 によって異なるけれどもあまり大きくは変らない。

と云うような特徴が見られるので、実際上は一々流線を計算して見なくても以上の性質から大体の形状は描けるように思われる。

特に最初にのべたようにこのようにして流線を求めて見ても、元々近似的な取扱いでしかないし、特に船尾については応用上この儘にはしておけないのであろうから厳密に考えるのもあまり意味がない事であろうが、データブックとでも云うような意味で計算して見たものである。

それにまた線型近似で先端の部分のみを丸めた船型での実験でも定性的には理論と大体合うと云うような事もある⁵⁾ので、この点は充分検討の余地があろう。

なお流線の計算は殆んどすべて日本鋼管株式会社造船営業部の方々に見て頂いた。

ここに銘記して謝意を表します。

参 考 文 献

- (1) 乾 崇夫: 造船協会論文集 86号(昭和27年12月)
- (2) S. Karp and others: Manuscript and Abstracts of 3rd Symposium on Naval Hydro-mechanics (1960)
- (3) 別所正利: 防大欧文紀要, 第2巻第4号(1963)
- (4) 別所正利: “無限吃水船の極小造波抵抗について”, 昭和38年夏, ミシガン大学造波抵抗理論セミナーにて発表
- (5) 丸尾孟他: 造船協会論文集 14号(昭和38年)

“On Ship Shapes with The Minimum Wave-making Resistance”

Masatoshi BESSHO*

Abstract

The author gives many examples of the two-dimensional stream line around the doublet distribution which is determined so as to make its wave-making resistance minimum when it extends draftwise uniformly to the infinite depth.

Since they may represent such ship shape at sufficient depth, they will be usefull to some extent when we try to apply the theory of the minimum wave-making resistance to the practical problem.

* Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering.

船の粘性抵抗に及ぼす形状の影響について

別 所 正 利*

(昭和 39 年 9 月 30 日受付)

1. 緒 言

田中は粘性抵抗の形状影響に関する笹島などとの広汎な考察と研究¹⁾²⁾を基として、さらにその問題を数学的に簡単化して、解決を求めている⁴⁾⁵⁾。

現在の段階ではすぐこの結果を 3 次元の船体に応用する訳には行かないようであるが、少なくとも 2 次元では境界層の内側と外側のポテンシャル流れとの間の関係について従来概念的に考えられていた関係を積極的に肯定して、そこからできるだけ概念的に簡単な数学的模型を考えて、船型要素およびおおよびポテンシャル流れから粘性抵抗の形状影響に関する知識を引き出してそれが実験結果とよく適合することを見出した。

従来の境界層理論では先ず面倒な境界層の計算から始めなければならないことおよびそのはく離後の流れに関する決定的な知識の欠除によつて、船型要素と粘性抵抗に関連づけることは絶望的に見えるのに反し、氏の理論では極めて易さしい問題に還元されて来る。

勿論この抽象化によって問題の本質は、幾分変つて来るであろうが、それは元来実験的に、検証されなければならないことである。しかしながら現在の段階ではわれわれは実験的にもほとんどこの問題を解決すべき手段を持ち合せないであるから、先ずこのような考えからどのような結論が引きだされるかを、検討して見ることは現在許される只一つの方法であるとも言える。

このような意味で著者は田中の試みに全面的に共感を覚えるものである。ここでは粘性抵抗そのものに関しては全く触れないで彼の得た結果からさらに数式の上で一、二考察を進めて見た次第である。

2. 田中の理論の要点⁴⁾⁵⁾

著者の読み得た限りでは氏の理論的考察の要点は、

- a. 摩擦抵抗の形状影響係数はレイノルズ数に関係しない（横方向の曲率の影響については、普通の船では略々考えなくともよいという結論も含めて）と考えることができ、これは略々船体周囲の速度増加率の自乗平均値で表わされるので境界層理論が発達する前からの古い考えに一致する。
- b. 船体上の圧力は境界層の外側の圧力に等しいので第 1 近似として完全流体のポテンシャル流れを考えてその丁度境界層の外側の点の圧力を船体表面上の圧力に等しいと

* 機械工学教室 助教授

置いてやれば境界層の存在による圧力抵抗が略々推定でき、したがってそれは略々境界層の厚さに比例する。ということであって、この2点を総合して、粘性に起因する抵抗は、結局相当平板の抵抗に略々比例的な関係を持ち、レイノルズ数には無関係となる。

この関係は最近では田宮¹¹⁾、ヒューズらの提唱することと一致する訳でこれをさらに、一歩進めるものと、見る事ができよう。

3. 摩擦抵抗の形状影響

前節 a) 項の問題は氏によれば

$$K_f = \int_0^1 \left(\frac{U^2}{U_\infty^2} - 1 \right) d\left(\frac{x}{l}\right) \dots\dots\dots (3. 1)^{11)}$$

此处で K_f は相当平板の摩擦抵抗に対する形状影響係数、 U_∞ は船速、 U は船体表面のポテンシャル流れ速度、 l は船長である。これを3次元に拡張するのは容易であろう。今 S を表面積、 dS を面積要素、 q を U_∞ を単位として測つた流速とすると、細長い物体では、

$$K_f = \frac{1}{S} \iint_S (q^2 - 1) dS \dots\dots\dots (3. 2)$$

さてパーグマン、シフター¹⁰⁾によれば、物体が S の上に立てた法線上に $\Delta\nu$ だけふくらんだ時の見掛質量の増加分 Δw は

$$\Delta w = \iint_S (q^2 - 1) \Delta\nu dS \dots\dots\dots (3. 3)$$

である。

今一様に $\Delta\nu$ だけふくらんだとしよう。

この物体の体積を V 、見掛質量係数を k とすると、密度を 1 として $w = kV$ であるから、

$$\frac{\Delta w}{\Delta\nu} = V \frac{\Delta k}{\Delta\nu} + kS,$$

となって (3. 2), (3. 3) から

$$K_f = \frac{1}{S} \frac{\Delta w}{\Delta\nu} = k + \frac{V}{S} \frac{\Delta k}{\Delta\nu} \dots\dots\dots (3. 4)$$

が得られる。

例 1) 2次元の楕円柱では $k = \frac{B}{L}, \frac{V}{S} \doteq \frac{\pi}{4} \frac{B}{\alpha}$

(但し $S = \alpha L$ とする) であるから L も、 B も $\Delta\nu$ だけ大きくなるとすると、

$$\frac{\Delta k}{\Delta\nu} = \frac{1}{\Delta\nu} d\left(\frac{B}{L}\right) = \left(\frac{1}{L} - \frac{B}{L^2}\right)$$

よって

$$K_f = \frac{B}{L} \left(1 + \frac{\pi}{4\alpha}\right) \left(1 - \frac{B}{L}\right) \doteq 1.6 \sim 1.7 \left(\frac{B}{L}\right)$$

$$\text{for } 0.2 > \frac{B}{L} > 0.1$$

例 2) 3次元回転楕円法では $\frac{B}{L} = \beta$ とすると,

$$k = \frac{\alpha_0}{2 - \alpha_0}, \alpha_0 = \frac{2(1 - e^2) \left(\frac{1}{2} \log \frac{1+e}{1-e} - e \right)}{e^3},$$

$$e = \sqrt{1 - \beta^2},$$

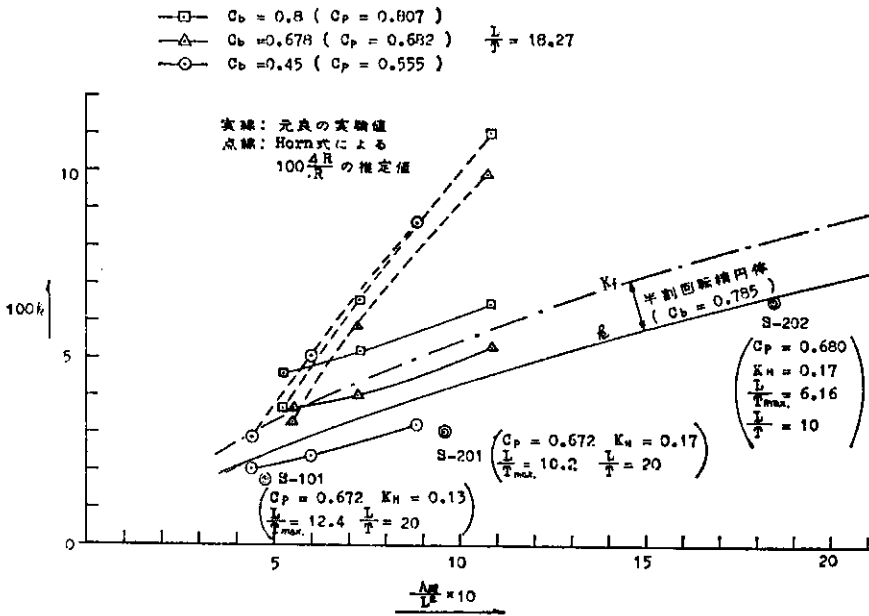
で $V = \frac{\pi}{6} LB^2$, $S = \frac{\pi^2}{4} LB$, (但しこの S は胴周の積分である)

であるから, 同様にして,

$$K_f = k + \frac{2}{3\pi} \beta(1 - \beta) \frac{dk}{d\beta}, \dots\dots\dots (3.5)$$

計算すると, K_f は k の値の $1.25 \left(\frac{L}{B} = 5 \right)$ から $1.30 \left(\frac{L}{B} = 10 \right)$ 倍となる。第 1 図

に $\frac{A_{\odot}}{L^2}$ ($A_{\odot}$ は中央積切面積) に対してそれを図示してある。



第 1 図

例 3) 一般には $k = \text{func} \left(C_b, \frac{L}{B}, \frac{L}{T} \right)$ と考えられるから

$$L \frac{dk}{d\nu} = \frac{\partial k}{\partial C_b} C_b \left(\frac{SL}{V} - 1 - \frac{L}{B} - \frac{L}{T} \right)$$

$$+ \frac{\partial k}{\partial \left(\frac{L}{B} \right)} \left(\frac{L}{B} \right) \left(1 - \frac{L}{B} \right) + \frac{\partial k}{\partial \left(\frac{L}{T} \right)} \left(\frac{L}{T} \right) \left(1 - \frac{L}{T} \right), \dots\dots\dots (3.6)$$

であたえられる。

元良の図表³⁾を用いればこれらの値はすぐ求められる。今 $C_p = 0.81$, $\frac{L}{B} = 7$, $\frac{L}{T} = 20$, $S = 2.7\sqrt{VL}$ として k その他を推定すると $k = 0.050$, $\frac{V}{S} \frac{dk}{d\nu} = 0.050$ となるから $K_f = 0.100$ となる。第1図に元良の実験値を示しておいた。

というような訳で K_f なる量は見掛質量係数が判れば簡単に推定できることになるが、ポテンシャルが判っていてもまた簡単に推定できる。

既に細長い物体に対して $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ が胴周りで変化しないとして2次の項を省略すれば、胴周を $l(x)$ とすると (3. 2) から

$$K_f = \frac{2}{S} \int_{-1}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} l(x) dx. \quad \dots\dots\dots (3. 7)$$

胴周りの長さ方向の変化は僅かなものであるから l として、平均の胴周りをとると

$$K_f = \int_{-1}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = [\varphi]_{-1}^1, \quad \dots\dots\dots (3. 8)$$

が得られ田中氏の与えた2次元の式⁴⁾に一致する。

さて氏は翼型について近似式を導いているが、もう少し理論的に簡単化することによって、面白い結果をうることができる。

さて2次元で

$$\varphi(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\eta(\xi)}{x - \xi} d\xi, \quad \dots\dots\dots (3. 9)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{今} \quad \eta(x) &= \frac{B}{2} C_w \frac{f(\theta)}{\sin \theta}, \quad f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \cos 2n\theta \\ a_0 &= \frac{2}{\pi}, \quad x = -\cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3. 10)$$

とおくと (3. 9) は

$$\frac{\varphi(x, 0)}{\frac{B}{2} C_w} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \frac{\sin 2n\theta}{\sin \theta}, \quad \dots\dots\dots (3. 11)$$

であるから (3. 8) によって、

$$K_f = \frac{2B}{L} \cdot C_w \left(- \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_{2n} \right) \quad \dots\dots\dots (3. 12)$$

尚ここで K_f には前後反対称な項は関係しないから前後対称な船型についてのみ考えている。

$\eta(x)$ は近似的に半幅曲線を表わすから、

面積係数 C_w は

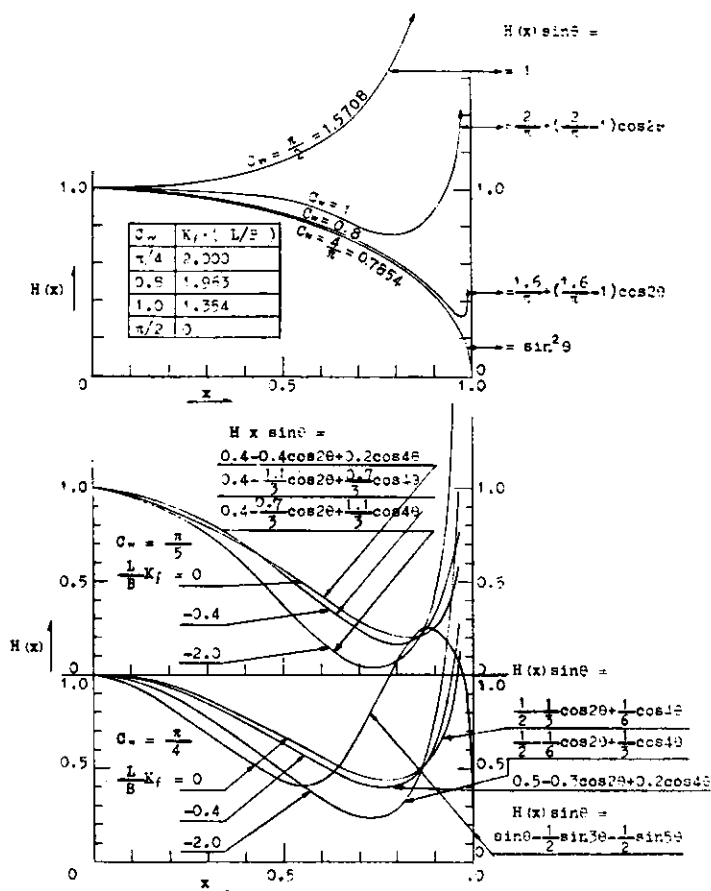
$$\frac{1}{C_w} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \cos n\pi, \quad \dots\dots\dots (3. 13)$$

で与えられる。

実際に数値例を考えよう。

例 1) a_4 以上が零であるとするとき第2図上図のごときものが得られ

船の粘性抵抗に及ぼす形状の影響について



第 2 図

$$K_f = \frac{4B}{L} \left(1 - \frac{2}{\pi} C_w \right), \quad \dots \dots \dots (3. 14)$$

となる。

例 2) a_0 以上が零としさらに両端の点で零になるようにすると、

$$K_f = \frac{2B}{L} \left(\frac{8}{\pi} C_w - 1 \right), \quad \dots \dots \dots (3. 15)$$

が得られこれは田中氏の式に一致する⁴⁾。

(3. 14) あるいは (3. 15) で $C_w = \frac{\pi}{4}$ とすると (楕円) $K_f = \frac{2B}{L}$ となるが、これは (3. 5) に略々等しい。

あるいはこの方法ではこの程度の誤差はまぬがれないものと考えられる。

例 3) 今は K_f は (3. 12) のように与えられるので極小値のようなものはいりえないで正負の任意の値をとりうる。

第 2 図下方にその例を示した。

このことは (3. 8) 式を導くに当つて 2 次の項を省略したためであって、2 次の項迄と

ってやると K_f を最小にするような、船型が存在することが判るが面倒であるしまた元々 (3. 1) 式が近似式であるので意味があるかどうかとも判らぬので省略した。

(尚第2図の両端で無限大になるものはこの2次の項が無限大である。すなわち2次の項迄とる時は両端で零になるもののみ考えねばならない。)

然し2次の項迄とってもやはり B/L が極端に小さい時には K_f が負になりうるようである。

元々 (3. 1) 式あいはいは (3. 2) 式が負になり得ないという確証はないから理論的には一応あり得ると考えてもよからう。

然し普通の船型ではあまりあり得そうにもないが、少くとも船型によって、 K_f がかなり異なるものであって排水量が両端に集中しているほど K_f が小さいということは言えそうである。

このことは球状あるいは円柱状船首が摩擦抵抗をも幾分減少させる効果があり得ることを示唆している。

さて3次元では (3. 7) 式の積分においてそれを底面上に積分したものを水線面積で割ったものは、近似的に平均沈下を与えることは容易に判る。したがって $\partial\phi/\partial x$ が胴周上で略々変らないとすると (3. 7) 式の右辺もやはり略々平均沈下を与えることは明らかである。

Horn は、平均沈下が速度増加によってひきおこされることから全く同じ考察によってこれと抵抗増加とを結びつけている^{9) 10) 11)}。

すなわち平均沈下量を h とすると

$$K_f \doteq \frac{2gh}{U^2} \dots\dots\dots (3. 16)$$

$$\frac{2gh}{U^2} = \frac{1}{100} (0.35 + C_p) \left(1.3 - \frac{B}{10T} \right) \left\{ \frac{1}{5} \left(11.25 - \frac{L}{B} \right)^2 + 2.5 \right\} \dots\dots\dots (3. 17)$$

但し C_p はプリズマ係数、 T は吃水とする。

第1図に元良の実験値に対応するこの推定値をプロットした。

前の例3)の所の推定値と比較すると、少し小さめであるが、この点は元良の図表そのものの、精度もあるし、元々 (3. 17) 式は平均沈下の計測から出ているものでもあるし、むしろこれらの量が互に驚くほど密接に結びついているというように見るべきであろう。

尚第1図で見ると (3. 17) は A_{85}/L^2 で整理すると略々一直線で表わされる点がよく理解できないが、元々 (3. 2) 式で q は B/L および T/L に略々比例するであろうから、

$$K_f \propto \frac{BT}{L^2} \propto \frac{A_{85}}{L^2} \dots\dots\dots (3. 18)$$

となるのは当然とも言えよう。

これに関連して、表面積として、現在の慣習の胴周の積分でなく実際の表面積をとると摩擦抵抗の形状影響が略々現わされるという議論があるのは興味がある⁹⁾。

すなわちこの差もやはり表面の進行方向への傾斜の自乗に比例するから (3. 18) と同じく A_{85}/L^2 に比例すると考えられるからである。

この (3. 16) における $K_f \doteq 2gh/U^2$ なる関係は導く過程から明らかなように波があっても成立つから、平均沈下が測定されておれば K_f の大約値は推定できることになる。

一般に h なる量は高速で正から負に逆転することを考えると 2 次元でも見たようにやはり K_f が負になりうる事が推定される⁷⁾。

h が負になれば明らかに船の周りにおける流速は船速よりも小さくなっている証拠であるから、これは当然といえよう。

4. 圧力抵抗⁵⁾

2 節 6 項所述のように田中によれば圧力抵抗 R_P は、係数の形で

$$C_p = \frac{R_P}{\frac{\rho}{2} U^2 S} = \frac{-1}{S} \iint_S [q^2]_s \frac{\partial x}{\partial \nu} dS, \dots\dots\dots (4. 1)$$

のように境界層の外側の圧力（下添字 δ はこの意味とする）を物体面上で積分すればよい。

所で S 上で流線に沿って α , それに直交して β なる座標をとり、この物体が完全流体中にある時の速度ポテンシャル φ を導入すれば、

$$[q]_s = -\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \quad \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right]_s = -\frac{\partial x}{\partial \nu}, \dots\dots\dots (4. 2)$$

この第 1 式で $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$ が $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$ に対し無視できるとすると、

$$\left[\frac{\partial}{\partial \nu} q^2 \right]_s = 2q \frac{\partial q}{\partial \nu} \doteq -2 \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \nu \partial \alpha} = 2 \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \nu}$$

であるから

$$[q^2]_\delta \doteq [q^2]_s + \delta(\alpha, \beta) \left[\frac{\partial}{\partial \nu} q^2 \right]_s \doteq [q^2]_s + 2\delta(\alpha, \beta) \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \nu}, \dots\dots\dots (4. 3)$$

また一方 φ は完全流体の渦なしポテンシャルであるから

$$\iint_S [q^2]_s \frac{\partial x}{\partial \nu} dS = 0, \dots\dots\dots (4. 4)$$

であるから、(4. 3), (4. 4) を (4. 1) に代入すると

$$C_p \doteq \frac{-1}{S} \iint_S \delta(\alpha, \beta) \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial x}{\partial \nu} \right)^2 \right] \frac{\partial x}{\partial \alpha} dS, \dots\dots\dots (4. 5)$$

が得られる。

ここでさらに、この積分は物体後端附近のみ考えればよい事に注目して、 $\bar{\delta}$ を適当な δ の平均値と考え、またその附近で物体表面および流線の x 軸に対する傾斜は、小さいとすれば大約

$$C_p \doteq -\frac{\bar{\delta}}{S} \int_{\text{AFT. BODY}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] l(x) dx, \dots\dots\dots (4. 6)$$

となる。

但し $l(x)$ は胴周長さ、 y は半幅曲線。

$\bar{\delta}$ は明らかに全抵抗係数の関数であるからこの関係が判りさえすれば圧力抵抗は全抵抗に関連づけられることになるが、3 次元問題ではそのような関係に関する記述が見当らないので、ここでは田中にしたがって、2 次元の関係を考える⁵⁾。

すなわち、全抵抗を R_t とすると、

$$\frac{\bar{\delta}}{3L} = \frac{R_t}{\frac{\rho}{2} U^2 S}, \quad \dots\dots\dots (4.7)$$

このような関係は、船尾が2次元的すなわち U 型肋骨を持つ船では大雑把ではあるけれども定性的に成立つと考えられる。

そうすると田中によって形状影響係数 K_P は

$$\left. \begin{aligned} K_P &= (1+K_f) \frac{K_P}{1-K_P'} \\ K_P' &= \frac{R_P}{R_t} = C_P \times \frac{3L}{\bar{\delta}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.8)$$

で定義されるから、(4.6) を代入して

$$K_P' = \frac{-3L}{S} \int_{\text{AFT. BODY}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] l(x) dx, \quad \dots\dots\dots (4.9)$$

が得られ、特に2次元では、積分できて、

$$K_P' = 3 \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]_{AP} \quad \dots\dots\dots (4.10)$$

これが田中の結論である⁹⁾。

普通型船尾の船では胴周の長さ方向の変化は $\left(\frac{dy}{dx} \right)$ に較べれば一般に小さいから上式は定性的には常に適合すると考えられる。

然し乍ら回転体とか楕円体のような場合、あるいはまた、極端な V 型肋骨船尾や船のような場合は種々の仮定からして、もっと定性的にも少し異った関係が成立するように思われる。

(4.5), (4.6) の形からも判るように3次元的な例えば回転体のようなものでは圧力抵抗は2次元的物体に比して、かなり小さくなるように思われる¹¹⁾。

いずれにしても普通型船尾船では定性的に (4.10) が適合しそうであるから極端な場合として $A.P.$ の run angle を0 とすると、 K_P' は今考えている近似度においては高次の微小量として無視し得ることになる。

換言すれば $A.P.$ 附近の run angle を小さくすることによって、圧力抵抗を小さくし得る可能性がありこのことは2次元翼型で実験的にも、確められている¹²⁾。

勿論圧力抵抗が大きい役割を演ずるのは、(4.10) から判るように幅の広い、肥瘠係数の大きい船であるが、現在のこのような船では後半部水線は大体において凸であって、run angle も 30° にも達するので (4.10) によっても明らかに K_P' は非常に大きい値をとることになる。

したがってこのような考察が正しければ、後半部流線に変曲点を持たせて run angle をできるだけ小さくすれば圧力抵抗は小さくなる筈である。

5. 結 論

以上のように粘性抵抗の形状影響係数について、田中の得た式を彼とは少し別の面から検討すると、

- 1) 摩擦抵抗の形状影響係数は進行方向の見掛質量係数あるいは平均沈下量と密接な関

連をもつ。

- 2) 粘性に起因する圧力抵抗によるそれは、船体後半部特に後端附近の形状に大きく依存するし、またこの附近の流れの様子も未知の面が多いので彼の結論以上に推論するのは危険であるが、現在の特に幅の広い肥った船型については船尾形状そのものにさらに検討の余地が残されているように見える。

これらの結論は既に文献などに指摘されている事柄であるが、田中の考察によって、さらにこれらの事実の確らしさが保証されるものと考えてよからう。

最後に、この小論に最初から目を通して種々御教示下さった東京大学生産技術研究所田宮真教授に心から謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 笹島秀雄外：造船協会論文集 103 号，昭和 33 年 7 月
- 2) “ ” 104 号， ” 34 年 1 月
- 3) 元良誠三： ” 106 号， ” 35 年 1 月
- 4) 田中一郎： ” 113 号， ” 38 年 6 月
- 5) “ ” 114 号， ” 38 年 12 月
- 6) 別所正利： ” 110 号， ” 36 年 12 月
- 7) 横尾幸一： ” 106 号， ” 35 年 1 月
- 8) “ ” 108 号， ” 35 年 12 月
- 9) H.E. Saunders: “Hydrodynamics in Ship Design” Vol. 1 § 22.5 S.N.A.M.E., 1957.
- 10) S. Bergman and M. Schiffer: “Kernel functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics” p. 62, Academic Press, New York, 1953.
- 11) 田宮 真：東大生研報告 第 7 巻 第 2 号，昭和 33 年 2 月
- 12) 造船研究協会：調査資料 No. 25 昭和 39 年 3 月

The Effect of the Ship Form on its Viscous Resistance

By Masatoshi BESSHO*

Abstract

I. Tanaka proposed simple formulas to estimate the form effect of the viscous resistance of ships.

Shince they are independent of the details of the boundary layer of the ship, it may be possible to estimate its form effect without knowledge of its boundary layer and to obtain the ship form with smaller viscous resistance.

The author tries to extend some of Tanaka's results in these senses and also points out the relation between his result and the relating past research.

* Assistant professor, Department of Mechanical Engineering.

Solutions of Minimum problems of the wave-making resistance of the doublet distribution on the line and over the area perpendicular to the uniform flow

By Masatoshi BESSHO*

(Received March 20, 1964)

Abstract

The numerical data of the solutions of the minimum problem of the wave-making resistance of the doublet distribution perpendicular to the uniform flow on the line at the water surface and over the strip extending vertically to the infinite depth are given.

Under the appropriate conditions, the solutions are determined uniquely in both cases, and the minimum value of the wave-making resistance increases rapidly with the decreasing velocity.

Introduction

The general discussion of the minimum problem of the wave-making resistance was discussed in the previous paper⁷⁾ and the present problem was also formulated partly in the same work.

This paper gives the numerical details of the solution of the minimum problem of the wave-making resistance of the doublet distribution on the line at the water surface and over the strip extending to the infinite depth.

The former is a mathematical model of the planing surface and H. Maruo discussed in detail¹⁾⁻⁵⁾ but here we consider it only in the present point of view.

The latter has no explicit practical application.

1.1 Area distribution

Let us consider the water motion due to the doublet distribution over the area $1 \geq y \geq -1$ and $0 > z > \infty$, where the water flows down to the negative x -axis with the unit velocity, its mean surface is taken to be the x - y plane and the z -axis vertically upwards.

Then, the wave making resistance of this distribution is given by the formula

$$R = (\rho g^4) / \pi \int_0^{\pi/2} |F(g \sec^2 \theta, \theta)|^2 \sec^5 \theta d\theta, \quad (1.1.1)$$

* Assistant Professor, Dept. of Mechanical Engineering.

with

$$F(k, \theta) = \int_{-\infty}^0 \int_{-1}^1 h(y, z) e^{kz - ik y \sin \theta} dy dz, \quad (1.2.2)$$

where ρ means the water density and g the gravity constant in this unit system and the distribution is assumed symmetric with respect to the origin.

Moreover, if we assume the distribution uniform in the z -direction, we have by integration

$$R = \rho \frac{g^2 \bar{B}^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |f(g \sec^2 \theta \sin \theta)|^2 \sec \theta d\theta, \quad (1.1.3)$$

with

$$f(q) = \int_{-1}^1 H(y) \exp.(-iqy) dy, \quad q = g \sec^2 \theta \sin \theta, \quad (1.1.4)$$

where

$$\bar{B} = (1/2) \int_{-1}^1 h(y, z) dy, \quad (1.1.5)$$

and

$$H(y) = h(y, z) / \bar{B},$$

then the condition (1.1.5) goes to

$$\int_{-1}^1 H(y) dy = 2. \quad (1.1.6)$$

Namely, $2\bar{B}$ means the total sum of the doublet distribution in any horizontal section.

Let us introduce the wave resistance coefficient and interchanging the order of the integration in (1.1.3), we have

$$R / (\rho \bar{B}^2 / 8) = c_w = 32g^2 \int_{-1}^1 H(y) G^*(y) dy, \quad (1.1.7)$$

with

$$G^*(y) = (1/2\pi) \int_{-1}^1 H(y') K_0(g|y - y'|/2) dy'. \quad (1.1.8)$$

Where K means the modified Bessel function.

Now, if we assume the next expansion in Mathieu functions,

$$\left. \begin{aligned} H(\cos \theta) &= \varphi(\theta) / \sin \theta, \\ \varphi(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} c e_{2n}(\theta, -q), \quad q = g^2 / 16, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.9)$$

then we have from (1.1.8) by integration

$$G^*(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{2n} a_{2n} c e_{2n}(\theta, -q), \quad (1.1.10)$$

and

$$C_w = 16g^2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{2n} a_{2n}^2, \quad (1.1.11)$$

If we ask the minimum wave-making resistance, we have a solution immediately putting G^* a constant, that is,

$$G^*(\cos \theta) = \lambda = 2\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^{(2n)} ce_{2n}(\theta, -g). \quad (1.1.12)$$

Since this must be equal to (1.1.10), we have

$$a_{2n} = 2\lambda A_0^{(2n)} / \lambda_{2n} = a_{2n}^*, \quad (1.1.13)$$

and the constant is to be determined by (1.1.6) as

$$\lambda = 1/\pi A, \quad A = \sum_{n=0}^{\infty} (A^{(2n)})^2 / \lambda_{2n}. \quad (1.1.14)$$

Putting these value in (1.1.7), we have finally

$$Cw = 64g^2\lambda = 64g^2/(\pi A). \quad (1.1.15)$$

The above calculation is very simple, but we must use the table of Mathieu function. Thence, we write down them by the ordinary trigonometrical expansion.

Once more, if write (1.1.9) as

$$\varphi(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n} \cos 2n\theta, \quad (1.1.16)$$

then

$$G^*(\cos \theta) = (1/2) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos 2m\theta \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n,2m} \alpha_{2n}, \quad (1.1.17)$$

where $\varepsilon_0=1$ and $\varepsilon_m=2$ for $m \neq 0$ and

$$\left. \begin{aligned} B_{2n,2m} &= (1/\pi^2) \int_0^\pi \int_0^\pi K_0(g|\cos \theta - \cos \theta'|/2) \cos 2n\theta \cos 2m\theta' d\theta d\theta' \\ &= (1/2) \sum_{\mu=0}^{\infty} \varepsilon_\mu (-1)^{m-\mu} I_{\mu-n}(g/4) I_{\mu+n}(g/4) [K_{m+\mu}(g/4) I_{m-\mu}(g/4) \\ &\quad + K_{m-\mu}(g/4) I_{m+\mu}(g/4)], \\ B_{0,0} &= 4 \sum_{r=0}^{\infty} \lambda_{2r} (A_0^{(2r)})^2, \\ B_{0,2m} &= B_{2m,0} = 2(-1)^m \sum_{r=0}^{\infty} \lambda_{2r} A_0^{(2r)} A_{2m}^{(2r)} \quad \text{for } m > 0 \\ B_{2n,2m} &= (-1)^{n+m} \sum_{r=0}^{\infty} \lambda_{2r} A_{2n}^{(2r)} A_{2m}^{(2r)} \quad \text{for } n, m > 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.18)$$

Especially, in the minimum solution, we have

$$\left. \begin{aligned} G^*(\cos \theta) &= \lambda = (1/2) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n} B_{2n,0}, \\ 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n} B_{2n,2m} \quad \text{for } m \geq 1, \end{aligned} \right\} \quad (1.1.19)$$

and

and the condition (1.1.6) goes to

$$\alpha_0 = 2/\pi. \quad (1.1.20)$$

The computations are carried out by the latter formula to $g=0.4 \sim 2.0$ and by the former to $g=2 \sim 8$ and shown in Tables 1, 2, 3 and Fig. 1.

Table 1

g	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	4	$\sqrt{40}$	8
F_r	1.118	0.7906	0.6455	0.5590	0.5000	0.3536	0.2812	0.2500
$2/\pi A$	1.5551	1.1431	0.9196	0.7732	0.6683	0.4000	0.2731	0.2222
Cw	7.962	23.41	42.38	63.34	85.54	204.8	349.5	455.1
Cwe	8.743	26.30	48.31	72.92	99.03	239.3	405.6	524.9
r_0^*	0.0995	0.5853	1.589	3.167	5.346	25.60	69.08	113.8
r_c^*	1.1051	2.570	4.696	7.052	10.25	35.74	85.61	135.0
a	11.10	4.392	2.955	2.227	1.919	1.396	1.239	1.187
b	10.10	3.392	1.955	1.227	0.919	0.396	0.239	0.187
α_0	0.6366	0.6366	0.6366	0.6366	0.6366	0.6366	0.6366	0.6366
α_2	-0.0124	-0.0334	-0.0565	-0.0788	-0.0997	-0.1810	-0.2389	-0.2667
α_4	0	0	0	-0.0003	-0.0007	-0.0040	-0.0098	-0.0144
α_6	0	0	0	0	0	0.0001	-0.0004	-0.0008
α_8	0	0	0	0	0	0	0	0
$\varphi_a(0)$	0.6242	0.6032	0.5801	0.5575	0.5362	0.4515	0.3874	0.3546
β_0	0.6366	0.6366	0.6366	0.6366	0.6366	0.6366	0.6366	0.6366
β_2	0.0492	0.1428	0.2337	0.3553	0.4522	0.7808	0.9509	1.0164
β_4	0.0002	0.0017	0.0065	0.0199	0.0301	0.1612	0.3489	0.4668
β_6	0	0	0.0001	0.0003	0.0008	0.0137	0.0632	0.1177
β_8	0	0	0	0	0	0.0006	0.0068	0.0175
β_{10}	0	0	0	0	0	0	0.0001	0.0003
$\varphi_b(0)$	0.6860	0.7811	0.8769	1.0120	1.1196	1.5923	2.0065	2.2553

Table 2

g	0.4	0.8	1.2	1.6	2	4	$\sqrt{40}$	8
F_r	1.118	0.7906	0.6455	0.5590	0.5000	0.3536	0.2812	0.2500
$B_{0,0}$	2.44286	1.79628	1.44648	1.21824	1.05549	0.64512	0.45400	0.37744
$B_{0,2}$	0.00487	0.01295	0.02159	0.02961	0.03672	0.05874	0.06660	0.06724
$B_{0,4}$	0	0.00003	0.00011	0.00027	0.00050	0.00278	0.00648	0.00904
$B_{0,6}$	0	0	0	0	0	0.00006	0.00036	0.00074
$B_{2,2}$	0.24920	0.24691	0.24347	0.23916	0.23428	0.20646	0.17696	0.15962
$B_{2,4}$	0.00021	0.00041	0.00089	0.00172	0.00231	0.00717	0.01273	0.01592
$B_{2,6}$	0	0	0	0.00001	0.00001	0.00017	0.00066	0.00122
$B_{4,4}$	0.12491	0.12467	0.12426	0.12370	0.12301	0.11787	0.10999	0.10403
$B_{4,6}$	0.00002	0.00009	0.00019	0.00038	0.00057	0.00183	0.00393	0.00546
$B_{6,6}$	0.08331	0.08327	0.08312	0.08296	0.08273	0.08111	0.07715	0.07576

Table 3

q	0.25	1	2.5	4
g	2	4	$\sqrt{40}$	8
F_r	0.5000	0.3536	0.2812	0.2500
λ_0	0.53006	0.33596	0.25608	0.22568
λ_2	0.23202	0.19364	0.15043	0.12770
λ_4	0.12297	0.11737	0.10793	0.10006
λ_6	0.084	0.08104	0.07789	0.07503
a_0^*	0.88814	0.80137	0.64228	0.55116
a_2^*	0.17815	0.44815	0.66966	0.73834
a_4^*	0.00177	0.01776	0.08237	0.18163
a_6^*	0.00002	0.00021	0.00238	0.00821
a_8^*	0	0	0.00002	0.00019
b_0^*	0.93649	1.09883	1.28569	1.37913
b_2^*	0.37250	0.47674	0.38995	0.35853
b_4^*	0.37250	0.10260	0.18623	0.20719
b_6^*	0.00105	0.00684	0.02797	0.04676
b_8^*	0	0.00021	0.00259	0.00547
b_{10}^*	0	0	0.00007	0.00025

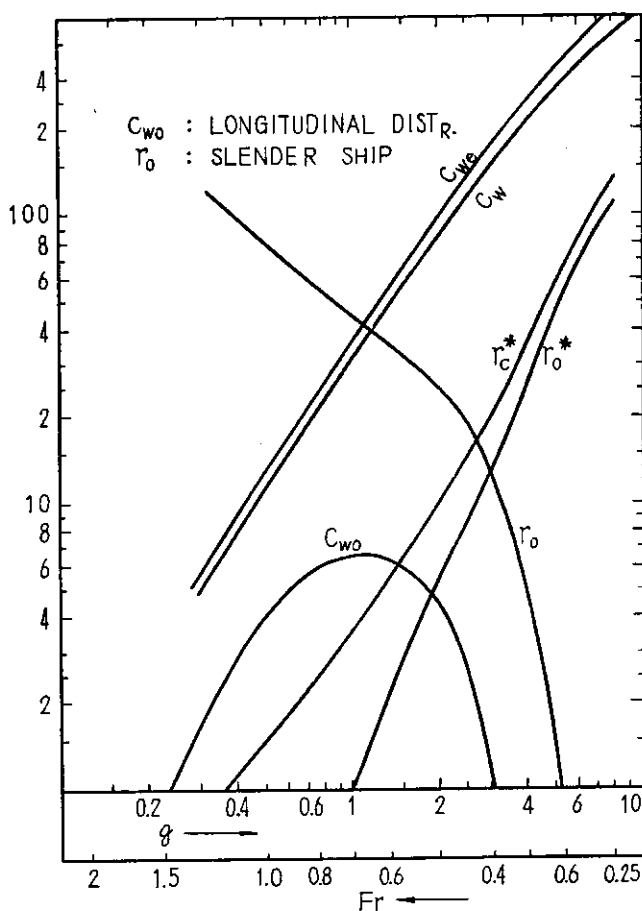


Fig. 1.

For a comparison, if we consider the elliptic distribution which represents approximately an elliptic cylinder, we obtain putting $\alpha_0 = -\alpha_2 = 2/\pi$,

$$Cw_e = (64g^2/\pi)[B_{0,0} - 2B_{0,2} + B_{2,2}], \quad (1.1.21)$$

1.2 Limit in high speed

When the velocity is very high, that is, g is very small, the problem becomes very simple as the kernel of the integral (1.1.8) plays simply as logarithmic.

We have approximately

$$\left. \begin{aligned} B_{0,0} &= \log(8/\gamma g) + (g^2/16)[\log(8/\gamma g) - 1/4], \\ B_{0,2} &= (g/8)^2[\log(8/\gamma g) - 1/2], \\ B_{2,2} &= 1/4 - g^2/192, \end{aligned} \right\} \quad (1.2.1)$$

where $\log \gamma = 0.5772 \dots$, Euler's constant, and then

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= 2/\pi, \quad \alpha_{2n} \doteq 0 \quad \text{for } n \geq 1 \\ Cw &\doteq (64g^2/\pi) \log (8/\gamma g). \end{aligned} \right\} \quad (1.2.2)$$

For the elliptic distribution, we obtain from (1.1.21)

$$Cw_e \doteq (64g^2/\pi) [\log (8/\gamma g) + 1/4]. \quad (1.2.3)$$

Hence, the difference between this and the optimum distribution is not so great.

This value may be compared with the one of the longitudinal similar distribution in the reference⁷⁾, namely,

$$R_i/(\rho \bar{B}^2 V^2/L^2) = Cw_0 \doteq 8g^2 L^2/(\pi V^4) \log (8V^2/\gamma g L), \quad (1.2.4)$$

where V means the advance velocity and L the length of the distribution and $2\bar{B}$ the total sum of the distribution.

Putting the breadth T and the velocity V , we may rewrite (1.2.2) as

$$R_i/(\rho \bar{B}^2 V^2/L^2) = Cw \doteq 16g^2 T^2/(\pi V^4) \log (16V^2/\gamma g T). \quad (1.2.5)$$

If we preserve $\bar{B}$ and V , the ratio of the wave-making resistance between them may be

$$R_i/R_e \doteq 2 \log (16V^2/\gamma g T)/\log (8V^2/\gamma g L). \quad (1.2.6)$$

This ratio equals to unity at

$$T/L \doteq 4.2(V/\sqrt{gL}), \quad (1.2.7)$$

Namely, R_i will be greater than R_e when T is greater than $4.2(V/\sqrt{gL})L$.

Since the Froude number in our case is very high, this means the extra-ordinary aspect ratio of the transverse distribution.

1.3 Stream line at the great depth

The foregoing analysis treats only doublet distributions but not actual solid bodies.

To obtain a corresponding body shape from a doublet distribution is a difficult problem especially near the water surface, but we may calculate easily stream lines at great depth where the disturbance of the water wave does not contribute very much.

Now, let us consider the $x-y$ plane and the doublet distribution $\bar{B}H(y)$ on the segment $|y| \leq 1$.

Define the complex velocity potential as

$$f(z) = \bar{B}/\pi \int_{-1}^1 \frac{H(y') dy'}{z - iy'}, \quad (1.3.1)$$

where $z = x + iy$, and introduce the transformation

$$\left. \begin{aligned} z &= i \cosh u, \quad u = t + i\theta, \\ y &= \cosh t \cos \theta, \quad y' = \cos \theta', \\ x &= -\sinh t \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.2)$$

Then, assuming the expansion (1.1.16), we have

$$f[z(t+i\theta)] = (-i\bar{B}/\sinh u) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n} \exp(-2nu).$$

Hence, the integral equation to determine the stream line is to be

$$\left. \begin{aligned} \cosh t \cos \theta &= \bar{B}/(\sinh^2 t + \sin^2 \theta) [\sinh t \cos \theta h_1(t, \theta) \\ &\quad - \cosh t \sin \theta h_2(t, \theta)], \\ h_1(t, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n} e^{-2nt} \cos 2n\theta, \\ h_2(t, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n} e^{-2nt} \sin 2n\theta. \end{aligned} \right\} \quad (1.3.3)$$

For example, if we put $\alpha_0 = -\alpha_2 = 2/\pi$ and $\alpha_{2n} = 0$ for $n \geq 1$, this equation degenerates to

$$\cosh t \cos \theta = \frac{4}{\pi} \bar{B} e^{-t} \cos \theta,$$

and solved as

$$t = (1/2) \log \left(\frac{8}{\pi} \bar{B} - 1 \right). \quad (1.3.4)$$

This equation gives a real positive value of t whenever

$$\bar{B} \geq \pi/4 = 0.7854. \quad (1.3.5)$$

And the stream line gives an ellipse with the longer and shorter radius respectively

$$\frac{4\bar{B}}{\pi \sqrt{\frac{8}{\pi} \bar{B} - 1}}, \quad \frac{\left(\frac{4}{\pi} \bar{B} - 1 \right)}{\sqrt{\frac{8}{\pi} \bar{B} - 1}} \quad (1.3.6)$$

and the area

$$2\bar{B} \left(\frac{\bar{B} - \frac{\pi}{4}}{\bar{B} - \frac{\pi}{8}} \right) < 2\bar{B}.$$

If the condition (1.3.5) does not hold, such distribution can not represent a solid shape, namely, the transverse distribution necessitates very large $\bar{B}$. This is a different point with the longitudinal one in which case we can always obtain a solid shape with an arbitrary

small $\bar{B}$.

Now, as we obtain in the preceding, the optimum distribution has almost always very large first term and negligible other terms.

Thence, we consider nextly the case in which the first term equals to $2/\pi$ and other ones vanish.

The equation (1.3.3) gives

$$\sinh^2 t + \sin^2 \theta = \frac{2}{\pi} \bar{B} \tanh t. \quad (1.3.7)$$

To represent a solid body, this equation must have a real positive root for t at $\theta = \pi/2$, namely, since we may write (1.3.7) as

$$x^6 = \left(\frac{2}{\pi} \bar{B} \right)^2 (1 - x^2), \quad \text{for } x = \cosh t.$$

To have a real value of t from this equation, it must be

$$\bar{B} \geq \pi \sqrt{27} / 4 = 4.081. \quad (1.3.8)$$

Some stream lines are shown in Fig. 2.

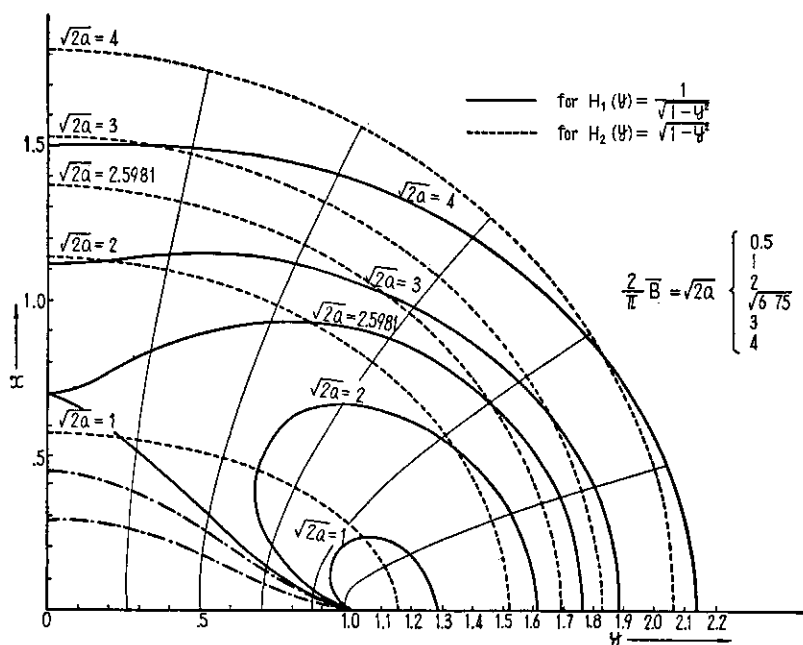


Fig. 2. Stream lines.

As we see in these examples, we can not take small value for $\bar{B}$, so that the comparison with the longitudinal distribution as in the preceding paragraph may be understood in very

restricted sense.

Namely, although its result says that the breadth must be very large for reducing the wave resistance, in our case, but we can not do so.

This fact suggests that the wave resistance of the transverse distribution is almost always greater than the corresponding longitudinal distribution.

2.1 Line distribution

Nextly, let us consider an extreme case in which the distribution concentrates on a line $|y| \leq 1$ at $z=0$.

The minimum solution was given in the reference 7), here we repeat it.

The wave resistance is given as (1.1.1), defining the total sum of the distribution

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_z^0 \int_{-1}^1 h(y, z) dy dz = \mathcal{V} \quad (2.1.1)$$

we may rewrite it as

$$r^* \equiv R/(\rho g \mathcal{V}^2/8) = 2 \int_{-1}^1 H(y) G(y) dy, \quad (2.1.2)$$

with

$$G(y) = \frac{g^3}{2} \left(1 - \frac{2}{g^2} \frac{d^2}{dy^2} \right) G^*(y), \quad (2.1.3)$$

where G^* is defined by (1.1.8) and $H(y)$ and (1.1.6) and (1.1.9)⁷⁾.

The solution of the minimum problem is the same as in § 1.1 and it gives the distribution (1.1.13) and the wave resistance

$$r_1^* = 2g^3 \lambda = 2g^3/(\pi A), \quad (2.1.4)$$

with λ and A of (1.1.14).

One of the interesting result of the reference 7) is the existence of the quasi-wave free distribution, that is, if

$$G^*(y) = C \cosh(gy/\sqrt{2}), \quad (2.1.5)$$

then

$$G(y) = 0 \quad \text{and} \quad r^* = 0.$$

Such solution is given as follows⁷⁾.

Since we have an expansion

$$\left. \begin{aligned} \cosh(gy/\sqrt{2}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n I_{2n}(g/\sqrt{2}) \cos 2n\theta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_{2n} c e_{2n}(\theta, -q), \\ C_{2n} &= \frac{2(-1)^n A_0^{(2n)}}{c e_{2n}(0, q)} C e_{2n}(z_0, -q), \quad z_0 = \sinh^{-1} 1, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.7)$$

where

we have the solution equating (2.1.5) to (1.1.10) in the form as (1.1.9), namely,

$$a_{2n} = C(-1)^n C_{2n} / \lambda_{2n}. \quad (2.1.7)$$

The constant C may be determined arbitrary in general, but we put it a definite value by the condition (1.1.6), that is,

$$C = 2/(\pi D), \quad D = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} A_0^{(2n)} / \lambda_{2n}, \quad (2.1.8)$$

Now, we write this solution as

$$\left. \begin{aligned} H_b(y) &= \varphi_b(\theta) / \sin \theta \\ \varphi_b(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n}^* c e_{2n}(\theta, -q), \\ b_{2n}^* &= 2(-1)^n C_{2n} / (\pi D \lambda_{2n}), \end{aligned} \right\} \quad (2.1.9)$$

and the former solution as

$$\left. \begin{aligned} H_a(y) &= \varphi_a(\theta) / \sin \theta, \\ \varphi_a(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}^* c e_{2n}(\theta, -q), \end{aligned} \right\} \quad (2.1.10)$$

with a_{2n}^* by (1.1.13).

Although $H(\pm 1)$ tends infinity in these solutions, but we may not imagine such distribution in practice.

Thence, let us put the condition

$$H(\pm 1) = 0 \quad \text{or} \quad \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0, \quad (2.1.11)$$

Combining H_a and H_b as

$$\left. \begin{aligned} H_c(y) &= a H_a(y) - b H_b(y), \\ \int_{-1}^1 H_c(y) dy &= 2, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.12)$$

this condition is satisfied when

$$b = a - 1, \quad a = \varphi_b(0) / [\varphi_b(0) - \varphi_a(0)]. \quad (2.1.13)$$

Then, the wave resistance will be

$$r_c^* = 2g^3 \lambda a = 2g^3 a / (\pi A). \quad (2.1.14)$$

Lastly, if we expand $\varphi_b(\theta)$ of (2.1.9) in Fourier series of

$$\varphi_b(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{2n} \cos 2n\theta, \quad (2.1.15)$$

the coefficients are determined by the next equations

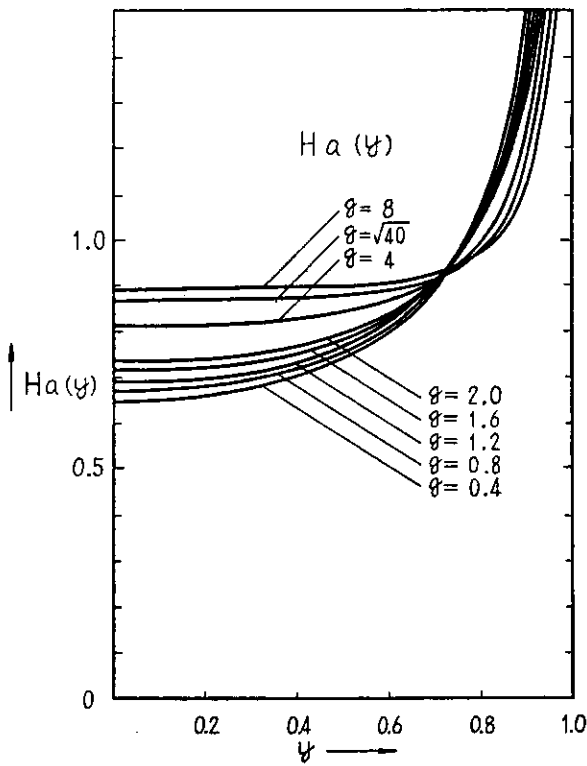


Fig. 3(a)

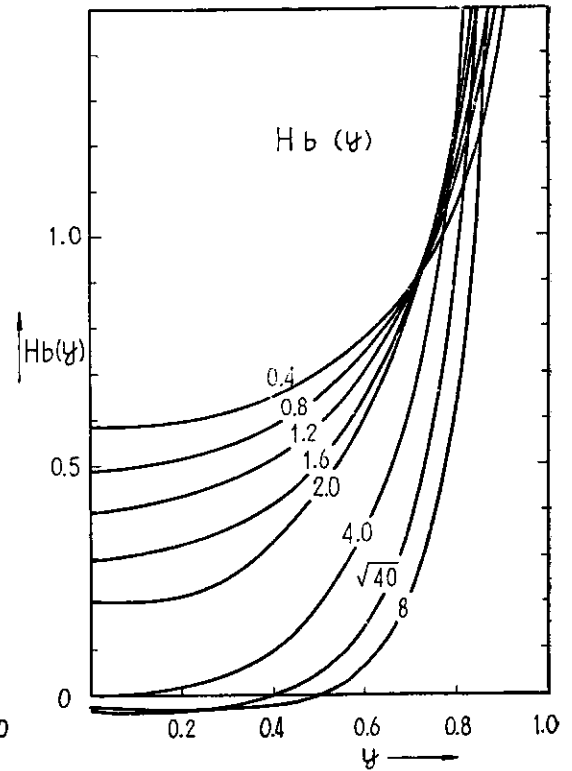


Fig. 3(b)

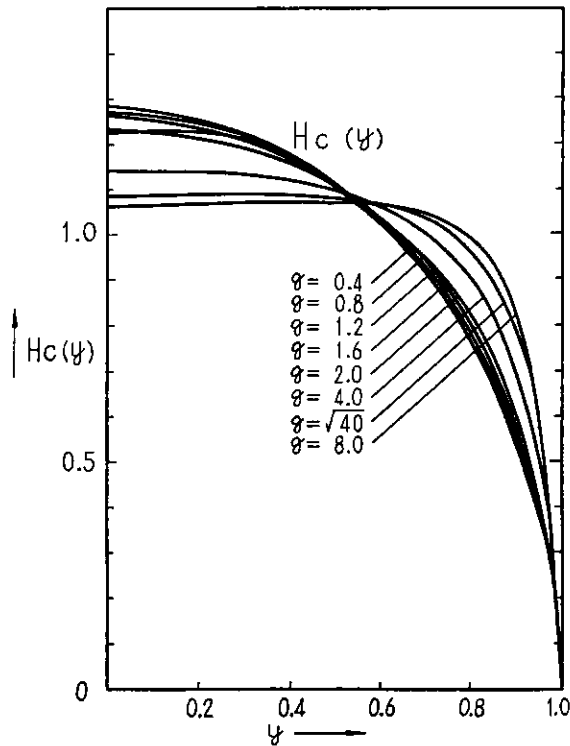


Fig. 3(c)

$$\beta_0 = 2/\pi \quad \text{and} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{2n} B_{2n, 2m} = C I_{2m}(g/\sqrt{2}) \quad \text{for} \quad m=0, 1, 2, \dots \quad (2.1.16)$$

Obviously, we may also calculate them by the Fourier expansions of Mathieu functions using the coefficients b_{2n}^* .

The numerical results are shown in Tables 1, 2, 3, Figs. 1 and 3.

2.2 Limit in high speed

Firstly, in the high speed, the minimum solution nearly equals to the quasi-wave-free solution.

Namely, considering up to the second order terms, we have from (1.1.19)

$$\varphi_a(\theta) \doteq (2/\pi) [1 - (g^2/16) \log(8/\gamma g) \cos 2\theta], \quad (2.2.1)$$

and from (2.1.15)

$$\varphi_b(\theta) \doteq (2/\pi) [1 + (3g^2/16) \log(8/\gamma g) \cos 2\theta]. \quad (2.2.2)$$

Hence, using these values, we obtain by the definition (2.1.12) and (2.1.13),

$$\varphi_c(\theta) \doteq (4/\pi) \sin^2 \theta, \quad Hc(\theta) = (4/\pi) \sin \theta, \quad (2.2.3)$$

and the wave resistance is to be

$$r_0^* \doteq (2g^3/\pi) \log(8/\gamma g), \quad (2.2.4)$$

$$r_c^* \doteq 8g/\pi. \quad (2.2.5)$$

The last value corresponds to the induced drag of a wing as H. Maruo elucidated¹⁾.

Namely, introducing the lift P , the lift coefficient C_L , the aspect ratio λ and the drag lift ratio ε as

$$\left. \begin{aligned} P &= \rho g \nabla, \\ C_L &= P / \{ (\rho/2) V^2 B L \}, \\ \lambda &= B/L, \\ \varepsilon &= R/P, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.6)$$

since we can write

$$r^* = R / (\rho g \nabla^2 / B^3) = 2\varepsilon \lambda / (C_L V^2 / g B), \quad (2.2.7)$$

the value of (2.2.5) is the same one as

$$\varepsilon_0 \doteq 2C_L / \pi \lambda, \quad (2.2.8)$$

where B means the breadth and L the chord length.

Then, in the other hand, the value of (2.2.4) will be much smaller than this value, that is,

$$\varepsilon \doteq \varepsilon_0 (g^2 B^2 / 16 V^4) \log (16 V^2 / \gamma g B). \quad (2.2.9)$$

Regardless to say here, it is out of question if we can imagine a planing surface as represented by (2.2.1).

It is also interesting to compare with the two dimensional wave resistance of a pressure distribution P per unit breadth, with infinite aspect ratio, given as

$$\varepsilon_2 = R/P \doteq gP/(\rho V^4) = (gL/2V^2)C_L, \quad (2.2.10)$$

where

$$C_L = P / \left(\frac{\rho}{2} V^2 L \right).$$

As we see easily, the value of (2.2.9) is also smaller the last one when the velocity is high.

With respect to the comparison with the longitudinal distribution, H. Maruo gave many examples and explained that the wave-resistance of the transverse distribution might be smaller than the longitudinal ones in the high speed¹⁾.

Hence, we have no more explanation than his.

2.3 Considerations on the velocity field

If we can add to his work, it is to the point if the distribution as (2.2.1) can really represent a ship shape.

Now, consider the velocity is very great, then the velocity potential degenerates to the one of the lifting line, namely,

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 H(y') \frac{z}{x^2 + (y - y')^2} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y - y')^2 + z^2}} \right] dy'. \quad (2.3.1)$$

At the $y-z$ plane for $x=0$, this potential goes to the same form as (1.3.1), so that figures of those stream line, Fig. 2, may give contours of the same upwards velocity in this case.

The stream lines and the equi-potential lines are given in Fig. 4 (a) and (b) for the characteristic two loadings as

$$H_1(y) = 1/\sqrt{1-y^2}, \quad (2.3.2)$$

$$H_2(y) = \sqrt{1-y^2}, \quad (2.3.3)$$

The difference between both cases is quite clear and in fact the induced up-wards velocity for the case of H_1 vanishes at $z=0$, so that we might have no induced drag.

However, since we have very strong induced velocity just outside of the end points, we might have a concentrated drag at these points.

In any way, it would be out of question unless we could establish its physical reality.

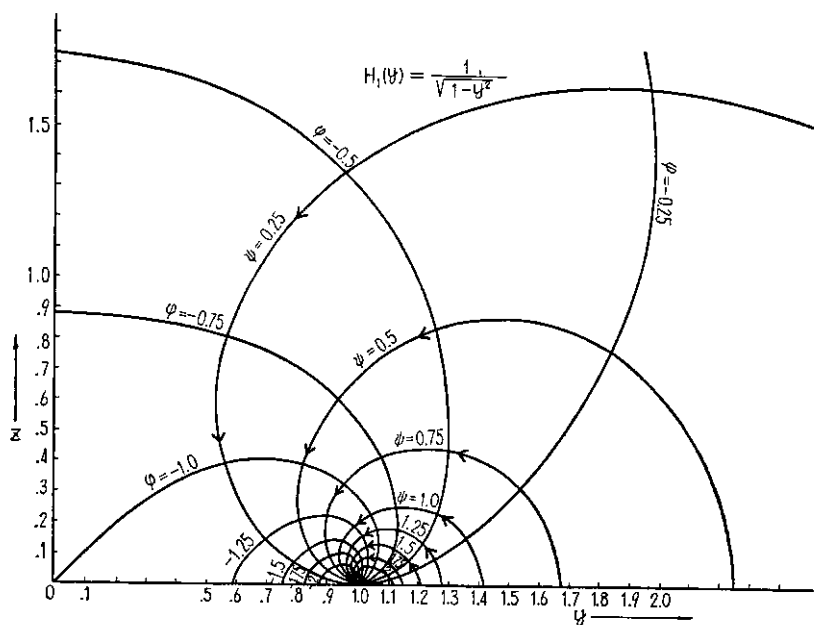


Fig. 4(a). Contour of the Velocity Potential and Stream function.

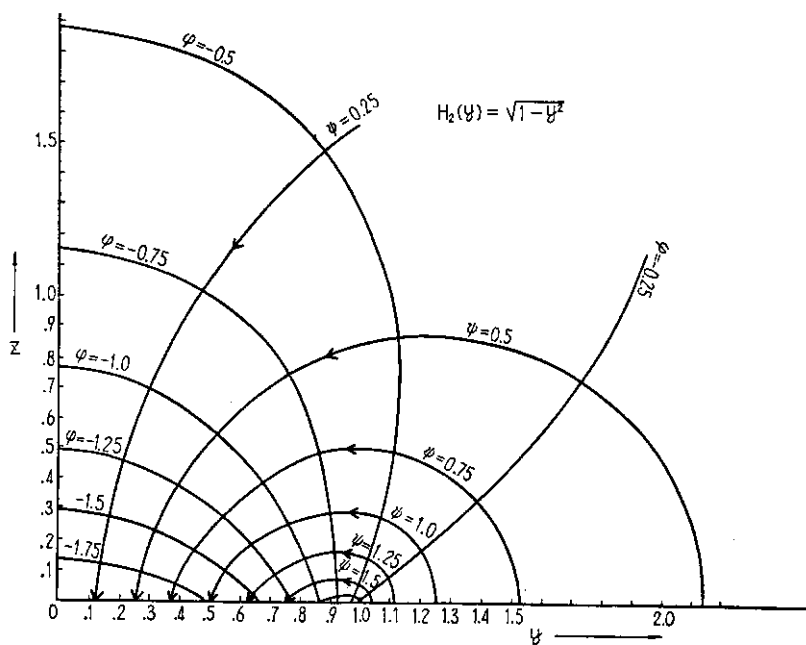


Fig. 4(b). Contour of the Velocity Potential and Stream function.

3 Wave-free distribution

Lastly, we consider the wave-free distribution over the area on the y - z plane.

In the sense of (1.1.2), let us define

$$F(k, q) = \iint_S h(y, z) \exp. (kz - iqy) dS, \quad (3.1)$$

where S means the area over which the doublet with the axis in the x -direction $h(y, z)$ distributes and $q = \sqrt{k(k-g)}$.

If we introduce the function $m(y, z)$ by the equation

$$h(y, z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + g \frac{\partial}{\partial z} \right) m(y, z), \quad (3.2)$$

this function may be determined uniquely except an arbitrary boundary values.

Hence, putting the condition, say,

$$m(y, z) = 0 \text{ on } C, \text{ the boundary curve of } S, \quad (3.3)$$

and integrating (3.1) partially, we have

$$F(k, q) = \int_C \exp. (kz - iqy) \frac{\partial}{\partial \nu} m(y, z) ds, \quad (3.4)$$

where ν means the outwards normal to the cuve C .

Hence, if

$$\frac{\partial}{\partial \nu} m(y, z) = 0 \text{ on } C, \quad (3.5)$$

we have

$$F(k, q) = 0, \quad (3.6)$$

and the wave resistance vanishes.

Many wave-free distributions belong to this species. For example, let S be the strip of the breadth 2 and extending from the water surface to the infinite depth, and $m(y, z)$ be able to write

$$m(y, z) = Y(y)Z(z). \quad (3.7)$$

In this case, the boundary conditions on the lower edge at infinity need not be satisfied and all functions satisfying the conditions

$$Y(\pm 1) = Y'(\pm 1) = Z(0) = Z'(0) = 0, \quad (3.8)$$

will become the wave-free distributions.

Nextly, the formula (3.4) tells us directly the wave resistance of $m(y, z)$ equals to the one of the line distribution $\frac{\partial}{\partial \nu} m(y, z)$ on the curve C .

That is to say, if we put the negative distribution of the last quantity on the same curve, the wave resistance will be clearly cancelled out.

Lastly, assuming the partition (3.7) over the same area, (3.1) can be written

$$F(k, q) = Y^*(q)Z^*(k), \quad (3.9)$$

with
$$Y^*(q) = \int_{-1}^1 Y(y) \exp.(-iqy) dy, \quad q = \sqrt{k(k-g)}, \quad (3.10)$$

$$Z^*(k) = \int_{-\infty}^0 Z(z) \exp.(kz) dz, \quad k > g. \quad (3.11)$$

Are there the function for which the integral (3.10) or (3.11) vanishes respectively ?

The answer is none for the appropriate class of the functions $Y(y)$ and $Z(z)$ by the theory of the Fourier and Laplace transformation.

All these present considerations are confined in themselves to the doublet distribution with its axis to the x -direction, but if we introduce more complicated singularities, we may obtain more interesting examples.

Conclusion

We have solved the minimum problem of the wave-making resistance of the line and area distribution perpendicular to the uniform flow and obtained the conclusions as follows;

For the area distribution over the strip extending to the infinite depth,

1. The optimum distribution is determined uniquely and it has infinite strength at both ends.

2. As shown in figures, its stream line at great depth does not close when its strength is not sufficiently strong.

3. The minimum wave resistance is very much higher than the one of the longitudinal distribution and its coefficient becomes greater by decreasing velocity.

For the line distribution on the water surface,

1. There is a quasi-wave free distribution but it tends also infinity at both ends.

2. Such distribution may not be realized physically.

3. The minimum problem has a solution except such one and also has infinite strength at ends.

4. Combining both distributions as the way in which both end strength vanish, we can obtain the same conclusion as H. Maruo did, namely, it tends to the elliptic distribution in very high speed.

In the last paragraph, we give a few types of the wave free distribution.

It may be remarked that the freedom of such distribution is narrower than the one in the case of the longitudinal distribution.

Acknowledgement

The numerical calculations and the figures shown was prepared by Messrs. Ikeda and Ōno¹⁰⁾.

References

- 1) H. Maruo; Journal of Zosen Kyokai Vol. 78 (1947)
- 2) " ; " " Vol. 81 (1949)
- 3) " ; " " Vol. 91 (1956)
- 4) " ; " " Vol. 92 (1957)
- 5) " ; " " Vol. 105 (1959)
- 6) M. Bessho; Memoirs of the Defense Academy Vol. 1 No. 2 (1962)
- 7) " ; " " Vol. 2 No. 4 (1963)
- 8) " ; " " Vol. 3 No. 1 (1963)
- 9) H. Maruo and M. Bessho; Journal of Zosen Kyokai Vol. 114 (1964)
- 10) A. Ikeda and N. Ōno; Graduation Thesis, Dept. of Mech. Engin., Defense Academy (March 1964)

On the Fundamental Function in the Theory of the Wave-Making Resistance of Ships

By Masatoshi BESSHO*

(Received June 24, 1964)

Abstract

The author introduces the functions which play important roles in the theory of the wave-making resistance of ships, converts their double integral to a simple one, obtains various integral representations and analyzes their properties especially in the relations of the well-known simple functions.

Then finally, he gives the list of the available tables of his or similar functions.

1. Introduction; Definition and Differentiation

It is difficult but necessary to compute the fundamental function in the theory of the wave-making resistance of ships for the development of this theory.

The author has tried to analyze this function and finds its double integral to be convertible to a simple one, making use of the velocity potential of T. H. Havelock⁽¹⁾, but the preceding works⁽²⁾⁽³⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾ were limited to the case of two variables x and t (see the definition below).

The functions are defined as follows⁽⁶⁾:

$$O_n^{(1)}(x, y, t) = \lim_{\mu \rightarrow +0} \frac{(-i)^n}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp. [-kt + ik(x \cos u + y \sin u)]}{k \cos^2 u - 1 + \mu i \cos u} \cos^{n+2} u \, dk du, \quad (1.1)$$

$$O_n^{(2)}(x, y, t) = \lim_{\mu \rightarrow +0} \frac{(-i)^n}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp. [-kt + ik(x \cos u + y \sin u)]}{k \cos^2 u - 1 - \mu i \cos u} \cos^{n+2} u \, dk du, \quad (1.2)$$

$$P_n(x, y, t) = \frac{1}{2} [O_n^{(1)}(x, y, t) - O_n^{(2)}(x, y, t)], \quad (1.3)$$

$$Q_n(x, y, t) = \frac{1}{2} [O_n^{(1)}(x, y, t) + O_n^{(2)}(x, y, t)], \quad (1.4)$$

where x , y and t are assumed real positive and n integer greater than -2 .

All functions are real and they have usually oscillatory parts but $O_n^{(1)}$ is monotonic for the positive x .

From the definition (1.3), we can easily find that

* Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering.

$$\left. \begin{aligned} P_{2n}(x, y, t) &= (-1)^n \int_0^{\pi/2} e^{-t \sec^2 u} \sin(x \sec u) \cos(y \sec^2 u \sin u) \cos^{2n} u du \\ P_{2n+1}(x, y, t) &= (-1)^{n+1} \int_0^{\pi/2} e^{-t \sec^2 u} \cos(x \sec u) \cos(y \sec^2 u \sin u) \cos^{2n+1} u du \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

These are the direct generalizations of Havelock's P_n function⁽¹⁾⁽²⁾.

For the negative x , we can easily find also that

$$\left. \begin{aligned} O_n^{(1)}(-x, y, t) &= (-1)^n O_n^{(2)}(x, y, t), \\ P_n(-x, y, t) &= (-1)^{n+1} P_n(x, y, t), \\ Q_n(-x, y, t) &= (-1)^n Q_n(x, y, t). \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

and then

$$O_n^{(1)}(-x, y, t) = (-1)^n [O_n^{(1)}(x, y, t) - 2P_n(x, y, t)]. \quad (1.7)$$

Accordingly, we don't consider the function $O_n^{(2)}$ in the following, because it is the same one as $O_n^{(1)}$ when the sign of x is reversed.

For the negative y , we have also

$$\left. \begin{aligned} O_n^{(1)}(x, -y, t) &= O_n^{(1)}(x, y, t), \\ P_n(x, -y, t) &= P_n(x, y, t), \\ Q_n(x, -y, t) &= Q_n(x, y, t). \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Now, the velocity potential of the unit source in the uniform flow of the unit velocity flowing from the positive x direction down to the negative at the point (x', y', z') under the water surface where the z -axis is taken positive vertically upwards, is written by T. H. Havelock⁽⁶⁾ as follows.

$$\begin{aligned} S(x, y, z; x', y', z') &= \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \\ &+ \frac{g}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp. [k(z+z') + ik(x-x') \cos \theta + ik(y-y') \sin \theta]}{k \cos^2 \theta - g + \mu i \cos \theta} dk d\theta, \end{aligned}$$

where g means the gravity constant in this unit system.

This is written by making use of the definition (1.1) as

$$\begin{aligned} S(x, y, z; x', y', z') &= \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \\ &+ 4g O_{-\frac{1}{2}}^{(1)}[g(x-x'), g(y-y'), -g(z+z')], \end{aligned} \quad (1.9)$$

Hence, the most fundamental functions are $O_{-\frac{1}{2}}^{(1)}$ and its derivatives.

In this respect, the definition (1.1) is not very convenient but we follow it merely because the author has used it to the present.

Differentiating the definition formula partially, we have

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \begin{matrix} O_n^{(1)} \\ Q_n \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} O_{n-1}^{(1)} \\ Q_{n-1} \end{matrix} \right\} + q_{n-1}, & \frac{\partial}{\partial x} P_n &= P_{n-1}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \begin{matrix} O_n^{(1)} \\ Q_n \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} O_{n-2}^{(1)} \\ Q_{n-2} \end{matrix} \right\} + q_{n-2}, & \frac{\partial}{\partial t} P_n &= P_{n-2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

where

$$\left. \begin{aligned} q_{2n}(x, y, t) &= \frac{(-1)^n}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} e^{-kt} \cos(kx \cos u) \cos(ky \sin u) \cos^{2n+2} u \, dk du, \\ q_{2n+1}(x, y, t) &= \frac{(-1)^n}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} e^{-kt} \sin(kx \cos u) \cos(ky \sin u) \cos^{2n+2} u \, dk du, \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

and we learn from this definition that

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} q_n &= \frac{\partial}{\partial t} q_{n+1}, \\ q_n + t \frac{\partial}{\partial t} q_n + x \frac{\partial}{\partial x} q_n + y \frac{\partial}{\partial y} q_n &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

and especially by integration

$$\left. \begin{aligned} q_{-3}(x, y, t) &= \frac{tx}{2r\rho^2}, & \rho^2 &= t^2 + y^2, & r^2 &= x^2 + y^2 + t^2, \\ q_{-2}(x, y, t) &= -\frac{1}{2r}, \\ q_{-1}(x, y, t) &= -\frac{1}{2r(r+t)}, \\ q_0(x, y, t) &= \frac{\rho^2 + rt}{2r(r+t)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Here we are to notice that the restriction for the order n may be rejected by the introduction of the relations (1.10) and (1.12).

Lastly, we can verify the next differential relations.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left\{ \begin{matrix} O_n^{(1)} \\ P_n \\ Q_n \end{matrix} \right\} = 0, \quad (1.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right) \left\{ \begin{matrix} O_n^{(1)} \\ P_n \\ Q_n \end{matrix} \right\} &= \frac{\partial}{\partial x} q_n, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right) P_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

And then, combining two equations, we have

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left\{ \begin{matrix} O_n^{(1)} \\ Q_n \end{matrix} \right\} &= -\frac{\partial}{\partial x} q_n, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \right) P_n &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

or

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left\{ \begin{matrix} O_n^{(1)} \\ Q_n \end{matrix} \right\} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial x} q_n, \\ \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) P_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

2. Integral Representation I.

Let us consider deforming the integral (1.1) in the simplest case $n=-1$.

Considering the integration with respect to u in (1.1), we can write also it as

$$O_{-1}^{(1)}(x, y, t) = \frac{i}{4\pi} \int_{\pi/2}^{\pi/2} \cos u \, du \int_0^\infty e^{-kt + ik y \sin u} \left[\frac{e^{ikx \cos u}}{k \cos^2 u - 1 + \mu i \cos u} - \frac{e^{-ikx \cos u}}{k \cos^2 u - 1 + \mu i \cos u} \right] dk.$$

If we change the variable k to m as $m = k \cos u$ and then u to v as $\sec u = \cosh v$, this becomes

$$O_{-1}^{(1)}(x, y, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty dv \int_0^\infty e^{-m\rho \cosh v (y - i\alpha)} \left[\frac{e^{imx}}{m + \mu i - \cosh v} - \frac{e^{-imx}}{m - \mu i - \cosh v} \right] dm,$$

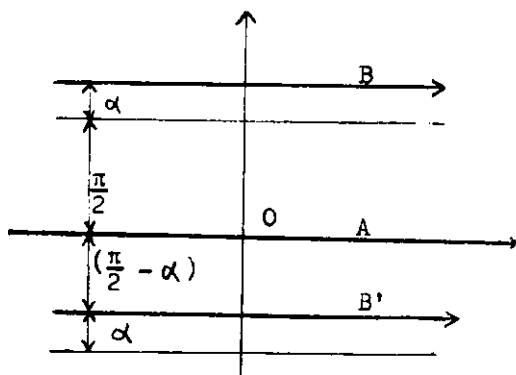


Fig. 1. v -plane

where $\rho = \sqrt{t^2 + y^2}$ and $\alpha = \tan^{-1}(y/t)$.

Now let us consider the integration with respect to v in the complex v -plane (see Fig. 1) and deform the path of integration A to the line B for the above first term and to B' for the second term.

Then, this integral on B and B' goes to

$$\frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^\infty du \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{im(\rho \sinh u - x)}}{m + i \sinh(u + i\alpha) - \mu i} dm,$$

and then integrate this with respect to m in the complex m -plane.

This is a well known integral and vanishes except $0 < u < \beta$, and equals

$$-\frac{1}{2} \int_0^\beta e^{-(x - \rho \sinh u) \sinh(u + i\alpha)} du, \text{ where } \beta = \sinh^{-1}(x/\rho).$$

Other parts of the integral are residues at the poles lying between the line A and B and between A and B' .

Calculating these residues and changing the variable slightly, we have finally

$$O_{-1}^{(1)}(x, y, t) = \frac{1}{2} \int_{L_1+L_2} \exp. [\{\rho \sinh(u-i\alpha) - x\} \sinh u] du, \quad (2.1)$$

where L_1 and L_2 are the paths of integration shown as in Fig. 2.

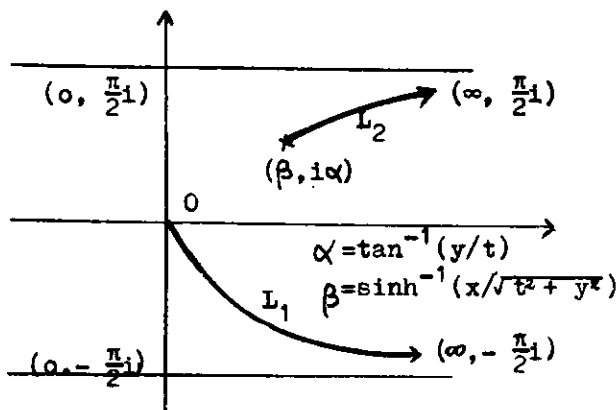


Fig. 2. u -plane

In the same way, we have generally

$$O_{-n}^{(1)}(x, y, t) = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \int_{L_1+L_2} \exp. [\{\rho \sinh(u-i\alpha) - x\} \sinh u] \sinh^{n-1} u du, \text{ for } n \geq 1, \quad (2.2)$$

The equivalent formula for the case $n=2$ and $y=0$ was obtained by R. Guilloton⁹⁾ who introduced it from Mitchell's integral, so that we may see the identity of his one with Havelock's¹¹⁾.

For the case $n \leq 0$, the integrand diverges near the origin, so that an artificial technique must be used.

Let us consider the case $n=0$ for example; we can write its integral as:

$$O_0^{(1)}(x, y, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{\cosh v} \int_0^{\infty} e^{-mt \cosh v} \cosh(my \sinh v) \left[\frac{e^{ims}}{m + \mu i - \cosh v} + \frac{e^{-ims}}{m - \mu i - \cosh v} \right] dm,$$

but

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh v}{\cosh v} dv \int_0^{\infty} e^{-mt \cosh v} \cos(my \sinh v) [\text{the same as the above}] dm = 0,$$

as easily from the symmetric character.

Hence, adding the latter integral to the former and integrating in the same way as the above, we have:

$$O_0^{(1)}(x, y, t) = -\frac{1}{2} \int_{L_1+L_2} \exp. [\rho \sinh(u-i\alpha) - x \sinh u] \frac{(1-\cosh u)}{\sinh u} du, \quad (2.3)$$

and moreover

$$O_1^{(1)}(x, y, t) = \frac{1}{2} \int_{L_1+L_2} \exp. [\text{the same as the above}] \frac{(1-\cosh u)}{\sinh^2 u} du, \quad (2.4)$$

$$O_2^{(1)}(x, y, t) = -\frac{1}{2} \int_{L_1+L_2} \exp. [\text{the same as the above}] \frac{(1-\cosh u + \frac{1}{2} \cosh u \sinh^2 u)}{\sinh^3 u} du. \quad (2.5)$$

All these formulas contain imaginary parts but only their real parts are to be taken.

Now, since we have already the integral representation of P_n as (1.5), subtracting it from the above formula, we have Q_n by the definition (1.3) and (1.4) as follows:

$$\left. \begin{aligned} Q_{-2n}(x, y, t) &= (-1)^{n-1} \int_0^{\pi/2} e^{-t \sin^2 u} \cosh(y \sin u \cos u) \cos(x \sin u) \sin^{2n-1} u du \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{\beta+i\alpha} \exp. [\rho \sinh(u-i\alpha) - x \sinh u] \sinh^{2n-1} u du, \text{ for } n \geq 1 \\ Q_{-2n-1}(x, y, t) &= (-1)^n \int_0^{\pi/2} e^{-t \sin^2 u} \cosh(y \sin u \cos u) \sin(x \sin u) \sin^{2n} u du \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{\beta+i\alpha} \exp. [\text{the same as the above}] \sinh^{2n} u du, \text{ for } n \geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

and

$$\begin{aligned} Q_0(x, y, t) &= - \int_0^{\pi/2} e^{-t \sin^2 u} \cosh(y \sin u \cos u) \cos(x \sin u) \frac{(1-\cos u)}{\sin u} du \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{\beta+i\alpha} \exp. [\{\rho \sinh(u-i\alpha) - x\} \sinh u] \frac{(1-\cosh u)}{\sinh u} du \\ &\quad + \int_0^{\infty} e^{-t \cosh^2 u} \cos(x \cosh u) \cos(y \cosh u \sinh u) \tanh u du, \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

The last one is equivalent to the next formula which is obtained by the integration of (2.6) making use of the relation (1.10).

$$\begin{aligned} Q_0(x, y, t) &= Q_0(0, y, t) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{r+t}{\rho+t} \right) \\ &\quad + \int_0^{\pi/2} e^{-t \sin^2 u} \cosh(y \sin u \cos u) [1 - \cos(x \sin u)] \frac{du}{\sin u} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{\beta+i\alpha} [1 - \exp. [\{\rho \sinh(u-i\alpha) - x\} \sinh u]] \frac{du}{\sinh u}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

3. Integral Representation II.

The preceding analysis enables us to compute their values numerically, but it is felt

that their integrands converge very slowly in the range for small t and y , especially in the formula (1.5) for the P_* function.

For such a range, the following analysis will be convenient for numerical works.

For convenience's sake, let us consider the function P_{-1} and other functions will be deduced by the differentiation and integration.

At first, we have from (1.5) after the substitution of the variable in its integral,

$$P_{-1}(x, y, t) = \frac{1}{2} \exp. \left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\rho \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp. [ix \cosh u - \rho \cosh^2 \left(u - i\frac{\alpha}{2} \right)] du, \quad (3.1)$$

where its real part is to be taken.

Since we have the integral

$$e^{-\rho \cosh^2 \left(u - i\frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\rho}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp. \left[-\frac{v^2}{4\rho} - iv \cosh \left(u - i\frac{\alpha}{2} \right) \right] dv,$$

we can rewrite it as

$$\frac{e^{-\frac{t}{2} + \frac{\rho}{2}}}{4\sqrt{\pi\rho}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp. \left(-\frac{v^2}{4\rho} \right) dv \int_{-\infty}^{\infty} \exp. \left[ix \cosh u - iv \cosh \left(u - i\frac{\alpha}{2} \right) \right] du,$$

If we introduce here the new variables as shown in Fig. 3, that is,

$$R \cos \phi = x - v \cos \frac{\alpha}{2}, \quad R \sin \phi = v \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$\text{or } R^2 = x^2 + v^2 - 2xv \cos \frac{\alpha}{2},$$

then we may write

$$x \cosh u - v \cosh \left(u - i\frac{\alpha}{2} \right) = R \cosh (u + i\phi).$$

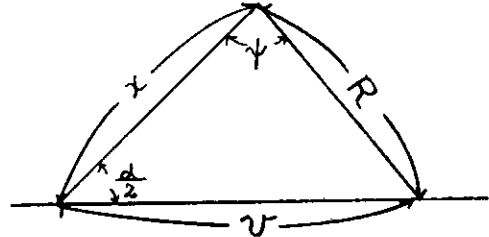


Fig. 3.

Thence, shifting the path of u -integration in parallel by ϕ and carrying out the integration which gives the Bessel function of the second species, we have finally

$$P_{-1}(x, y, t) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\rho}} e^{-\frac{t}{2} + \frac{\rho}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp. \left(-\frac{v^2}{4\rho} \right) Y_0(R) dv, \quad (3.2)$$

This is suitable for numerical computations when ρ is small.

When y vanishes, this becomes

$$P_{-1}(x, 0, t) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp. (-v^2/4t) Y_0(|x-v|) dv, \quad (3.3)$$

which was given by E. T. Goodwin¹⁰, and we see that the right hand side satisfies the differential equation (1.15), that is, of the heat conduction.

Moreover, taking care of this point, we have generally

$$P_n(x, y, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp.(-v^2/4t) P_n(x-v, y, 0) dv, \quad (3.4)$$

From the stand point that these function can be represented in the form of the solution of the partial differential equation, we can apply this method to the equations (1.14) and (1.16).

In the former case, Laplace's equation, there are many formulas but we will not consider them here.

In the latter case, we can change it to the next equation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{4} \right) [P_n(x, y, t) e^{\frac{t}{2}}] = 0, \quad (3.5)$$

This is analogous to the equation of the diffraction of the wave, but its wave number is imaginary, so that it will be treated in the same way¹⁾.

4. Expansion of P_n Function

Let us consider the function P_{-1} once more in the form (3.1), which equals also

$$P_{-1}(x, y, t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \int_{+\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho \cosh u} e^{2u-ia} \cos(x \cosh u) du, \quad (4.1)$$

Remembering the expansion ^{23) 28)}

$$\cos(x \cosh u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n J_{2n}(x) \cosh(2nu),$$

where ε_n means 1 for $n=0$, 2 for $n \geq 1$, and the definition

$$K_n\left(\frac{1}{2}\rho\right) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho \cosh u} du,$$

we can integrate (4.1) term by term as follows,

$$P_{n-1}(x, y, t) = \frac{1}{2} e^{-t/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n K_n\left(\frac{1}{2}\rho\right) J_{2n}(x) \cos n\alpha, \quad (4.2)$$

This series is convergent but its convergence is very slow for large value of the argument ($x^2/4\rho$), and so for such range the next asymptotic expansion may be suitable.

Namely, we proceed as the above expanding $\exp. \left[-\frac{1}{2}\rho \cosh(2u-ia) \right]$ in the Bessel function with the imaginary argument, and can obtain the expansion,

$$P_{-1}(x, y, t) = -\frac{\pi}{2} e^{-t/2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n I_n\left(\frac{1}{2}\rho\right) Y_{2n}(x) \cos n\alpha. \quad (4.3)$$

In general, we can not have such an elegant expression as this, but we can expand it in the Taylor series by the definition (1.10) as follows,

$$P_n(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} P_{n-m}(0, y, t), \quad (4.4)$$

$$P_n(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} P_{n-2m}(x, y, 0), \quad (4.5)$$

The former is convergent but the latter is divergent and an asymptotic expansion, and the functions in the right hand sides are expressible by known functions in the next three cases.

i) $P_n(x, 0, 0)$ is the same one as defined by T. H. Havelock⁽¹²⁾, that is,

$$\left. \begin{aligned} P_n(x, 0, 0) &= -\frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^x \dots \int_{-\infty}^x Y_0(x) dx^{n+1}, \text{ for } n \geq 0, \\ P_{-n}(x, 0, 0) &= -\frac{\pi}{2} \left(\frac{d}{dx} \right)^{n-1} Y_0(x), \text{ for } n \geq 1, \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

ii) $P_n(0, y, t)$ is zero for even n because it is odd in x by its definition, namely,

$$P_{2n}(0, y, t) = 0, \quad (4.7)$$

When n is odd, the simplest case is given by (4.2) putting in it x to zero, that is,

$$P_{-1}(0, y, t) = \frac{1}{2} e^{-t/2} K_0\left(\frac{1}{2}\rho\right), \quad (4.8)$$

and moreover by the definition

$$P_{-2n-1}(0, y, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \left[e^{-t/2} K_0\left(\frac{1}{2}\rho\right) \right], \text{ for } n \geq 0, \quad (4.9)$$

$$P_{2n-1}(0, y, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^t e^{-t/2} K_0\left(\frac{1}{2}\rho\right) dt^n, \text{ for } n \geq 0, \quad (4.10)$$

iii) When y vanishes too, the above relations become simpler and we can obtain the next recurrence formula by partial integration of the definition formula.

$$\left(n + \frac{1}{2} \right) P_{2n+1}(0, 0, t) = (t-n) P_{2n-1}(0, 0, t) + t P_{2n-3}(0, 0, t), \quad (4.11)$$

In another way, we have from (4.8) and (4.9), especially,

$$\left. \begin{aligned} P_{-1}(0, 0, t) &= \frac{1}{2} e^{-t/2} K_0\left(\frac{1}{2}t\right), \\ P_{-3}(0, 0, t) &= -\frac{1}{4} e^{-t/2} \left[K_0\left(\frac{1}{2}t\right) + K_1\left(\frac{1}{2}t\right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Then we can get all functions by arithmetic.

Finally, it is easy to see that

$$P_{2n+1}(0, 0, 0) = (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\frac{3}{2})}, \quad (4.13)$$

5. $O_n^{(1)}(x, 0, 0)$ and $O_n^{(1)}(0, y, t)$

The functions $O_n^{(1)}(x, y, t)$ or $Q_n(x, y, t)$ can not have such simple series expansions as in the preceding case, because they have a part expressed by indefinite integral as we see in § 2.

Then let us consider here their degenerate cases only.

Firstly, getting to zero y and t in (2.1), we have

$$O_{-1}^{(1)}(x, 0, 0) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x \sinh u} du = \frac{\pi}{4} [H_0(x) - Y_0(x)], \quad (5.1)$$

where H_0 means Struve's function⁽²⁸⁾⁽²⁹⁾.

By the integration and differentiation, we have directly

$$O_0^{(1)}(x, 0, 0) = -\frac{\pi}{4} \int_x^\infty \left[H_0(x) - Y_0(x) - \frac{2}{\pi x} \right] dx, \quad (5.2)$$

$$O_{-1}^{(1)}(x, 0, 0) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} [H_1(x) - Y_1(x)], \quad (5.3)$$

and the recurrence formula

$$\begin{aligned} & nO_n^{(1)}(x, 0, 0) + (n-1)O_{n-2}^{(1)}(x, 0, 0) \\ &= x[O_{n-1}^{(1)}(x, 0, 0) + O_{n-3}^{(1)}(x, 0, 0) + q_{n-1}(x, 0, 0) + q_{n-3}(x, 0, 0)], \end{aligned} \quad (5.4)$$

where q_n is easily found to be

$$\left. \begin{aligned} q_{2n}(x, 0, 0) &= 0, \quad q_{2n-1}(x, 0, 0) = \frac{(-1)^{n-1} \Gamma(n+\frac{1}{2})}{2x\sqrt{\pi} \Gamma(n+1)}, \\ q_{-2}(x, 0, 0) &= -\frac{1}{2x} \text{ and } q_{-n}(x, 0, 0) = \infty \text{ for } n \geq 3. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

These functions correspond to Havelock's Q_n function which are defined as⁽¹⁵⁾⁽²⁹⁾

$$\left. \begin{aligned} Q_0(x) &= \frac{\pi}{2} \int_0^x [H_0(x) - Y_0(x)] dx, \\ Q_n(x) &= \int_0^x Q_{n-1}(x) dx. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

After fairly long calculation in the formulas (2.3) to (2.5), we can obtain the following relations.

$$\left. \begin{aligned} Q_0(x) &= \log(2\gamma x) + 2O_0^{(1)}(x, 0, 0), \\ Q_1(x) &= x \log(2\gamma x) + 1 - x + 2O_1^{(1)}(x, 0, 0), \\ Q_2(x) &= \frac{(x^2 - 1)}{2} \log(2\gamma x) + \frac{1}{4} + x - \frac{3}{4}x^2 + 2O_2^{(1)}(x, 0, 0), \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Here γ means Euler's constant $1.78108 \dots$.

One of the conveniences of using our $O_n^{(1)}$ function is that each of it has a simple asymptotic nature and tends to zero when x tends to infinity.

Secondly, when x vanishes, we have by its symmetrical nature

$$\left. \begin{aligned} O_{2n}^{(1)}(0, y, t) &= Q_{2n}(0, y, t), \\ O_{2n+1}^{(1)}(0, y, t) &= P_{2n+1}(0, x, t). \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Since the latter case is already discussed, we will consider the former only.

By the integral (2.2), we may write it as

$$Q_{-2}(0, y, t) = O_{-2}^{(1)}(0, y, t) = -\frac{1}{2}e^{-t/2} \int_{L_1 + L_2} \exp. \left[\frac{1}{2}\rho \cosh(2u - i\alpha) \right] \sinh u \, du,$$

Here L_1 and L_2 are the paths shown in Fig. 2 but here $\beta = 0$.

Now, let us deform the paths L_1 and L_2 as shown in Fig. 4.

Then, the integrations along the lines parallel to the real axis cancel out each other and after some calculations we have

$$\begin{aligned} Q_{-2}(0, y, t) &= \cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) e^{-t/2} \int_0^{\frac{\pi-\alpha}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho \cos 2\sigma} \cos \sigma \, d\sigma \\ &= \frac{(\rho+t)}{2\rho} E_0\left(\frac{\rho+t}{2}\right), \end{aligned} \quad (5.9)$$

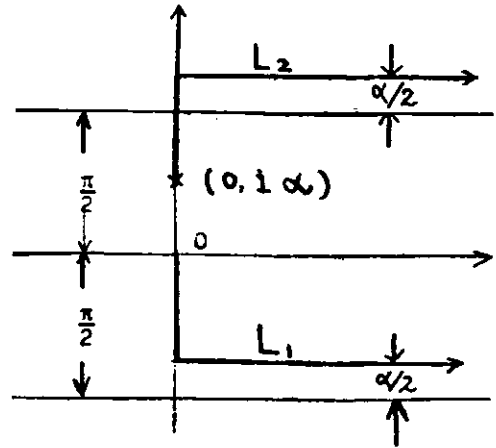


Fig. 4. u -plane

Here

$$E_0(z) = \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{z}} e^{u^2} \, du = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{\Gamma(n+3/2)}. \quad (5.10)^{(22)(23)}$$

In the same way but after long calculations, we have also

$$Q_0(0, y, t) = -\frac{1}{2} \log[2\gamma(\rho+t)] + \int_0^{\frac{\rho+t}{2}} E_0(z) \, dz. \quad (5.11)$$

Finally, if y vanishes too, we have directly from the above

$$\left. \begin{aligned} Q_0(0, 0, t) &= -\frac{1}{2} \log(4\gamma t) + \int_0^t E_0(z) dz, \\ Q_{-2}(0, 0, t) &= E_0(t), \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

and by partial integration of the definition formula

$$\begin{aligned} & nQ_{2n}(0, 0, t) + \left(n - \frac{1}{2}\right)Q_{2n-2}(0, 0, t) \\ &= t[Q_{2n-2}(0, 0, t) + Q_{2n-4}(0, 0, t) + q_{2n-2}(0, 0, t) + q_{2n-4}(0, 0, t)], \end{aligned} \quad (5.13)$$

where

$$\left. \begin{aligned} q_{-n}(0, 0, t) &= 0 \text{ for } n \geq 3, \quad q_{-2}(0, 0, t) = -\frac{1}{2t}, \\ q_0(0, 0, t) &= \frac{1}{4t}, \text{ etc.} \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

6. Neighbourhood of the Origin

Our functions have three arguments so that we may lose their general character even near the origin.

Then, let us consider the character near the origin for a moment.

Firstly, considering the function $O_n^{(1)}$, the simplest case $n=-2$, we have from (5.3) and (5.9)

$$O_{-2}^{(1)}(x, 0, 0) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} + \frac{x}{4} \log(\gamma x/2) + \dots, \quad (6.1)$$

$$O_{-2}^{(1)}(0, y, t) \xrightarrow{y, t \rightarrow 0} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left[1 - \frac{(\rho+t)}{3} + \dots \right], \quad (6.2)$$

Namely, it may be finite near the origin because it does along three axes as we see and this is confirmed in fact by R. Guilton's table⁹⁾ (See § 9 also).

If so, it is smaller and negligible compared with $q_{-2} = -1/2r$ near the origin so that we may conclude from (4.8) and the definition that

$$\begin{aligned} O_{-1}^{(1)}(x, y, t) &= O_{-1}^{(1)}(0, y, t) + \int_0^r [O_{-2}(x, y, t) + q_{-2}(x, y, t)] dx \\ &\doteq \frac{1}{2} \log(4\gamma r \rho) - \frac{1}{2} \log\left(\frac{r+x}{\rho}\right) = -\frac{1}{2} \log\left[\frac{\gamma(r+x)}{4}\right], \end{aligned} \quad (6.3)$$

and then, differentiating it,

$$O_{-3}^{(1)}(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} O_{-1}^{(1)}(x, y, t) - q_{-3}(x, y, t) \doteq -\frac{t}{2r(r+x)} - \frac{tx}{2r\rho^2} = -\frac{t}{2\rho^2}, \quad (6.4)$$

Secondly, let us consider P_{-1} of (4.2) near the origin.

Since we have²⁶⁾

$$K_0\left(\frac{1}{2}\rho\right) \doteq \log(4/r\rho), \quad K_n\left(\frac{1}{2}\rho\right) \doteq \frac{(n-1)!}{2} \left(\frac{4}{\rho}\right)^n, \quad \text{and} \quad J_{2n}(x) \doteq \frac{(x/2)^{2n}}{(2n)!},$$

its series equals nearly

$$\begin{aligned} P_{-1}(x, y, t) &\doteq \frac{1}{2} \log(4/r\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n-1)!}{(2n)!} \left(\frac{x}{\rho}\right)^n \cos n\alpha \\ &= \frac{1}{2} \log(4/r\rho) - \int_0^{\frac{x^2}{4\rho}} e^{i\alpha} E_0(z) dz. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Here its real part is to be taken.

In this formula, if $(x^2/4\rho)$ is small, the integral in the right hand side is also small, but this is not the general case.

Namely, when x and ρ are small but $(x^2/4\rho)$ is very large, this integral increases logarithmically as

$$\int_0^z E_0(z) dz \doteq \frac{1}{2} \log(4rz),$$

so that we may obtain

$$P_{-1}(x, y, t) \underset{\substack{x, \rho \rightarrow 0, \\ (x^2/4\rho > 1)}}{=} \log(2/rx). \quad (6.6)$$

This is coincident with the predominant term of (4.3) which may be valid for such range.

Lastly, we can obtain in the same way as the above

$$P_{-2}(x, y, t) \doteq \frac{x}{4} \log(r\rho/4) - \frac{x}{\rho} e^{i\alpha} E_0\left(\frac{x^2}{4\rho} e^{i\alpha}\right), \quad (6.7)$$

where the real part only is to be taken.

7. Asymptotic Property of $O_n^{(1)}$

Although the function $O_n^{(1)}$ is complicated in nature as we have seen, but it is fairly smaller compared with the P_n function, and that it decreases monotonically and has an asymptotic expansion when its arguments tend towards infinity.

Now, let us consider that $r = \sqrt{x^2 + y^2 + t^2}$ is very much larger than the unity.

Returning to the integral (1.1) and expanding its dominator of the integrand as

$$\frac{1}{k \cos^2 u - 1} = -(1 + k \cos^2 u + k^2 \cos^4 u + \dots),$$

Let us integrate term by term and use the definition (1.11); then we have

$$O_n^{(1)}(x, y, t) \doteq - \left[q_n(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial t} q_{n+2}(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} q_{n+4}(x, y, t) + \dots \right], \quad (7.1)$$

For example, making use of (1.13) we see that

$$O_0^{(1)}(x, y, t) \doteq - \frac{rt + \rho^2}{2r(r+t)^2} - \dots, \quad \rho = \sqrt{t^2 + y^2}, \quad (7.2)$$

$$O_{-1}^{(1)}(x, y, t) \doteq \frac{x}{2r(r+t)} + \frac{x[3\rho^2(r+t) + 2tx^2]}{2r^3(r+t)^3} + \dots, \quad (7.3)$$

$$O_{-2}^{(1)}(x, y, t) \doteq \frac{1}{2r} + \frac{\rho^2(r+t) - rx^2}{2r^3(r+t)^2} + \dots, \quad (7.4)$$

which are coincident with the asymptotic characters in the degenerate cases of § 5.

The first term of the right hand side of (7.4) is a well-known mirror image term and was given by R. Guilton from the observation of his table⁹⁾ (see § 9 also).

8. Asymptotic Property of P_{-1}

In contrast to $O_n^{(1)}$ function, P_n function takes a comparatively larger value even at the point far from the origin, and it shows a well-known Kelvin's wave pattern which has been studied by many authors⁽¹⁴⁾⁽²⁶⁾⁽²⁷⁾.

Here we consider the asymptotic expansion of our simplest function P_{-1} following their methods.

Let us rewrite (3.1) as follows,

$$P_{-1}(x, y, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixf(u)} du, \quad (8.1)$$

that is,

$$f(u) = \cosh u - \frac{y}{2x} \sinh 2u + \frac{it}{x} \cosh^2 u, \quad (8.2)$$

and apply the saddle point method⁽²⁸⁾.

To obtain the saddle point from (8.2), the equation

$$f'(u) = \sinh u - \frac{y}{x} \cosh 2u + \frac{it}{x} \sinh 2u = 0, \quad (8.3)$$

must be solved, but it is easily found that this goes to the equation of the fourth degree and its solution is very complicated.

Hence, keeping out of confusion we will take up much simpler cases.

A) The case $y=0$

The equations (8.2) and (8.3) become

$$f(u) = \cosh u + \frac{it}{x} \cosh^2 u, \quad (8.4)$$

$$f'(u) = \sinh u + \frac{2it}{x} \sinh 2u = 0, \quad (8.5)$$

so that the saddle point to be used is the origin.

Now, putting

$$p = f(u) - f(0) = \frac{u^2}{2!} f''(0) + \frac{u^4}{4!} f^{(4)}(0) + \dots, \quad (8.6)$$

where
$$f''(0) = 1 + \frac{2it}{x}, \quad f^{(4)}(0) = 1 + \frac{8it}{x}, \dots \quad (8.7)$$

we may write (8.1) as

$$P_{-1}(x, 0, t) = e^{ixf(0)} \int_0^\infty e^{ixp^2} \left(\frac{du}{dp} \right) dp. \quad (8.8)$$

Then, if we expand as

$$\frac{du}{dp} = \sqrt{\frac{2}{f''(0)}} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} p^{2n},$$

namely,
$$a_{2n} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\sqrt{f''(0)/2}}{p^{2n+1}} dp, \quad (8.9)$$

the integration of (8.8) can be carried out term by term and we have

$$P_{-1}(x, 0, t) = \frac{\exp.(-t + ix + \frac{1}{2}\pi i)}{\sqrt{2x + 4it}} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{(-it)^n}, \quad (8.10)$$

where
$$a_0 = 1, \quad a_2 = -\frac{f^{(4)}(0)}{2[f''(0)]^2}, \quad (8.11)$$

as we get from (8.6) and (8.9).

B) The case $t=0$

The equation (8.2) and (8.3) go to

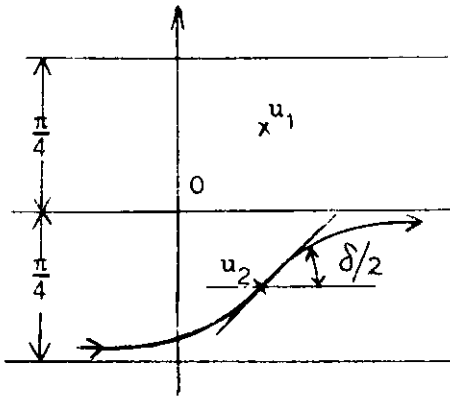
$$f(u) = \cosh u - \frac{y}{2x} \sinh 2u, \quad (8.12)$$

$$f'(u) = \sinh u - \frac{y}{2x} \cosh 2u, \quad (8.13)$$

Then, the saddle points are two, that is,

$$\sinh \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{e^{\pm \varepsilon}}{\sqrt{2}}, \quad \varepsilon = \cosh^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{8y}} \right), \quad (8.14)$$

so that there may be three cases if x is smaller, larger than or nearly equal to $\sqrt{8y}$.

Fig. 5a. u -plane

i) If x is smaller than $\sqrt{8y}\varepsilon'$ in (8.14) is purely imaginary and the saddle points are as shown in Fig. 5a and the point u_2 may be used after some consideration.

Putting $\varepsilon = i\varepsilon'$ and

$$\left. \begin{aligned} \cosh u_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 + e^{-2i\varepsilon'}} = \frac{\rho e^{-i\delta}}{\sqrt{2}}, \\ \text{namely, } \rho &= \sqrt{5 + 4 \cos 2\varepsilon'}, \\ \tan 2\delta &= \frac{\sin 2\varepsilon'}{2 + \cos 2\varepsilon'}, \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

we may write $f(u)$ and its derivatives at this point as follows,

$$\left. \begin{aligned} f(u_2) &= \frac{\rho e^{-i\delta}}{4\sqrt{2}} (3 + i \tan \varepsilon'), \\ f''(u_2) &= \frac{i\rho}{\sqrt{2}} \tan \varepsilon' e^{-i\delta}, \quad f'''(u_2) = -\frac{3}{\sqrt{2}} e^{-i\varepsilon'}, \\ f^{(4)}(u_2) &= \frac{\rho e^{i(\varepsilon' - \delta)}}{\sqrt{8 \cos \varepsilon'}} (1 - 7e^{-2i\varepsilon'}). \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

Now, let us take the path of integration as shown in Fig. 5a and integrate as

$$P_{-1}(x, y, 0) = \frac{1}{2} e^{ixf(u)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xp^2} \left(\frac{dv}{dp} \right) dp, \quad (8.17)$$

where

$$\left. \begin{aligned} ip^2 &= f(u) - f(u_2) = \frac{v^2}{2!} f''(u_2) + \frac{v^3}{3!} f'''(u_2) + \dots \\ v &= u - u_2 \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

Expanding as

$$\left(\frac{dv}{dp} \right) = \sqrt{\frac{2i}{f''(u_2)}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n, \quad a_n = \frac{\sqrt{f'''(u_2)/2i}}{2\pi i} \oint \frac{dv}{p^{n+1}}, \quad (8.19)$$

that is especially

$$a_0 = 1, \quad a_2 = \frac{i[f^{(3)}(u_2)]^2}{12[f''(u_2)]^3} - \frac{if^{(4)}(u_2)}{4[f''(u_2)]^2},$$

we have finally

$$P_{-1}(x, y, 0) = \frac{1}{2} e^{ixf(u_2) + i\delta/2} \sqrt{\frac{\pi}{y\rho \sin \varepsilon'}} \left[1 + \frac{a_2}{2x} + \dots \right] \quad (8.20)$$

ii) When $x > \sqrt{8}y$, ε is real and the saddle points lie on the real axis as shown in Fig. 5b.

This is a well known case in which there are the diverging and transverse wave-systems inner the Kelvin angle⁽²⁶⁾.

In this case, $f(u)$ and its derivatives are all real and they are

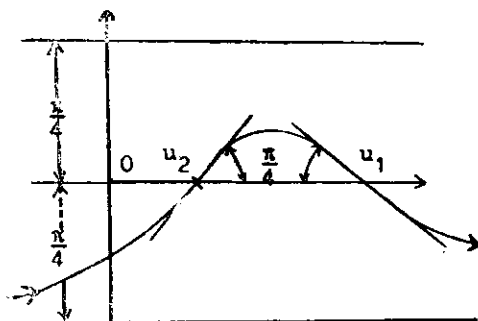


Fig. 5b. u -plane

$$\left. \begin{aligned} f(u_j) &= \frac{\cosh^3 u_j}{\cosh 2u_j} = \left(1 + \frac{1}{2}e^{\pm 2\varepsilon}\right)^{3/2} e^{\mp \varepsilon} / (2 \cosh \varepsilon), \\ f''(u_j) &= \mp \sqrt{1 + \frac{1}{2}e^{\pm 2\varepsilon} \tanh \varepsilon}, \\ f'''(u_j) &= -\frac{3}{\sqrt{2}}e^{\pm \varepsilon}, \quad f^{(4)}(u_j) = \sqrt{1 + \frac{1}{2}e^{\pm 2\varepsilon}(e^{\mp \varepsilon} - 7e^{\pm \varepsilon})} / (2 \cosh \varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (8.21)$$

where $j=1$ or 2 and the double sign is taken as the upper one for $j=1$ and the lower for $j=2$.

In a usual way, let us integrate along the paths shown in Fig. 5b, namely,

$$\left. \begin{aligned} P_{-1}(x, y, 0) &= \sum_{j=1,2} \frac{1}{2} e^{ixf(u_j)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xp^2} \frac{du}{dp} dp, \\ \text{where} \quad ip^2 &= f(u) - f(u_j) = \frac{v^2}{2!} f''(u_j) + \frac{v^3}{3!} f'''(u_j) + \dots, \\ v &= u - u_j, \end{aligned} \right\} \quad (8.22)$$

expanding as

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dp} &= e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{f''(u_j)}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n, \\ a_0 &= 1, \quad a_2 = \frac{i[f'''(u_j)]^2}{12[f''(u_j)]^3} - \frac{if^{(4)}(u_j)}{4[f''(u_j)]^2}, \end{aligned} \right\} \quad (8.23)$$

then we have

$$P_{-1}(x, y, 0) \doteq \sum_{j=1,2} e^{ixf(u_j) + i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{2xf''(u_j)}} \left(1 + \frac{a_2}{2x} + \dots\right). \quad (8.24)$$

iii) When x is nearly equal to $\sqrt{8}y$, the preceding two formulas give wrong approximation.

In this case, the most reasonable formula owes to F. Ursell⁽²⁷⁾ and we will follow his analysis.

Let us consider ε as real and put (8.12) as

$$\left. \begin{aligned} f(u) &= -\frac{v^3}{3} + v\mu(\varepsilon) + \nu(\varepsilon), \\ \mu(\varepsilon) &= \left[\frac{3}{4} \{f(u_1) - f(u_2)\} \right]^{2/3}, \quad \nu(\varepsilon) = \frac{1}{2} [f(u_1) \mp f(u_2)] \end{aligned} \right\} \quad (8.25)$$

namely ,

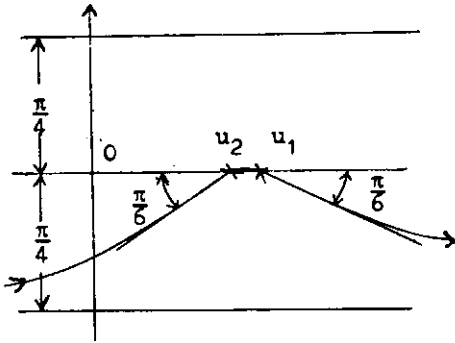


Fig. 5c. u -plane

then the saddle points in v -plane are

$$\left. \begin{aligned} v_1 \\ v_2 \end{aligned} \right\} = \pm \sqrt{\mu(\varepsilon)}. \quad (8.26)$$

Now, if we may expand as

$$\frac{du}{dv} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (v^2 - \mu)^n + v \sum_{n=0}^{\infty} b_n (v^2 - \mu)^n, \quad (8.27)$$

and take the path of integration as shown in Fig. 5c, we can integrate as follows,

$$\begin{aligned} P_{-1}(x, y, 0) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp. \left[ix \left(-\frac{v^3}{3} + v\mu + \nu \right) \right] \frac{du}{dv} dv \\ &= \frac{\pi e^{i2\nu(2)}}{x^{1/3}} \left[a_0 A_i(-\mu x^{2/3}) + \frac{ib_0}{x^{1/3}} A_i'(-\mu x^{2/3}) + \dots \right], \end{aligned} \quad (8.28)$$

where

$$A_i(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \left(\frac{p^3}{3} + zp \right) dp,$$

that is the Airy's integral²⁶⁾.

The coefficients a_0 and b_0 are found to be

$$\left. \begin{aligned} a_0 \\ b_0 \end{aligned} \right\} = \mu^{1/4} \left[\frac{1}{\sqrt{f''(u_2)}} \pm \frac{1}{\sqrt{|f''(u_1)|}} \right] / \sqrt{2}. \quad (8.29)^{27)}$$

Finally, it is easily seen that the formula (8.28) is applicable for the imaginary ε , that is, outer region of Kelvin angle in which case μ of (8.25) is negative and the argument of Airy's integral changes to positive²⁷⁾.

9. On the Numerical Tables

There are many tables of such functions prepared for the object to compute the wave-making resistance or the wave profile and pattern.

The followings are their list available for us in our notation.

- I) a) $P_n(x, 0, 0)$ for $n=0(1)9$ and $x=0(0.4)4.4, 5(1)40$
 where the number in the parentheses means the interval of the parameter.
 with 4 significant figures by T. Jinnaka¹⁹⁾.
- b) $\frac{2}{\pi}P_0(x, 0, 0)$ and $\frac{2}{\pi}[P_1(x, 0, 0)-1]$,
 for $x=0(0.1)1.0(0.2)10.0(0.4)50.0$ with 4 figs., by T. Inui¹⁸⁾.
- c) $P_n(x, 0, 0)$ for $n=-7(1)1$, $x=0(0.5)2(1)16$ with 7 figs., by M. Bessho⁶⁾.
- d) $P_n(0, 0, t)$ for $n=-7(2)5$, $t=0\sim 10$, with 6 figs. and $U_n(t)=(-1)^nP_{-2n-1}(0, 0, t)$ for
 $n=0(1)31$, $t=0\sim 6$ with 10 figs. by M. Bessho⁶⁾.
- e) $\frac{1}{2\pi}Q_0(x)$ and $\frac{1}{2\pi}Q_1(x)$, for $x=0(0.1)1.0(0.2)10.0(0.4)50$ with 4 figs. by T. Inui¹⁸⁾.
- f) $O_n^{(1)}(x, 0, 0)$ for $n=-2, -1, 0$, $x=0(0.5)2(1)16$ and $\int_0^x O_{-1}^{(1)}(x, 0, 0)dx$ and
 $\left(\frac{d}{dx}\right)^n O_{-1}^{(1)}(x, 0, 0)$ for $n=1(1)4$, $x=0(0.5)2(1)16$ with 7 figs. by M. Bessho⁶⁾.
- g) $Q_{2n}(0, 0, t)$ for $2n=-6(2)4$, $t=0(0.1)1.0(0.2)10$ with 6 figs.
 $E_0(t), \int_0^t E_0(t)dt$ for $t=0(0.1)1(1)10$ with 10 figs. and $E_n(t)=(-1)^nQ_{-2n-2}(0, 0, t)$ for
 $n=0(1)9$, $t=0\sim 3.2$ with 8 figs. by M. Bessho⁶⁾.
- II) a) $P_{-3}(x, 0, t)$ for $x=0\sim 60$, $\sqrt{t}=0\sim 1.0$ with 4 figs. by National Physical
 Laboratory, Ma/16/1502²⁵⁾.
- b) $P_{-1}(x, 0, t)$ and $O_{-1}^{(1)}(x, 0, t)$ for $x=0\sim 19.5$, $t=0\sim 1.0$, with 4 figs. by T. Takahei²⁰⁾.
- c) $O_{-1}^{(1)}(x, 0, t)$ and the wave elevation by a point doublet along its path, with 4
 figs. by Tokyo University³¹⁾.
- d) $P_{-1}(x, 0, t)$ and $O_{-1}^{(1)}(x, 0, t)$ for $x=0\sim 27$, $t=0\sim 5.2$ with 8 figs. by T. Iwata³²⁾.
 These four tables are prepared for the computation of the wave-making resist-
 ance and the wave profile.
- e) $P_n(x, 0, t)$ for $n=-7(1)2$, $x=0\sim 16$, $t=0\sim 6$ and $O_n^{(1)}(x, 0, t)$ for $n=-3(1)-1$,
 $x=0\sim 16$, $t=0\sim 6$ are prepared for the computation of the submerged body
 problem by M. Bessho⁶⁾.
- III) a) $\frac{S}{n^2}(x, y, a+z)=-\frac{g}{\pi V^2}O_{-2}^{(1)}\left[\frac{g|x|}{V^2}, \frac{gy}{V^2}, \frac{-g(a+x)}{V^2}\right]$ and
 $\frac{A}{n^2}(x, y, a+z)=\frac{g}{\pi V^2}P_{-2}\left[\frac{g|x|}{V^2}, \frac{gy}{V^2}, \frac{-g(a+z)}{V^2}\right]$,
 setting $g/V^2=0.4$, for $gx/V^2=0\sim 20$, $gy/V^2=0\sim 4$ and $-g(a+z)/V^2=0\sim 0.8$ with 3
 figs. by R. Guilloton⁸⁾⁹⁾.

- b) $\frac{1}{2\pi} Z_l(q, \theta) - Z_w(q, \theta) = \frac{1}{2} \log(2rq) + O_0^{(1)}(x, y, 0)$, for $q = \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \sim 20$, $\theta = \tan^{-1}(y/x)$
 $= 0 \sim 180^\circ$ given almost by figures by T. Jinnaka²⁰⁾.

10. Conclusion

The preceding analysis shows that

1. the function considered is represented by single integral instead of double integral so that the computation may become simpler.
2. the various limits of the function are considered and related to the known functions as far as possible so that the general feature may be elucidated.

We have the similar work by R. Guilloton in which he showed heuristically and numerically its property and the extraordinary way of computing the various quantities of the velocity field around the ship with the aid of his tables, but, mathematically speaking, his method has some difficulties which we hesitate to proceed with.

Our final outcome must be the same as his and this work might be the second step in the attack on this problem.

References

- 1) Bateman, H., "Partial differential equation of mathematical physics", Cambridge, (1932)
- 2) Bessho, M., Report of the graduate course, Tokyo University (1955)
- 3) " , Journal of Zosen Kyokai, Vol. 98 (1956)
- 4) " , " " Vol. 106 (1960)
- 5) " , " " Vol. 106 (1961)
- 6) " , Doctoral thesis (1961)
- 7) " , Memoirs of Defense Academy, Yokosuka, Vol. 2 No. 4 (1963)
- 8) Guilloton, R., Bulletin de la Association Technique Maritime et Aeronautique, Paris, (1956)
- 9) " , Transaction of Institute of Naval Architects, Vol. 102 (1960)
- 10) Goodwin, E. T., Mathematical tables and other aids to computation, Vol. 10, p. 96 (1956)
- 11) Hanaoka, T., Journal of Zosen Kyokai, Vol. 90 (1956)
- 12) Havelock, T. H., Proceeding of Royal Society, A. Vol. 103 (1923)
- 13) " , " " " " Vol. 108 (1925)
- 14) " , " " " " Vol. 121 (1928)
- 15) " , " " " " Vol. 135 (1932)
- 16) " , " " " " Vol. 138 (1932)
- 17) Hogner, E., " " " " Vol. 155 (1936)
- 18) Inui, T., Journal of Zosen Kyokai, Vol. 100 (1957)
- 19) Jinnaka, T., " " " " Vol. 84 (1952)
- 20) " , Journal of Seibu Zosen Kyokai, Vol. 11 (1961) or Doctoral thesis (1960)
- 21) Lowan, A. N. & Abramovitz, M., N.B.S. Applied Mathematics Series No. 37, Washington, (1954)
- 22) Lohmander, B. & Rittsen, S., Department of numerical analysis Table No. 4, Lund University, Sweden. (1958)

- 23) Magnus, W. & Oberhettinger, F., "Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik" Springer, Berlin, (1948)
- 24) Maruo, H., Journal of Zosen Kyokai, Vol. 81 (1949)
- 25) Shearer, J. R., Transaction of north-east coast Institution of Engineers and Shipbuilders, Vol. 67 (1951)
- 26) Stoker, J. J., "Water Waves" New York. (1957)
- 27) Ursell, F., Journal of Fluid Mechanics, Vol. 8 (1960)
- 28) Watson, G. N., "Theory of Bessel Functions", 2nd edition, Cambridge, (1952)
- 29) Wigley, W. C. S., Proceeding of Royal Society, A. Vol. 144 (1934)
- 30) Wave-Resistance Subcommittee of Japan Towing Tank Committee, Pamphlet W2-1 (1960)
- 31) " " " W3-4 (1961)
- 32) " " " W4-4 (1962)

波の中の船の横揺れ運動の理論について

別 所 正 利*

(昭和 40 年 3 月 20 日受付)

1. 序 言 波の中における船の横揺れに関する従来の理論は所謂フルード・クリロップの仮定, すなわち波長が船の幅に比して大きい時は船体による波の反射などを無視し得るという仮定に基づいて組立てられてをり, 理論的には不都合であるけれども実験的事実を良く説明できる¹⁾²⁾。また従来の理論では左右揺れは横揺れに殆んど影響を及ぼさないと考えられているが, 静水中で自由揺れをしている時は良い³⁾としても波の中で揺れる時迄この考えを適用することには大きい疑問がある。

一方これらの問題に関する造波抵抗理論的研究は現在詳しい数値計算に至る迄完備している⁴⁾と言って良い状態であるので, 二次元線型理論の範囲内での詳細な検討が可能である。

この研究では具体的な数値には触れないで, できる限り総括的にこの問題を眺めて従来の理論との異同を検討して見たい。

2. 速度ポテンシャルの導入¹⁶⁾ 右図のように座標軸をとり, 物体は左右対称で且つ紙面に直角な方向に無限に筒形をなして続いている, 現象はすべて二次元的に起こるものとする。

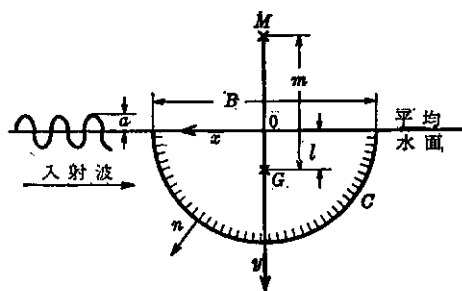
圧力を P , 水の密度を ρ , 重力の定数を g , 速度ポテンシャルを Φ , 時間を t とし, 二次の項を無視するとベルヌーイの式は

$$\frac{1}{\rho} P(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, y, t) + gy, \quad (2. 1)$$

となり, 特に水面では圧力が一定であるから

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, 0, t) + g\eta(x, t) = 0, \quad (2. 2)$$

ただし η は水面の変位とする。



* 機械工学教室 助教授

一方、水面の下向きの速度は

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(x, t) = -\frac{\partial}{\partial y} \Phi(x, 0, t), \quad (2. 3)$$

でなければならないから、これと (2. 2) とから η を消去すると次式が得られる。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(x, 0, t) - g \frac{\partial}{\partial y} \Phi(x, 0, t) = 0, \quad (3. 4)$$

今現象がすべて周期的に起こっているものとして

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, t) &= \Re [\varphi(x, y) e^{i\omega t}], \\ P(x, y, t) &= \Re [p(x, y) e^{i\omega t}], \\ \eta(x, y, t) &= \Re [a(x) e^{i\omega t}], \end{aligned} \right\} \quad (2. 5)$$

のように置いて考え、さらに添字 c および s でそれぞれ次のように実部および虚部を表わすことにする。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y) &= \varphi_c(x, y) + i\varphi_s(x, y), \\ \Phi(x, y, t) &= \varphi_c \cos \omega t - \varphi_s \sin \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (2. 6)$$

そうすると (2. 4) は

$$K\varphi(x, 0) + \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, 0) - \mu i \varphi(x, 0) = 0, \quad (2. 7)$$

ただし $K = \omega^2/g = 4\pi^2/gT^2 = 2\pi/\lambda$, T : 周期, λ : 波長。

と書くことができる。この μ は波の出る方向を決める為のレーリーの摩擦係数である。

このようにおくと静水圧を除く圧力は (2. 1) によって

$$P(x, y, t) = \Re [p(x, y) e^{i\omega t}] = \Re [\rho i \omega \varphi(x, y) e^{i\omega t}]$$

$$\text{すなわち} \quad p(x, y) = \rho i \omega \varphi(x, y) \quad (2. 8)$$

同様にして水面変位は (2. 3), (2. 4) から (2. 5) を参照して、次のように与えられる。

$$a(x) = \frac{\omega}{ig} \varphi(x, 0), \quad (2. 9)$$

3. グリーン函数⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾ 点 (x', y') に単位量の吸込みがある時の水面条件を満足する速度ポテンシャルは

$$G(x, y; x', y') = \log \left(\frac{r_1}{r_2} \right) - 2 \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_0^\infty \frac{e^{-k(y+y')} \cos k(x-x')}{k-K+\mu i} dk, \quad (3. 1)$$

$$\text{ただし} \quad r_1^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2, \quad r_2^2 = (x-x')^2 + (y+y')^2,$$

で与えられるが以下これをグリーン函数と呼ぼう。

これは次の微分方程式を満足する。

$$\left(K + \frac{\partial}{\partial y} - \mu i \right) G(x, y; x', y') = \left(K - \frac{\partial}{\partial y'} - \mu i \right) \log \left(\frac{r_1}{r_2} \right), \quad (3. 2)$$

また実部と虚部にわけると、

$$\left. \begin{aligned} G &= G_c + iG_s, \\ G_c &= \log \left(\frac{r_1}{r_2} \right) - 2P. \int_0^\infty \frac{e^{-k(y+y')} \cos k(x-x')}{k-K} dk, \\ G_s &= 2\pi e^{-K(y+y')} \cos K(x-x'), \end{aligned} \right\} \quad (3. 3)$$

ただし上第 2 式中 P はコーシーの主値をとることを意味する。

定義から明らかなように G は点 (x', y') の近くで対数的に大きくなるが、一方無限遠方では、

$$G(x, y; x', y') \xrightarrow{K|x-x'| \gg 1} 2\pi i e^{-K(y+y') - iK|x-x'|}, \quad (3.4)$$

となり、波は物体から外方に出ていくことを意味している。

この函数を使えば一般に

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_c \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \right) G(x, y; x', y') ds(x', y'), \quad (3.5)$$

なる表示が得られる。これはまた次のようにも書ける。

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_c \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \right) \log \left(\frac{r_1}{r_2} \right) ds - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-ky} dk}{k - K + i\mu}, [H^+(k) e^{-ikx} + H^-(k) e^{ikx}], \quad (3.6)$$

$$\text{ただし} \quad H^\pm(k) = \int_c \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-ky \pm ikx} ds, \quad (3.7)$$

$$\text{またさらに} \quad H^\pm(k) = H_0^\pm(k) + iH_s^\pm(k), \quad (3.8)$$

とおいて H_0 は φ_0 に関する, H_s は φ_s に関する積分と考えよう (すなわちこの函数に関してのみ添字 c, s は実部虚部を意味しない。これは後出の h についても同様である)。

そうすると次の関係がある。

$$H^-(k) = \overline{H_0^+}(k) + i\overline{H_s^+}(k), \quad (3.9)$$

また物体が左右対称であると考えているから、 φ も対称性を持つと考えられ、次のような関係がある。

$\varphi(x, y) = \varphi(-x, y)$ ならば

$$H^+(k) = H^-(k) = \int_c \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-ky} \cos kx ds, \quad (3.10)$$

$\varphi(x, y) = -\varphi(-x, y)$ ならば

$$H^+(k) = -H^-(k) = i \int_c \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-ky} \sin kx ds, \quad (3.11)$$

(3.4) を使えば (3.5) から次式がえられる。

$$\varphi(x, y) \left. \begin{array}{l} \xrightarrow{x>0} iH^+(K)e^{-Ky-iKx} \\ \xrightarrow{x<0} iH^-(K)e^{-Ky+iKx} \end{array} \right\} \quad (3.12)$$

この式から H^+ は x の正方向に進む波の H^- は負方向へ進む波の振幅に比例することがわかる。

最後に (3.5) に (3.3) を代入して実部虚部をわけて書くと (3.8) を使って次のようになる。

$\varphi(x, y) = \varphi(-x, y)$ ならば

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_0(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_c \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} - \varphi_0 \frac{\partial}{\partial n} \right) G_0 ds - e^{-Ky} \cos Kx H_0^+(K), \\ \varphi_s(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_s \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial n} - \varphi_s \frac{\partial}{\partial n} \right) G_s ds + e^{-Ky} \cos Kx H_s^+(K), \end{array} \right\} \quad (3.13)$$

また $\varphi(x, y) = -\varphi(-x, y)$ ならば

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_c \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} - \varphi_0 \frac{\partial}{\partial n} \right) G_0 ds + ie^{-\kappa y} \sin Kx H_0^+(K), \\ \varphi_s(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_c \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial n} - \varphi_s \frac{\partial}{\partial n} \right) G_s ds - ie^{-\kappa y} \sin Kx H_s^+(K), \end{aligned} \right\} \quad (3. 14)$$

4. 境界値問題¹⁰⁾ 前節で得たポテンシャルはさらに物体表面上の境界条件を満足しなければならぬ。線型性の仮定の下では自由度に応じた各運動に対応するポテンシャルを重ね合わせればよいから、それぞれのポテンシャルを独立に考えれば十分である。

さて運動としては次の場合が考えられるが、これらを簡単の為に以下添数字で表わすことにする。

- i) x 軸に平行な動揺……添字 1
- ii) y 軸に平行な動揺……添字 2
- iii) 原点のまわりの回転動揺……添字 3
- iv) 物体が反射する波の運動……添字 4

なお入射波の運動などは添字 0 で示す。

- v) 重心まわりの回転動揺……添字 5

ただしこれは明らかに i) と iii) で表わされるが後の便利の為に考えておこう。

それぞれの場合の境界条件、すなわち物体表面の法線方向速度が物体自身のそれに等しいと言う条件は次のように表わされる。

- i) 振幅を $Xe^{i\omega t}$ とすると速度は $i\omega Xe^{i\omega t}$ であるから

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -i\omega X \frac{\partial x}{\partial n},$$

であるが簡単の為に次のようにしておこう。

$$\varphi_1(x, y) = i\omega X \phi_1(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial n} \phi_1(x, y) = -\frac{\partial x}{\partial n}, \quad (4. 1)$$

- ii) 振幅を $Ye^{i\omega t}$ とおくと同様にして

$$\varphi_2(x, y) = i\omega Y \phi_2(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial n} \phi_2(x, y) = -\frac{\partial y}{\partial n}, \quad (4. 2)$$

- iii) 振幅を $\theta e^{i\omega t}$ とおくと

$$\varphi_3(x, y) = i\omega \theta \phi_3(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial n} \phi_3(x, y) = y \frac{\partial x}{\partial n} - x \frac{\partial y}{\partial n}, \quad (4. 3)$$

- iv) x の正方向からの入射波の振幅を新しく a とおくと (2. 9) によってそのポテンシャルは

$$\varphi_0(x, y) = \frac{iga}{\omega} \phi_0(x, y), \quad \phi_0(x, y) = e^{-\kappa y + iKx}, \quad (4. 4)$$

したがって

$$\varphi_4(x, y) = \frac{iga}{\omega} \phi_4(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial n} (\phi_0 + \phi_4) = 0, \quad (4. 5)$$

- v) 原点 O から重心 G 迄の巨離を l とおき、回転角を θ とすると

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2(x, y) &= i\omega\theta\phi_2(x, y), & \frac{\partial}{\partial n}\phi_2 &= \frac{\partial}{\partial n}\phi_2 + l\frac{\partial\phi_1}{\partial n}, \\ \text{故に} \quad \varphi_2(x, y) &= i\omega\theta\{\phi_2(x, y) + l\phi_1(x, y)\}, \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

これらの条件から先ず次のようなことがわかる。

$$l\left\{\frac{\partial}{\partial n}\phi_i\right\} = \frac{\partial}{\partial n}\phi_{is} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 5, \dots \quad (4.7)$$

また問題 iv) ではさらにわけて考えて、

$\phi_i = \phi_{iA} + i\phi_{iB}$ とおけば (4.5) は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n}\phi_{iA} &= -\frac{\partial}{\partial n}e^{-\kappa y}\cos Kx, \\ \frac{\partial}{\partial n}\phi_{iB} &= -\frac{\partial}{\partial n}e^{-\kappa y}\sin Kx, \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

となるが、ここで ϕ_{iA} , ϕ_{iB} はそれぞれ虚部をもちうる。また船の対称性から次のことは明らかである。

$$\left. \begin{aligned} \phi_i(x, y) &= -\phi_i(-x, y), \quad i = 1, 3, 5 \\ \phi_2(x, y) &= \phi_2(-x, y), \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{iA}(x, y) &= \phi_{iA}(-x, y), \\ \phi_{iB}(x, y) &= -\phi_{iB}(-x, y), \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

このようなことを考えに入れて境界条件を (3.13), (3.14) に代入し、かつ点 (x, y) を c 上に持って来ると G_c の特異性から次のような積分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}\phi_{ic}(x, y) &= \frac{1}{2\pi}\int_c\left(\frac{\partial}{\partial n}\phi_{ic}-\phi_{ic}\frac{\partial}{\partial n}\right)G_c ds + ie^{-\kappa y}\sin KxH_{ic}^+(K), \\ \frac{1}{2}\phi_{is}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi}\int_c\phi_{is}\frac{\partial}{\partial n}G_c ds - ie^{-\kappa y}\sin KxH_{is}^+(K), \quad i=1, 3, 5 \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}\phi_{2c}(x, y) &= \frac{1}{2\pi}\int_c\left(\frac{\partial}{\partial n}\phi_{2c}-\phi_{2c}\frac{\partial}{\partial n}\right)G_c ds - e^{-\kappa y}\cos KxH_{2c}^+(K), \\ \frac{1}{2}\phi_{2s}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi}\int_c\phi_{2s}\frac{\partial}{\partial n}G_c ds + e^{-\kappa y}\cos KxH_{2s}^+(K), \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

ただしここで

$$H_{i\pm}(K) = \int_c\left(\frac{\partial}{\partial n}\phi_i - \phi_i\frac{\partial}{\partial n}\right)e^{-\kappa y \pm iKx} ds, \quad (4.13)$$

また ϕ_i については

$$\phi_i(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_c\left(\frac{\partial}{\partial n}\phi_i - \phi_i\frac{\partial}{\partial n}\right)G ds = -\frac{1}{2\pi}\int_c\left(\frac{\partial}{\partial n}\phi_0 + \phi_0\frac{\partial}{\partial n}\right)G ds.$$

であり一方 ϕ_0 に関する同様な積分を計算すると

$$\frac{1}{2\pi}\int_c\left(\frac{\partial}{\partial n}\phi_0 - \phi_0\frac{\partial}{\partial n}\right)G ds = 0, \quad (4.14)$$

であることがわかるので上式に加えて次式を得る。

$$\phi_i(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int_c(\phi_0 + \phi_i)\frac{\partial}{\partial n}G ds, \quad (4.15)$$

また (4. 10) の条件によって ϕ_{4A} , ϕ_{4B} は互に独立としてよいから上と同じ式が独立に成立つ。

$$\left. \begin{aligned} \phi_{4A} &= -\frac{1}{2\pi} \int_c (e^{-Kx'} \cos Kx' + \phi_{4A}) \frac{\partial}{\partial n} G ds, \\ \phi_{4B} &= -\frac{1}{2\pi} \int_c (e^{-Kx'} \sin Kx' + \phi_{4B}) \frac{\partial}{\partial n} G ds, \end{aligned} \right\} \quad (4. 16)$$

同様にして

$$\left. \begin{aligned} H_{4\pm}(K) &= \int_c \left(\frac{\partial}{\partial n} \phi_{4\pm} - \phi_{4\pm} \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-Kx \pm iKy} ds = - \int_c (\phi_{0\pm} + \phi_{4\pm}) \frac{\partial}{\partial n} e^{-Kx \pm iKy} ds, \\ H_{4\pm}(K) &= H_{4A\pm}(K) + iH_{4B\pm}(K), \end{aligned} \right\} \quad (4. 12)$$

$$\left. \begin{aligned} H_{4A+}(K) &= H_{4A-}(K) = - \int_c (\phi_{0A} + \phi_{4A}) \frac{\partial}{\partial n} e^{-Kx} \cos Kx ds, \\ H_{4B+}(K) &= -H_{4B-}(K) = -i \int_c (\phi_{0B} + \phi_{4B}) \frac{\partial}{\partial n} e^{-Kx} \sin Kx ds, \end{aligned} \right\} \quad (4. 18)$$

そこでこれらを実部虚部にわけてもう一度 (4. 8) を書きなおすと

$$\left. \begin{aligned} \phi_{4A} &= \phi_{4Ac} + i\phi_{4As}, \quad \phi_{4B} = \phi_{4Bc} + i\phi_{4Bs}, \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi_{4Ac} &= -\frac{\partial}{\partial n} e^{-Kx} \cos Kx = -\frac{\partial}{\partial n} \phi_{0A}, \quad \frac{\partial}{\partial n} \phi_{4As} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi_{4Bc} &= -\frac{\partial}{\partial n} e^{-Kx} \sin Kx = -\frac{\partial}{\partial n} \phi_{0B}, \quad \frac{\partial}{\partial n} \phi_{4Bs} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4. 19)$$

となり, (4. 16) から, 境界条件を表わす積分方程式をつくれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} (\phi_{0A} + \phi_{4Ac}) &= -\frac{1}{2\pi} \int_c (\phi_{0A} + \phi_{4Ac}) \frac{\partial}{\partial n} G ds + e^{-Kx} \cos Kx (1 - H_{4As}^+), \\ \frac{1}{2} \phi_{4As} &= -\frac{1}{2\pi} \int_c \phi_{4As} \frac{\partial}{\partial n} G ds + e^{-Kx} \cos Kx H_{4As}^+, \end{aligned} \right\} \quad (4. 20)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} (\phi_{0B} + \phi_{4Bc}) &= -\frac{1}{2\pi} \int_c (\phi_{0B} + \phi_{4Bc}) \frac{\partial}{\partial n} G ds + e^{-Kx} \sin Kx (1 + iH_{4Bs}^+), \\ \frac{1}{2} \phi_{4Bs} &= -\frac{1}{2\pi} \int_c \phi_{4Bs} \frac{\partial}{\partial n} G ds - ie^{-Kx} \sin Kx H_{4Bs}^+, \end{aligned} \right\} \quad (4. 21)$$

このようにして得られた (4. 11), (4. 12), (4. 20), (4. 21) はすべてフレドホルムの第2種の積分方程式であるから一義的な解があると考えられ¹⁵⁾, 速度ポテンシャルが求められることになる。

然し一見してこれらのすべてが独立ではなく, 互に従属なつまり比例関係で結ばれる方程式が幾つかある。

先ず (4. 11) 第2式において $i = 1, 3, 5$ とおいたものは全く同じ形であるから例えば

$$\phi_{1s}(x, y) H_{3c}^+(K) = \phi_{3s}(x, y) H_{1c}^+(K), \text{ on } c, \dots$$

となり, これから H 函数をつくれば

$$\frac{H_{1s}^+(K)}{H_{1c}^+(K)} = \frac{H_{3s}^+(K)}{H_{3c}^+(K)} = \frac{H_{5s}^+(K)}{H_{5c}^+(K)}, \quad (4. 22)$$

なる関係があることがわかり, このことは計算によって確かめられている²⁰⁾。これらの関

係から運動 5 については勿論であるが解くべき方程式の数は一つ減るわけである。

次に (4. 20), (4. 21) のそれぞれ第 1 式と第 2 式は同じ形であるから c の上で

$$\begin{aligned}(\phi_{0A} + \phi_{4Ac}) H_{4Ac}^+ &= \phi_{4As} (1 - H_{4As}^+), \\(\phi_{0B} + \phi_{4Bc}) H_{4Bc}^+ &= i \phi_{4Bs} (1 + i H_{4Bs}^+),\end{aligned}$$

となり, H 函数では

$$\left. \begin{aligned}H_{4As}^+ &= (H_{4Ac}^+)^2 + (H_{4Bs}^+)^2, \\i H_{4Bs}^+ &= (H_{4Bc}^+)^2 + (H_{4Bs}^+)^2,\end{aligned} \right\} \quad (4. 23)$$

のような関係がなりたち, さらにこれらは (4. 11), (4. 12) の各第 2 式のそれぞれ等しいから

$$\phi_{4As} H_{2c}^+ = \phi_{2s} H_{4Ac}^+, \quad \phi_{4Bs} H_{1c}^+ = \phi_{1s} H_{4Bc}^+,$$

となつて, (4. 20), (4. 21) は全く解く必要はないことがわかり, またこの式から

$$\frac{H_{4As}^+(K)}{H_{4Ac}^+(K)} = \frac{H_{2s}^+(K)}{H_{2c}^+(K)}, \quad \frac{H_{4Bs}^+(K)}{H_{4Bc}^+(K)} = \frac{H_{1s}^+(K)}{H_{1c}^+(K)}, \quad (4. 24)$$

が得られる。

今簡単の為に

$$\frac{H_{1s}^+(K)}{H_{1c}^+(K)} = \tan \alpha_1, \quad \frac{H_{2s}^+(K)}{H_{2c}^+(K)} = \tan \alpha_2, \quad (4. 25)$$

とおけば (4. 23) と (4. 24) から (4. 18) を頭において (4. 17) が次のように求められる。

$$H_4^+(K) = e^{i\alpha_2} \sin \alpha_2 + i e^{i\alpha_1} \sin \alpha_1, \quad (4. 26)$$

このように波の反射の問題は他の運動に対する解があれば全く解く必要がないがこのことは力とモーメントを考える時にもっと明らかになる。

5. 力とモーメント^{10) 18)} 物体に働らく圧力は (2. 8) で与えられるから, 今 F_{ij} を i 方向あるいは原点, 重心まわりの運動すなわち ϕ_i による j 方向の力あるいはモーメントとし, 特に $i = 4$ は入射波および反射波による力あるいはモーメントとするとそれぞれ次のように与えられるが, それらから簡単の為にさらに f_{ij} なる量を定義しよう。

$$\begin{aligned}F_{11} &= -\rho i \omega \int_c \phi_1 \frac{\partial x}{\partial n} ds = \rho \omega^2 X \int_c \phi_1 \frac{\partial x}{\partial n} ds \\&= -\rho \omega^2 X \int_c \phi_1 \frac{\partial}{\partial n} \phi_1 ds = WKX f_{11}, \\F_{1j} &= WKX f_{1j}, \quad j = 1, 2, 3, 5,\end{aligned} \quad (5. 1)$$

ただし W は単位長さ当りの排水量とする。

$$\text{同様にして} \quad F_{2j} = WKY f_{2j}, \quad j = 1, 2, 3, 5, \quad (5. 2)$$

$$F_{3,j} = WK\theta f_{3j}, \quad F_{5,j} = WK\theta f_{5,j}, \quad j = 1, 2, 3, 5, \quad (5. 3)$$

$$F_{4j} = \rho i \omega \int_c (\phi_0 + \phi_4) \frac{\partial}{\partial n} \phi_j ds = W a f_{4j}, \quad j = 1, 2, 3, 5, \quad (5. 4)$$

したがって

$$\left. \begin{aligned}\nabla f_{ij} &= - \int_c \phi_i \frac{\partial}{\partial n} \phi_j ds, \\ \nabla f_{4j} &= - \int_c (\phi_0 + \phi_4) \frac{\partial}{\partial n} \phi_j ds,\end{aligned} \right\} i, j = 1, 2, 3, 5, \quad (5. 5)$$

ここに ∇ は単位長さ当りの排水容積を表わすものとする。

さて物体が対称であるとする明らかに

$$f_{12} = f_{21} = f_{32} = f_{23} = f_{25} = 0, \quad (5.6)$$

であって、これから上下揺れと左右揺れおよび横揺れは互に無関係であることになる。

次に入射波以外のポテンシャルはすべて外方に発散する波を持っていることから

$$\int_c \left(\phi_i \frac{\partial}{\partial n} \phi_j - \phi_j \frac{\partial}{\partial n} \phi_i \right) ds = 0, \quad i, j = 1, \dots, 5,$$

となることが証明できるから、(5.5)によって

$$f_{ij} = f_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3, 5, \quad (5.7)$$

となりまた

$$\nabla f_{ij} = - \int_c \left(\phi_0 \frac{\partial}{\partial n} \phi_j - \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 \phi_j \right) ds - \int_c \left(\phi_i \frac{\partial}{\partial n} \phi_j - \phi_j \frac{\partial}{\partial n} \phi_i \right) ds$$

となるから上の積分によって ϕ_0 の値を入れると (4.13) の定義式に等しくなるが、少し記号をかえて、

$$\left. \begin{aligned} H_j^+(K) &= \nabla h_j^+(K), \quad j = 1 \sim 5, \\ f_{ij} &= -h_j^+(K), \quad j = 1, 2, 3, 5, \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

となる。

これがハスキントの公式¹⁰⁾¹⁸⁾であるが前節の関係を考えれば容易に理解できよう。衆知のように従来のフルード・クロップ理論では (4.13) 右辺第2項は無視していた訳である¹⁹⁾。

さらに (4.22) の関係があるから、今

$$H_0^+(K)/H_1^+(K) = h_0^+(K)/h_1^+(K) = l_w, \quad (5.9)$$

とおくと l_w は明らかに実数となる²⁰⁾。また (4.6) を考えて (5.8) に代入すれば

$$f_{43} = l_w f_{41}, \quad f_{45} = (l + l_w) f_{41}, \quad (5.10)$$

となる。すなわち波の強制力の水平成分と傾斜モーメントとは位相が等しいことがわかる。

最後に

$$\int_c \left(\phi_i \frac{\partial}{\partial n} \bar{\phi}_j - \bar{\phi}_j \frac{\partial}{\partial n} \phi_i \right) ds, \quad i, j = 1 \sim 5,$$

なる積分を考えると $\bar{\phi}_j$ は今度は内方に波が集まって来るようなポテンシャルであるから 0 にはならず、また境界条件 (4.7) および (5.7) を考えると上式は f_{ij} の虚部を与えることになり

$$\bar{f}_{ij} - f_{ij} = i \nabla (h_i^+ \bar{h}_j^+ + h_i^- \bar{h}_j^-), \quad i, j = 1, 2, 3, 5, \quad (5.11)$$

となる。これは物体のなす仕事が出てゆく波のエネルギーに等しいことを意味している。

また $i, j = 4$ については (4.23) によって自明な関係が得られる。

6. 波長が大きい時¹¹⁾¹²⁾¹³⁾¹⁸⁾²⁰⁾ すなわち $K \rightarrow 0$ の時は (2.7) から水面で $\partial \phi / \partial y \equiv 0$ となるので水面が固体壁である時のポテンシャルに近づく⁴⁾¹⁴⁾。

そのようなポテンシャルを使えば第1近似として力やモーメントは次のように与えられる。

さてまず

$$\nabla f_{11} = \int_c \phi_1 \frac{\partial x}{\partial n} ds$$

は元来附加質量の定義式であるから x 方向のその係数を k_1 とすると

$$f_{11} \doteq k_1, \quad (6.1)$$

$$\text{同様に} \quad f_{22} \doteq k_2, \quad (6.2)$$

となるが k_2 は $K=0$ で無限大になるので K の函数と考えなければ意味がない⁸⁾。

$$f_{33} \doteq k_3' r^2, \quad f_{55} \doteq k_3 r^2, \quad r^2 = I/W, \quad (6.3)$$

ただし I は物体の重心に関する慣性モーメントとする。

次に f_{13} は f_{11} なる力が水面下 l_1 の所に働いていると考えると (6.1) を使って、

$$f_{13} = f_{31} \doteq -l_1 k_1, \quad f_{15} \doteq f_{51} \doteq (l-l_1) k_1, \quad (6.4)$$

のように書くことができる。

次に

$$\nabla f_{41} = -\nabla h_1^+(K) \doteq i k \int_c \left(\phi_1 \frac{\partial x}{\partial n} + x \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds$$

となるから、(6.1) を使えば

$$f_{41} = -h_1^+(K) \doteq i K (1+f_{11}) \doteq i K (1+k_1), \quad (6.5)$$

同様にして

$$f_{42} = -h_2^+(K) \doteq B/\nabla - K(1+f_{22}) \doteq B/\nabla - K(1+k_2), \quad (6.6)$$

ここに B は船の幅とする。

また

$$f_{43} = -h_3^+(K) \doteq i K (\overline{OM} + f_{13}) \doteq i K (\overline{OM} - l_1 k_1), \quad (6.7)$$

よって

$$f_{45} = -h_5^+(K) \doteq i K \{m - (l_1 - l) k_1\}, \quad (6.8)$$

ここに M はメタセンター、 m はメタセンター高さとする。(6.5) と (6.7), (6.8) から (5.10) の l_w は、

$$\left. \begin{aligned} l_w = f_{43}/f_{41} &\doteq (\overline{OM} - l_1 k_1)/(1+k_1), \\ l + l_w = f_{45}/f_{41} &\doteq \{m - (l_1 - l) k_1\}/(1+k_1), \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

このようにして h_i が求まると (5.11) によって f_{ij} の虚部つまりダムピングの項の近似値が次のように得られる。また Lewis Form については正確な計算値も与えられている^{5) 8) 10) 20)}。

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{J}\{f_{11}\} &= \nabla |h_1^+|^2 \doteq \nabla K^2 (1+k_1)^2, \\ \mathcal{J}\{f_{22}\} &= \nabla |h_2^+|^2 \doteq \nabla \{B/\nabla - K(1+k_2)\}^2, \\ \mathcal{J}\{f_{33}\} &= \nabla |h_3^+|^2 \doteq \nabla K^2 (\overline{OM} - l_1 k_1)^2, \\ \mathcal{J}\{f_{55}\} &= \nabla |h_5^+|^2 \doteq \nabla K^2 \{m - (l_1 - l) k_1\}^2, \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{J}\{f_{13}\} &= \mathcal{J}\{f_{31}\} = \nabla h_1^+ \bar{h}_3^+ \doteq \nabla K^2 (1+k_1) (\overline{OM} - l_1 k_1), \\ \mathcal{J}\{f_{15}\} &= \mathcal{J}\{f_{51}\} = \nabla h_1^+ \bar{h}_5^+ \doteq \nabla K^2 (1+k_1) \{m - (l_1 - l) k_1\}, \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

7. 運動方程式²⁰⁾ 5節で定義した力およびモーメントと静的浮力を考えに入れて規則波中の運動方程式を立てると、 $e^{i\omega t}$ なる項を除けば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\omega^2}{g} I \theta + W m \theta &= F_{33} + F_{13} + F_{43}, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\omega^2}{g} WX &= F_{11} + F_{51} + F_{41}, \\ -\frac{\omega^2}{g} WY + \rho g BY &= F_{22} + F_{42}, \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

(5.1)~(5.4) を使って書きかえれば、次のようになるがここで $f_{51} = f_{15}$ である。

$$\left. \begin{aligned} \theta(Kr^2 + Kf_{55} - m) + KXf_{15} &= -af_{45}, \\ KX(1 + f_{11}) + K\theta f_{51} &= -af_{41}, \\ Y(K + Kf_{22} - B/\nabla) &= -af_{42} \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

これを解けば

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta_w E_5 / D_1, \quad \theta_w = Ka, \\ X &= aE_1 / D_1, \quad Y = aE_2 / D_2, \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= Kf_{15}^2 - (1 + f_{11})(Kr^2 + Kf_{55} - m), \\ D_2 &= B/\nabla - K(1 + f_{22}), \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \{r^2 - m/K + f_{55} - (l + l_w)f_{51}\}f_{41}, \\ E_2 &= f_{42}, \\ E_5 &= \{(l + l_w)(1 + f_{11}) - f_{15}\}f_{41}/K, \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

さて (7.5) において (5.10), (5.11) を利用すると

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{J}\{E_1/f_{41}\} &= \mathcal{J}\{f_{55} - (l + l_w)f_{51}\} = 0, \\ \mathcal{J}\{KE_5/f_{41}\} &= \mathcal{J}\{(l + l_w)f_{11} - f_{15}\} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

なるから添字 c, s で実部虚部を表わすことにすると、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \left\{r^2 - \frac{m}{K} + f_{55c} - (l + l_w)f_{51c}\right\}f_{41}, \\ KE_5 &= \{(l + l_w)(1 + f_{11c}) - f_{15c}\}f_{41} \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

同様な関係によって

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R}\{D_1\} &= Kf_{15c}^2 - (1 + f_{11c})(Kr^2 + Kf_{55c} - m), \\ \mathcal{J}\{D_1\} &= 2Kf_{15c}f_{15s} - Kf_{55s}(1 + f_{11c}) - f_{11s}(Kr^2 + Kf_{55c} - m), \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

となるから特に同調点を考えて見ると、

すなわち $\mathcal{R}\{D_1\} = 0$ の時は

$$\left. \begin{aligned} Krf_{15c}^2 &= (1 + f_{11c})(Kr^2 + Kr f_{55c} - m), \\ \mathcal{J}\{D_1\} &= -Kr^3 \nabla E_5 \bar{E}_5 / (1 + f_{11c}), \\ E_1 &= -Kr f_{15c} E_5 / (1 + f_{11c}), \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

ただし $K_R = 4\pi^2/gT_R^2$, T_R は同調周期とする。

のようになるので (7.3) に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \theta/\theta_w &= E_5/D_1 = i(1 + f_{11c})/(K_R^3 \nabla \bar{E}_5), \\ X/a &= E_1/D_1 = -if_{15c}/(K_R^2 \nabla \bar{E}_5), \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

が得られる。

また上下揺れでは簡単に同調時 ($K = K_R$) には

$$Y/a = E_2/D_2 = i/(K_R \nabla \bar{E}_2), \quad (7.11)$$

となることがわかる。

これらの式から少くとも二次元完全流体中では波の強制力が小さくなると大きく揺れることになる¹¹⁾。

最後に前節で得た近似値を使って波長の大きい所でもう少し具体的に考えて見よう。

K の高次の項を無視すると

$$\left. \begin{aligned} D_1 &\doteq Kk_1^2(l_1-l)^2 - (1+k_1)\{Kr^2(1+k_3)-m\}, \\ D_2 &\doteq B/\nabla - K(1+k_2), \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

$$\left. \begin{aligned} KE_3/f_{41} &\doteq (l+l_w)(1+k_1) + (l_1-l)k_1 = m, \\ E_1/f_{41} &\doteq k_1m(l_1-l)/(1+k_1) - D_1/K(1+k_1), \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{41} &= -h_1^+(K) \doteq iK(1+k_1), \\ E_2 &= f_{42} \doteq B/\nabla - K(1+k_2), \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

したがって上下ゆれは上式から

$$Y \doteq a, \quad (7.15)$$

となって、渡辺の得た式と少し異なっている¹⁾ が既に詳しく調べられているのでここではこれ以上考えない^{11) 19)}。

次に (7.12) 第1式を

$$D_1 \doteq (1+k_1)(1+k_3)r^2(K_R-K), \quad (7.16)$$

$$K_R = 4\pi^2/gT_R^2 \doteq \{m + Kk_1^2(l_1-l)^2/(1+k_1)\}/(1+k_3)r^2, \quad (7.17)$$

と書きなおし左右揺れを拘束した時の周期 T_0

$$K_0 = 4\pi^2/gT_0^2 \doteq m/(1+k_3)r^2, \quad (7.18)$$

と比較すると明らかに T_R の方が小さいがその差は僅かなものと考えられる³⁾。

さて (7.3) から近似値を使って次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \theta/\theta_w &\doteq f_{41}m/K(1+k_1)(1+k_3)r^2(K_R-K) \doteq im/(1+k_3)r^2(K_R-K), \\ X/a &\doteq -i + iKm/(1+k_1)(1+k_3)r^2(K_R-K), \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

この後の式も渡辺の解と少し異なっている¹⁾。

然し第1式の方は $I = (1+k_3)r^2W$ 、とおいて書きかえれば

$$\theta/\theta_w \doteq iWmg/I(\omega_R^2 - \omega^2), \quad (7.20)$$

となるから、従来の運動方程式で有効波傾斜係数を1とおいた式に等しい^{1) 2) 7)}。

さらに詳しい計算結果²⁰⁾を見ても (7.13) 第1式中 l_w, l_1 などは K によってあまり変わらないようであるから、かなり精度よく、

$$E_3 \doteq \frac{m}{K} f_{41}, \quad (7.21)$$

と見ることができそうであり、また f_{41} を (6.5) のかわりに r なる係数を導入して次のようにおいてしまうと

$$E_3 = imr(1+k_1), \quad (7.22)$$

この r は従来の理論における有効波傾斜係数と全く同じ役割を果すことになり、実際計算値²⁰⁾を見ても従来慣用されている値と同程度のものになるようである。

このようにして横揺れだけは従来の理論と同形の方程式が得られるが r を最も大きく支配するのはこの理論では波の強制力の水平成分であると考えられる。

最後に同調時には (7.10), (7.22) によって、

$$\left. \begin{aligned} \theta/\theta_w &\doteq -1/(K_R^2 \gamma m \Delta), \\ X/a &\doteq -k_1(l_1 - l)/\{K_R^2 \gamma m(1 + k_1) \nabla\}, \end{aligned} \right\} \quad (7. 23)$$

となるから完全流体中ではメタセンターが高い程、また τ が大きい程ゆれ方が少ないと言える。

然し簡単に推定できるように普通の船で考えるとこの倍率は非常に大きい値になるので、自明のことながらビルジキールなどの効果を考えに入れてさらに実験的に理論を再構成する必要がある。

8. 漂流力 丸尾によれば船が波に押し流される力¹⁾は反射波の波高の自乗に比例する¹⁰⁾。すなわち

$$R = \frac{1}{2} \rho g |A^+|^2, \quad (8. 1)$$

前節迄の結果から

$$A^+ = iK \nabla \{Xh_1^+ + (K) + \theta h_3^+(K) + Yh_2^+(K)\} + ia \nabla h_4^+(K), \quad (8. 2)$$

であるから、前節の解を代入すると

$$A^+ = ia \nabla \{h_4^+ + K(E_1 h_1^+ + K E_3 h_3^+)/D_1 - K(h_2^+)^2/D_2\}, \quad (8. 3)$$

この計算は大変面倒であろうし、またよく知っているようにこの力は一般には同調時以外には小さいと考えられる¹⁾ので簡単の為に以下同調時に限って考えて見よう。

$$\text{今} \quad A^+ = a(I + II + III), \quad (8. 4)$$

とおくと (7. 10), (7. 11), (4. 26) を使って、

$$\left. \begin{aligned} I &= iK \nabla (E_1 h_1^+ + K E_3 h_3^+)/D_1 = E_3/\bar{E}_3 = h_1^+/\bar{h}_1^+ = -e^{i\alpha_1}, \\ II &= -iK \nabla (h_2^+)^2/D_2 = h_2^+/\bar{h}_2^+ = e^{i\alpha_2}, \\ III &= i \nabla h_4^+ = -e^{i\alpha_1} \sin \alpha_1 + i e^{i\alpha_2} \sin \alpha_2, \end{aligned} \right\} \quad (8. 5)$$

のようになって I, II では同調時に反射波の振幅が入射波のそれに等しいと言う結果になる。

一般には $K_H > K_R$ であるから簡単の為に II と α_2 を無視すると

$$A^+ \doteq -a(e^{i\alpha_1} + \sin \alpha_1)e^{i\alpha_1}, \quad (8. 6)$$

$$R \doteq \frac{1}{2} \rho g a^2 (1 + 2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1), \quad (8. 7)$$

となるがこの α_1 は $K = 0$ で 0° , $K = \infty$ で -90° と考えてよいように見える。

逆に I と α_1 が無視できるとすると上下揺れ同調時には

$$A^+ \doteq a(e^{i\alpha_2} + i \sin \alpha_2)e^{i\alpha_2}, \quad (8. 8)$$

$$R \doteq \frac{1}{2} \rho g a^2 (1 + 3 \sin^2 \alpha_2), \quad (8. 9)$$

が得られ、 α_2 は $K = 0$ で 0° , $K = \infty$ で 180° と考えられる。

このような水平力の他にやはり周期的でない様な垂直力と傾斜偶力が存在すると考えられる¹⁰⁾が、この後者は元良の実験にも現われているように見える¹⁾ので今後検討の余地があると思われる。

9. 結 言 無限に長い船が真横から波を受ける場合、すなわち二次元問題に限って線型理論の範囲内で船の周期運動に関する速度ポテンシャルを考え、その船体表面条件を

表わす積分方程式を検討して、入射波の散乱を表わすポテンシャルが静水中で船が動揺する場合のそれで表わされることがわかった。

この関係によれば、波の強制力が静水中で動く船の起こす波の高さに比例すると言うハスキントの公式は容易に理解できる。

このハスキントの公式を使って、さらに運動方程式を解いて検討した結果、横揺れについては従来の方程式と形式的には一致することがわかった。

然し従来の有効波傾斜係数に相当する係数 γ は主として波の強制力の水平成分がフルード・クロップ理論に基づく値と違う割合であると解釈される。

さて、もしも (7. 2) 第1式で左右ゆれがないとすると波の強制モーメントは (6. 8) で与えられるような値であるから重心を適当に選べば簡単に 0 にすることができる¹⁹⁾。完全流体中ではこの時同調しているとするとダмпिंगが波の強制力の自乗に比例しているので、振幅は無限大になることになる。然しビルジキールのようなもので波以外のダмпINGを与えることが出来れば揺れ方を少なくすることができると考えられる^{11) 12)}。

実際には左右揺れがあるので波の強制モーメントは (7. 22) のように与えられ、これを小さくすることは難しいように思われる。

然しながらこの有効波傾斜係数に対応する係数 γ は明らかに船体横断面形状に大きく依存するであろうからビルジキールの効果の機構¹²⁾と共に今後の研究課題として残される。

最後に本研究については発案当初から東京大学元良教授に種々貴重な御助言を頂きました。此処に記して謝意を表します。 以 上

参 照 文 献

- 1) 渡辺恵弘: 造船協会々報 49 号 (昭和 7 年).
- 2) " : " 56 号 (昭和 10 年).
- 3) 上野敬三: " 67 号 (昭和 15 年).
- 4) 菱田敏男: " 論文集 85 号 (昭和 27 年).
- 5) " : " 86 号 (前) (昭和 28 年).
- 6) " : " 86 号 (後) (昭和 29 年).
- 7) 元良誠三: 船体運動力学, 共立出版 (昭和 32 年).
- 8) 田才福造: 造船協会論文集 105 号 (昭和 34 年).
- 9) " : " 110 号 (昭和 36 年).
- 10) 別所正利: 波の強制力其の他に關する覚書 (昭和 39 年 8 月末刊).
- 11) 元良誠三, 小山健夫: 昭和 40 年春期造船協会講演予定.
- 12) 別所正利: " "
- 13) 一色 浩: 東大工学部船舶卒業論文 (昭和 40 年 3 月).
- 14) F. Ursell: Quart. Journal of Mathematics and Applied Mechanics, vol. 2, pt. 3 (1949).
- 15) F. Ursell: Quart. Journal of Mathematics and Applied Mechanics, vol. 7, pt. 4 (1954).
- 16) J. V. Wehausen and E. V. Laitone: "Surface Waves" p. 533 and 558, Handbuch der Physik, Springer (1960).
- 17) H. Maruo: Journal of Ship Research, vol. 4, No. 3 (1960).
- 18) J. N. Newman: Journal of Ship Research, vol. 6, No. 3 (1962).
- 19) S. Matora: Journal of Ship Research, vol. 8, No. 1 (1964).
- 20) K. Tamura: The Calculation of Hydrodynamical Forces and Moments acting on the Two Dimensional Body (Unpublished).
- 21) M. D. Haskind: Technical and Research Bulletin No. 1~12, SNAME (1953).

On the Theory of Rolling Motion of Ships among Waves

By Masatoshi BESSHO*

Abstract

The author introduces the integral equations which determine the velocity potentials of the rolling, swaying and heaving oscillation and the diffraction of the incident wave, and finds out that the diffraction potential is represented by the ones of the swaying and heaving oscillations.

This relation explains well Haskind's formula that the wave force and moment are proportionol to the wave height produced by the oscillations of the ship respectively.

He also solves the equation of the motions and finds out that the equation of the rolling motion is very similar to the one used up to the present, but the coefficient corresponding to that of the effective wave slope depends mostly on the swaying force of the incident wave.

* Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering.

波の中の船の運動の理論について

(前進速度のない場合)

別 所 正 利*

(昭和40年6月30日受付)

1. 序 言

前報では船の横揺れの問題を主眼として二次元問題に限って波の中における前進速度を持たない船の運動を線型理論的に考察した。そして速度ポテンシャルの境界条件を比較対照することによって、各運動成分の速度ポテンシャル相互間に互いに独立でないものがあり、また散乱波のそれはこれらによって表わされることを見出した。

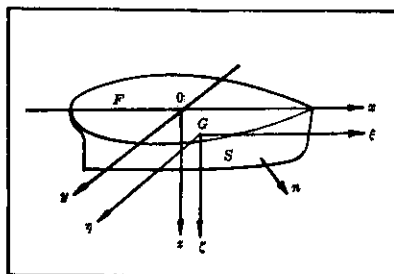
三次元では波は四方八方に拡がるので、二次元のような訳にはゆかないであろうが、同じような関係が見出せるであろうというのが本報の主題である。

理論そのものは前報同様従来のもの特に Haskind のそれ¹⁾ に実質的に等しいものであるが上述の観点を附加してさらに統一的に記述したものである。

2. 速度ポテンシャルなどの定義と境界条件^{1) 4) 12)}

平均水面上に原点0をおき第1図のような座標軸をとるものとする。

船は左右対称であるものとし、それが前進速度をもたないで波の中で調和的に揺れ動いているものとする。



第 1 図

* 機械工学教室 助教授

速度ポテンシャルを Φ , 圧力を P , 波高を ζ とすると,

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, z, t) &= \operatorname{Re}\{\varphi(x, y, z)e^{i\omega t}\}, \\ P(x, y, z, t) &= \operatorname{Re}\{p(x, y, z)e^{i\omega t}\}, \\ \zeta(x, y, z, t) &= \operatorname{Re}\{z(x, y)e^{i\omega t}\}, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

ただし $\omega = 2\pi/T$, T は周期,

のように書くことができ, φ, p, z は複素数値をとるものと考えればよい。

以下後出の H 関数を除いて添字 c, s でそれぞれの実部, 虚部を示すものとする。

したがってたとえば次のようになる。

$$\Phi(x, y, z, t) = \varphi_c(x, y, z) \cos \omega t - \varphi_s(x, y, z) \sin \omega t.$$

さて水面で圧力一定の条件は線型理論では,

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + K - \mu i \right) \varphi(x, y, 0) = 0, \quad (2.2)$$

ただし $\omega^2/g = 2\pi/\lambda$, g は重力の常数, λ は波長,

となり, また同じ線型性の仮定の下では次の等式が成立つ。

$$p(x, y, z) = \rho i \omega \varphi(x, y, z), \quad (2.3)$$

$$z(x, y) = \frac{\omega}{ig} \varphi(x, y, 0), \quad (2.4)$$

ただし ρ は水の密度とする。

さて線型理論では速度ポテンシャルは6自由度に対応するそれぞれ独立な運動と波の反射に関するポテンシャルを別々に考えて後でそれらを加え合わせればよい。それらを以下に列挙した簡単のために全文を通じて各運動およびそれに関する量などを下記の下添数字で示すことにしよう。

i)	x 軸に平行な運動 (前後揺れ)	添字	1
ii)	y " " (左右揺れ)	"	2
iii)	z " " (上下揺れ)	"	3
iv)	x 軸まわりの運動 (横揺れ)	"	4
v)	y " " (縦揺れ)	"	5
vi)	z " " (船首揺れ)	"	6

以上の他に回転運動については重心 G のまわりの運動に関する量を考えておくと便利であるから, 今 G を通る x, y, z 軸にそれぞれ平行な ξ, η, ζ 軸を考えて次のようにきめておこう。

iv')	ξ 軸まわりの運動 (横揺れ)	添字	4G
v')	η " " (縦揺れ)	"	5G
vi')	ζ " " (船首揺れ)	"	6G

また最後に

vii)	反射波の運動	添字	7
viii)	入射波の "	"	0

さて入射波の振幅を a とし x 軸に対し反時計まわりで α の角をなす方向から進んで来る

ものとすればそのポテンシャルは,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(x, y, z) &= \frac{iga}{\omega} \phi_0(x, y, z), \\ \text{ただし } \phi_0(x, y, z) &= e^{-Kz + iK(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

となる。他のものについても線型性の仮定の下では、ポテンシャルはすべて変位速度に比例するので、定常問題との類推を容易にするために下のように単位変位速度に対するポテンシャル ϕ_j を導入する。

今振幅を $X_j e^{i\omega t}$ ($j = 3, 4, 5$ に対しては角振幅を意味するものとする) とすると速度は $i\omega X_j e^{i\omega t}$ であるから,

$$\varphi_j = i\omega X_j \phi_j, \quad j = 1 \sim 6, \quad (2.6)$$

とおけば境界条件は

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial n} = -i\omega X_j \frac{\partial \phi_j}{\partial n}, \quad j = 1 \sim 6, \quad (2.7)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} x_1 &\equiv x, & x_2 &\equiv y, & x_3 &\equiv z, \\ \frac{\partial x_4}{\partial n} &= y \frac{\partial z}{\partial n} - z \frac{\partial y}{\partial n}, & \frac{\partial x_5}{\partial n} &= z \frac{\partial x}{\partial n} - x \frac{\partial z}{\partial n} \\ \frac{\partial x_6}{\partial n} &= x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n}. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

とし、 x_4, x_5, x_6 は (2.8) の境界条件を持ち 船体内部の領域で 正則な調和関数と考えておく。

細長い船では近似的に

$$x_5 \doteq -xz, \quad x_6 \doteq xy, \quad (2.9)$$

として大きい誤差はないであろうが、 x_4 については簡単にゆかないだろう。

さて (2.6), (2.7) によって,

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n} = -\frac{\partial x_j}{\partial n}, \quad j = 1 \sim 6, \quad (2.10)$$

次に反射波については (2.5) に対応して次のようにおけば

$$\varphi_r = \frac{iga}{\omega} \phi_r, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} (\phi_0 + \phi_r) = 0, \quad (2.12)$$

でなければならない。

このようにおくと圧力、表面変位は次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} p_j &= -\rho g K X_j \phi_j, & j &= 1 \sim 6, \\ p_j &= -\rho g a \phi_j, & j &= 0, 7, \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

$$\left. \begin{aligned} z_j(x, y) &= K X_j \phi_j(x, y, 0), & j &= 1 \sim 6, \\ z_j(x, y) &= a \phi_j(x, y, 0), & j &= 0, 7, \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

最後に重心のまわりの運動のポテンシャルは,

$$\varphi_{jG} = i\omega X_j \phi_{jG}, \quad j = 4, 5, 6, \quad (2.15)$$

とおき、重心 G の座標を O - x, y, z 軸に関して $(x_0, 0, z_0)$ とおくと,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \phi_{4G} &= -\frac{\partial x_4}{\partial n} - z_0 \frac{\partial x}{\partial n}, \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi_{5G} &= -\frac{\partial x_5}{\partial n} - x_0 \frac{\partial z}{\partial n} + z_0 \frac{\partial x}{\partial n}, \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi_{6G} &= -\frac{\partial x_6}{\partial n} + x_0 \frac{\partial y}{\partial n}, \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

となるから

$$\left. \begin{aligned} \phi_{4G} &= \phi_4 + z_0 \phi_2, \\ \phi_{5G} &= \phi_5 + x_0 \phi_3 - z_0 \phi_1, \\ \phi_{6G} &= \phi_6 - x_0 \phi_2, \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

とすることによって、原点まわりの運動のポテンシャルから求めることができる。

3. グリーン函数と速度ポテンシャルの積分表示^{1) 4)}

点 (x', y', z') に単位吹出しを有し、水面条件 (2.2) を満足するようなポテンシャルは次式で与えられる。

$$G(x, y, z; x', y', z') = \frac{1}{r_1} + \lim_{\mu \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k+K-\mu i}{k-K+\mu i} \times e^{-k(z+z') + i k \{ (x-x') \cos \theta + (y-y') \sin \theta \}} dk d\theta, \quad (3.1)$$

$$\text{ただし,} \quad r_1^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2.$$

偏微分すれば

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + K - \mu i \right) G(x, y, z; x', y', z') = \left(\frac{\partial}{\partial z} + K \right) \frac{1}{r_1} + \left(\frac{\partial}{\partial z} - K \right) \frac{1}{r_2}, \quad (3.2)$$

$$\text{ただし} \quad r_2^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2.$$

なる関係があることがわかるが、またこれから水面条件が満足されていることもすぐわかる。

さて (3.1) を変形すれば

$$G = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{4K}{\pi} \int_0^{\infty} [\cos\{uK(z+z')\} + u \sin\{uK(z+z')\}] \frac{K_0(uKR)}{1+u^2} du - 2\pi i K e^{-K(z+z')} H_0^{(2)}(KR), \quad (3.3)$$

ただし $R^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2$, $K_0, H_0^{(2)}$ はそれぞれ変形ベッセル、ハンケル関数である。

さらに

$$G = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \pi K \{ H_0(KR) - Y_0(KR) \} - 2e^{-K(z+z')} \int_0^{(z+z')} \frac{e^{Kv} dv}{\sqrt{v^2 + R^2}} - 2\pi i K e^{-K(z+z')} H_0^{(2)}(KR), \quad (3.4)$$

ただし H_0 はストルーフ、 Y_0 は第2種ベッセル関数とする。

これらの式で R が充分大きいときは右辺最後の項が最も大きく、他の項は無視できるようになるから

$$H_0^{(2)}(KR) \xrightarrow{KR \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi KR}} e^{-iKR + i\pi/4}.$$

を使えば

$$G \xrightarrow{KR \gg 1} \sqrt{\frac{8\pi K}{iR}} e^{-K(z+z')} - iKR, \quad (3.5)$$

また $R \equiv r - (x' \cos \theta + y' \sin \theta)$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$
とおけばまた次のようにも書ける。

$$G \xrightarrow{KR \gg 1} \sqrt{\frac{8\pi K}{iR}} e^{-K(z+z') - iKr + iK(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} \quad (3.6)$$

これは明らかに外方に拡がってゆく波を表わしている。

さてこのいわゆるグリーン関数を使うと、無限遠方で正則な関数は次のように表わされる。

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \phi \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\} G(x, y, z; x', y', z') dS(x', y', z'), \quad (3.7)$$

ただし S は船の浸水表面とする。

無限遠では (3.6) によって次のような波となる。

$$\phi(x, y, z) \xrightarrow{KR \gg 1} \sqrt{\frac{K}{2\pi i r}} e^{-Kz - iK r} H(K, \theta), \quad (3.8)$$

ただし

$$H(K, \theta) = \iint_S \left(\phi \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) e^{-Kz + iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} dS, \quad (3.9)$$

ついでに

$$H_{c,s}(K, \theta) = \iint_S \left(\phi_{c,s} \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \phi_{c,s} \right) e^{-Kz + iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} dS \quad (3.10)$$

と定義する。前出のようにこの場合のみは c, s は実部虚部を意味しない。

次に入射波については同じくグリーンの公式から流体中では

$$\left. \begin{aligned} \iint_S \left(\phi_0 \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 \right) e^{-Kz + iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} dS &= 0, \\ \iint_S \left(\phi_0 \frac{\partial}{\partial n} G - G \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 \right) dS &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

となるので、反射波については (3.7), (2.12) によって、

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi} \iint_S (\phi_0 + \phi_1) \frac{\partial}{\partial n} G dS, \quad (3.12)$$

となる。したがってまた

$$H_1(K, \theta) \equiv H_1(K, \alpha, \theta) = \iint_S (\phi_0 + \phi_1) \frac{\partial}{\partial n} e^{-Kz + iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} dS \quad (3.13)$$

となるが、この場合は明らかに α の関数でもあるので必要に応じて第2式のように表示するものとする。

さて関数 G を実部と虚部にわけると、(3.3), (3.4) を参照して

$$G = G_0 + iG_1, \quad G_1 = -2\pi K e^{-K(z+z')} J_0(KR), \quad (3.14)$$

である。これを (3.7) に代入してポテンシャルを実部虚部にわけて、(3.10), (2.9) を使
うと、

$$\phi_{j_0} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\phi_{j_0} \frac{\partial}{\partial n} G_0 - G_0 \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 \right) dS$$

$$+ \frac{K}{4\pi} e^{-Kz} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} H_{js}(K, \theta) d\theta, \quad (3.15)$$

$$\phi_{js} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \phi_{js} \frac{\partial}{\partial n} G_c ds - \frac{K}{4\pi} e^{-Kz} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} H_{js}(K, \theta) d\theta, \quad (3.16)$$

となり、さらに

$$H_{js}(K, \theta) = \iint_S \phi_{js} \frac{\partial}{\partial n} e^{-Kz + iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} dS, \quad j = 1 \sim 6, \quad (3.17)$$

となる。

$j = 7$ の境界条件は物体が対称性をもっている対称ではないから次のように対称性をもったものにおいて考えるとよい¹²⁾。

$$\left. \begin{aligned} \phi_7 &= \phi_{7A} + \phi_{7B} + i(\phi_{7C} + \phi_{7D}), \\ \phi_0 &= \phi_{0A} + \phi_{0B} + i(\phi_{0C} + \phi_{0D}), \\ \frac{\partial}{\partial n}(\phi_{0j} + \phi_{7j}) &= 0 \quad j = A, B, C, D, \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \phi_{0A} &= e^{-Kz} \cos(Kx \cos \alpha) \cos(Ky \sin \alpha), \\ \phi_{0B} &= -e^{-Kz} \sin(Kx \cos \alpha) \sin(Ky \sin \alpha), \\ \phi_{0C} &= e^{-Kz} \cos(Kx \cos \alpha) \sin(Ky \sin \alpha), \\ \phi_{0D} &= e^{-Kz} \sin(Kx \cos \alpha) \cos(Ky \sin \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

このようにしておくとき物体の対称性に応じて、それぞれ対称性を有することになる。

(3.18) のそれぞれの関数は明らかに (3.12) の型の表示を持つから、今それを実部虚部において書くことになる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_{7jc} &= \frac{1}{4\pi} \iint_S (\phi_{0jc} + \phi_{7jc}) \frac{\partial}{\partial n} G_c dS \\ &\quad + \frac{K}{4\pi} e^{-Kz} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} H_{7js}(K, \theta) d\theta, \\ \phi_{7js} &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \phi_{7js} \frac{\partial}{\partial n} G_c dS \\ &\quad - \frac{K}{4\pi} e^{-Kz} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} H_{7jc}(K, \theta) d\theta, \end{aligned} \right\} j = A, B, C, D, \quad (3.20)$$

これは (3.16) と同じ型であり、物体が対称性をもてばそれに応じた対称性をもつから、二次元の場合と似た結論をひき出すことができる。

まず

$$H_j(K, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^j \cos n\theta + b_n^j \sin n\theta), \quad (3.21)$$

のように展開できるであろうから

$$e^{-iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-i)^n J_n(Kr) \cos n(\theta - \varphi),$$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = 2 \text{ for } n \geq 1,$$

なる展開式を利用すれば

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -iK(x \cos \theta + y \sin \theta) H_j(K, \theta) d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n J_n(Kr) (a_n^j \cos n\varphi + b_n^j \sin n\varphi), \quad (3.22)$$

となる。一方で ϕ_j を φ に関する三角級数に展開し、その展開係数について境界条件を表わす積分方程式を考えると、二次元の場合と同様にその中には互いに独立でないものがあるのでこれらをすべて解く必要はない¹²⁾。このようにして、散乱波の振幅は他の解から導かれることがわかるが、それについては次節でふれる。

最後に (3.13) のところでのべたように H_7 は α と θ の関数であるが、その式で α と θ を入れかえて引算をすると、

$$\begin{aligned} H_7(K, \alpha, \theta) - H_7(K, \theta, \alpha) &= \iint_S \left\{ \phi_0(\alpha) \frac{\partial}{\partial n} \phi_0(\theta) - \phi_0(\theta) \frac{\partial}{\partial n} \phi_0(\alpha) \right\} dS \\ &+ \iint_S \left\{ \phi_0(\alpha) \frac{\partial}{\partial n} \phi_0(\theta) - \phi_1(\theta) \frac{\partial}{\partial n} \phi_0(\alpha) \right\} dS, \end{aligned}$$

となるが (3.11) によって右辺第1項は消え、境界条件 (2.11) を右辺第2項に代入して次節 (4.5) を利用すればこれも消えるから

$$H_7(K, \alpha, \theta) = H_7(K, \theta, \alpha), \quad (3.23)$$

すなわち α の方向から来る波を反射して θ の方向に進む波の振幅は、逆に θ の方向から来る波を反射して α の方向に進む波の振幅に等しいということを意味するものと考えられる。

したがって (3.21) の型の展開ができるとすれば、これについては

$$H_7(K, \alpha, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^7 \cos \alpha \cos \theta + b_n^7 \sin \alpha \sin \theta), \quad (3.24)$$

のような展開ができるであろう。

4. 力とモーメント^{1) 4) 12)}

運動 i による j 方向あるいは $(j-3)$ 軸まわりのモーメントを F_{ij} とすると

$$\begin{aligned} F_{ij} &= - \iint_S p_i \frac{\partial x_j}{\partial n} dS = \rho g K X_i \iint_S \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} dS \\ &= -\rho g K X_i \iint_S \phi_i \frac{\partial}{\partial n} \phi_j dS, \end{aligned}$$

であるから、

$$F_{ij} = \rho g K X_i f_{ij}, \quad (4.1)$$

$$f_{ij} = - \iint_S \phi_i \frac{\partial}{\partial n} \phi_j dS = \iint_S \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} dS, \quad (4.2)$$

とおくと f_{ij} は X_i に無関係な量となる。

次に j 方向、あるいは $(j-3)$ 軸まわりの入射波および反射波による力あるいはモーメントを E_j とすると、

$$E_j = - \iint_S (p_0 + p_1) \frac{\partial x_j}{\partial n} dS = \rho g a \iint_S (\phi_0 + \phi_1) \frac{\partial x_j}{\partial n} dS$$

であるからやはり

$$E_j = \rho g a e_j, \quad (4.3)$$

$$e_j = - \iint_S (\phi_0 + \phi_7) \frac{\partial \phi_j}{\partial n} dS = \iint_S (\phi_0 + \phi_7) \frac{\partial x_j}{\partial n} dS, \quad (4.4)$$

とおいておこう。

グリーンの公式によって ϕ_i, ϕ_j が共に発散波を持つならば

$$\iint_S \left(\phi_i \frac{\partial}{\partial n} \phi_j - \phi_j \frac{\partial}{\partial n} \phi_i \right) dS = 0, \quad (4.5)$$

となることは容易にわかるから、まず

$$f_{ij} = f_{ji}, \quad (4.6)$$

となり、よく知られた力の対称性が出て来る。

次に (3.5), (2.11), (4.5) によって (4.4) を変形し (3.9) を見れば

$$e_j = H_j(K, \alpha), \quad (4.7)$$

すなわち Haskind の公式を得る⁹⁾。

また (4.5) と同様にして、(3.8) から

$$\iint_S \left(\phi_i \frac{\partial}{\partial n} \bar{\phi}_j - \bar{\phi}_j \frac{\partial}{\partial n} \phi_i \right) dS = \frac{iK}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{iK}{2\pi} H_i(K, \theta) \bar{H}_j(K, \bar{\theta}) d\theta, \quad (4.8)$$

が得られ、 $\frac{\partial}{\partial n} \phi_j$ は実数値であるからただちに

$$\mathcal{L}\{f_{ij}\} = f_{ij} = -\frac{K}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_i(K, \theta) \bar{H}_j(K, \bar{\theta}) d\theta, \quad (4.6)$$

が得られ、これは左辺の物体がなす仕事と右辺の波によって外方に失なわれるエネルギーが等しいことを意味している。

また (4.8) において $i=7$ とおくと、

$$\phi_7 \frac{\partial}{\partial n} \bar{\phi}_j - \bar{\phi}_j \frac{\partial}{\partial n} \phi_7 = (\phi_0 + \phi_7) \frac{\partial}{\partial n} \bar{\phi}_j + \left(\bar{\phi}_j \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 - \phi_0 \frac{\partial}{\partial n} \bar{\phi}_j \right),$$

となり、 $j=1\sim 6$ ならば $\frac{\partial}{\partial n} \phi_j$ は実数値であるから、(4.4), (4.7), (3.9) によって

$$\bar{H}_j(K, \alpha + \pi) - H_j(K, \alpha) = \frac{iK}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_7(K, \alpha, \theta) \bar{H}_j(K, \bar{\theta}) d\theta, \quad j=1\sim 6, \quad (4.10)$$

となり、さらに $j=7$ ならば (3.13) と境界条件によって

$$\bar{H}_7(K, \alpha, \alpha + \pi) - H_7(K, \alpha, \alpha + \pi) = \frac{iK}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_7(K, \alpha, \theta)|^2 d\theta, \quad (4.11)$$

なる式が成立つ。

したがって、(3.21), (3.24) のように展開できるとすれば

$$\left. \begin{aligned} a_n^7 &= \frac{ie_n}{K} \frac{(a_n^j + \bar{a}_n^j)}{(a_n^j)}, & b_n^7 &= \frac{ie_n}{K} \frac{(b_n^j + \bar{b}_n^j)}{(b_n^j)}, \\ |a_n^7|^2 &= \frac{e_n}{iK} (a_n^7 - \bar{a}_n^7), & |b_n^7|^2 &= \frac{e_n}{iK} (b_n^7 - \bar{b}_n^7), \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

となって二次元の場合と同様に反射波の振幅は $j=1\sim 6$ までの運動による波の振幅がわかっていれば求められることになり、さらにまた船が対称性をもっているときは、 $j=1\sim 6$ の運動のうちでも独立でないものがあることも容易にわかる。

このような訳で $H_1 \sim H_6$ がわかれば波の強制力も H_7 も求まるから後述のように運動

方程式を解くこともできるしまた漂流力も計算できる。

逆に波の強制力がわかっていれば (4.9) によって、各運動に対する減衰が計算でき、それから Kramers-Kronig の関係⁹⁾ によって附加質量の項が求められることになってやはり運動方程式は解けるはずである。

ところで実際の数値計算では、(3.7) の表現よりも吹出し吸込み、あるいは二重吹出し分布で次のように表現する方が便利であると思われる⁴⁾。

$$\phi_j = \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu_j \frac{\partial}{\partial n} G dS, \quad (4.13)$$

$$\phi_j = \frac{1}{4\pi} \iint_S \sigma_j G dS, \quad (4.14)$$

そうすると S の外側 (+ 印) と内側 (- 印) で次のような不連続性がある。

$$\phi_j|_+ - \phi_j|_- = \mu_j, \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi_j \Big|_+ - \frac{\partial}{\partial n} \phi_j \Big|_- = -\sigma_j, \quad (4.16)$$

ただし
$$\iint_S \sigma_j dS = 0,$$

さて力あるいはモーメントは σ, μ によって次のように表わされる。

すなわち

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \iint_{S+F} \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} dS - \iint_F \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} dS \\ &= \iint_{S+F} \left(\phi_j \frac{\partial x_i}{\partial n} - x_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right) dS - \iint_{S+F} x_j \frac{\partial x_i}{\partial n} dS + \iint_F \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial z} dx dy, \end{aligned}$$

ただし F は船の水線面とする。

となるから、右辺第2項の積分は体積積分に変え、第1項では積分領域を S の外側と内側にしほって、(4.15)、(4.16) を使い、第3項については ϕ_i に (4.13)、(4.14) を代入して積分順序を変え

$$\phi_j = \frac{1}{4\pi} \iint_F \frac{\partial x_j}{\partial z} G dx dy, \quad (4.17)$$

のような関数を導入すれば

$$f_{ij} = - \iiint_D (\text{grad } x_i)(\text{grad } x_j) dv + \left\{ \iint_S \mu_i \frac{\partial}{\partial n} (x_j + \phi_j) dS, \right. \quad (4.18)$$

$$\left. \iint_S \sigma_i (x_j + \phi_j) dS, \right\}$$

が得られる¹⁰⁾。ただし D は船体内の全容積とする。

(4.17) の $\partial x_j / \partial z$ は $j = 1, 2, 6$ では零であり、また没水体では F がなくなるのでやはりなくなるから

$$f_{ij} = - \iiint_D (\text{grad } x_i)(\text{grad } x_j) dv + \left\{ \iint_S \mu_i \frac{\partial x_j}{\partial n} dS, \right. \quad (4.19)$$

$$\left. \iint_S \sigma_i x_j dS, \right\}$$

のように簡単になる。

ϕ_j は $j=3, 5$ などでは特に重要であって、水上船と没水体との違いを示す具体的な量であって無視することはできない¹⁰⁾。

波の強制力については (4.18) のような項が複雑になるので省略するが $j=1, 2, 6$ および没水体では同様にして

$$e_j = \iint_S \mu_j \frac{\partial x_j}{\partial n} dS \quad \text{or} \quad \iint_S \sigma_j x_j dS, \quad (4.20)$$

となる。

一方 (4.7) の関係があるから (3.9) 式で積分面を変えて水面条件を考えれば F の上の積分は消えて

$$H_j(K, \alpha) = \iint_S \mu_j \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 dS \quad \text{or} \quad \iint_S \sigma_j \phi_0 dS, \quad j=1 \sim 7. \quad (4.21)$$

となりこれはよく知られた式である。

5. 減衰エネルギーと漂流力^{11) 2)}

今入射波だけ除いた速度ポテンシャルを

$$\varphi = \sum_{j=1}^7 \varphi_j = i\omega \sum_{j=1}^7 X_j \phi_j, \quad (5.1)$$

ただし
とし、さらに

$$\begin{aligned} A(K, \theta) &= \iint_S \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 - \phi_0 \frac{\partial}{\partial n} \varphi \right) dS, \\ &= i\omega \sum_{j=1}^7 X_j H_j(K, \theta), \end{aligned} \quad (5.2)$$

とおこう。

波の力だけで船が揺れ動いているものとすれば、全系のエネルギーは不変であるから

$$\iint_S \left\{ (\varphi_0 + \varphi) \frac{\partial}{\partial n} (\varphi_0 + \varphi) - \overline{(\varphi_0 + \varphi)} \frac{\partial}{\partial n} (\varphi_0 + \varphi) \right\} dS = 0, \quad (5.3)$$

ここに ϕ_0, φ_0 は (2.5) による。

となるが、被積分関数をならべかえて (3.11) 上式, (5.2), (4.8) を代入すれば

$$A(K, \pi + \alpha) - \overline{A(K, \pi + \alpha)} = \frac{-i\omega K}{2\pi g a} \int_{-\pi}^{\pi} A(K, \theta) \overline{A(K, \theta)} d\theta, \quad (5.4)$$

となることがわかるが、この右辺は拡散波によるエネルギー散逸

$$M = \frac{\rho\omega K}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(K, \theta)|^2 d\theta, \quad (5.5)$$

と常数倍だけ異なるものである。

また (5.3) において (2.12) の境界条件を考えに入れて

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \sum_{j=1}^6 \varphi_j = i\omega \sum_{j=1}^6 X_j \phi_j \\ B(K, \theta) &= \iint_S \left(\phi \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 - \phi_0 \frac{\partial}{\partial n} \phi \right) dS, \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

とにおいて、ならべかえ、 ϕ_j ($j=1 \sim 6$) の境界値は実数であることを考えて (4.4), (4.7) を

代入すると

$$\sum_{j=1}^6 \{X_j \overline{H_j(K, \alpha)} - \overline{X_j} H_j(K, \alpha)\} = \frac{-iK}{2\pi ga} \int_{-\pi}^{\pi} |B(K, \theta)|^2 d\theta. \quad (5.7)$$

となるが、この左辺は Haskind の公式によって波が船に対してなす仕事に比例し、右辺は船が運動によってたてた波が持ちさるエネルギー N に比例している。

すなわち

$$N = \frac{\rho \omega K}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |B(K, \theta)|^2 d\theta, \quad (5.8)$$

これらの式を (5.1), (5.6) のように要素に分解して、書きなおせば

$$M = \frac{\rho}{8\pi} \omega^3 K \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^7 X_i \overline{X_j} \int_{-\pi}^{\pi} H_i(K, \theta) \overline{H_j(K, \theta)} d\theta, \quad (5.9)$$

$$M = -\frac{\rho ga \omega}{4} \sum_{j=1}^7 \{X_j H_j(K, \pi + \alpha) + \overline{X_j} \overline{H_j(K, \pi + \alpha)}\}, \quad (5.10)$$

$$N = \frac{\rho \omega^3 K}{8\pi} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 X_i \overline{X_j} \int_{-\pi}^{\pi} H_i \overline{H_j} d\theta = \frac{\rho \omega^3}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 X_i \overline{X_j} f_{ij}, \quad (5.11)$$

$$N = \frac{\rho ga \omega}{4i} \sum_{j=1}^6 \{\overline{X_j} H_j(K, \alpha) - X_j \overline{H_j(K, \alpha)}\}, \quad (5.12)$$

となる。

一方漂流力は x 方向に D_x , y 方向に D_y とすると

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \frac{\rho K^2}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(K, \theta)|^2 (\cos \alpha - \cos \theta) d\theta, \\ D_y &= \frac{\rho K^2}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(K, \theta)|^2 (\sin \alpha - \sin \theta) d\theta, \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

で与えられ、この内右辺第1項は (5.4) によって書きかえることもできる。

これを上式のように分解すれば

$$D_x = \frac{\rho g K^3}{8\pi} \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^7 X_i \overline{X_j} \int_{-\pi}^{\pi} H_i(K, \theta) \overline{H_j(K, \theta)} (\cos \alpha - \cos \theta) d\theta, \quad (5.14)$$

となり、また (4.21) 第2式によって吹出し分布で表わすと

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} H_i(K, \theta) \overline{H_j(K, \theta)} (\cos \alpha - \cos \theta) d\theta \\ &= 2\pi \iiint_S \sigma_i(x, y, z) \sigma_j(x', y', z') e^{-K(z+z')} \{J_0(KR) \cos \alpha - iJ_1(KR) \cos(\varphi - \varphi')\} \\ & \quad \times dS(x, y, z) dS(x', y', z'), \end{aligned} \quad (5.16)$$

ただし

$$R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad \varphi' = \tan^{-1} \frac{y'}{x'}.$$

のように書ける⁷⁾。

もちろん運動の振幅は運動方程式をとりて求めなければならないが、二次元のように簡単ではないので省略する。しかし大体似たような結論が出そうである。

6. 波長の大きい時^{1) 8) 9) 12)}

前節で定義した力およびモーメントは一般にはすべて0でないけれども実際上は船が対

称性をもっているので多くの連成項が消える。

$$\left. \begin{aligned} f_{12} = f_{13} = f_{14} = f_{16} = f_{23} = f_{25} = f_{26} = f_{34} = f_{35} = f_{36} = f_{45} = f_{46} = f_{56} = 0, \\ f_{15}, f_{24} \neq 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

となることがわかり、縦揺れと前後揺れ、横揺れと左右揺れの連成項のみが消えない。

しかし前後の対称性がない普通の船のような場合はその他にさらに

$$f_{15}, f_{24}; f_{16}, f_{25}, f_{35}, f_{46} \neq 0, \quad (6.2)$$

すなわち上下前後、左右船首、縦上下、横船首各動揺間の連成項が出てくる。

しかし普通の船では前後の非対称性は僅かでありまた前後揺れに基因する力は小さいから

$$f_{16}, f_{15} \doteq 0 \quad (6.3)$$

と考へて、前後揺れと縦揺れ、上下揺れとは無関係であるとしても大きい誤差は招かないかも知れないが、一方横揺れについてはその復原力および減衰が左右揺れに比し小さいので連成項は無視できないと考えられる。

さて波長が大きい時、すなわち $K \rightarrow 0$ の時は二次元の場合と同様にして、附加慣性の係数を k_j とすると

$$f_{jj} \doteq k_j \Delta, \quad j = 1, 2, 3, \quad (6.4)$$

$$f_{jj} \doteq k_j I_{(j-3)} / \rho, \quad j = 4, 5, 6, \quad (6.5)$$

ただし ∇ は排水容積、 I_j は j 軸まわりの慣性モーメントとする。

また

$$\left. \begin{aligned} f_{15} &\doteq -k_1 l_{15} \nabla \\ f_{24} &\doteq -k_2 l_{26} \nabla \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{26} &\doteq -k_2 l_{26} \nabla \\ f_{35} &\doteq -k_3 l_{35} \nabla \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{13} &\doteq -k_{13} \nabla \\ f_{46} &\doteq k_{46} I_4 / \rho \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

のように表わすことができるであろう。

ここで l_{15} , l_{24} , l_{26} , l_{35} 等は附加質量の中心の原点から距離と考えられる。

次に強制力については、左右対称であるとして

$$e_1 = H_1(K, \alpha) \doteq K[f_{13} + i \cos \alpha (\nabla + f_{11})], \quad (6.9)$$

$$e_2 = H_2(K, \alpha) \doteq i K \sin \alpha (\nabla + f_{22}), \quad (6.10)$$

$$e_3 = H_3(K, \alpha) \doteq A_w - K(\nabla + f_{33}) + i K \cos \alpha (f_{13} + A_w l_f), \quad (6.11)$$

ただし A_w は水線面積、 l_f は原点から前方に測った浮面心までの距離とする。

$$e_4 = H_4(K, \alpha) \doteq i K \sin \alpha [f_{42} + \overline{OM}_i \nabla], \quad (6.12)$$

$\overline{OM}_i$ は原点から横メタセンターまでの高さ。

$$e_5 = H_5(K, \alpha) \doteq -l_f A_w - K f_{35} + i K \cos \alpha (f_{15} + \overline{OM}_i \nabla), \quad (6.13)$$

$\overline{OM}_i$ は原点から縦メタセンターまでの高さ。

$$e_6 = H_6(K, \alpha) \doteq i K \sin \alpha f_{26}, \quad (6.14)$$

ただし浮心は原点の真下にあるものとする。

7. 運動方程式

最も簡単な場合として $\alpha = 0$ すなわち縦波をうける場合を考えて見よう。

この時は左右対称な船では縦上下、前後の三運動がおこる。

運動方程式は $e^{i\omega t}$ なる因子を除いて、

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\omega^2}{g} WX_1 &= F_{11} + F_{31} + F_{5G1} + E_1, \\ -\frac{\omega^2}{g} WX_3 + \rho g A_w X_3 &= F_{13} + F_{33} + F_{5G3} + E_3, \\ -\frac{\omega^2}{g} I_{2G} X_5 + W m_e X_5 &= F_{15G} + F_{35G} + F_{5G5G} + E_{5G}, \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

ただし $W = \rho g V$, I_{2G} は η 軸まわりの重量慣性モーメント, m_e は縦メタセンター高さとする。

4 節の記号によって書き直せば

$$\left. \begin{aligned} f'_{11} X_1 + f_{31} X_3 + f_{5G1} X_5 &= -\frac{a}{K} e_1, \\ f_{13} X_1 + f'_{33} X_3 + f_{5G3} X_5 &= -\frac{a}{K} e_3, \\ f_{15G} X_1 + f_{35G} X_3 + f'_{5G5G} X_5 &= -\frac{a}{K} e_{5G}, \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} f'_{11} &= V + f_{11} \\ f'_{33} &= V + f_{33} - A_w/K, \\ f'_{5G5G} &= I_{2G}/\rho g + f_{5G5G} - m_e V/K, \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

となる。

この連立方程式をとけば運動が求められる訳であるが、特に前後対称ならば

$$f_{13} = f_{35G} = 0$$

となるので上下揺れは独立になり

$$\frac{X_3}{a} = -\frac{e_3}{K(V + f_{33}) - A_w}, \quad (7.4)$$

で与えられる。

同調時、すなわち

$$\Re\{K(V + f_{33}) - A_w\} = 0, \quad (7.5)$$

には (4.7), (4.9) によって、

$$\frac{a}{X_3} = \frac{K^2}{4\pi H_3(K, 0)} \int_{-\pi}^{\pi} |H_3(K, 0)|^2 d\theta, \quad (7.6)$$

となる。従って特に $K \rightarrow 0$ とすれば (6.11) によって

$$\frac{a}{X_3} \doteq \frac{K^2}{2} \overline{H_3(K, 0)} \doteq \frac{K^3}{2} \{A_w - K(1 + k_3)V\}, \quad (7.7)$$

となるが、この時一方では (7.5) の関係があるので X_3 は無限に大きくなることになる。

一方でまた (7.5) は (6.11) からわかるようにこの場合波の強制力がなくなる。いわゆる波なしの条件でもあるから、同調周期と波なし周期はほぼ等しくかつこの時には振幅が無限に大きくなることがわかる¹¹⁾。

しかし (7.6) からわかるように、右辺の分母は H_3 が恒等的に 0 でなければ 0 にならないから $H_3(K, 0)$ が 0 になれば、すなわちこの方向にのみ波なしならば X_3 は 0 になる¹¹⁾。

縦揺れの場合は前後揺れがあまり関係しないと言う点を除けば前報の横揺れの場合によく似ていると考えられる。そしてあらゆる方向に波なしとすることはできないが一方方向にのみ波なしとすることは可能と思われる¹¹⁾。

8. 球の運動

4 節でのべたように 6 つの運動に対する附加質量と $H_j(K, \theta)$ がわかっているならば運動方程式はとけ、かつ漂流力まで求められる。

しかし従来の計算では附加質量とダムピングのみが与えられているので運動方程式を解くには一般には不充分である。

ただ球および垂直軸のまわりに軸対称な物体ではそれだけで運動方程式をとくには充分である。

簡単のために半径 r の半没球の場合についてのみ考え、 $\alpha = 0$ としておこう。

重心は 0 から l だけ下にあるとすると運動方程式は (7.2) で与えられるが、球に働く力はすべて原点 0 に働くこと、および (2.17) を考えると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (\nabla + f_{11})X_3 - lf_{11}X_3 &= -\frac{a}{K}H_1(K, 0), \\ \left\{ (\nabla + f_{33}) - \frac{A_w}{K} \right\} X_3 &= -\frac{a}{K}H_3(K, 0), \\ -lf_{11}X_1 + \left(\nabla c^2 + l^2 f_{11} - \frac{l}{K}\nabla \right) X_3 &= \frac{a}{K}lH_1(K, 0) \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

ただし $l_{20}/\rho g \nabla = c^2$ とする。またメタセンターは原点に一致するので l は同時にメタセンター高さでもある。

対称性から明らかに

$$\left. \begin{aligned} H_3(K, \theta) &= H_3(K), \\ H_1(K, \theta) &= iH_1(K)\cos\theta, \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

のようになるであろうから (4.9) によって、

$$\left. \begin{aligned} f_{11s} &= -\frac{K}{4}|H_1(K)|^2, \\ f_{33s} &= -\frac{K}{2}|H_3(K)|^2, \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

であり、従ってダムピングがわかれば波の強制力の絶対値はわかることになる。

さて (8.1) をとけばいわゆる増幅率の形で次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} Q_3 &= X_3/a = -D_3/\Delta_3, \\ \Delta_3 &= 1 + f_{33}|\nabla - A_w|K\nabla, \\ D_3 &= H_3(K)/K\nabla \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= X_1/a = -i D_1/\Delta_1, \\ Q_3 &= X_3/Ka = i D_3/\Delta_1, \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= (1+f_{11}/\varphi)(Kc^2/l-1)+Kl f_{11}/\varphi, \\ D_1 &= D_3(Kc^2/l-1), \\ D_3 &= H_1(K)/K\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

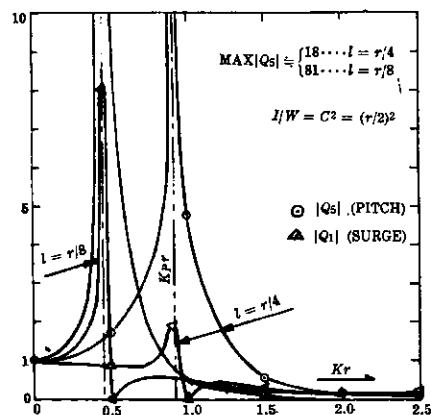
特に $l=0$ とすれば (8.5) は,

$$\left. \begin{aligned} X_3 &= 0 \\ Q_1|_{l=0} &= -i H(K)/K(\varphi+f_{11}), \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

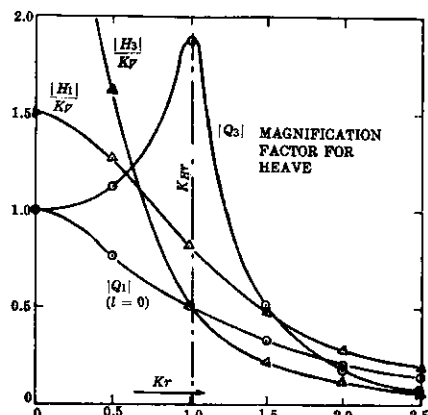
となる。

今仮りに $c = \frac{r}{2}$, $l=0$, $\frac{r}{4}$, $\frac{r}{8}$ において, W. D. Kim の計算⁴⁾を利用して運動を求

めたものを第2図, 第3図に図示する。



第 2 図



第 3 図

図のように特に縦揺れの倍率は l が小さくなると非常に大きい。

同調点では, 上下揺れの場合,

$$\left. \begin{aligned} K_H &= A_w/(\varphi + f_{33e}), \\ Q_3 &= -2i/K_H^2 H_3(K_H), \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

縦および前後揺れの場合,

$$\left. \begin{aligned} K_P &= l(\varphi + f_{11e})/\{c^2\varphi + (c^2 + l^2)f_{11e}\}, \\ Q_1 &= -4f_{11e}/\{K_P^2 \varphi \overline{H_1(K)}\}, \\ Q_3 &= -4(\varphi + f_{11e})/\{K_P^2 l \varphi \overline{H_1(K)}\}, \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

となるから後者では l が大きいほど, また K_P が大きいほど揺れ方は少ないことになる。

9. 結 論

以上を要約すれば、前進速度を持たないで波の中で揺れ動く船の運動を線型理論的に考えてみると、それは6自由度および反射波に関する速度ポテンシャルをそれぞれ独立に考えて重ね合わせればよい訳であるが、それらの中には独立でないものがあり、特に反射波のそれは他のものから導出することができることがわかった。

従って反射波の速度ポテンシャルは求めなくても運動方程式を解き、また漂流力を求めることができることになる。

逆にあらゆる方向、周期について波の強制力がわかっていれば Haskind の公式でダンプングが求められ、さらに Kramers-Kronig の公式で原理的には附加質量も求めることができる訳である。

このような関係を利用すれば波の中の船の運動に関する理論計算はかなり簡単化されるであろう。

参 考 文 献

- 1) M. D. Haskind: Technical and Research Bulletin, No. 1~12, SNAME (1953).
- 2) H. Maro: Journal of Ship Research, Vol. 4, No. 3 (1960).
- 3) J. N. Newman: Journal of Ship Research, Vol. 6, No. 3 (1962).
- 4) W. D. Kim: Journal of Fluid Mechanics, Vol. 21, Pt. 3 (1962).
- 5) J. Kotik and V. Mangulis: International Shipbuilding Progress, Vol. 9, No. 97 (1962).
- 6) H. Lamb: "Hydrodynamics" 6th ed. p. 166, Dover, New York.
- 7) 別所正利: 造船協会論文集 101号 昭和32年
- 8) 別所正利: 造船協会論文集 102号 昭和33年
- 9) 別所正利: 造船協会論文集 103号 昭和33年
- 10) 別所正利: 造船協会論文集 110号 昭和36年
- 11) 別所正利: 造船協会論文集 117号 昭和40年
- 12) 別所正利: 防衛大学校理工学研究報告 3巻1号 昭和40年

“On the Theory of Motions among Waves of a Ship Having No Advance Speed”

By Masatoshi BESSHO*

Abstract

The author tries to treat the theory of motions among waves of a ship having no advance speed systematically as far as possible, especially dealing with the boundary conditions of the velocity potentials.

Thus, he explains the method to derive the reflection potential of the incident wave from the potentials of other motions.

This enables us to solve the equation of motion by making use of the published data of the added mass and the damping coefficient of a body.

Thence, he calculates the motion of a half immersed sphere among waves, for example.

* Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering.

波の中の船の横揺れ運動の理論について

(続 報)

別 所 正 利*

(昭和40年9月30日受付)

1. 序 言

前々報¹⁾では二次元筒状船について、Haskind の関係を利用して横揺れの運動方程式を解いて見た。

その結果いわゆる active resistance を考えに入れていない従来の Froude—Kriloff—渡辺の理論と形式的に一致することがわかった。

しかしこの理論から導かれる同調横揺れ角は後出のように波長の大きい所では異常に大きくなって実際の現象と一致するとは思われない。

一方田才によれば三次元物体では理論と実験との一致は良好であると言う^{2), 3)}ので、さらに三次元問題について系統的に検討して見なければ断定的な結論は出せない。

しかし菱田の計算⁴⁾を見ると船首尾近くの方が中央部付近よりずっと大きい波をつくるようであるから、このためにこのような一見相反する結果が出て来るのかも知れない。

したがってこの点は粘性抵抗をも考えに入れて検討して見る必要があるであろう。

いずれにしても田才、菱田の計算と実験との一致から推して考えれば、造波抵抗理論そのものの妥当性は疑がうことができないと思われる。

このような事情を考え合わせると、結局今の段階では全体としての運動を求めるのは場合によって難かしいが、水が船におよぼす個々の力などについては理論がかなり正しい数値を与えてくれるものと予想される。

そこで本報ではやはり簡単のために二次元問題に限って具体的に Lewis Form をとりあげて、特に波長の大きい所で諸種の力が船型によってどのように変わるかを調べて見た。

またさらにいわゆる有効波傾斜係数が波長の大きい所でどのように変化するかを検討し、その結果から波の強制モーメントを少なくする方法について検討して見た。

2. 速度ポテンシャルの定義

本報では前々報¹⁾と少し異なり、前報²⁾のものにほぼ等しい記号などを採用したので本

* 防衛大学校機械工学教室 助教授

節と次節では諸種の定義を掲げることにする。

まず速度ポテンシャルを

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, t) &= \Re \{ \varphi(x, y) e^{i\omega t} \} \\ \varphi(x, y) &= \varphi_0(x, y) + i\varphi_s(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

とおくと、圧力、水面変位は、

$$P(x, y, t) = \Re \{ \rho i \omega \varphi(x, y) e^{i\omega t} \}, \quad (2.2)$$

$$\eta(x, t) = \Re \left\{ \frac{\omega}{ig} \varphi(x, 0) e^{i\omega t} \right\}, \quad (2.3)$$

のように与えられる。

ここに $\omega = 2\pi/\tau$, τ は周期, g は重力の常数, ρ は水の密度とする。

また座標系は第1図のようにとり、原点は平均水面上、図形の中心におくものとする。

さて φ は水面において

$$K\varphi(x, 0) + \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, 0) = 0, \quad (2.4)$$

なる条件を満足し、かつ x の無限に大きい所で次のような波を持つ調和函数である。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y) &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} iH^+(K)e^{-Ky-iKx}, \\ &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} iH^-(K)e^{-Ky+iKx} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

ここに

$$H^\pm(K) = \int_C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-Ky \pm iKx} dS, \quad (2.6)$$

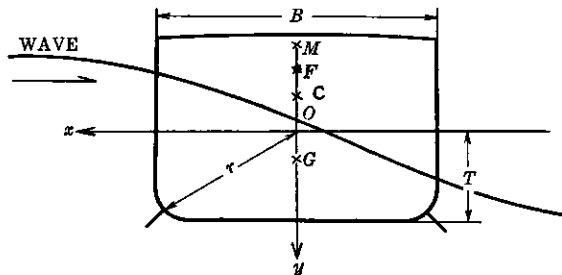
であって、 C は物体と水との境界の曲線を示すものとする。

したがって (2.3) によって発散波の振幅は

$$\eta(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \Re \left\{ \frac{\omega}{g} H^\pm(K) e^{-Ky \pm iKx + i\omega t} \right\} \quad (2.7)$$

で与えられる。

さて線型理論の立場ではポテンシャルは、それぞれの自由度に対応するものと入射波の散乱に対応するものとの重ね合わせで表わされるから、次のように各自由度に対応する速度ポテンシャルを定義しておくと便利である。



第1図

- i) x 軸に平行な動揺に関する量を添字 1 で表わすこととし、その振幅を $Xe^{i\omega t}$ とする。

境界条件は

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = i\omega X \frac{\partial x}{\partial n}$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(x, y) &= i\omega X \phi_1(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi_1 &= -\frac{\partial x_1}{\partial n}, \quad x_1 \equiv x \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

とおくと ϕ_1 は単位振幅速度に対する速度ポテンシャルである。

- ii) 原点のまわりの回転動揺に関する量を添字 3 で表わし、その振幅を $\theta e^{i\omega t}$ とおき、同様に

$$\left. \begin{aligned} \phi_3 &= i\omega \theta \phi_3 \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi_3 &= -\frac{\partial x_1}{\partial n} = x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n}, \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

のように ϕ_3 を定義する。

(この定義は前々報と符号が逆になっているので、後出の式も少しずつ異って来る)

- iii) 重心のまわりの回転動揺に関する量は添字 5 で表わすことにすると、振幅はやはり $\theta e^{i\omega t}$ であるから、

$$\left. \begin{aligned} \phi_5 &= i\omega \theta \phi_5 \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi_5 &= x \frac{\partial}{\partial n} - (y-l) \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

となり、したがって

$$\phi_5 = \phi_3 - l \phi_1, \quad (2.11)$$

である。

ここに l は原点から重心までの距離である (水面下方に正と取る)。

- iv) x の正の方向からの入射波はその振幅を a とすると

$$\phi_0(x, y) = \frac{iga}{\omega} \phi_0(x, y), \quad \phi_0(x, y) = e^{-\kappa y + i\kappa x} \quad (2.12)$$

で与えられ、その物体による反射波 ϕ_4 は

$$\left. \begin{aligned} \phi_4(x, y) &= \frac{iga}{\omega} \phi_4(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial n} (\phi_0 + \phi_4) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

のような境界条件を満足しなければならない。

最後に上下動は今の場合関係ないので省略する。

3. 力とモーメントの定義⁽¹⁾⁽²⁾

運動 i による j 方向の力あるいはモーメントを F_{ij} と書くことにすると

$$F_{ij} = -\rho i \omega \int_c \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} dS = \rho \omega^2 X_i \int_c \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} dS, \quad i, j = 1, 3, 5, \quad (3.1)$$

ここに $X_1 \equiv X_1$, $X_3 \equiv \theta$, $X_5 \equiv \theta$ とする。

そこで

$$f_{ij} = \frac{F_{ij}}{\rho \omega^2 X_i} = \int_c \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} dS = - \int_c \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} dS, \quad (3.2)$$

のような量を定義しておく。

波の強制力およびモーメントを E_j とすると同様にして

$$\left. \begin{aligned} E_j &= -\rho i \omega \int_c (\phi_0 + \phi_i) \frac{\partial x_j}{\partial n} dS = \rho g a e_j, \\ e_j &= - \int_c (\phi_0 + \phi_i) \frac{\partial}{\partial n} \phi_j dS, \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

のように e_j な量を導入しておこう。

そうすると

$$f_{ij} = f_{ji}, \quad (3.4)$$

$$e_j = -H_j^+(K), \quad (3.5)$$

ここに

$$H_j^{\pm}(K) = \int_c \left(\frac{\partial}{\partial n} \phi_j - \phi_j \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-K y \pm i K x} dS, \quad (3.6)$$

なる関係がある。

今単位振幅の運動によって起こされる発散波の振幅を A とすると (2.7) によってこれは上の H と次のような関係がある。

$$A_j = K H_j^+(K), \quad (3.7)$$

また、今の場合 ϕ_1, ϕ_3 などはずべて左右対称であるから定義式から明らかに

$$H_j^+(K) = -H_j^-(K), \quad j = 1, 3, 5, \quad (3.8)$$

であり、したがって前々報によって

$$\mathcal{J}\{f_{ij}\} = f_{ijs} = -H_i^+(K) \overline{H_j^+(K)}, \quad (3.9)$$

なる関係がある。

特に $i = j$ とするとこれはダムピングである。今 X_j なる運動に対して働らく速度に比例する抵抗を $\omega X_j N_j$ の形にかくとすると次の関係が成立つ、

$$-f_{jjs} = N_j / \omega = |H_j^+(K)|^2 = |A_j / K|^2, \quad (3.10)$$

また

$$\left. \begin{aligned} e_3/e_1 &= H_3^+(K)/H_1^+(K) = l_w, \\ e_5/e_1 &= l_w - l \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

とおくと l_w は実数値をとるから波による強制モーメントは水平強制力と同位相である。

これらの式と (3.9) を使って、

$$\left. \begin{aligned} f_{33S}/f_{13S} &= f_{13S}/f_{11S} = l_w, \\ f_{35S}/f_{15S} &= f_{15S}/f_{11S} = l_w - l_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

となるから、例えば H_3^+ と H_1^+ とがわかっていれば f_{ij} の虚数部はすべて計算できる。

最後に f_{ij} の実部は付加質量のような項であるから次のように書いておこう。

$$\left. \begin{aligned} f_{11c} &= \int_c \phi_{1c} \frac{\partial x}{\partial n} dS = k_1(K) \nabla, \\ f_{13c} &= \int_c \phi_{1c} \frac{\partial x_3}{\partial n} dS = k_1(K) l_1(K) \nabla, \\ f_{33c} &= \int_c \phi_{3c} \frac{\partial x_3}{\partial n} dS = k_1(K) \kappa_3^2(K) \nabla, \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

ここで ∇ は船の水面下の断面積とする。

このようにおくと、 k_1 は横方向の付加質量係数、 l_1 は横方向の付加質量の中心、 κ_3 は回転付加慣性の慣性半径となる。

4. 力とモーメントについて

横揺れの問題では船幅に比して波長はずっと大きいのが普通であるから $K=0$ の極限の速度ポテンシャルを近似値として用いて種々の量を計算できる。

この時の誤差は K のオーダーであることがわかっている¹⁴⁾。

一方ダムピングは K^2 のオーダーであるので、この近似ではダムピングは無視してもよいことになる。

付録 A には Lewis form について (3.12) の定義による k_1, l_1, κ_3 となどの計算例を示してある。

(これらの式はすでに文献に与えられているものであるが便宜上まとめて記しておいた) 波の強制力は次式で与えられる²¹⁾。

$$\begin{aligned} H_1^+(K) &\doteq iK \int_c \left(x \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \phi_1 \frac{\partial x}{\partial n} \right) dS \\ &= -iK \nabla (1 + k_1), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} H_3^+(K) &\doteq iK \int_c \left(x \frac{\partial \phi_3}{\partial n} - \phi_3 \frac{\partial x}{\partial n} \right) dS \\ &= -iK \nabla (\overline{OM} + k_1 l_1), \\ l_w &\doteq (\overline{OM} + k_1 l_1) / (1 + k_1), \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

ただし $\overline{OM}$ は原点からメタセンター M までの距離とし M が水面下にある場合を正とする。

したがって

$$\left. \begin{aligned} \overline{OM} \nabla &= - \int_c x \frac{\partial \phi_3}{\partial n} dS = \int_c \left(xy \frac{\partial x}{\partial n} - x^2 \frac{\partial y}{\partial n} \right) dS \\ &= \overline{OB} \nabla - \overline{BM} \nabla, \quad \overline{BM} = B^2/12, \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

ここに B は船幅とし、 $\overline{OB}$ は原点から浮心 B までの、 $\overline{BM}$ は浮心からメタセンターま

での距離とする。

参考のために $K \rightarrow \infty$ の極限を考えれば、波の影響は波長より深い所までは届かないと考えられるから、この場合は水面付近を除いて $K = \infty$ の速度ポテンシャルで近似できると考えられる。

したがって H_3^+ を除けば付録 B のように諸量の近似値が求められる。

H_3^+ は次に示すように水面付近のポテンシャルによって決まる。

すなわち K が十分大きいと、物理的に考えて、右方に出て行く波と左方に出て行く波は全く干渉しないと思われるから、船が水線付近で垂直な船側を持っているとすれば T. H. Havelock の式によって^{13) 15)}

$$\begin{aligned} H_1^+(K) &\doteq 2 \int \frac{\partial \phi_1}{\partial x} e^{-Ky + \frac{iKB}{2}} dy = -2 \int_0^\infty e^{-Ky + \frac{iKB}{2}} dy \\ &= -\frac{K}{2} e^{\frac{iKB}{2}}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$H_3^+(K) \doteq 2 \int_0^\infty \frac{\partial \phi_3}{\partial x} e^{-Ky + \frac{iKB}{2}} dy = -\frac{2}{K^2} e^{\frac{iKB}{2}}, \quad (4.5)$$

となるから、また

$$l_w \doteq \frac{1}{K}. \quad (4.6)$$

のような近似式が求められる。

これらの式は垂直平板の解析的解¹⁸⁾と比較して見ると $KT \geq 5$ (T は吃水) すなわち吃水が波長に比して大きい所ではかなり正確な近似値を与えていることがわかる。

さて付録 A, B の計算結果を見るとこれらの諸量について次のようなことが言える。

i) $K = 0$ における x 方向の付加質量の中心 C は幅の極端に狭い場合を除けば常にメタセンター M の下側にある。特に楕円の場合は M と C は一致し、したがって下記の F 点も一致する。

ii) $K = 0$ の極限における波の強制力の中心 F は M と c を $1:k_1$ に内分する点にある ((4.2) 式によって)。

したがってこの F 点で船を支えれば波による傾斜モーメントはなくなる。一方 Haskind の関係によればこの時造波ダムピングもなくなる¹¹⁾。

菱田は重心を中心とする回転運動による造波ダムピングが重心の上下によって変化する様子から船型を (+) 型と (-) 型の二つの類型に分けている¹¹⁾ が上記の事情を考えると、これはまた M と C の距離が大きい場合が (+) 型、ほとんど一致する場合を (-) 型と呼んでいることになる。

またこの分類は渡辺による運動の上からの分類¹⁾ (幅の広い浅吃水船と幅の狭い深吃水船) とも略々一致する。

iii) Kramers-Kronig の関係¹⁸⁾ から明らかなように、

$$k_1(0) > k_1(\infty) \quad (4.7)$$

となっている。

また K の小さい所では付録 D に示すように同じ関係によってその変化の様子を知ることができる。

$k_1(0)$ も $k_1(\infty)$ も幅吃水比と面積係数によって大きく変化する。

このうち面積係数による変化については楕円に近い所で極小値を示す。

iv) 重心に関する付加慣性モーメントは (2・11), (3・2), (3・13) などを用いて,

$$\begin{aligned} f_{ssc} &= (k_1 \kappa_s^2 - 2l k_1 l_1 + l^2 k_1) \nabla \\ &= \{\kappa_s^2 - l_1^2 + (l - l_1)^2\} k_1 \nabla, \end{aligned} \quad (4 \cdot 8)$$

と書けるから, $l = l_1$, すなわち重心が C に一致した時に最も小さくなる。

換言すれば C 点は付加慣性モーメントの極小な点である。

v) l_1 は $K = 0, \infty$ の両値も, また田才⁷⁾, 田村²⁰⁾の計算値を参照しても K による変化は小さいものと考えられる。

vi) l_w は K が十分大きい所では (4・6) によって与えられるから, F 点はいつでも水面の少し下に来ることになる。しかし K のかなり大きい所まで l_1 と同じ程度の変化を示すもののようである^{7) 20)}。

5. 運動方程式⁽¹⁾

横揺れと左右揺れの運動方程式は $e^{i\omega t}$ の因子を除いて次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\omega^2}{g} WX &= F_{11} + F_{15} + E_1 \\ -\frac{\omega^2}{g} I\theta + W\overline{GM}\theta &= F_{51} + F_{55} + E_5, \end{aligned} \right\} \quad (5 \cdot 1)$$

ここに $W = \rho g \nabla$, $I = W \kappa^2$ すなわち単位長さ当りの重量慣性モーメントとする。

3節の定義を代入すれば

$$\left. \begin{aligned} (\nabla + f_{11})X + f_{15}\theta &= \frac{a}{K} H_1 + (K) \\ \left(\nabla \kappa^2 + f_{55} - \frac{\overline{GM}}{K} \nabla \right) \theta + f_{51}X &= \frac{a}{K} H_5 + (K) \end{aligned} \right\} \quad (5 \cdot 2)$$

となるから, この解は

$$X/a = E_1/D_1, \quad \theta/\theta_w = E_5/D_1, \quad \theta_w = Ka, \quad (5 \cdot 3)$$

の形にかけろ。ここに

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \frac{\nabla}{K} \left\{ \left(\kappa^2 + k_1 \kappa_s^2 - \frac{\overline{GM}}{K} \right) - k_1(l_1 - l)(l_w - l) \right\} H_1 + (K), \\ E_5 &= \frac{\nabla}{K^2} \left\{ (1 + k_1)(l_w - l) - k_1(l_1 - l) \right\} H_5 + (K) \end{aligned} \right\} \quad (5 \cdot 4)$$

ただし $f_{ssc} = k_1 \nabla \kappa_s^2$ とする。

$$\left. \begin{aligned} \mathscr{D}\{D_1\} &= \left\{ \left((1 + k_1) \left(\kappa^2 + k_1 \kappa_s^2 - \frac{\overline{GM}}{K} \right) - k_1^2(l_1 - l)^2 \right) \nabla^2, \right. \\ -\mathscr{J}\{D_1\} &= \left\{ \left(\kappa^2 + k_1 \kappa_s^2 - \frac{\overline{GM}}{K} \right) + (1 + k_1)(l - l_w)^2 \right. \\ &\quad \left. \left. - 2k_1(l_1 - l)(l_w - l) \right\} \nabla |H_1 + (K)|^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5 \cdot 5)$$

のように計算できる。

特に同調時には

$$\mathcal{R}\{D_1\} = 0$$

となるから、上式から

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{K^* |E_s|^2}{i(1+k_1)}, \\ E_1 &= -\frac{Kk_1(l_1-l)}{(1+k_1)} E_s, \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

となり、(5.3) は

$$\left. \begin{aligned} \theta/\theta_w &= i(1+k_1) \nabla / K^* \bar{E}_s, \\ X/a &= -ik_1(l_1-l) \Delta / K^* \bar{E}_s, \\ \theta/KX &= -(1+k_1)/\{Kk_1(l_1-l)\}, \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

となる。

以上はもちろん粘性のない場合の解であるが、粘性がある場合でも付加質量や波の強制力などはこの理論で与えられるものとあまり違わないと考えられる。

したがって、粘性によるダムピングがなんらかの方法で推定できれば(5.1)にそれを考慮すれば運動が求められることになる。

波による傾斜モーメントは明らかに E_s に比例するから粘性がなければ E_s が 0 になると(5.7)によって無限に大きく横揺れすることになる⁹⁾。

しかし造波以外のダムピングがあれば彼による傾斜モーメントがなくなれば横揺れしないことになる⁹⁾。

さて(5.1)あるいは(5.2)において第一式を消去して波による傾斜モーメント M を計算すると

$$\frac{M}{\rho g \nabla \theta_w} = \frac{-i K E_s}{(1+k_1) \nabla^2} = \frac{1}{i K \nabla} \left[l_w - \frac{l+k_1 l_1}{1+k_1} \right] H_1 + (K) \quad (5.8)$$

と与えられるが従来¹⁾の理論ではここで有効波傾斜係数 γ を導入して

$$M/\rho g \nabla \theta_w = \gamma \overline{GM}, \quad (5.9)$$

とされているから、これになぞらえると上の二式から

$$\gamma = \frac{i}{K \overline{GM} \nabla} \left[l_w - \frac{l+k_1 l_1}{1+k_1} \right] H_1 + (K), \quad (5.15)$$

となり、実際 $K \rightarrow 0$ では(4.1)および(4.2)第2式によって従来通り $\gamma = 1$ となる¹¹⁾。

この γ を使い、さらに(7.4)を使って(5.7)第1式を書きなおすと

$$\left| \frac{\theta}{\theta_w} \right| = \left(\frac{\pi}{2} \gamma \right) / \left(\frac{\Delta \theta}{\theta} \right), \quad (5.11)$$

となるが、この形にしておけば粘性によるダムピングがある場合にも成立つと考えられる。

最後に(5.7)第3式から、 θ と X とは $l_1 > l$ すなわち付加質量中心 C が G の下にあれば逆位相となり、 $l_1 > l$ すなわち C が G の上にあれば同位相となることがわかる。

一方前節でのべたように楕円程度にやせた船では C と M はほとんど一致するから当然大抵の場合 C は G の上にあることになり、 θ と X は同位相となることになると考えられ、幅の広い肥えた船ではむしろその逆になると考えられる。

前者は渡辺が幅の狭い船の、後者は幅の広い船の揺れ方として分類したものである¹⁾。

このような揺れ方の相違によって、例えば幅の広い肥った船では左右揺れの反力が波による傾斜モーメントを減殺するように働いていると考えられる。

しかしこの場合でも K の小さい時はメタセンターに関するモーメントを考えると C 点に働く左右動の付加慣性力と F 点に働く波の強制力が (4.2) 式によって互に打消し合うので結局静的傾斜モーメント $W\overline{GM}\theta_w$ だけが残ることになる。

6. r 係数

この r 係数については幸い割合簡単に次のように $K=0$ のポテンシャルから近似値が求められる。

(5.11) をもう一度かくと

$$r\overline{GM} = \frac{i}{K\overline{V}} \left[-H_3 + (K) + (l + k_1 l_1) \frac{H_1 + (K)}{1 + k_1} \right] \quad (6.1)$$

であるが、この右辺で重心に関係するのは $l = \overline{OG}$ のかかった項だけであるので、上式を分解して

$$r\overline{GM} = r_s \overline{OG} - r_m \overline{OM}, \quad (6.2)$$

$$r_s = \frac{i H_1 + (K)}{K(1 + k_1)\overline{V}}, \quad (6.3)$$

$$r_m \overline{OM} = \frac{i}{K\overline{V}} \left[H_3 + (K) - \frac{k_1 l_1}{1 + k_1} H_1 + (K) \right], \quad (6.4)$$

と書くと、 r_s 、 r_m は重心位置に関係しないから、この形の方が便利であろう。

なお (6.4) はまた

$$r_m \overline{OM} = r_s \{(1 + k_1) l_w - k_1 l_1\}, \quad (6.5)$$

のようにも書ける。

第2図に二、三の例を田才の計算値⁷⁾ を使って計算したものを示す。

さて (3.6) の被積分関係の e の項を展開して (4.1), (4.2) のさらに次の項まで求めると

$$i H_1 + (K)/K \doteq (1 + k_1)\overline{V} - K \int_c \left(\phi_1 \frac{\partial xy}{\partial n} + xy \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right) dS. \quad (6.6)$$

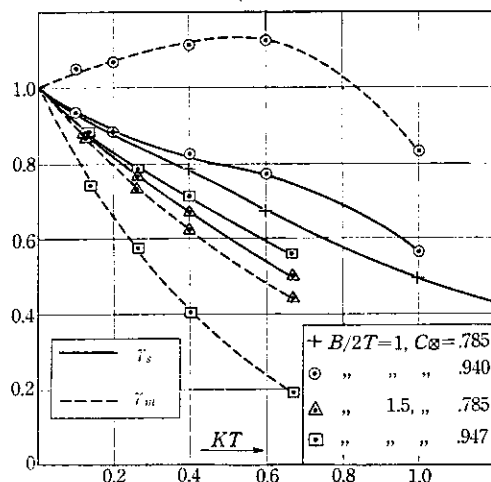
$$i H_3 + (K)/K \doteq (\overline{OM} + k_1 l_1)\overline{V} - K \int_c \left(\phi_3 \frac{\partial xy}{\partial n} + xy \frac{\partial \phi_3}{\partial n} \right) dS. \quad (6.7)$$

となる。

これらを (6.3), (6.4) に代入すると

$$r_s \doteq 1 - KA, \quad (6.8)$$

$$A = \frac{1}{(1 + k_1)\overline{V}} \int_c \left(\phi_1 \frac{\partial xy}{\partial n} + xy \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right) dS. \quad (6.9)$$



第 2 図

$$\gamma_m \doteq 1 - KC. \quad (6.10)$$

$$\overline{OMC} = -k_1 l_1 A + \frac{1}{V} \int_c \left(\phi_s \frac{\partial xy}{\partial n} + xy \frac{\partial x_s}{\partial n} \right) dS. \quad (6.11)$$

となって γ_s, γ_m の第1近似1に対する第2近似値が求まることになる。

しかも ϕ_j の虚部は実部に比して小さいから、これに $K=0$ の速度ポテンシャルを代入してもよい。

付録 C に A, C などの計算を示してある。

第2図の例についてこれらの近似値を入れて見ると、一、二の点を除き大体 $KT=0.3$ 位までよくあうようである。

さて (6.9), (6.11) において ϕ_j および k_1 を 0 とおけば従来の理論式になって、今それらに (') をつけて区別することにする

$$\gamma' \overline{GM} = \gamma_s' \overline{OG} - \gamma_m' \overline{OM}, \quad (6.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_s' &\doteq 1 - KA' \\ A' &= \frac{1}{V} \int_c xy \frac{\partial x}{\partial y} dS = \overline{OB}, \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_m' &\doteq 1 - KC' \\ C' &= -\frac{1}{\overline{OM}V} \iint_V (x^2 - y^2) dx dy, \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

となる。これは渡辺の式から誘導できるものと少し異っているが、そこに記されているフルードの式と一致する。

なお渡辺の式では K のもっと高次の項までとってあるが、(6.8) から (6.11) までの式とこれらの式とからすぐわかるように、フルード・クリロフ・渡辺理論では K のオーダーですでに誤差が出ているのであるから、厳密に言えば $\gamma \doteq 1$ としなければならない訳である。

さてもとにかえて (6.2) に $\overline{OG} = \overline{OM} + \overline{GM}$ を代入すると

$$r\overline{GM} = r_s\overline{GM} + (r_s - r_m)\overline{OM}, \quad (6.15)$$

これに (6.8), (6.10) を代入すると

$$r = r_s + K(C-A)\overline{OM}/\overline{GM}, \quad (6.16)$$

と書けるが、普通の船では $\overline{OM} < 0$, $\overline{GM} > 0$, $C > A$ であるから大抵の場合 $r < r_s$ である。

特に $r = 0$ となるためには

$$-\overline{OM}/\overline{GM} = (1-KA)/K(C-A), \quad (6.17)$$

であればよい。

横揺れの問題では 普通付加慣性半径は小さくて同調点における K はほぼ $\overline{GM}$ に比例するから慣性半径を κ とすると

$$K = \frac{\overline{GM}}{\kappa^2}, \quad (6.18)$$

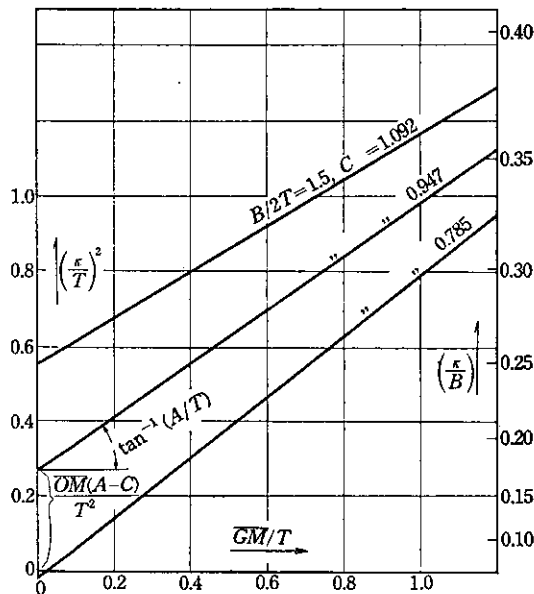
とおいても右辺はほとんど K に無関係となるであろう。

上式を (6.17) に代入すると

$$\kappa^2 = \frac{\overline{GM}}{K} = A\overline{GM} - (C-A)\overline{OM}, \quad (6.19)$$

と書けるから、仮に κ が K に無関係とすると第 3 図の直線上にのるように重心と慣性半径を選べば $r = 0$ となる。

以上は近似的な方法であるが、正確な計算値が得られる場合は (6.2) に (6.5) を代入す



第 3 図

ると $GM \approx 0$ として $\gamma = 0$ となるためには

$$\left. \begin{aligned} r_s &= 0, & \text{あるいは} \\ \overline{OG} &= (1+k_1)l_w - k_1 l_1 \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

のどちらが成立てばよい。

このうち第1式の場合は今の所あまり見込みはなく¹⁰⁾、第2式の場合が上述の場合にあたり、 k_1, l_1, l_w が与えられている場合はこの式からただちに $\gamma = 0$ となるような重心位置を計算できるわけである。

しかし (4.2) によって $K = 0$ の極限では上式の右辺は $\overline{OM}$ に等しくなるのでこの条件は $\overline{GM} = 0$ を意味することになり K の小さい所では $\gamma = 0$ とすることは実際面ではなかなか困難なことであると予想される。

付録 C の値を利用して近似的に計算しても確かに K の小さい値で $\gamma = 0$ とするのは難しい。

7. 実験について

動揺の実験的研究には一般に強制、自由の二種類の動揺試験が考えられるが、横揺れの問題では特別の場合を除いてダмпピングが非常に小さいので強制動揺試験は難かしくてあまり適当ではないのでここでは触れない。

さて自由動揺の運動方程式は (5.2) の右辺を 0 とおいて

$$\left. \begin{aligned} (\overline{V} + f_{11})X + f_{15}\theta &= 0, \\ \left(\overline{V}\kappa^2 + f_{55} - \frac{GM\overline{V}}{K}\right)\theta + f_{51}X &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

で与えられることになるが、これは厳密な意味では運動方程式でなくて、波数 K で単振動している時の高次の項を一部省略した力の釣合の式と考えるべきである。

さて第1式から

$$\frac{X}{\theta} = -\frac{f_{15}}{(\overline{V} + f_{11})},$$

を得るが、上述のようなこともあり、また K の小さい所を考えるとすればこの右辺の量の虚部は小さいはずであるから

$$\frac{X}{\theta} \doteq -\frac{f_{15c}}{(\overline{V} + f_{11c})} = \frac{k_1(l-l_1)}{(1+k_1)}, \quad (7.2)$$

としてもよいように思われる。これは (5.7) 第3式つまり波浪中同調時の X と θ の比に等しいからこの二つの場合において船の運動は互いに相似になっていることがわかる。

これを第2式に代入すれば

$$\frac{\overline{GM}}{K} = \kappa^2 + \frac{f_{55c}}{\overline{V}} - \frac{k_1^2(l-l_1)^2}{(1+k_1)} \quad (7.3)$$

がえられ、これは (5.5) 第1式の右辺を 0 とおいたものつまり、同調のための条件式に等しいから、この式によって自由動揺の周期が波浪中の同調周期に等しいことがわかる。

これらのことから自由動揺によって失われるエネルギーは同調時において失われるものと

同じであるはずである。

さて一揺れの間に失われる波のエネルギーは

$$\frac{\rho g \lambda}{4} |\theta A_5 + X A_1|^2 = \frac{\pi \rho g K}{2} |\theta H_5 + X H_1|^2,$$

であり、同じく位置のエネルギーは

$$\rho g \nabla \overline{GM} \theta \Delta \theta$$

であるから両式を等置して (7.3) を代入し, (5.8), (5.10) などを利用すれば

$$\Delta \theta / \theta = \frac{\pi}{2} K^3 r^2 \overline{GM} \nabla, \quad (7.4)$$

となり, $\Delta \theta / \theta$ を測定すればこの式で r が求まることになる。

今この右辺に実際の値を代入して見ると, r をかりに 1 とおいても普通は非常に小さくなって実用的な値にならない。

したがって最初に述べたように今後検討しなければならない点である。

しかし逆にこの式で右辺の r が例えば次に述べるような方法で求められると, 実験的に造波ダмпピングが求められることになるから, これでダмпピングの相似則の検討ができることになるかも知れない。

付加慣性などを求めるためにはこの試験だけでは不定で例えば k_1 の直接測定のような実験を追加しなければならない²⁾。

そのような訳でもし粘性がなければ (7.4) 式によって自由動揺試験から波の強制力が求められるのであるが, 実在の流体ではこれは不可能であるから別個にそれを求めなければならない。

元良らはこの目的で角変位のみを拘束して船の波浪中における傾斜モーメント M を測定する方法を提案した³⁾。

それを (5.2) で考えると

$$\left. \begin{aligned} (\nabla + f_{11}) X &= \frac{a}{K} H_1 + (K), \\ f_{15} X &= \frac{a}{K} H_5 + (K) + \frac{M}{\rho g K}, \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

となり, 第 1 式から

$$\frac{X}{a} = \frac{H_1 + (K)}{K(\nabla + f_{11})}, \quad (7.6)$$

がえられ, これを第 2 式に代入して

$$\frac{M}{\rho g K a} = -\frac{H_5 +}{K} + \frac{f_{15} H_1(K)}{K(\nabla + f_{11})}, \quad (7.7)$$

となるが, これは (3.10), (3.12) を代入して整理すると (5.8) と同じものになる。

また (7.6) は (6.3) の定義によって

$$\frac{X}{a} = -i \gamma_n, \quad (7.8)$$

となる。

したがって M と X を測定すれば (5.9), (7.8) によって, r と r_* が求められ, さらに (6.2) によって r_m も求まるから, 重心の変化による r の変化も推定できることになる。

波の強制力を求める方法はこの他にも一, 二考えられるが, この方法のように巧妙なものは見つからないようである。

8. ビルジキールの効果について

従来の考え方ではビルジキールは付加慣性を幾分増加させる他には, ただ単に渦抵抗を与えるものとしての役割しか果たし得なかった。

しかし菱田によれば³⁾ ビルジキールは造波抵抗に大きい影響をおよぼすと言われるので当然波の強制力, すなわち r 係数にも大きい変化を与え得るはずである。この間の事情は元良らの上下動に関する研究におけるフィンの効果と同じようなものがあり得ると考えられる⁹⁾。

さてまずビルジ部に原点 0 から距離 r の所に幅 b のビルジキールが左右一組着いている場合を考えよう。

また簡単のために r は水線と 45° の角をなしているものとするがこの簡単化によって次の考察が全く誤った結論になるとは思えない。

まずビルジキールによって付加算量係数 k_1 は Δk_1 だけ増えると考えられるが, それは例えば次のように与えられるであろう。

$$\Delta k_1 = \alpha \frac{8\pi b^2}{V}, \quad (8.1)$$

ここに $2\pi(2b)^2$ は船体表面に関する鏡像効果を考えたビルジキールの付加質量を左右一組あるから 2 倍したものであり, α はさらにビルジ部の速度増加によってその効果が増大する影響や流れの方向による影響などを考えた係数とする。

そうすると肥っていればいるほど α は大きくなるであろうが, 大体において 1 に近い値と考えてよからう。

次にこのビルジキールによって左右揺れをする時の横揺れモーメントは大体

$$k_1 l_1 \rightarrow k_1 l_1 + r \Delta k_1, \quad (8.2)$$

のように増すと考えられるから, 付加質量の中心は下に下がることになる。

一方 r が x 軸と 45° の角をなすと仮定したからビルジキールの上では

$$\frac{\partial}{\partial n}(xy) = 0$$

となるので (6.5), (6.7) の右辺の積分はビルジキールがある場合もほとんど元と同じになると考えられる。

したがって A および C の変化は (8.1), (8.2) の変化に基づく分だけ考えれば良く, まず (8.1) と (8.9) から

$$\left. \begin{aligned} A &\rightarrow A + \Delta A = \frac{A(1+k_1)}{1+k_1+\Delta k_1}, \\ \Delta A &\doteq -\frac{\Delta k_1}{1+k_1}, \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

であるから、 A は小さくなりしたがって r_m は大きくなる。

また (8.2) を使って、定義式 (6.11) から

$$\left. \begin{aligned} C &\rightarrow C + \Delta C \\ \Delta C &= \frac{\Delta(k_1 l_1 A)}{\overline{MO}} = \frac{A \Delta k_1}{\overline{MO}} \left(r - \frac{k_1 l_1}{1 + k_1} \right), \\ \overline{MO} &= -\overline{OM}, \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

が得られるが ΔC はこの式から普通は正であると考えられるので C は大きくなり、したがって r_m は小さくなる。

さらに、両者の差をとると

$$C + \Delta C - (A + \Delta A) = C - A + A \Delta k_1 \left(\frac{r - \frac{k_1 l_1}{1 + k_1}}{\overline{MO}} - \frac{1}{1 + k_1} \right), \quad (8.5)$$

となるので $\overline{MO}$ があまり大きくなければ大体これは正になると考えてよからう。

これを第3図について考えると $r=0$ に対する $(\kappa/T)^2$ の直線が全体として上にあがりかつ傾斜が小さくなると考えられ、このことは普通は r が小さくなることを意味するであろう。

付録 C の計算結果を見ると一般に肥っているほどすなわち水面下に排水量が多いほど r は小さくなる傾向が著るしいから上述の考察はこの傾向と矛盾しない。

以上をまとめて言えばビルジキールの付加質量効果は r_m を大きくするけれども r_m は小さくし、結果としては r が小さくなる方向に働く。

この時やせた船に比して肥った船では (8.1) の α が大きくなるので Δk_1 が大きく、 r が大きいしまたメタセンターが低いので式から ΔC , $-\Delta A$, $\Delta C - \Delta A$ はすべてより大きくなるので r はより小さくなると考えられて従来の実験的結果と矛盾しない。

このように r_m はビルジキールを着けると大きくなると考えられるが、これを小さくするには (6.9) 式から考えて船底にパーキールを着ければよいことになる。

この場合も上と同じように取扱うことができやはり r_m も小さくなるようであるが詳説は略する。

また船側にフィンを着けた場合はこのような考え方からは α が小さくなるから当然この面の効果はわずかであると考えらるし、またそれが水面に近いと造波効果が大きくなると考えられる。ところがハスキントの関係からすればこの効果は波の強制力を増すことになるので両々あいまって上のような効果は少なくなるかあるいは逆に逆になると予想される。

以上の事情を直観的に考えれば5節の最後に述べたように次のように言えよう。

すなわちビルジキールをつけるとメタセンターはそのままに左右揺れが喰いとめられる。

その結果船は水から反力を受けるが、そのモーメントは波の傾斜モーメントを相殺する方向に働くので全体として見ると波の強制モーメントが小さくなる。

9. 結 言

以上船が無限に長い二次元筒体で代表される場合について考察した結果を列挙すれば

- i) $K \rightarrow 0$ の極限で付加質量の中心 C は楕円ではメタセンター M に一致するが、普通 M の下にあり、波の強制力の中心は $\overline{CM}$ を $1:k_1$ に内分する点である。
 ii) 波の傾斜モーメントは従来の理論のように静的傾斜モーメントの γ 倍と言う形に表わされるがこれを分解して

$$\gamma \overline{GM} = \gamma_s \overline{OM} + \gamma_m \overline{OM}$$

と言う形にすると、 γ_s, γ_m は重心位置に関係しない関数となって便利である。

- iii) この時 γ_s, γ_m は角変位のみを拘束した横揺れモーメント測定試験によって実験的にも求めることができる。
 iv) γ を 0 にするような重心位置と慣性半径の組合せがあるが一般にはこれは周期の非常に小さい所になる。
 v) ビルジキールには波の強制モーメントを小さくする効果が考えられる。

三次元問題にこれらの結論を直接適用できないのは言うまでもないが、ある程度まで定性的には成立つものと考えてよからう。

この問題についてはまた機会をあらためて検討したい。

参 照 文 献

- 1) 渡辺恵弘：造船協会々報 49 号 (昭和 7 年 4 月)
- 2) 上野敬三：同 67 号 (昭和 15 年)
- 3) 菱田敏男：造船協会論文集 85 号 (昭和 27 年)
- 4) 同 同 86(前)号 (昭和 28 年)
- 5) 同 同 86(後)号 (昭和 29 年)
- 6) 元良誠三：船体運動力学，共立出版 (昭和 32 年)
- 7) 田才福造：造船協会論文集 110 号 (昭和 36 年)
- 8) 同 西部造船会々報 30 号 (昭和 40 年 8 月)
- 9) 元良誠三，小山健夫：造船協会論文集 117 号 (昭和 40 年 6 月)
- 10) 別所正利：同
- 11) 別所正利：防大理工学研究報告 3 巻 1 号 (昭和 40 年 5 月)
- 12) 同 同 3 巻 2 号 (昭和 40 年 9 月)
- 13) T. H. Havelock: Phil. Mag. vol. 8 (1929).
- 14) F. Ursell: Q. Jour. Mech. Appl. Math. vol. 2 pt. 3 (1949)
- 15) " : " Vol. 7 pt. 4 (1954)
- 16) O. Grin: Schiffstechnik Bd. 3 (1955/56)
- 17) Ir. G. Vossers: Intern. Shipbuil. Progress vol. 7 No. 68 (Apr. 1960)
- 18) J. Kotik and V. Mangulis: Intern. Shipbuil. Progress vol. 9 No. 97 (1962)
- 19) J. Kotik: Journal of Ship Research vol. 7 (Oct. 1963)
- 20) K. Tamura: Seibu Zosen Kai Kaiho No. 26 (Sep. 1963)
- 21) F. Tasai: Rep. of Res. Inst. for Appl. Mech., Kyushu Univ. vol. 13 No. 45 (1965)

付録 A. $K = 0$ の時の速度ポテンシャルなど

$K \rightarrow 0$ の時は F. Ursell によって水面が固体壁である時の速度ポテンシャルに近づくことが示されている¹⁴⁾。

Lewis 断面については O. Grim によって付加質量などが与えられている¹⁶⁾が，以下メタセンターの計算やまた付録 B の計算との比較対照の便のために重複をかえりみず式を導いておいた。

さて ζ -平面の単位円を

$$z \equiv x + iy = c \left(\zeta + \frac{a}{\zeta} + \frac{b}{\zeta^3} \right), \quad (\text{A} \cdot 1)$$

によって z -平面に写像して得られる形が **Lewis form** である。

断面の方程式は上式から $\zeta = e^{i\theta}$ とおいて

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{c} &= (1+a) \cos \theta + b \cos 3\theta, \\ \frac{y}{c} &= (1-a) \sin \theta - b \sin 3\theta, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 2)$$

と与えられる。

また幅を B , 吃水を T , 面積を $\mathcal{V}$, 面積係数を C_{∞} とすると

$$\left. \begin{aligned} \frac{B}{2T} &= \frac{(1+a+b)}{(1-a+b)}, \\ \frac{\mathcal{V}}{c^2} &= \frac{\pi}{2} (1-a^2-3b^2), \\ C_{\infty} &= \frac{\pi}{4} \frac{(1-a^2-3b^2)}{\{(1+b)^2-a^2\}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 3)$$

となることは容易にわかる。

次に原点 O から浮心までの距離 $\overline{OB}$ は

$$\overline{OB} = \frac{1}{2\mathcal{V}} \int_c y^2 dx = \frac{2c^3}{3\mathcal{V}} \left[(1-a)^2(1+a) - \frac{b}{5}(1-a)(1-5a) - \frac{27}{35}(5-7a)b^2 + b^3 \right] \quad (\text{A} \cdot 4)$$

となり浮心からメタセンターまでの距離は,

$$\overline{BM} = \frac{B^3}{12\mathcal{V}} = \frac{c^3}{12\mathcal{V}} (1+a+b)^3, \quad (\text{A} \cdot 5)$$

であるから, 両者を加えて, 原点からメタセンターまでの距離は M が原点から下方にある場合を正として

$$\overline{OM} = - \frac{\frac{16}{3\pi} \left[a(1+a) + b \left(\frac{4}{5} + \frac{6}{5}a + a^2 \right) + 3b^2 \left(\frac{4}{7} - \frac{a}{5} \right) \right]}{(1-a^2-3b^2)(1-a+b)} \quad (\text{A} \cdot 6)$$

と計算される。

楕円では $b=0$ とおいて次のように簡単になる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\overline{OB}}{T} &= \frac{4}{3\pi} \\ \frac{\overline{OM}}{T} &= - \frac{16}{3\pi} \frac{a}{(1-a)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 7)$$

さて左右動に対する速度ポテンシャルを ϕ_1^0 , 流れ関数を ψ_1^0 , 回転運動に対するものをそれぞれ ϕ_{s0}, ϕ_s^0 としさらに複素速度ポテンシャルを

$$\left. \begin{aligned} f_1^0 &= \phi_1^0 + i\phi_1^0, \\ f_3^0 &= \phi_3^0 + i\phi_3^0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 8)$$

のように定義しておく。

境界条件は (2・8), (2・9) により

$$\left. \begin{aligned} \frac{\phi_1^0}{c} &= -\frac{y}{c} = -(1-a) \sin \theta + b \sin 3\theta, \\ \frac{\phi_3^0}{c^2} &= -\frac{(x^2+y^2)}{2c^2} = -\frac{1+a^2+b^2}{2} - a(1+b) \cos 2\theta - b \cos 4\theta \end{aligned} \right\} \pi > \theta > 0 \quad (\text{A} \cdot 9)$$

のように書ける。また下半面については水面が鏡像であるようなポテンシャルを求めるのであるから、上半面と対称であると考えればよい。

したがって左右動についてはただちに

$$\left. \begin{aligned} \frac{f_1^0}{c} &= \frac{1-a}{\zeta} - \frac{b}{\zeta^3}, \\ \frac{\phi_1^0}{c} &= (1-a) \cos \theta - b \cos 3\theta, \\ \frac{d\phi_1^0}{cd\theta} &= -(1-a) \sin \theta + 3b \sin 3\theta, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 10)$$

が求むる解である。

回転動に対しては

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha\theta - 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} A_p^{\alpha} \sin p\theta, \quad A_p^{\alpha} = \frac{4\alpha^2}{\pi p(p^2 - \alpha^2)}, \\ p &= 2n+1, \quad \alpha = 0, 2, 4, 6, \dots, \quad \pi > \theta > 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 11)$$

なる展開を使って次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{f_3^0}{c^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{a(1+b)A_p^2 + bA_p^4\} \zeta^{-p}, \\ \frac{\phi_3^0}{c^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \{a(1+b)A_p^2 + bA_p^4\} \cos p\theta, \\ \frac{\phi_3^0}{c^2} &= -\sum_{n=0}^{\infty} \{a(1+b)A_p^2 + bA_p^4\} \sin p\theta \\ &= -a(1+b)(\cos 2\theta - 1) - b(\cos 4\theta - 1), \\ \frac{d\phi_3^0}{c^2 d\theta} &= 2a(1+b) \sin 2\theta + 4b \sin 4\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 12)$$

これらの級数の和は次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_p^2 \zeta^{-p} &= \frac{3}{\pi} \left\{ -\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) + \frac{1}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)^2 \log \left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right) \right\} \\ \sum_{n=0}^{\infty} A_p^4 \zeta^{-p} &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{3} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) - \left(\zeta^3 + \frac{1}{\zeta^3}\right) + \frac{1}{2} \left(\zeta^2 - \frac{1}{\zeta^2}\right)^2 \log \left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1}\right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 13)$$

これらの値を使って

波の中の船の横揺れ運動の理論について

第 1 表 $B/2T = 2.0$

a		0.267	0.300	0.333	0.367	0.400
b		-0.200	-0.100	0	0.100	0.200
C_a		1.117	0.960	0.785	0.610	0.442
$\overline{OM}/T$		-0.636	-0.901	-1.273	-1.811	-2.566
$\overline{OB}/T = A'/T$		0.557	0.488	0.424	0.375	0.452
$K = 0$	k_1	0.813	0.591	0.500	0.516	0.667
	l_1/T	0.266	-0.542	-1.273	-1.682	-1.649
	l_w/T	-0.262	-0.768	-1.273	-1.767	-2.199
	$(\kappa_3/T)^2$	1.364	1.155	1.824	3.025	4.083
$K = \infty$	k_1	0.249	0.190	0.203	0.287	0.480
	l_1/T	0.646	-0.732	-1.569	-1.579	-1.245
	$(\kappa_3/T)^2$	7.170	3.744	2.776	3.146	3.528
A/T		0.680	0.844	0.992	1.119	1.229
C/T		3.210	1.878	1.276	1.021	0.945
C'/T		1.645	1.008	0.589	0.312	0.124
$\frac{(A-C)\overline{OM}}{T}$		1.610	0.932	0.362	-0.176	-0.730

第 2 表 $B/2T = 1.5$

a		0.160	0.180	0.200	0.220	0.240
b		-0.200	-0.100	0	0.100	0.200
C_a		1.092	0.947	0.785	0.623	0.467
$\overline{OM}/T$		-0.145	-0.311	-0.531	-0.814	-1.220
$\overline{OB}/T = A'/T$		0.541	0.481	0.424	0.390	0.385
$K = 0$	k_1	0.967	0.749	0.667	0.664	0.779
	l_1/T	0.356	-0.136	-0.531	-0.751	-0.777
	l_w/T	0.101	-0.236	-0.531	-0.789	-1.026
	$(\kappa_3/T)^2$	0.621	0.264	0.317	0.642	1.035
$K = \infty$	k_1	0.295	0.247	0.270	0.364	0.554
	l_1/T	0.571	-0.230	-0.655	-0.684	-0.539
	$(\kappa_3/T)^2$	3.411	1.103	0.482	0.759	1.146
A/T		0.606	0.714	0.806	0.886	0.953
C/T		4.497	1.581	0.761	0.630	0.661
C'/T		2.017	1.018	0.471	0.262	0.122
$\frac{(A-C)\overline{OM}}{T}$		0.557	0.270	-0.024	-0.208	-0.355

第3表 $B/2T = 1.0$

a	0	0	0	0	0
b	-0.200	-0.100	0	0.100	0.200
C_{κ}	1.080	0.941	0.785	0.630	0.490
$\overline{OM}/T$	0.220	0.122	0	-0.155	-0.289
$\overline{OB}/T = A'/T$	0.529	0.477	0.424	0.375	0.406
$K = 0$	k_1	1.273	1.061	1.000	1.062
	l_1/T	0.433	0.178	0	-0.094
	l_w/T	0.340	0.151	0	-0.123
	$(\kappa_3/T)^2$	0.322	0.069	0	0.046
$K = \infty$	k_1	0.393	0.361	0.405	0.528
	l_1/T	0.361	0.177	0	-0.022
	$(\kappa_3/T)^2$	1.446	0.282	0	0.129
					0.332
A/T	0.534	0.590	0.637	0.675	0.707
C/T	-0.830	-0.382	-0.106	0.081	0.355
C'/T	0	0	0	0	0
$\frac{(A-C)\overline{OM}}{T}$	0.301	0.119	0	-0.092	-0.102

 第4表 $B/2T = 2/3$

a	-0.160	-0.180	-0.200	-0.220	-0.240
b	-0.200	-0.100	0.000	0.100	0.200
C_{κ}	1.092	0.947	0.785	0.623	0.467
$\overline{OM}/T$	0.369	0.313	0.236	0.146	0.025
$\overline{OB}/T = A'/T$	0.505	0.469	0.424	0.384	0.352
$K = 0$	k_1	1.715	1.517	1.500	1.649
	l_1/T	0.559	0.338	0.236	0.202
	l_w/T	0.489	0.328	0.236	0.181
	$(\kappa_3/T)^2$	0.325	0.121	0.063	0.065
$K = \infty$	k_1	0.538	0.527	0.608	0.790
	l_1/T	0.573	0.373	0.291	0.279
	$(\kappa_3/T)^2$	0.832	0.230	0.095	0.155
					0.253
A/T	0.488	0.517	0.538	0.556	0.566
C/T	0.111	0.598	1.142	2.003	11.594
C'/T	0.529	0.575	0.707	0.976	3.923
$\frac{(A-C)\overline{OM}}{T}$	0.140	-0.025	-0.142	-0.211	-0.280

第 5 表 $B/2T = 0.5$

a		-0.267	-0.300	-0.333	-0.367	-0.400
b		-0.200	-0.100	0.000	0.100	0.200
C_w		1.117	0.960	0.785	0.610	0.442
$\overline{OM}/T$		0.479	0.398	0.318	0.232	0.125
$\overline{OB}/T = A'/T$		0.554	0.485	0.424	0.369	0.314
$K = 0$	k_1	2.132	1.955	2.000	2.271	2.889
	l_1/T	0.464	0.373	0.318	0.274	0.283
	l_w/T	0.469	0.381	0.318	0.261	0.243
	$(\kappa_3/T)^2$	0.255	0.150	0.112	0.112	0.121
$K = \infty$	k_1	0.677	0.688	0.811	1.069	1.572
	l_1/T	0.522	0.432	0.393	0.377	0.365
	$(\kappa_3/T)^2$	0.670	0.259	0.174	0.211	0.269
A/T		0.471	0.485	0.495	0.502	0.506
C/T		0.491	0.641	0.782	1.132	1.877
C'/T		0.546	0.570	0.589	0.607	0.637
$\frac{(A-C)\overline{OM}}{T}$		-0.010	-0.062	-0.092	-0.147	-0.172

$$f_{ij} = - \int_c \phi_i d\phi_j$$

を計算すれば次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} f_{11} &= - \int_c \phi_1 \frac{d\phi_1}{d\theta} d\theta = \frac{\pi c^2}{2} \{(1-a)^2 + 3b^2\} = k_1(0) \mathcal{V}, \\ k_1(0) &= \frac{(1-a)^2 + 3b^2}{1-a^2 - 3b^2} \xrightarrow{b=0} \left(\frac{1-a}{1+a} \right), \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 14)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{13} &= - \int \phi_1 d\phi_3 = - \int \phi_3 d\phi_1 \\ &= - \frac{8c^3}{3} \left[a(1-a) + b \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{5} a - a^2 \right) + b^2 \left(\frac{3}{5} a - \frac{12}{7} \right) \right], \\ \frac{l_1(0)}{T} &= - \frac{16}{3\pi} \frac{\left[\{a(1-a) + b \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{5} a - a^2 \right) + b^2 \left(\frac{3}{5} a - \frac{12}{7} \right)\} \right]}{(1-a+b) \{(1-a)^2 + 3b^2\}} \xrightarrow{b=0} - \frac{16}{3\pi} \frac{a}{(1-a)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 15)$$

$$f_{33} = - \int \phi_3 d\phi_3 = \frac{16c^4}{\pi} \left\{ a^2(1+b)^2 + \frac{8}{9} ab(1+b) + \frac{16}{9} b^2 \right\},$$

これを

$$f_{33}(0) = k_1(0) \kappa_3^3(0) \mathcal{V}$$

のように書くと上式から

$$\frac{\kappa_3^2(0)}{T^2} = \frac{32}{\pi^2} \frac{\left\{ a^2(1+b)^2 + \frac{8}{9}ab(1+b) + \frac{16}{9}b^2 \right\}}{\{(1-a)^2 + 3b^2\}(1-a+b)^2} \xrightarrow{b \rightarrow 0} \frac{32}{\pi^2} \frac{a^2}{(1-a)^4}, \quad (\text{A} \cdot 16)$$

等々となって O. Grim の結果に一致する¹⁶⁾。

計算値についてもすでに一部ある^{7), 17)}が、他の諸量とまとめて第 1~5 表に掲げておいた。

付録 B. $K = \infty$ の時の速度ポテンシャルなど

$K \rightarrow \infty$ の時は $K \rightarrow 0$ の時と違って簡単に極限移行するわけにはゆかない。

しかし波が関係するのはおよそ水面下 $1/K$ の所までであると考えられ、それより下では水面で $\phi = 0$ になるような速度ポテンシャルで近似され则认为られる¹⁵⁾。

この時誤差は $1/K$ のオーダーであると考えられる。一方波の振幅のような量を除いた他の積分量について $1/K$ より浅い水面近くにおける部分が寄与する量もまた $1/K$ のオーダーと考えられる。

したがって k_1, l_1, κ_3 などの量を $K \rightarrow \infty$ で水面に関して逆鏡像を考えて得られる速度ポテンシャルから計算するとその誤差は $1/K$ のオーダーであると考えられる。

さてそのような速度ポテンシャルを前同様

$$\left. \begin{aligned} f_1^\infty &= \phi_1^\infty + i\psi_1^\infty, \\ f_3^\infty &= \phi_3^\infty + i\psi_3^\infty \end{aligned} \right\} \quad (\text{B} \cdot 1)$$

とおくと境界条件は前と同じで

$$\left. \begin{aligned} \frac{\phi_1^\infty}{c} &= -(1-a \sin \theta + b \sin 3\theta, \\ \frac{\phi_3^\infty}{c^2} &= -a(1+b) \cos 2\theta - b \cos 4\theta, \end{aligned} \right\} \pi > \theta > 0, \quad (\text{B} \cdot 2)$$

であるが、今度は上下反対称なポテンシャルでなければならない。

そうすると回転動に対してはただちに

$$\left. \begin{aligned} \frac{f_3^\infty}{c^2} &= -i \left\{ \frac{a(1+b)}{\zeta^2} + \frac{b}{\zeta^4} \right\}, \\ \frac{\phi_3^\infty}{c^2} &= -a(1+b) \sin 2\theta - b \sin 4\theta, \\ \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\phi_3^\infty}{d\theta} \right) &= 2a(1+b) \sin 2\theta + 4b \sin 4\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B} \cdot 3)$$

がえられる。

左右動については

$$\begin{aligned} \sin \alpha \theta &= \sum_{n=0}^{\infty} A_p^\alpha \cos p\theta, \quad \alpha = 1, 3, 5 \dots \\ A_p^\alpha &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{p+\alpha} - \frac{1}{p-\alpha} \right), \quad p = 2n, \end{aligned}$$

なる展開を利用して

$$\left. \begin{aligned} \frac{f_1^\infty}{c} &= -i \sum_{n=0}^{\infty} \{(1-a) A_p^1 - b A_p^3\} \zeta^{-n}, \\ \frac{\phi_1^\infty}{c} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \{(1-a) A_p^1 - b A_p^3\} \sin p\theta, \\ \frac{\dot{\phi}_1^\infty}{c} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \{(1-a) A_p^1 - b A_p^3\} \cos p\theta, \\ \frac{1}{c} \frac{d\phi_1^\infty}{d\theta} &= -(1-a) \cos \theta + 3b \cos 3\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B} \cdot 4)$$

となることがわかる。

ここでこれらの級数の和は次式で求められる。

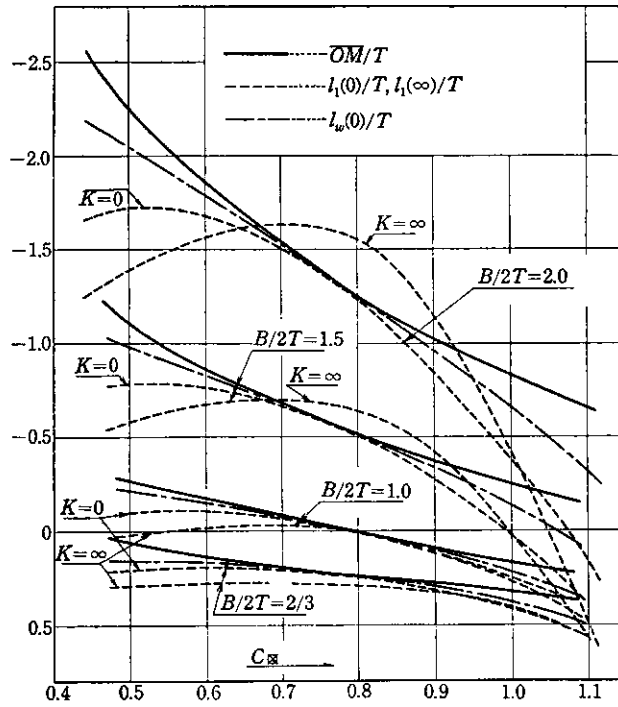
$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}^1 \zeta^{-2n} &= \frac{2}{\pi} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \log \left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1} \right) \right\}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}^3 \zeta^{-2n} &= \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{3} - \left(\zeta^2 - \frac{1}{\zeta^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\zeta^2 - \frac{1}{\zeta^2} \right) \log \left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B} \cdot 5)$$

このポテンシャルを使えば次のように諸量が与えられる。

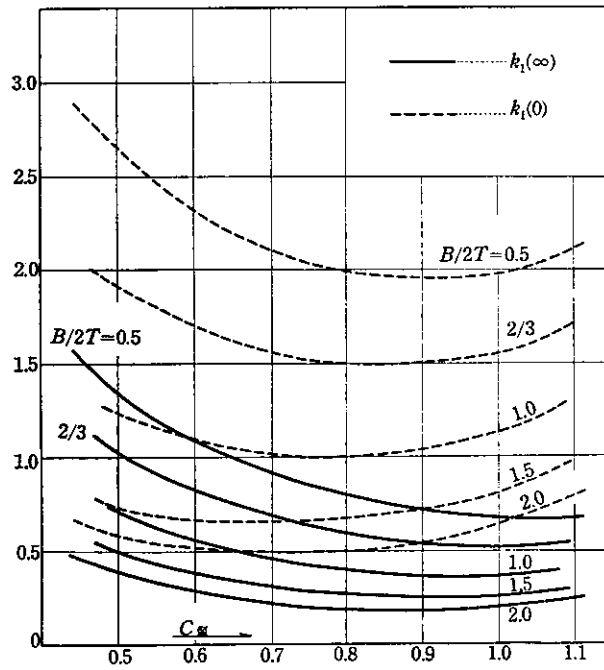
$$\left. \begin{aligned} f_{11} &= - \int \phi_1^\infty d\phi_1^\infty = \frac{2c^2}{\pi} \left\{ (1-a+b)^2 + \frac{16}{3} b^2 \right\} = k_1(\infty) V, \\ k_1(\infty) &= \frac{4}{\pi^2} \frac{\left\{ (1-a+b)^2 + \frac{16}{3} b^2 \right\}}{(1-a^2-3b^2)} \xrightarrow{b \rightarrow 0} \frac{4}{\pi^2} \frac{(1-a)}{(1+a)}, \\ f_{13} &= -c^3 \left[\frac{4}{3} a(1-a)(1+b) + \frac{8}{15} b(1-a) + \frac{12}{5} ab(1+b) - \frac{24}{7} b^2 \right], \\ \frac{l_1(\infty)}{T} = \frac{f_{13}}{k_1 V T} &= - \frac{2\pi}{3} \frac{\left[a(1-a) + \frac{2}{5} b + \frac{12}{5} ab - a^2 b + \frac{9}{5} ab^2 - \frac{18}{7} b^2 \right]}{(1-a+b) \left\{ (1-a+b)^2 + \frac{16}{3} b^2 \right\}} \\ &\xrightarrow{b \rightarrow 0} - \frac{2\pi}{3} \frac{a}{(1-a)^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B} \cdot 7)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{33} &= \pi c^4 \{ a^2(1+b)^2 + 4b^2 \} = k_1(\infty) V \kappa_3^2(\infty), \\ \frac{\kappa_3^2(\infty)}{T^2} &= \frac{\pi^2}{2} \frac{\{ a^2(1+b)^2 + 4b^2 \}}{\left\{ (1-a+b)^2 + \frac{16}{3} b^2 \right\} (1-a+b)^2} \xrightarrow{b \rightarrow 0} \frac{\pi^2}{2} \frac{a^2}{(1-a)^4} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B} \cdot 8)$$

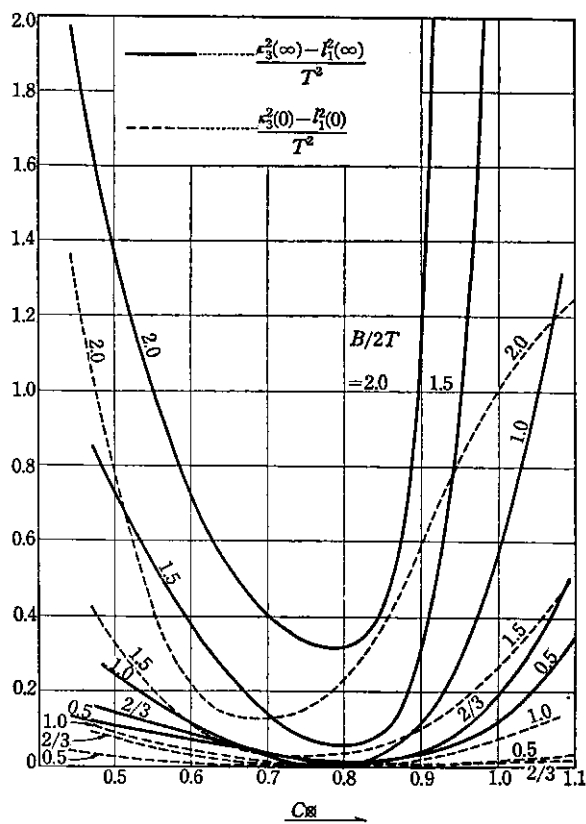
これらの量も第 1~5 表中に計算しておいた。また第 4~6 図には $K=0$ の値と共に描いて比較しておいた。



第 4 図



第 5 図



第 6 図

付録 C. A, C の計算

(6.9), (6.11) の定義式に付録 A における $K=0$ の速度ポテンシャルを代入すればよい。

そこで今次のようにおこう。

$$I = \int_c xy \frac{\partial x}{\partial n} dS = r \overline{OB} \quad (C \cdot 1)$$

$$\Pi = \int_c \phi_1^0 \frac{\partial}{\partial n}(xy) dS, \quad (\text{C} \cdot 2)$$

$$\text{III} = \int_c xy \frac{\partial x_3}{\partial n} dS = \int_c xy(y dy + x dx), \quad (\text{C} \cdot 3)$$

$$\text{IV} = \int_c \phi_{,0} \frac{\partial}{\partial n} (xy) dS. \quad (\text{C} \cdot 4)$$

そうすると

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{(I+II)}{(1+k_1)T} \\ C &= -\frac{k_1 l_1}{OM} + \frac{(III+IV)}{OMT} \end{aligned} \right\} \quad (C \cdot 5)$$

あるいは $C = C' + C'' + C'''$ とわけると

$$\left. \begin{aligned} C' &= \frac{III}{(OMT)}, \\ C'' &= \frac{IV}{(OMT)}, \\ C''' &= -\frac{k_1 Al_1}{OM} \end{aligned} \right\} \quad (C \cdot 6)$$

のように与えられる。

Lewis 断面については (A・2) によって

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{c^2} xy &= (1-2b-a^2) \sin 2\theta - 2ab \sin 4\theta - b^2 \sin 6\theta, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial(xy)}{\partial n} \frac{dS}{d\theta} &= (1+2b+a^2) \sin 2\theta + 4ab \sin 4\theta + 3b^2 \sin 6\theta \end{aligned} \right\} \quad (C \cdot 7)$$

となるから、その他についても付録 A にしたがって計算すれば次のように求められる。

このうち I はすでに付録 A で計算されているから後をあげると

$$I + II = \frac{2}{3} c^3 \left[4 \left\{ (1+a^2) + b \left(2 + \frac{8}{5} a \right) + \frac{27}{35} b^2 \right\} - (1+a+b)^3 \right] \quad (C \cdot 8)$$

一方

$$(1+k_1)T = \pi c^2 (1-a)$$

なる関係があるので

$$\begin{aligned} \frac{A}{T} &= \frac{I+II}{(1+k_1)T} = \frac{2 \left[4 \left\{ (1+a^2) + b \left(2 + \frac{8}{5} a \right) + \frac{27}{35} b^2 \right\} - (1+a+b)^3 \right]}{3\pi(1-a)(1-a+b)} \\ &\xrightarrow{b \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \frac{\left(1 + \frac{a^2}{3} \right)}{(1-a)} \end{aligned} \quad (C \cdot 9)$$

次に

$$III = \int_c xy \frac{\partial x_3}{\partial n} dS = -\frac{\pi}{2} c^4 a (1-a^2 - b - a^2 b - 6b^2) \xrightarrow{b \rightarrow 0} -\frac{\pi}{2} c^4 a (1-a^2). \quad (C \cdot 10)$$

$$\begin{aligned} IV &= \int_c \phi_3^0 \frac{\partial}{\partial n} (xy) dS \\ &= -\frac{8c^4}{\pi} \left[a(1+b)(I+2b+a^2) + \frac{4}{9} (b+2b^2+3a^2b+2a^2b^2) \right] \end{aligned}$$

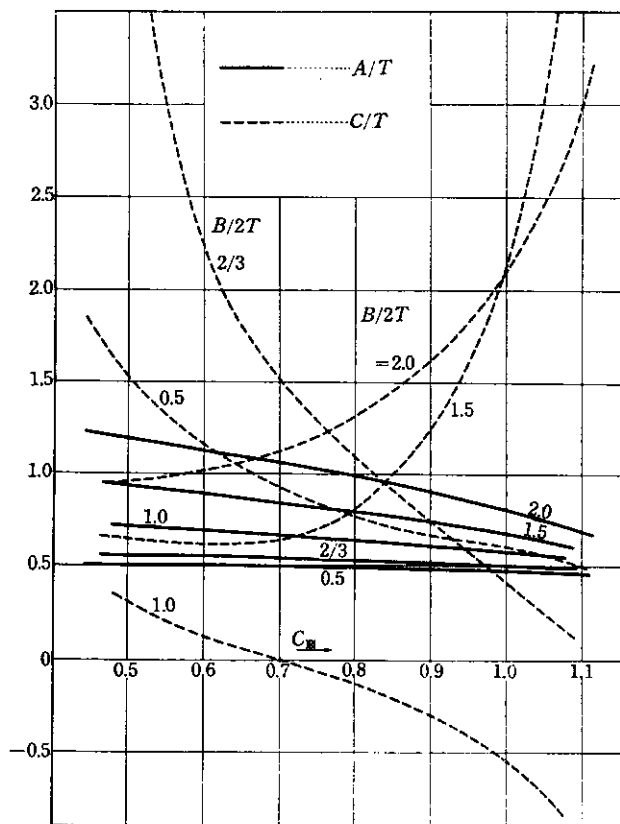
$$+\frac{7}{15}ab^2(1+b)+\frac{32}{9}ab^2-\frac{16}{25}b^3\Big]\xrightarrow{b\rightarrow 0}-\frac{8c^4}{\pi}a(1+a^2). \quad (\text{C}\cdot 11)$$

この二式を (C・5), (C・6) に代入すれば C は計算できる。特に $b=0$, すなわち楕円の値をあげれば

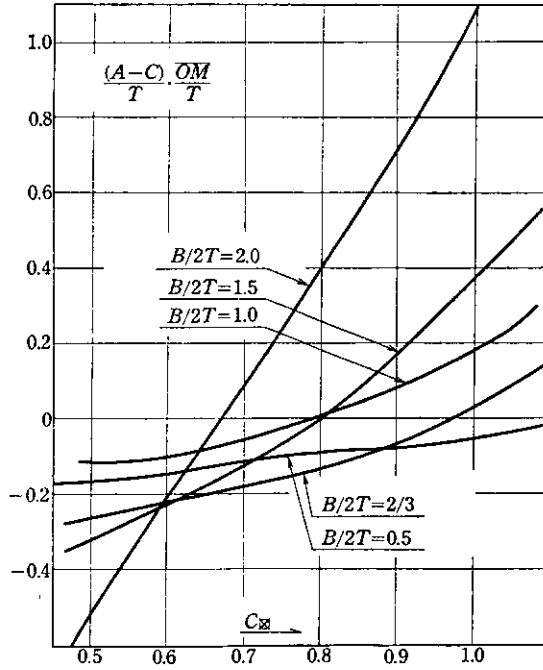
$$\left. \begin{aligned} \frac{C'}{T} &= \frac{3\pi}{16}(1-a)^2 \\ \frac{C''}{T} &= \frac{3}{\pi} \frac{(1-a)(1+a^2)}{(1+a)} \\ \frac{C'''}{T} &= -\frac{\left(1+\frac{a^2}{3}\right)}{(1+a)}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{C}\cdot 12)$$

となるが, この C'/T の式は a を 0 としておいてから後で $b=0$ とおくと 0 になる。いずれにして円の場合 ($a=b=0$) の場合 C なる値は意味がないので問題はない。

これらの値を計算して第 1~5 表および第 7, 8 図に示す。



第 7 図



第 8 図

付録 D. 附加質量の近似値

K の小さい所で、ダムピングは元来小さいので (4.1) の近似値でも十分間に合うように思えるが、附加質量はかなり細かい変化をしているので $K=0$ の値だけでは物足りない。

正確な値は境界値問題を解かねばならないし、また Lewis 断面についてはすでに与えられているが、変化の様子あるいは関数形を求めるのは Kramers-Kronig の関係を利用した方が便利である。

J. Kotik らによれば附加質量とダムピングは ω -平面 ($\omega = \sqrt{gK}$) で互に共軛な正則関数であるので例えば次の関係がある¹⁸⁾。

$$k_1(K) - k_1(\infty) = \frac{1}{\pi V} \int_0^\infty \frac{|H_1(k)|^2}{k - K} dk, \quad (D \cdot 1)$$

あるいは

$$k_1(K) - k_1(0) = \frac{1}{\pi V} \int_0^\infty \frac{|H_1(k)|^2}{k(k - K)} dk, \quad (D \cdot 2)$$

ここに k_1 は左右動の附加質量係数、 $|H_1|^2$ はダムピングとし、積分はコーシーの意味の主値をとるものとする。

さて左右動では (4.1) のように与えられるので

$$H_1(k) = k H_1^*(k), \quad (D \cdot 3)$$

とおくと H_1^* は $k=0$ で有限になる。

そこで J. Kotik らの方法にしたがって K の小さい所の近似値は (D・2) を変形して

$$k_1(K) - k_1(0) \doteq \frac{K}{\pi V} \int_0^8 |H_1^*(k)|^2 dk - \frac{K^2}{\pi^2 V} \left[|H_1^*(0)|^2 \log K - \int_0^8 \log k d|H_1^*(k)|^2 \right] \quad (\text{D} \cdot 4)$$

つまり

$$k_1(K) = k_1(0) + \alpha K - K^2 [\beta \log K + \gamma], \quad (\text{D} \cdot 5)$$

のような形に書ける。

例えば半径 r の半没円筒では $K=0$ のポテンシャルを使うと

$$\left. \begin{aligned} H_1(k) &= -2ikr \int_r^8 \frac{\sin kx}{x} dx, \\ \frac{1}{\pi V} \int_0^\infty |H_1^*(k)|^2 dk &= \frac{4}{\pi} r, \end{aligned} \right\} \quad (\text{D} \cdot 6)$$

と計算できるから (D・5) の α は

$$\alpha = \frac{4}{\pi} r, \quad (\text{D} \cdot 7)$$

となり、正確な計算値と較べて見ても $Kr=0.1$ 位まで良い近似値である。

しかし、 β, γ などについてはこのように簡単には行かず、ダムピングのもっと正確な値を使わなければならないように見える。

いずれにしても正確さはともかくも (D・5) のような形に表わされることがわかっているれば便利であろう。

序でながら K の大きい所では J. Kotik らによって

$$k_1(K) \doteq k_1(\infty) - \frac{c}{K}, \quad (\text{D} \cdot 3)$$

の形の近似式がある。

また回転運動に対する付加慣性についても全く同様な式が成立つ。

**On the Theory of Rolling Motion of Ships
among Waves
(The Second Report)**

By Masatoshi BESSHO*

Abstract

In the first report, the author found out that the exciting moment of waves in the rolling motion of a ship could be written as γ -times as the statical inclining moment in the manner as usual up to the present.

In the present report, he gives the approximate value of this coefficient when a ship rolls among waves with a very long period and finds out that it may become zero by a suitable combination of the metacentric height and the radius of gyration. Besides, he calculates the metacenter of the Lewis's section form and compares it with the center of the added mass which lies under the metacenter usually but is coincident with the metacenter in the elliptic section form.

Finally, he considers the possible effect of the bilge-keel on the exciting force of the wave and this effect seems to explain well a cause of its roll reducing effect.

* Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering.

U 型肋骨船の抵抗に関する試論

別 所 正 利*

(昭和 41 年 3 月 31 日受付)

1. 緒 言

U 型肋骨船つまり横断面が長方形に近い船の抵抗は非常に大きいことはよく知られている。最近の巨大船では非常に肥えているため自然に U 型になり勝ちである。このような船型に球状船首を採用すると造波抵抗理論では全く説明のつかないほど抵抗が減少することが多いしまた実際そうであるらしい¹⁾²⁾。

このような抵抗増加は従来船体周りの二次的な流れによる渦の発生に起因するものと考えられており、その大小は経験上からもまた実験例からも肋骨線の形状は言うまでもなく長さ方向の排水量分布にも大いに関係するように思われる。

本報告ではこの種の抵抗発生の機構について簡単な数学的模型を考えて、抵抗と船型の関連性を検討しようとするものである。

2. 現象の模型化

先ず簡単のために波の影響は無視し水面に関して上下対称な流れを考えよう。

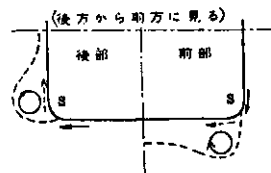
神中によって見事に示されたようにビルジに沿って前半部では下向きの後半部では上向きの流れがあるがこの部分の曲率が大きいと第 1 図に示すように流れは船体から離れて渦を生ずるものと考えられる³⁾。

このように流れが船体からはがれる点は長さ方向につながっていて流線の測定をすれば流線の交叉する線としてかなりはっきり識別することができる。

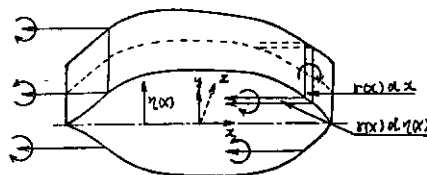
この時できる渦が抵抗増大の原因と考えられている訳であるから、まずこの渦の分布強さを決定することを考えよう。

そのためには例えば第 1 図の S 点において速度が零になるように渦の位置と強さをきめればよい訳であるが実際には S 点も渦もあらかじめ与えられている訳ではなく、未知の要素を含むものと考えられるのでこのような決め方は今の段階では非常に困難である。

そこで先ず船底は平らで横切面は長方形である場合を考えることにすれば S 点は明らかにビルジの角に来るであろう。



第 1 図



第 2 図

* 防衛大学校機械工学教室 助教授

次にこのようにしてできる渦は飛行機の翼端渦によく似ている所から第2図のような馬蹄形渦を考えて見よう。

そうすると船底はアスペクト比の小さい翼と見なせるから、今垂直方向の誘導速度を $w(x, y, z)$, $\gamma(x) dx$ を船側のサーキュレーション, $\eta(x)$ を船の半幅曲線とすると,

$$w(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\eta(x)}^{\eta(x)} \frac{\gamma(x') \frac{d\eta}{dx'} dx'}{\eta(x') - y} = \frac{1}{\pi} \int_0^z \frac{\gamma(x') \frac{d\eta}{dx'} dx'}{\eta(x') - y} \quad (1)$$

となるから、さらに簡単化して中心線上で上の条件を満足するように γ を決めると

$$w(x, 0, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^z \frac{\gamma(x')}{\eta(x')} \frac{d\eta}{dx'} dx', \quad (2)$$

あるいは

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx}(x, 0, 0) &= \frac{1}{\pi} \frac{\gamma(x)}{\eta(x)} \frac{d\eta}{dx}, \\ \eta(x) \frac{dw}{dx}(x, 0, 0) &= \frac{1}{\pi} \gamma(x) \frac{d\eta}{dx}. \end{aligned} \quad (3)$$

のようになる。

この時船側における横方向の速度は近似的に $U(d\eta/dx)$ で、サーキュレーションは $\gamma(x) dx$ であるから、誘導抵抗 D_i は

$$\begin{aligned} D_i &= -2\rho U \iint \gamma(x) \frac{d\eta}{dx} dx dz = -2\pi \rho U \iint \eta(x) \frac{dw}{dx}(x, 0, 0) dx dz \\ &= -4\pi \rho T U \int \eta(x) \frac{dw}{dx}(x, 0, 0) dx, \end{aligned} \quad (4)$$

ただし ρ は水の密度, U は船速, T は船の喫水とする。

さて w を求めるために簡単に考えて普通行なわれるように船側に $U/2\pi \partial\eta/\partial x$ の強さの吹出し分布を置くことが考えられる。これで w を計算するのはそんなに困難ではないが全体の見通しを得るのが難かしい。そこでもっと簡単にして断面の中心に吹出しを集中させるとその強さは

$$\frac{TU}{2\pi} \frac{\partial\eta}{\partial x}$$

となるから, Slender Body の考え方²⁾ で2次元的に考えると底面における誘起速度 $w(x, 0, 0)$ は,

$$\begin{aligned} w(x, 0, 0) &= \frac{TU}{2\pi} \frac{d\eta}{dx} \frac{\partial}{\partial z} \log |z - T| \Big|_{z=0} \\ &= \frac{U}{2\pi} \frac{\partial\eta}{\partial x}, \end{aligned} \quad (5)$$

これを (4) に代入すると

$$D_i = 2\rho T U^2 \int \eta(x) \frac{\partial^2 \eta(x)}{\partial x^2} dx. \quad (6)$$

が得られる。

また B を船の幅, L を船の長さとして,

$$\eta(x) = \frac{B}{2} f(\xi), \quad \xi = \frac{2}{L} x. \quad (7)$$

とおくと

$$C_{Di} = \frac{D_i}{\frac{\rho}{2} U^2 (2TB) \left(\frac{B}{L}\right)} = - \int_{-1}^1 f(\xi) f''(\xi) d\xi, \quad (8)$$

となる。

ここで

$$\left. \begin{aligned} f(\pm 1) &= 0, \\ f'(\pm 1) &< \infty, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

なる条件があると (8) 式を部出積分して

$$C_{Di} = \int_{-1}^1 \{f'(\xi)\}^2 d\xi, \quad (10)$$

と書きかえることができる。

よく知られているように翼の誘導抵抗は迎え角の自乗に比例する。この抵抗も導き方からわかるようにそれと同じ性質のものを考えたのであるから (10) 式のように各断面の傾斜角の自乗積分の形で与えられるのは当然であろう。

3. 理論式の考察

さて (10) 式の形の方がまとまっているけれども f' が有限でない場合, f が有限な場合も考えた方がより広い範囲の船型を考えられることになるので以下では (8) 式を主にし考えることにする (式の誘導の過程から推論すればこれは必ずしも妥当ではないが)。

まず放物線からなる船型を考えよう。

a)

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 1-x^2 \\ f'(x) &= -2x, \\ \therefore C_{Di} &= \int_{-1}^1 \{f'(x)\}^2 dx = 4 \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{8}{3} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

表面積を S とすると近似的に

$$S \approx 4TL + \frac{4}{3} BL$$

であるから

$$r_i = \frac{D_i}{\frac{\rho}{2} V^2 S} = C_{Di} \frac{2BT(B/L)}{S} \quad (12)$$

とおくと今の場合

$$r_i = \frac{C_{Di}}{2} \frac{(B/L)^2}{(1+B/3T)} = \frac{4}{3} \frac{(B/L)^2}{(1+B/3T)} \quad (13)$$

となる。特に $B = 3T$, $B = L/6$ とおくと

$$r_i = 0.0185$$

となるが、一方 2m 程度の模型を考えて今レイノルズ数が 1.5×10^6 程度とすると摩擦抵抗係数はシュンヘル式で約 0.004 であるから上の値はその 4.5 倍程度で文献 (5) の風洞実験値から見ると大体において首肯しうる値となる。

しかしすぐ比較できるような実験値もないしまたかなり差も大きいのでこれからただちにこの理論の妥当性を結論するわけにはゆかない。

b) 次に実船ではどのようになっているかを検討するために $C_b = 0.80$ の肥大船型⁸⁾ の例を考えて見よう。

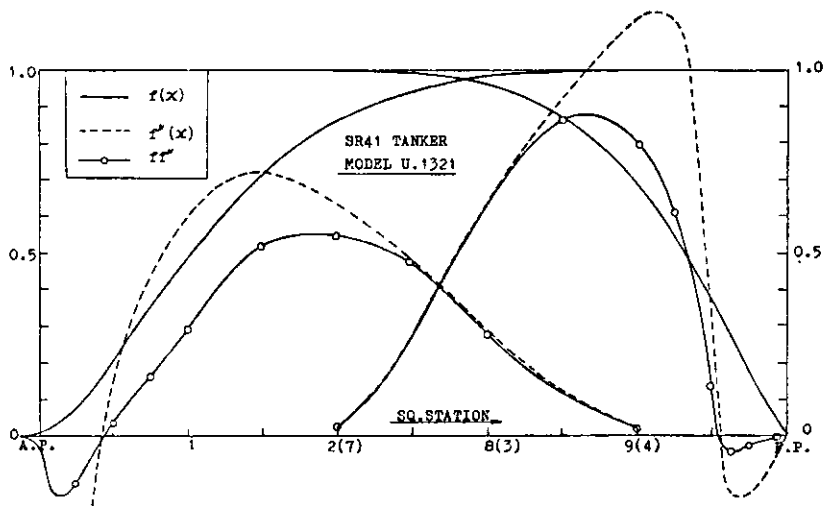
肋骨線は理論で仮定したような極端な U 型ではないけれども、簡単のために横切面積曲線を $f(x)$ にとって、図式的に微分して $f'(x)$ を求めて見ると第 3 図のようになり、これから数値積分によって次の値が求まる。

$$C_{Di} = \frac{2.77}{\text{FORE}} + \frac{2.23}{\text{AFT}} = 5.00 \quad (14)$$

r_i の形になおすと

$$r_i = 5 \left(\frac{B}{L} \right) \frac{T}{S} = 0.196$$

これは前の場合よりまた大きく、非現実的な値である。実際の肋骨線は経験的にフェアリ



第 3 図

ングされているので、このような極端な U 肋骨にすることはあり得ないが、不注意に U 肋骨を採用すると抵抗が激増することはよく知られていることであるから、この理論は一面の真理を表現していると考えられる。

また Saunders によれば船型の良否を決めるのに水線の曲率が大切であると言い、特に彼は船首尾からそれぞれ $1/4L$ の辺の船底付近の水線をやせさせる必要を強調している¹⁾。

また彼のあげた図から見れば良い船型では船首尾からそれぞれ $1/4L$ 位の所で曲率が零になっている¹⁾。

今の場合は船が肥っているのであるからこの $1/4L$ を肩と船首尾の真中辺と理解すべきであろう。

このような考えで見ると第 3 図からわかるようにこの船型では、勘甚の所で曲率が最も大きくなっており、従来の経験から考えても工合が悪いことになる。

またこのように考えて来ると (8) 式は Saunders の考えを理論づけることになり、実験値との不一致は別としても便利な式であると言えよう。

(もちろん彼の考えでは造波抵抗に対する考慮もはいつているので、このように簡単に考えるわけにはゆかないけれど)

c) 最後に極小値問題を考えよう。

先ず (8) 式の形で (9) 式の条件をつけると、明らかに

$$f''(x) = \text{Const}, \quad (15)$$

つまり放物線が解となるので (a) 項のようになる。

(9) 式の条件を除外すると (前節の理論がそのような場合にも一応適用できるとして) (8) 式を零にするような解がある。

例えば

$$\left. \begin{aligned} f_0(x) &= 1, \\ f_1(x) &= x, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

は明らかに (8) 式を零にする。

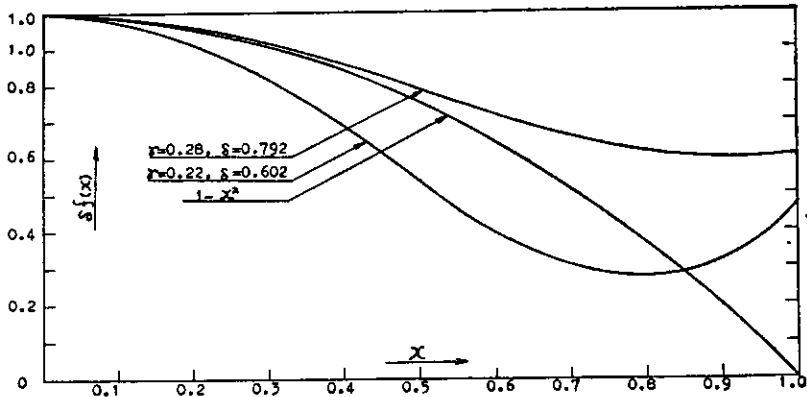
次に簡単なものをあげると、

$$\left. \begin{aligned} f_2(x) &= 1-3x^2, \\ f_3(x) &= 3x-5x^3, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

これらが (8) 式を零にすることは容易に計算できるがこれらは共に面積も零になるのであまり面白くない。

そこで次に 4 次式を考えて (8) 式を零にするものを求めよう。

$$\left. \begin{aligned} f_4(x) &= \frac{1}{\delta} \left[1 - \frac{3\gamma(1-\delta)}{(\gamma-0.1)} x^2 + \frac{(1-\delta)}{2(\gamma-0.1)} x^4 \right] \\ \int_{-1}^1 f_4(x) dx &= 2, \quad \int_{-1}^1 f_4(x) x^2 dx = 2\gamma \\ \frac{1}{\delta} &= 1 + \frac{5}{4} \frac{(1-3\gamma)(\gamma-0.1)}{\left(\gamma - \frac{1}{7}\right)} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$



第4図

ここに δ は面積係数であり上の第3式によって r と関係があるが $r < 1/7$ に対応する δ の値では $f_4(x)$ は負の部分を持つので興味がない。第4図には参考のために放物線と共に上式による計算値を例示してある。

このようにして次数を高めてゆけば多くの副条件を満足させることができるけれども(9)式の条件を満たすような関数では(10)式が成立つので恒等的に零になるもの以外はこの抵抗をなくする訳にはゆかない。しかし片方だけ例えば船尾においてだけ零になるような解は(18)に(17)の f_5 を適当に加えれば求めることができる。

さて第4図からこれらの水線形状は造波抵抗もまた小さいと予想されるものであることがわかる⁴¹⁾。このことは誘導抵抗と造波抵抗はその性質が非常によく似ている点⁴⁾からも首肯し得ることである。

また球状船首などは造波抵抗理論で予想されるよりもずっと抵抗を減少させる効果を持つらしいことがわかって来た⁴²⁾がその理由の一端はこのような所にもあると考えられる。

また一方このような船首尾のふくらみは摩擦抵抗の形状影響も小さいと考えられる⁴⁾ので前述のような Saunders の見解はこれらの理論的側面から見ても誠にこの本質をついているものと言うことができよう。

このように(8)式は定性的な説明には誠に好都合であるけれども(b)項で見たように定量的には桁はずれな値となる点でその妥当性を疑わせるものがある。

もちろんこの場合実際の船型特に船尾ではフェアリングされているので理論の仮定と違って実際にはずっと小さいはずである。この点を考慮に入れるには第1図に示した S 点がどこに来るか検討しなければならないけれど、これには境界層の問題を考えねばならないであろうし、またもちろん横切面の細かい形状が大いに関係するであろうから大変面倒になる。しかも Inuid の場合のように断面の曲率変化がゆるいものでは抵抗が小さいことが知られているので、そのような場合は今考えているような抵抗はほとんどないと考えられ、問題はますます複雑になる。

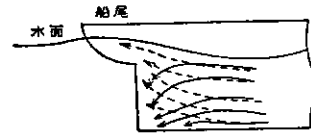
しかしこのように考えて来ると(c)項の考察が教えることはこの種の抵抗増加は Inuid の場合のようにビルジ部の曲率を小さくすることによっても防げるがまた一方長さ方向の排水量分布を調整することによっても防ぐことができると言うことである。

4. 船体後半部について

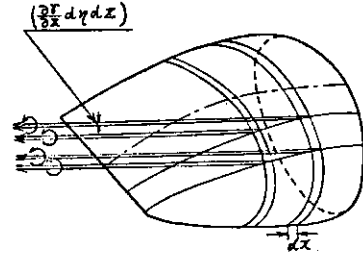
前節までの考察では船底は平らであるとし、渦はビルジから第2図のように流出する場合を頭に描いていた訳である。船首部は一般に U 型肋骨であることが多いしまた渦は船底に出て行く他に道はないのでこれは実際の現象にかなり忠実な模型化であると考えられる。

しかし船尾部では単純な U 型肋骨線を採用することはまれであり、また船首に比してより平坦にフェアリングされるのが普通であって、流線の観察によれば第5図の如く船側に大きい渦を考えた方がよいように思われ、第2図のような単一の馬蹄形渦を考えるのは当を得ていないと思われる。

そこで渦を第6図のように z -方向に分布させて、今度は y -方向の分速度 $v(x, z)$ を打消すように渦分布が決められるものとする (1)~(3) 式と同様にアスペクト比が十分小さいものとして



第 5 図



第 6 図

$$\frac{\partial}{\partial x} v(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{\frac{\partial \gamma}{\partial z}(x', z') \frac{\partial \eta}{\partial x}(x', z')}{z' - z} dz' \quad (19)$$

が得られる。

ところで

$$v(x, z) = U \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, z)$$

であるから

$$U \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{\frac{\partial \gamma}{\partial z'} \frac{\partial \eta}{\partial x'}}{z' - z} dz', \quad (20)$$

となる。

先ずこの式で U 肋骨の場合を考えて見よう。 η が z 方向に一定であるとする、

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{2Uz}{\sqrt{T^2 - z^2}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta(x). \quad (21)$$

となる。この式から実際下流に流れ出す渦は前節までの仮設のように船底近くに集中していることは確からしいと思われる。

またこの式から渦強さは曲率に比例する点では (3), (5) と同じであるが後者はさらに η に比例するのに対し今度は z に比例する点異なる点であるが共に曲率変化の重要性を示していると言う意味では同じような内容を持っていると言えよう。

(21) 式を z で積分して (4) 式と同様に誘導抵抗を求めれば

$$\begin{aligned}
 [D_i]_{AFT} &= -2\rho U \int \int \gamma(x, z) \frac{\partial \eta}{\partial x} dx dz = -2\pi\rho U^2 T^2 \int \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta dx \\
 &= 2\rho U^2 \pi T^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \eta(x) \right]_{A, P.} \quad (22)
 \end{aligned}$$

したがって A. P. における水線傾斜が零ならばこの抵抗は零になることになりこれは二次元翼型の圧力抵抗と同じ法則にしたがうことになる⁷⁾。

また (6) 式と比較すると (6) 式では $B^2 T$ に比例したのに上式では BT^2 に比例することになって上述の点と共に大分趣きが違っているが B も T も今は同じオーダーの小さい量と考えているのであるから、オーダーの点では両式は等しいと言える。

抵抗を減小させる方法は (6) 式と (22) 式では大分異なることになるが船尾については上にのべた二次元的な圧力抵抗のこともあるので (22) 式による方が望ましいとも考えらる。

さて (20), (21) 式から渦強さは曲率に比例するから、長さ方向に曲率の符号が変わる、つまり船尾で言えば船尾付近で水線が凹んでいるときは渦巻の方向が変わって肩の辺から流出する渦と打消し合うことになっている (このために抵抗は (22) 式で与えられるように船尾の水線傾斜で決まる)。

しかし実際の船型では船尾の水面付近では常に第5図に示すようになっていてこのようにはなっていない。

これはこの考察が実状に合っていないためもあるが、一方ではこの辺には厚い恐らくは剝離を起こした境界層が存在することを考えると必ずしもそのように言いきれぬものではあるまい。

すなわち今考えた渦の層は第5図からもわかるように実際には境界層とその外側のポテンシャル流れの境い目にあると考えた方がよからう。そうすると上の式などで考えた η はむしろこの境界面にとった方が合理的であることになる。このように考えて来ると、もはや境界層を考慮に入れなくては問題は解決しないし、また理論の妥当性も疑わしくなって来るので、細かい議論は止める。

所で (20) 式で肋骨線が渦にどのように関係するかを考えて見よう。

この式では水線の曲率の深さ方向の分布が渦の強さをきめるのであって、肋骨線が U 型か V 型かと言うことは直接渦には関係しない形になっている。しかし U 型肋骨の場合はその曲率が上下方向に一樣であるから (21) 式のような渦分布が得られ、一方 V 型肋骨では水面付近では相対的に水線曲率が小さくなるはずであるから、計算するまでもなく水面付近の渦は U 型の場合に比し小さくなると考えられる。今の理論ではそのような差異にもとづく抵抗変化を定量的に表現することはできないけれども、経験から推測してそのような渦を小さくすれば抵抗も小さくなると考えられるので、このような差異は V 型肋骨の場合に抵抗が小さいと言う実験的事実をある程度説明していると思われる。

この考えをおし進めて (20) 式から水面もしくは底面付近の曲率を真中辺のそれよりどんどん小さくし、かつできれば逆にすれば、もっと都合がよいように思われる。この方針を船尾近くで実行し、さらに前節の考察を加味すると肋骨線は中程のくびれた水面の幅の広い、いわゆるホグナー型船尾に似たもの出来上がるであろう。

4. 結 論

以上を要約すると、

極端な U 型肋骨船の抵抗は非常に大きいことが知られているが、水面の影響を無視し簡単化して Slender body の理論を適用するとビルジ部から流出する渦系から誘導抵抗を算出することができ (8) あるいは (10) 式で与えられる。また船尾については (22) 式がよいかもしれない。

(8) 式から算出される抵抗値は実験値よりもかなり大きい値を与えるようであるが、定性的に見ると従来の経験によく一致しているように見える。

そこでもし理論が妥当であるとするこの種の抵抗増加を防ぐには肋骨線を V 型にする方法の他に横切面積曲線を検討する方法もあることになり、それは球状乃至円筒状船首を採用するがよいと言うことである。

次に (22) 式による抵抗値は二次元的圧力抵抗と同じように船尾流出角に比例する。しかし、これは少し現象を単純化しすぎているきらいがあり、あまり現実性がないように思える。しかし渦分布を決定する (20) 式によれば肋骨線が U 型か V 型かが直接それに関係しているのではなくて、喫水方向の曲率分布が重要であることを示しており、このことは船尾形状の働きを理解する上に大きい暗示を与えるものである。

このような原因に基づく抵抗は従来あまり注目されなかったものであるが、最近における船型の肥大化にともなって、ややもすると肋骨線は U 型化し、また横切面積曲線は第 3 図でもわかるように SQ. ST. $1\frac{1}{2}$ および 9 番の近くでその曲線が最大になる傾向を生じやすい。

ところがこのことは共に従来の経験ではよくないこととされていたことであって、今考えた理論はこのような事情を定性的によく説明している。

しかもまた望ましい排水量分布は造波抵抗の面からも望ましいものであり、かつはまた摩擦抵抗の形状影響をも減らし得るものであると考えられ、船尾形状も従来良い結果を得ているものが良さそうであると言うことであるから定量的な点を除けば、難点はなく、さしあたりこのような考察に基づいて線図の計画を行なうのは妥当であと考えられる。

参 考 文 献

- 1) H. E. Saunders: "Hydrodynamics in Ship Design", Vol. 2, Chap. 67, S. N. A. M. E., 1957.
- 2) B. Thwaites: „Incompressible Aerodynamics" Oxford, 1960.
- 3) 丸尾 孟: 造船協会々報 81 号 (昭和 24 年 7 月)
- 4) 別所正利: 造船協会論文集 115 号 (昭和 39 年 6 月)
- 5) 佐藤 茂外: 同 上 118 号 (昭和 40 年 12 月)
- 6) 神中竜雄: 同 上
- 7) 別所正利: 防大理工学研究報告第 2 巻第 3 号 (昭和 39 年 9 月)
- 8) 日本造船研究協会報告 第 31 号 (昭和 35 年 11 月)

On a Theory of the Resistance of the U-frame Ship

By Masatoshi BESSHO*

Abstract

It is well known that the resistance of a ship having extremely U-type frame lines is very large, and observed that the ship sheds out strong vortex filaments from the bilge lines in the down-stream.

In this paper, the author tries to calculate the strength of these vortex filaments under the very idealized conditions, and proposes a formula to calculate their induced resistance. He also considers its minimum problem and observes that there are ship shapes with round ends to have no induced resistance except the theoretical ambiguity at end points.

There are few experiments to verify clearly this theoretical results, but at least it does not contradict the past experiences with respect to the optimum ship shapes.

* Assistant Professor; Dept. of Mechanical Engineering, Defense Academy.

“Some Notes on the Theory of the Wave-Resistance in Two-Dimension”

By Masatoshi BESSHO*

(Received Dec. 20, 1966)

Abstract

The author shows at first that the large second order effect of the free water surface of the submerged cylinder depends mainly upon its height of the entrained regular wave and that the range in which that effect becomes serious will be contained almost in the cases in which there is no stationary solution or there occurs a phenomenon like as hydraulic jump.

This effect depends upon the form, the submergence and the speed of the cylinder naturally and he shows examples of this effect with respect to the simple wave-free potential and concludes that there may exist no definite general rule.

Lastly, he shows the pressure measurement of some two dimensional wave-free cylinder models and obtains a fairly good correspondence with the linearized theory especially taking the second order term into consideration.

1. Introduction

The present difficulty of the wave-resistance theory is the so-called second order effect problem except the frictional effect and it is natural to try to study in the two-dimensional case, although the wave system is too simple to be analogous to the three dimensional ship wave. The problem is generally divided into two parts, the accuracy of the ship surface and the water surface condition.

The former is studied by T. H. Havelork (ref. 1) for a circular cylinder firstly and the latter by T. Nishiyama (ref. 2) and M. Bessho (ref. 3) firstly but more correct treatment by E. O. Tuck (ref. 4), and it becomes clear by these works that the second order effect of the water surface is more important than the one of the body surface for a circular cylinder especially in low speed.

From this observation, E. O. Tuck looks with suspicion the validity of the linearized theory.

However, there is also a thought, in the other hand, that the smaller the wave-resistance, the smaller is the error of the first approximation and in fact a circular cylinder entrains large wave.

* Assistant Professor; Dept. of Mechanical Engineering, the Defense Academy.

Accordingly, it is felt that more things will be left to study.

In this stand point, this paper deals with some examples and characters of the wave-free potential and physical view of the second order potential of a circular cylinder.

2. A submerged cylinder

Consider the uniform water flow with the unit velocity, take the origin at the water surface, the x -axis as positive inversely to the flow direction and the y -axis vertically upwards.

Let the complex perturbation velocity potential be

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \\ z &= x + iy, \quad \frac{df}{dz} = -u + iv, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

where u and v mean the component velocities.

The pressure $p(x, y)$ is given by Bernoulli's theorem.

$$\frac{1}{\rho} p(x, y) = -gy - \frac{1}{2} \left| 1 + \frac{df}{dz} \right|^2 + \frac{1}{2}, \quad (2.2)$$

where ρ means the water density and g the gravity constant.

If $\eta(x)$ means the water surface elevation, it is given by the equation

$$\eta(x) = -\phi(x, \eta), \quad (2.3)$$

Now, the first order potential satisfies the water surface condition where the pressure is constant, that is,

$$g\phi_1(x, 0) - \frac{\partial}{\partial x} \varphi_1(x, 0) = 0, \quad (2.4)$$

and

$$\eta_1(x) = -\phi_1(x, 0). \quad (2.5)$$

Then, the second order pressure excess at $y=0$ by this potential is

$$\frac{1}{\rho} p_2(x) = -\frac{1}{2} \left| \frac{df_1}{dz} \right|^2 - \phi_1(x, 0) \frac{\partial}{\partial y} \left\{ g\phi_1(x, 0) - \frac{\partial}{\partial x} \varphi_1(x, 0) \right\}, \quad (2.6)$$

Hence, introducing the correction potential $f_2(z)$ with this pressure at $y=0$ as

$$g\phi_2(x, 0) - \frac{\partial}{\partial x} \varphi_2(x, 0) + p_2(x)/\rho = 0, \quad (2.7)$$

the surface elevation becomes to the second order

$$\eta(x) = -\phi_1(x, 0) - \phi_2(y, 0) + \eta \frac{\partial}{\partial y} \phi_1(x, 0), \quad (2.8)$$

This is the ordinary procedure to obtain the second order potential. In the far down stream, f_1 will have the wave, that is.

$$f_1(z) \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} a e^{-igz + iz}, \quad (2.6)$$

where a is the amplitude of the wave.

then p_2 will become by (2.6) (ref. 4)

$$p_2(x)/\rho \doteq -\frac{g^2}{2} a^2, \quad (2.10)$$

In the other hand,

$$\text{D.C. part of } \left[\eta(x) = -\phi_1(x, 0) + y \frac{\partial}{\partial y} \phi_1(x, 0) \right] = \frac{ga^2}{2}, \quad (2.11)$$

that is, there is the mean elevation as in the theory of the finite amplitude regular wave (ref. 7), and the second order pressure (2.10) balances to the mean surface elevation (2.11), so that ultimately ϕ_2 may balance (2.11) and the mean level may be kept unchanged (ref. 8).

In the other way, there exists a mean flow with the wave transmission as well known.

Its total volume is $ga^2/2$ per unit time and equals (2.11). (ref. 7).

In fact, this is explained as follows.

The actual representation of f_2 becomes

$$f_2(z) = \frac{1}{\pi \rho i} \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x') S(g(z-x')) dx', \quad (2.12)$$

where

$$S(gz) = \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikz}}{k - g - \mu i} dk, \quad (2.13)$$

and

$$\left(\frac{d}{dz} + ig \right) S(gz) = -\frac{1}{z} \quad (2.14)$$

and, as seen from Fig. 2 of Tuck's paper, it will be justified in the far down stream to take the next approximation, assuming the pressure as a step function,

$$f_2(z) \doteq f_2^*(z) = \frac{ig^2 a^2}{2\pi \rho} \int_{-\infty}^0 S(g(z-x')) dx', \quad (2.15)$$

that is,

$$f_2^*(z) = \frac{ga^2}{2\pi \rho} \left[\log z + S(gz) \right]_{z=-\infty}^{z=z} \quad (2.16)$$

Thus, the excess flow by the mean level up is supplied by this sink at the origin, or near the origin more correctly, this sink cancels out the source at infinite down stream, and causes the mean flow with the wave propagation.

Moreover, it is interesting to know that the wave-resistance R is

$$R = \frac{\rho g}{4} a^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho g}{2} a^2 \right), \quad (2.17)$$

which is explained hydraulically such as that mean momentum flow with the regular wave is $\rho \cdot g a^2 / 2$, but the one half of it balances the pressure rise by the level up to the water surface in the rear and the other half to the external force.

Meanwhile, by Tuck's calculation, it is clear that the contribution of f_2 to the second order effect is the greatest, and this is understood from the form (2.15) and (2.16).

Accordingly, if there is no wave, then this term does not contribute so greatly, because it has no logarithmic term as in (2.16).

Nextly, the wave has its maximum height, by Mithchell's formula, when

$$a/\lambda = g a / 2\pi \leq 0.071, \quad (2.18)$$

where λ means the regular wave length (ref. 6 and 7).

For a submerged circular cylinder at the depth h , since

$$f_1(z) = \frac{1}{z+ih} - \frac{1}{z-ih} - 2igS\{g(z-ih)\}, \quad (2.19)$$

$$f_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -4\pi i g e^{-gh - igx}, \quad (2.20)$$

$$a = 4\pi g e^{-gh}, \quad (2.21)$$

and then (2.18) gets to

$$2g^2 e^{-gh} \leq 0.071, \quad (2.22)$$

or, putting (2.17) into (2.18) directly and taking its square,

$$\frac{R}{\rho g} \leq \frac{0.05}{g^2}, \quad (2.23)$$

This is a very severe restriction, for example, the immersion for which the wave does not become highest for all speed is

$$h \geq 3.91 \quad \text{at} \quad g = 2/h, \quad (2.24)$$

This means moderately a deep immersion and the effect of the free surface is not very large.

If the immersion is shallower than (2.24), there is a range in which the wave-amplitude exceeds the upper limit, that is, for example,

$$\left. \begin{aligned} 0.285 \leq Fr = V/\sqrt{gh} \leq 1.80, & \text{ for } h=1 \\ 0.494 \leq Fr = V/\sqrt{gh} \leq 1.18, & \text{ for } h=2 \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

where V is the uniform velocity.

In this range, there exists no stationary potential flow and occurs a phenomena similar as a hydraulic jump (ref. 8, 9 and 10).

Since a weak jump is a wave motion and a strong one is a state that there exists no stationary wave, this is a close analogy (ref. 6).

The criterion (2.18) can also be written in the usual unit system as

$$a/(v^2/2g) < 0.892, \quad (2.26)$$

Namely, this will mean that the maximum surface depression can not also exceed nearly the velocity head.

By the way, it is worthwhile to note that there exists an equi-pressure line for the first order velocity potential.

Let it describe y , it is given by pressure equation as

$$gy = -\frac{\partial}{\partial x} \varphi_1(x, y) - \frac{1}{2} q_1^2, \quad q_1^2 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2,$$

taking to the second-order term, it becomes

$$gy = -\frac{\partial}{\partial x} \varphi_1(x, 0) - y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \varphi_1(x, 0) - \frac{1}{2} q_1^2 \Big|_{y=0}. \quad (2.27)$$

In the other hand, the surface elevation to the second order is represented by (2.8) so that the difference between them may become

$$g(y-\eta) = \frac{\partial}{\partial x} \varphi_2(x, 0), \quad (2.28)$$

This is a simple relation and the same as in the three dimensional case.

Namely, the difference between the equi-pressure line in the first order potential (2.27) and the free surface line in the theory accurate to the second order is given by the x -component of the second-order velocity.

3. Wave-free potential

The water surface condition can also be written in the form:

$$\operatorname{Re} \left[\frac{d}{dz} f(z) + ig f(z) \right] = 0, \quad \text{for } y=0, \quad (3.1)$$

Hence, if $f(z)$ is represented as

$$f(z) = \frac{d}{dz} m(z) - igm(z), \quad (3.2)$$

by a regular $m(z)$ such that

$$\operatorname{Re}[m(z)] = 0 \quad \text{for } y=0, \quad (3.3)$$

then $f(z)$ satisfies (3.1) and has no wave (ref. 11, 12).

For example, putting

$$m_n(z) = \frac{i}{g} \left[\frac{e^{i\alpha}}{(z+ih)^n} + \frac{e^{-i\alpha}}{(z-ih)^n} \right], \quad (3.4)$$

$f(z)$ can be calculated as

$$f_n(z) = \frac{e^{i\alpha}}{(z+ih)^n} + \frac{e^{-i\alpha}}{(z-ih)^n} + \frac{n}{ig} \left[\frac{e^{i\alpha}}{(z+ih)^{n+1}} + \frac{e^{-i\alpha}}{(z-ih)^{n+1}} \right], \quad (3.5)$$

Especially, for $n=1$ and $\alpha=0$,

$$f_1(z) = \frac{1}{z+ih} + \frac{1}{z-ih} + \frac{1}{ig} \left[\frac{1}{(z+ih)^2} + \frac{1}{(z-ih)^2} \right], \quad (3.6)$$

and that for $h=0$,

$$f_{10}(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{igz^2}, \quad (3.7)$$

In Fig. 1~4, the stream lines are sketched from rough calculations.

As seen from these figures, if g is very large they represent cylinders closed, although E. O. Tuck reports that a submerged doublet potential gives unclosed stream lines.

Now, velocity potential with a doublet singularity can be expanded as

$$f(z) = (\alpha + i\beta)z + \frac{1}{z}, \quad (3.8)$$

near the origin, including the uniform flow potential, so that the equation of the stream line may be

$$\beta r \cos \theta + \left(\alpha r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta = \text{Const.} \quad (3.9)$$

To obtain a circular stream line it is necessary that β is zero, that is, the flow is symmetric about the origin. (ref 4, 8)

Since the wave source potential can not be symmetric in upstream side and down tream side, there will be no possibility to have a closed stream line in the usual meaning, but this unclosedness character will diminish when the wave becomes smaller and, in fact, there is a closed stream line for a wave-free potential in a limited range.

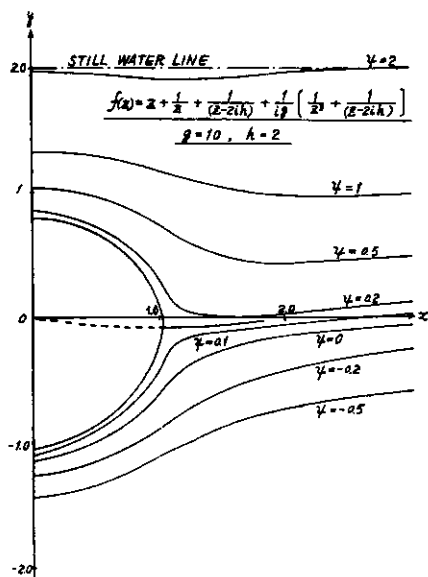


Fig. 1. Stream line of wave-free potential

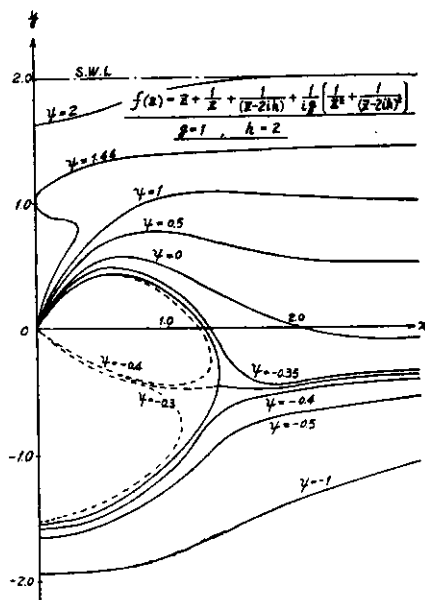


Fig. 2. Stream line of wave-free potential

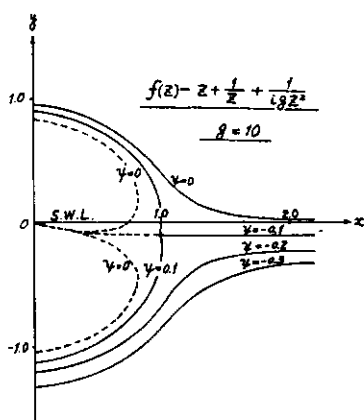


Fig. 3. Stream line of wave-free potential

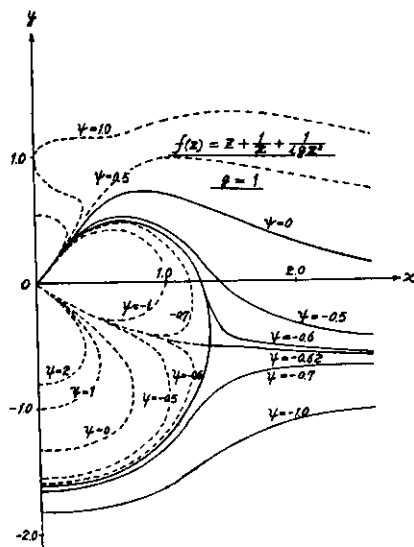


Fig. 4. Stream line of wave-free potential

Lastly, the wave-free potential has of course a wave train in the second order theory and there may not exist an exact wave-free potential in deep water but this will be a future problem.

Since the wave-free potentials (3.6) and (3.7) give nearly an accurate cylinder for

very low speed in Figures, they can be served as the first approximation potentials of the circular cylinder.

Then, the second order terms with respect to the water surface will be calculated easily.

For the one example, consider (3.7) for large g , that is, a half immersed cylinder.

The second order potential is given by (2.12) where $p_2(x)$ by (2.6)

$$p_2(x)/\rho = \frac{1}{2x^4} + \frac{4}{g^2 x^6} \xrightarrow{x=1} \frac{1}{2} + \frac{4}{g^2}, \quad (3.10)$$

Since

$$S(gx) \xrightarrow{x \ll -1} 2\pi i e^{-igx}, \quad (3.11)$$

The wave amplitude by (2.12) is

$$a_2 = \frac{2}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x) e^{-igx} dx, \quad (3.12)$$

Putting (3.10) into (3.12) and leaving without integration the segment $|x| \leq 1$, this is

$$a_2 = 2 \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{8}{g^2 x^6} \right) \cos gx dx \xrightarrow{g \gg 1} -\frac{2}{g} \sin g +, \quad (3.13)$$

This is very small compared with (2.12), but, since the wave-resistance is

$$R = \frac{\rho g}{4} a_2^2 \doteq \frac{\rho}{2g} (1 - \cos 2g) + \dots, \quad (3.14)$$

it is always larger than the critical resistance (2.23) except narrow range near the hollow point $\cos 2g = 1$.

For the other example, considering (3.6) for a submerged cylinder with large g , $p_2(x)$ becomes

$$p_2(x)/\rho = \frac{1}{r^4} (1 + \cos 4\theta) + \frac{4}{g^2 r^6} (2 \cos 6\theta + 3 \cos 2\theta - 1), \quad (3.15)$$

where $re^{i\theta} = x - ih$.

Then, a_2 by (3.12) is evaluated by the contour integration and its largest term becomes

$$a_2^2 \xrightarrow{g \gg 1} \frac{4\pi}{15} g^3 e^{-gh}, \quad (3.16)$$

This is much larger than (2.21) in contrary with the above case but consistent with Tuck's and Salvesen's results.

The wave-resistance will be

$$R \doteq \frac{\rho}{4} \left(\frac{4\pi}{15} \right)^2 g^7 e^{-2g^2 h}, \quad (3.17)$$

As seen from these examples, the second order effect is very different in character with between a submerged and floating body.

Moreover, since there are also cases in which $p_2(x)$ has no integral as like as in the next paragraph's examples, it can not be treated in a straight manner.

Especially, for the floating body case, it is very complicated because the body surface condition too will contribute so much (ref. 13) and at least there may be two cases different in nature such that the intersection angle between the body and the water surface is 90° or not.

4. Wave free pressure distribution (ref. 11, 14)

Let $\sigma(x)$ be a real function such that

$$\sigma(\pm 1) = \frac{d}{dx} \sigma(\pm 1) = 0, \quad (4.1)$$

and take $m(z)$ in (3.2) and (3.3) as

$$m(z) = \frac{i}{\pi g^2} \int_{-1}^1 \frac{\sigma(x')}{z - x'} dx', \quad (4.2)$$

then $f(z)$ becomes by (3.2) and using (4.1)

$$f(z) = \frac{1}{\pi g} \int_{-1}^1 \frac{dx'}{z - x'} \left[\sigma(x') + \frac{i}{g} \frac{d}{dx'} \sigma(x') \right], \quad (4.3)$$

and the pressure by (2.7)

$$P(x) \equiv p(x)/\rho = -Re \left[\frac{df}{dz} + igf \right]_{y=0} = \sigma(x) + \frac{1}{g^2} \sigma''(x), \quad (4.4)$$

The surface elevation is calculated from (4.3) as

$$H(x) \equiv -g\eta(x) = \sigma(x) + \frac{1}{\pi g} \int_{-1}^1 \frac{d\sigma(x')}{x - x'} \quad (4.5)$$

Consider a function which satisfies (4.1), namely,

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n} \left[\frac{\sin(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\theta}{n+1} \right], \quad n \geq 2, \quad x = -\cos \theta \quad (4.6)$$

Then, by the integration and differentiation, (4.4) and (4.5) become

$$P_n(x) = \sigma_n(x) + \frac{1}{g^2} \frac{\cos n\theta}{\sin \theta}, \quad (4.7)$$

$$H_n(x) = \sigma_n(x) - \frac{1}{gn} \cos n\theta, \quad (4.8)$$

Fig. 5 shows an example for $n=2$.

The pressure becomes infinite at both ends, but this is not favourable for the experiment.

Hence, the offset of models are drawn as follows:

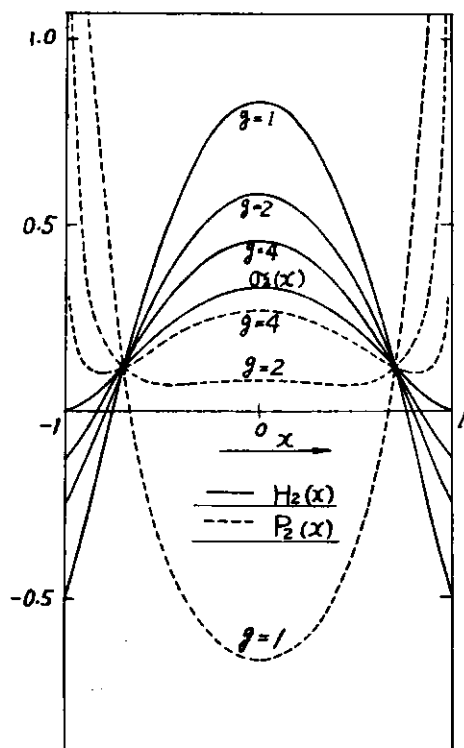


Fig. 5. Wave-free pressure distribution

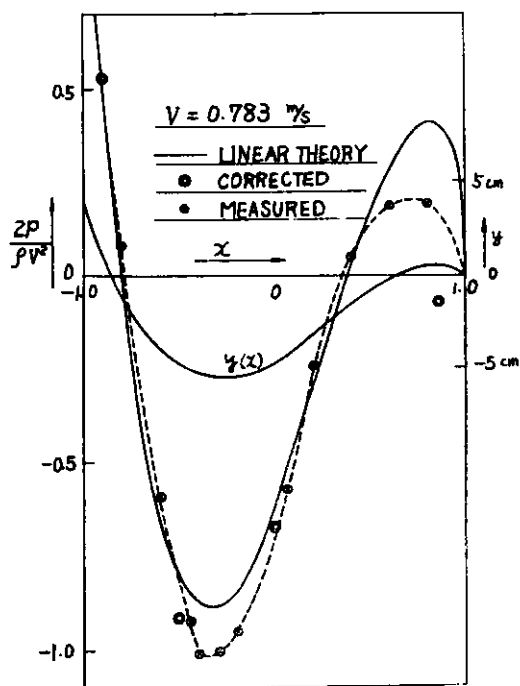


Fig. 6. Pressure distr of. M23G4

Table 1. Model Particulars.

Model	M23G4	M23G2	M23G1	M24G2	M24G1
Length (m)	0.56	0.40	0.30	0.40	0.30
Breadth (m)	1.18	1.20	1.19	1.20	1.20
Design Vel. (m/s)	0.783	0.990	1.212	0.990	1.212
Froude No. $V/\sqrt{gL}$	0.354	0.500	0.707	0.500	0.707
$1/\lambda$	2.5	3	4	3	4
Pay Load (Kg)	11.57	6.26	2.63	6.26	2.65

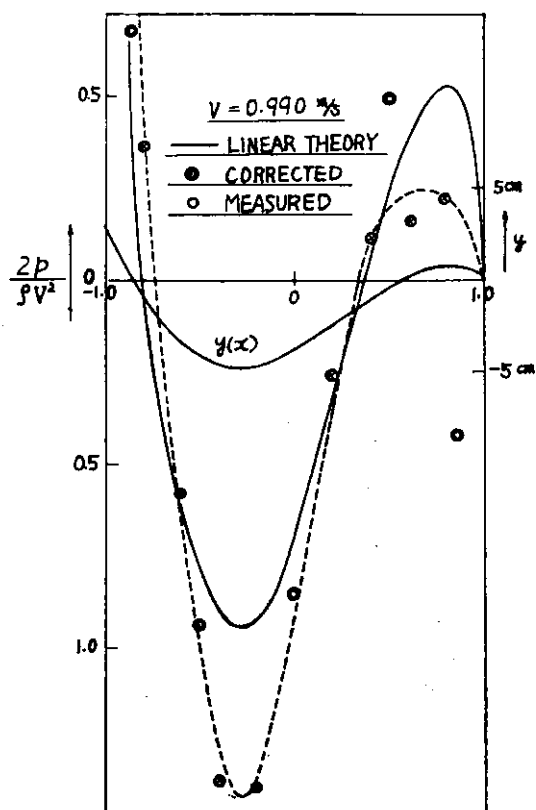


Fig. 7. Pressure distr. of M23G2

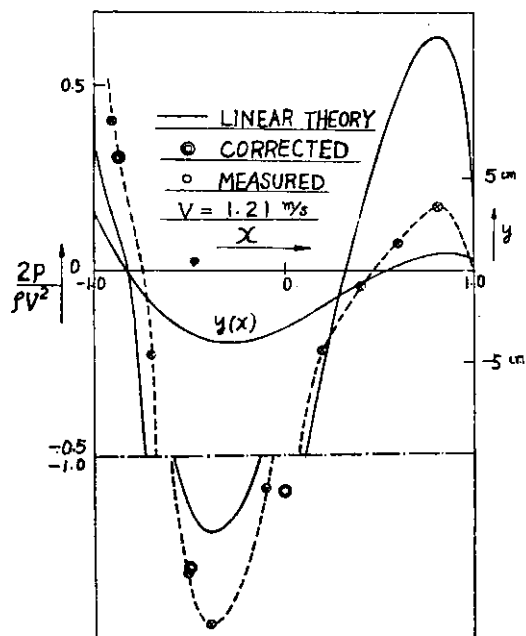


Fig. 8. Pressure distr. of M23G1

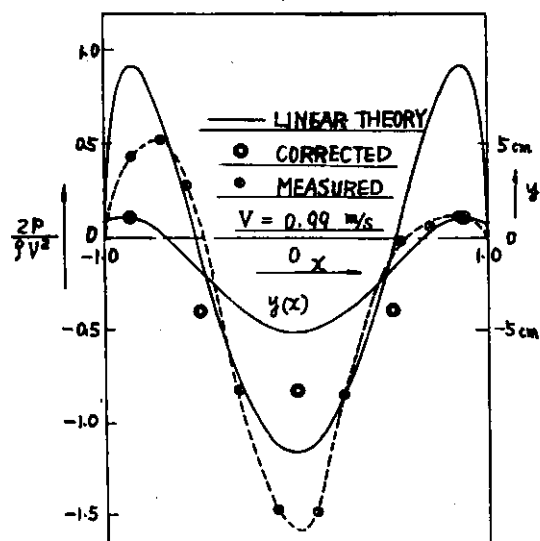


Fig. 9. Pressure distr. of M24G2

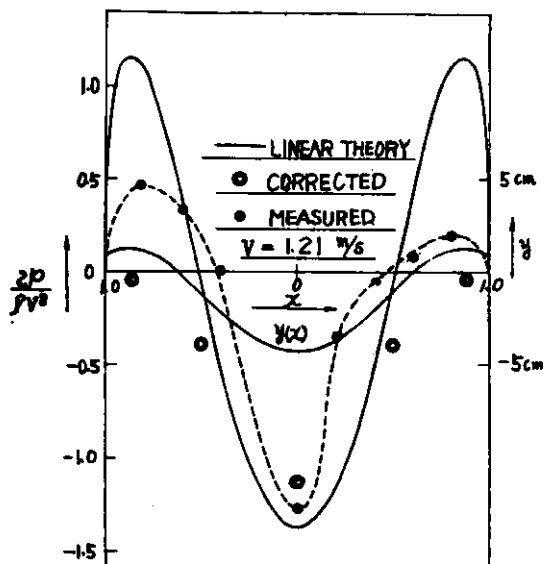


Fig. 10. Pressure distr. of M24G1

$$-y(x) = \lambda \{H_2(x) - H_3(x)\}, \quad (4.9)$$

which for $g=a$ are called *M23Ga*.

$$-y(x) = \lambda \{H_2(x) - H_4(x)\}, \quad (4.10)$$

which are called *M24Ga*.

Model dimensions are shown in the table and the experimental results in Fig. 6~10.

Here, the manometer head rise above the still water level is the difference of (4.4) and (4.5), that is,

$$\text{Manometer pressure} = \frac{p}{\rho} + gy \doteq -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{y=0}, \quad (4.11)$$

but the pressure in these figures is the sum of this and the statical head gy so as to be convenient to compare with the linearized pressure.

The theoretical values are not bad, (ref. 15) if it takes account into consideration that the model depth is greater than the velocity head and the linearization assumption is hardly consistent.

Thus, the second order pressure must be considered.

From Bernoulli's equation, the pressure is given as

$$\frac{1}{\rho} p(x, y) = -gy - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (4.12)$$

Accordingly, subtracting the first order pressure (4.4) from the above, the correction term is

$$\frac{1}{\rho} p_c(x) = -y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \varphi(x, 0) - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (4.13)$$

or introducing the boundary condition,

$$\frac{1}{\rho} p_c(x) = -y \frac{d^2}{dx^2} y - \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2, \quad (4.14)$$

The corrected values are plotted with the double circle marks at some points.

They seem approach the experimental values qualitatively except the concave part and M24-type models.

Of course, there may occur the boundary layer separation in the concave part and also in fact M24-type models was observed that they were unstable in trimming.

At the design speed, the wave-train could hardly be observed.

Lastly, these wave-free cylinders have few pay-load, that is, their statical buoyancy is very much larger than the pay-load.

As seen from the figures, the statical buoyancy $\rho g \nabla$, equals nearly

$$\rho g V_s \doteq \rho g \lambda \int_{-1}^1 (H_n - H_m) dx, \quad (4.15)$$

and the pay-load $\rho g V_d$ is

$$\rho g V_d = \rho g \lambda \int_{-1}^1 (p_n - p_m) dx, \quad (4.16)$$

Hence, by the integration, it is shown that

$$\left. \begin{aligned} V_d/V_s &\doteq \frac{g}{g+8/(3\pi)}, \quad \text{for } M-23 \text{ Type} \\ V_d/V_s &\doteq \frac{g}{g+8/(15\pi)}, \quad \text{for } M-24 \text{ Type} \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Thus, the pay-load tends to zero with g .

5. Conclusion

The second order effect problem of the wave-theory is very much complicated but at least the following conclusions are deduced from the present considerations:

- 1) The second order effect with respect to the water surface depends upon the magnitude of the wave for a fairly large portion.
- 2) The speed range in which the effect occurs at the largest grade will be contained in the range when there exists no stationary wave and occurs a hydraulic jump. This means that the wave height has its maximum and accordingly the wave-resistance does also.
- 3) In very low speed, the second order effect of the water surface is very large for a submerged body but does not seem to be large for a floating body and that there may be various cases.
- 4) The wave-free cylinder models representing pressure distributions were made and measured the pressure. The results show a fairly good correspondence with the linear theory, if the pressure are corrected by the higher order terms in Bernoulli's equation.

Finally, it seems very important how much and to which functional class the wave-resistance which is a function of geometrical properties of the body belongs.

References

- 1) T. H. Havelock, "The forces on a circular cylinder submerged in a uniform stream" Proc. Roy. Soc. A, vol. 157 (1936).
- 2) T. Nishiyama, "On the some problems of finite amplitude in the theory of wave resistance" J. Zosen Kyokai vol. 94 (1954).
- 3) M. Bessho, "On the wave resistance of submerged circular cylinder" J. Zosen Kyokai, vol. 100

- (1957).
- 4) E. O. Tuck, "The effect of non-linearity at the free-surface of flow past a submerged cylinder", *J. Fluid Mechanic*, vol. 22 (1965).
 - 5) P. C. Pien, "The application of wave making resistance theory to the design of ship hulls with low total resistance" 5-th Symp. of Naval Hydrodynamics, Bergen (1964).
 - 6) J. V. Wehausen and E. V. Laitone, *Handbuch der Physik*, vol. 9, "Surface Waves", Berlin (1960).
 - 7) H. Lamb, "Hydrodynamics" 6th ed., New York, Dover (1945).
 - 8) N. Salvesen, "On second-order wave theory for submerged two-dimensional body." Doctor Thesis, Univ. of Michigan (1966).
 - 9) T. Nishiyama, "Experimental investigation of the effect of submergence depth upon the hydrofoil section characteristics", *J. Zosen Kyokai*, vol. 105 (1959).
 - 10) E. V. Laitone, "Limiting Pressure on hydrofoils at small submergence depths", *J. Applied Physics*, vol. 25 No. 5 (1954).
 - 11) M. Bessho, "Wave-free distributions and their applications" International Seminar on Theoretical Wave-Resistance, vol. II, Univ. of Michigan (1963).
 - 12) M. Bessho, "A new approach to the problem of ship wave" *Memoirs of Defense Academy, Japan*, vol. 2 No. 2. (1962).
 - 13) M. Bessho and T. Mizuno, "On the wave resistance of a half submerged circular cylinder and a vertical plate in a uniform stream", *Japanese Report of Defense Academy*, vol. 1 No. 1 (1963).
 - 14) A. Ogasahare, H. Tabuchi and M. Yamazaki, "Experimental study of Wave-free distributions" Graduation Thesis, Dep. Mech. Eng, Defense Academy, Japan, (1965).
 - 15) H. Maruo, "Hydrodynamic researches of the hydroplane (Part 3)" *J. Zosen Kyokai*, vol. 105 (1959).

“On the Boundary Value Problem in the Theory of of Wave-Making Resistance”

By Masatoshi BESSHO*

(Received Dec. 20, 1966)

Abstract

The author proposes a stand point to formulate the boundary value problem of a floating ship as a limit of a submerged body in the theory of the wave-making resistance, because there is an analytical difficulty on the cross curve around the ship surface with the water surface in the former but not in the latter, and he says that the solution of this problem may not be unique.

In this stand point, he tries to study the second order correction to the ship surface condition.

He introduces the reverse flow potential to write down the integral equation to determine the ship surface condition in a symmetrical way, and also does the diffraction potential to obtain the equivalent formula to Haskind-Hanaoka's.

Lastly, he shows the asymptotic expansion of Neumann function at infinity making use of this diffraction potential.

1. Introduction

There are two boundary conditions in the theory of ship waves, that is, the water surface and the ship surface condition, and we have satisfied with linearized condition because we apply the linearized water surface condition in usual.

Meanwhile, the second order correction, especially for the water surface condition, is purely non-linear and very difficult to estimate it theoretically and also numerically, but for the ship surface condition it is not non-linear mathematically but it is a problem of linear integral equations for the boundary value problem of Laplace equation.

Hence, there is only a numerical difficulty in the latter case. This paper deals with the formulation of this problem.

In the other hand, there must be a parallelism between the theory of ship waves of the uniform motion and the oscillating motion. For example, the diffraction potential plays an important role in the oscillating motion.

How we can state its equivalent in the uniform motion problem? This is also the aim of this paper.

* Assistant Professor; Dept. of Mechanical Engineering, the Defense Academy.

2. Floating Ship

Let us consider a water motion around a ship in a uniform flow which has a unit velocity and is flowing down to the negative direction of the x -axis.

Here, take the origin on the mean water level and the z -axis vertically upwards.

Let $\phi(x, y, z)$ be the velocity potential of the disturbed water motion except the uniform flow, then it must satisfy the water surface condition

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + g\frac{\partial}{\partial z} - \mu\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi(x, y, 0) = 0 \quad (2.1)$$

where g means the gravity constant in this unit system and μ Rayleigh's frictional coefficient which must be tend to zero after the operation, and the ship surface condition

$$\frac{\partial}{\partial n}\phi(x, y, z) = -\frac{\partial\phi}{\partial n} \quad \text{on } S. \quad (2.2)$$

where n means the outward normal of the surface and S the ship surface.

This problem is very difficult to solve, but, in the other hand, the potential which satisfies the water surface condition and has a unit source is well known, say the fundamental singularity, that is,

$$4\pi S(P, Q) = \frac{1}{r} - \frac{1}{\bar{r}} - \frac{g}{\pi} \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{k(z+z') + i k(\omega - \omega')} dk d\theta}{k \cos^2 \theta - g + \mu i \cos \theta} \quad (2.3)$$

where

$$P \equiv (x, y, z), Q \equiv (x', y', z'), r = \overline{PQ}, \bar{r} = \overline{P\bar{Q}}, \bar{Q} \equiv (x', y', -z').$$

and $\tilde{\omega} = x \cos \theta + y \sin \theta, \tilde{\omega}' = x' \cos \theta + y' \sin \theta$.

At infinity, it has next asymptotic characters,

$$S(P, Q) \rightarrow \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}} \right) \quad \text{for } x \gg x', \quad (2.4)$$

$$S(P, Q) \rightarrow 2S_s(P, Q) \quad \text{for } x \ll x', \quad (2.5)$$

where

$$S_s(P, Q) = \frac{g}{4\pi i} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{g(z+z') \sec^2 \theta} (e^{ig \sec^2 \theta (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}')} - e^{-ig \sec^2 \theta (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}')}) \sec^2 \theta d\theta, \quad (2.6)$$

Making use of this function, by Green's theorem, it can be shown that

$$\phi(P) = \iint_{S+\bar{F}} \left\{ \phi(Q) \frac{\partial}{\partial n} S(P, Q) - \frac{\partial \phi}{\partial n} S \right\} dS_Q,$$

where $\bar{F}$ means the water surface out of the ship, by the way, F means the water plane area of the ship.

The integral over $\bar{F}$ is deformed the one on the line C which is the cross curve of the ship surface S with the water surface $\bar{F}$, making use of (2.1) it becomes

$$\begin{aligned}\phi(P) = & \iint_S \left\{ \phi(Q) \frac{\partial}{\partial n} S(P, Q) - \frac{\partial \phi}{\partial n} S \right\} dS_Q \\ & + \frac{1}{g} \int_C \left\{ \phi(Q) \frac{\partial}{\partial x'} S(P, Q) - S \frac{\partial}{\partial x'} \phi \right\} dy',\end{aligned}\quad (2.7)$$

The second term of the right hand side does not appear in the case of the submerged body, and is considered as a special difficulty with the floating ship.⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾

Now, since the surface elevation is

$$\zeta(x, y) = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y, 0), \quad (2.8)$$

this term may be interpreted as the correction term for the change of the wetted surface of the ship from the mean one.⁽¹⁾⁽²⁾ In fact, that change can not be estimated before solving this problem.

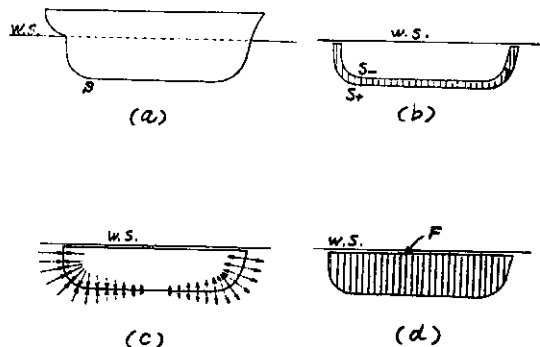
There must be also some indeterminacy like as in the case of the surface glider which is very much like the wing.

Thence, this term seems to show such indeterminacy, that is, the present boundary value problem may be not sufficient with (2.2).

A ways to detour this difficulty is to assume the ship as a limit of the submerged one as showing in Figures.

Figure (a) is a real ship, (b) is a doublet layer over the ship surface under the mean level, (c) is a source-sink layer and (d) is a limiting submerged body with a rigid water plane which tends to the mean water level.

The boundary condition becomes respectively



FIGURES

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{s+} = -\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{s-}, \phi|_{s+} - \phi|_{s-} = \mu \quad \text{for (b),} \quad (2.9)$$

$$\left. \phi|_s = \phi|_{s-}, \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{s+} - \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{s-} = -\sigma \right\} \quad \text{for (c)} \quad (2.10)$$

and $\iint_S \sigma dS = 0.$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad \text{on } S \text{ and } F, \text{ for (d)} \quad (2.11)$$

where S_+ means S itself or the outer surface of the ship and S_- the inner surface.

These problems may have unique solutions as a limit of the submerged body, but it is not evident that these solutions are the same one.

However, it may be correct at least to say that the difference between them and a correct solution, if it exists, has a representation as like as (2.7) and the boundary condition

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S, \quad (2.12)$$

Thus, if the analogy to the gliding surface may be permitted, the question which is a compatible solution may be answered by inspecting whether the weight and moment of the ship will be balanced to the hydrodynamical buoyancy or the water flow around a water line will be physically acceptable.

Namely, all of these problems are of the second order¹⁾ and it is difficult in general to treat it as a whole.

Fortunately for the usual displacement ship at a moderate speed, this weight unbalance could be considered as small numerically and the water flow condition would not raise a serious difficulties.

Hence, the case (d) is taken up for the following treatment but the results obtained will be applied for other cases.

Then, the potential can be represented as

$$\phi(P) = \iint_{S+F} \left\{ \phi(Q) \frac{\partial}{\partial n} S(P, Q) - \frac{\partial \phi}{\partial n} S \right\} dS_Q \quad (2.13)$$

3. Boundary Value Problem

Let us consider the artificial water motion when the trailing wave direction is reversed and ϕ^* be its velocity potential, the reverse flow potential,⁵⁾⁶⁾ then it can be represented as follows:

$$\phi^*(x, y, z) = \iint_{S+F} \left\{ \phi^*(Q) \frac{\partial}{\partial n} S^*(P, Q) - \frac{\partial \phi^*}{\partial n} S^* \right\} dS_Q, \quad (3.1)$$

where S^* means the unit source potential and its regular wave must be lie in the upper stream, then it may be taken as

$$S^*(P, Q) = S(Q, P), \quad (3.2)$$

where S will be defined by (2.3), because it has the necessary conditions from (2.4) and (2.5).

Clearly, the difference between them becomes to

$$S(P, Q) - S^*(P, Q) = 2S_s(P, Q), \quad (3.3)$$

or they can be written as

$$\left. \begin{array}{l} S(P, Q) \\ S^*(P, Q) \end{array} \right\} = S_e(P, Q) \pm S_s(P, Q) \quad (3.4)$$

and S_e is an even function in $(x-x')$ and S_s an odd.

The boundary condition of ϕ^* is assumed to be

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi^* = \frac{\partial}{\partial n} \phi = -\frac{\partial x}{\partial n} \quad \text{on } S \text{ and } F, \quad (3.5)$$

Corresponding to (3.4), the next partition is possible.

$$\left. \begin{array}{l} \phi \\ \phi^* \end{array} \right\} = \pm \phi_e + \phi_s, \quad (3.6)$$

and their boundary conditions must be

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \phi_s}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial n} \quad \text{on } S \text{ and } F, \quad (3.7)$$

where ϕ_e is an even function in x and ϕ_s is an odd when S is symmetric with respect to the y - z plane, but it has not always necessary to have such symmetry.

The explicit expressions of ϕ_e and ϕ_s are as follows:

$$\phi_e = \iint_{S+F} \phi_e \frac{\partial}{\partial n} S_e dS + \iint_{S+F} \left(\phi_s \frac{\partial}{\partial n} S_s - \frac{\partial \phi_s}{\partial n} S_s \right) dS, \quad (3.8)$$

$$\phi_s = \iint_{S+F} \left(\phi_s \frac{\partial}{\partial n} S_e - \frac{\partial \phi_s}{\partial n} S_e \right) dS + \iint_{S+F} \phi_e \frac{\partial}{\partial n} S_s dS, \quad (3.9)$$

Putting (3.7) into these formula, and tending the argument point on the surface S and F , they compose the system of Fredholm's integral equation of the second type. Then it must have a unique solution.

In the other hand, the potentials have a regular wave system in the far down stream, that is, from (2.5), (3.2) and (2.13), (3.1),

$$\phi(P) \xrightarrow{x \ll 0} 2 \iint_{S+F} \left(\phi \frac{\partial}{\partial n} S_s - \frac{\partial \phi}{\partial n} S_s \right) dS, \quad (3.10)$$

$$\phi^*(P) \xrightarrow{x \gg 0} -2 \iint_{S+F} \left(\phi^* \frac{\partial}{\partial n} S_s - \frac{\partial \phi^*}{\partial n} S_s \right) dS, \quad (3.11)$$

or

$$\phi(P) \xrightarrow{x \ll 0} \frac{g}{2\pi i} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \{ \phi_0(P, \theta) \bar{H}(\theta) - \bar{\phi}_0(P, \theta) H(\theta) \} \sec^2 \theta d\theta, \quad (3.12)$$

$$\phi^*(P) \xrightarrow{x \gg 0} \frac{ig}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \phi_0(P, \theta) \bar{H}^*(\theta) - \bar{\phi}_0(P, \theta) H^*(\theta) \sec^2 \theta d\theta, \quad (3.13)$$

where

$$\phi_0(P, \theta) = e^{gz \sec^2 \theta + ig \sec^2 \theta \tilde{\omega}}, \quad (3.14)$$

$$\frac{H(\theta)}{H^*(\theta)} \Big\} = \iint_{S+F} \left\{ \left(\frac{\phi}{\phi^*} \right) \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 - \phi_0 \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{\phi}{\phi^*} \right) \right\} dS, \quad (3.15)$$

Dividing these into two parts, it can be written by (3.6),

$$\frac{H(\theta)}{H^*(\theta)} \Big\} = \pm H_c(\theta) + H_s(\theta), \quad (3.16)$$

$$H_c(\theta) = \iint_{S+F} \left(\phi_c \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 - \phi_0 \frac{\partial \phi_c}{\partial n} \right) dS = \iint_{S+F} \phi \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 dS, \quad (3.17)$$

$$H_s(\theta) = \iint_{S+F} \left(\phi_s \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 - \phi_0 \frac{\partial \phi_s}{\partial n} \right) dS, \quad (3.18)$$

Especially, since ϕ_c is even in x and ϕ_s odd if S is symmetric in fore and aft then H_c is real and H_s is imaginary, so that

$$H^*(\theta) = -\bar{H}(\theta) = -H(\theta \pm \pi), \quad (3.19)$$

4. Diffraction Potential⁽¹⁾

To proceed further, it is convenient to introduce here potentials ϕ_d and ϕ_d^* as follows:

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi_d(P, \theta) = \frac{\partial}{\partial n} \phi_d^*(P, \theta) = -\frac{\partial}{\partial n} \phi_0(P, \theta) \quad \text{on } S \text{ and } F, \quad (4.1)$$

Since ϕ_0 stands for the plane wave advancing with the uniform flow, we call it the diffraction potential in analogy with the oscillating problem.

ϕ_d has a regular wave in the negative side of the x -axis but ϕ_d^* in the positive side.

Firstly, it can be easily seen to be, by Green's theorem,

$$\iint_{S+F} \left(\phi \frac{\partial}{\partial n} \phi_d^* - \frac{\partial \phi}{\partial n} \phi_d^* \right) dS = \iint_{S+F} \left(\phi^* \frac{\partial}{\partial n} \phi_d - \frac{\partial \phi^*}{\partial n} \phi_d \right) dS = 0, \quad (4.2)$$

because ϕ and ϕ_d^* have their wave in the different side.

Then, putting (4.1) and (4.2) into (3.15), it can be shown to be

$$\frac{H(\theta)}{H^*(\theta)} \Big\} = \iint_{S+F} \frac{\partial x}{\partial n} \left[\phi_0(\theta) + \left\{ \frac{\phi_d^*(\theta)}{\phi_d(\theta)} \right\} \right] dS, \quad (4.3)$$

In the other hand, since

$$\iint_{S+F} \left(x \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 - \phi_0 \frac{\partial x}{\partial n} \right) dS = 0, \quad (4.4)$$

(3.15) also may be written in the form

$$\frac{H(\theta)}{H^*(\theta)} = \iint_{S+F} \left\{ x + \left(\frac{\phi}{\phi^*} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial n} \phi_0(\theta) dS, \quad (4.5)$$

Moreover, since these are equivalent to, for example,

$$H(\theta) = \iint_{S+F} \left\{ (x + \phi) \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 - \phi_0 \frac{\partial}{\partial n} (x + \phi) \right\} dS,$$

if the potentials can be represented by the source-sink distribution, that is,

$$\left. \begin{aligned} \text{the difference of } \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \phi \right\} &= -\sigma \\ \text{" } \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \phi_d^* \right\} &= -\sigma_d^* \end{aligned} \right\} \text{ on } S \text{ and } F \quad (4.6)$$

the integral can be taken around the source, and we may obtain

$$H(\theta) = \iint_{S+F} \sigma(P) \phi_0(P, \theta) dS_P = \iint_{S+F} \sigma_d^*(P, \theta) x dS_P, \quad (4.7)$$

In fact, for the thin ship, the first approximation is well known to be

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{\partial x}{\partial n} \\ \sigma_d^* &= \sigma_d = \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

then, putting this into (4.7), these formula are clearly consistent with (4.4), and also it is equivalent to the next volume distribution by Green's theorem:

$$H(\theta) = \iiint_D \frac{\partial}{\partial x} \phi_0 dx dy dz = 2ig \sec \theta \iint_{\bar{S}} \eta(x, z) e^{gz \sec^2 \theta + igz \sec \theta} dx dz, \quad (4.9)$$

where D means the displaced volume of the ship, $\bar{S}$ the projection of S on the $x-z$ plane and $\eta(x, z)$ the half breadth of the ship surface.

Secondly, making use of (4.1) and (4.2), the sum of two formula of (4.5) can be shown to become

$$2H_c(\theta) = H(\theta) - H^*(\theta) = \iint_{S+F} \left(\phi_d \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \phi_d \right) dS, \quad (4.10)$$

Deforming the surface of the integration, it is equal to

$$H_c(\theta) = \frac{1}{2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left(\phi_d \frac{\partial}{\partial z} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial z} \phi_d \right) dx dy.$$

Since ϕ_d has also an asymptotic expansion like (3.12) as

$$\phi_d(P, \theta) \xrightarrow{x \ll 0} \frac{g}{2\pi i} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \{ \phi_0(P, \theta') \bar{H}_d(\theta, \theta') - \bar{\phi}_0(P, \theta') H_d(\theta, \theta') \} \sec^2 \theta' d\theta', \quad (4.11)$$

where

$$H_d(\theta', \theta) = H_d(\theta, \theta') = \iint_{S+F} \left\{ \phi_d(P, \theta) \frac{\partial}{\partial n} \phi_0(P, \theta') - \phi_0(P, \theta') \frac{\partial}{\partial n} \phi_d(P, \theta) \right\} dS, \quad (4.12)$$

After a lengthy manipulation, it can be shown that

$$H_c(\theta) = \frac{ig}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \{ H(\theta') \bar{H}_d(\theta, \theta') - H_d(\theta, \theta') \bar{H}(\theta') \} \sec^2 \theta' d\theta' \quad (4.13)$$

For the thin ship, the approximation (4.8) gives

$$H_d(\theta, \theta') = -2g^2 \sec \theta \sec \theta' \iint_{\bar{S}} \eta(x, z) e^{gz(\sec^2 \theta + \sec^2 \theta') + igx(\sec \theta + \sec \theta')} dx dz, \quad (4.14)$$

Then, if we consider a function such that

$$\left. \begin{aligned} P_{2n}^*(x, t) &= (-1)^n \int_0^{\pi/2} e^{-t \sec^2 \theta} \cos(x \sec \theta) \cos^{2n} \theta d\theta, \\ P_{2n+1}^*(x, t) &= (-1)^n \int_0^{\pi/2} e^{-t \sec^2 \theta} \sin(x \sec \theta) \cos^{2n+1} \theta d\theta, \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

(4.13) can be written in the form:

$$\begin{aligned} H_c(\theta) &= \frac{2}{\pi} g^4 \sec \theta \iint_{\bar{S}} \iint_{\bar{S}} \eta(x, z) \eta(x', z') P_{-4}^* \{ g(x - x'), g | z + z' | \} \\ &\quad \times e^{g^2 \sec^2 \theta} \cos(gx \sec \theta) dx dz dx' dz', \end{aligned} \quad (4.16)$$

Since H_c is clearly zero for the first approximation (4.9), this gives the second approximation and is the different phase component with H_s of (4.9).

Lastly, the function P_n^* is a conjugate to P_n function⁷⁾ with respect to x , that is,

$$\left. \begin{aligned} P_{2n}(x, t) &= (-1)^n \int_0^{\pi/2} e^{-t \sec^2 \theta} \sin(x \sec \theta) \cos^{2n} \theta d\theta, \\ P_{2n+1}(x, t) &= (-1)^{n+1} \int_0^{\pi/2} e^{-t \sec^2 \theta} \cos(x \sec \theta) \cos^{2n+1} \theta d\theta, \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

so that there exist close expressions with each other, for example,⁷⁾

$$P_{-1}^*(x, 0) = -\frac{\pi}{2} J_0(x), \quad (4.18)$$

$$P_{-2}^*(0, t) = -\frac{1}{2} e^{-t/2} K_{1/2} \left(\frac{t}{2} \right), \quad (4.19)$$

and

$$P_{-1}^*(x, t) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2/4t} J_0(|x-v|) dv, \quad (4.20)$$

Lastly, as explained at the end of § 2, the second order effect is very much complicated, but it is easy to obtain the correction term from the preceding formulas. For example, (4.16) is also such one.

More simpler formula may be deduced from (4.5).

Namely, deforming the integral of (4.5) by Green's theorem, it becomes the volume integral as

$$H(\theta) = \iiint_D \left[\left(1 + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \phi_0 + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi_0}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \right] dx dy dz, \quad (4.17)$$

for the thin ship,

$$H(\theta) = 2 \iint_{\bar{S}} \left[\left(1 + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi_0}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \right] \eta(x, z) dx dz, \quad (4.18)$$

and, for the slender ship,

$$H(\theta) = \int \left[\left(1 + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi_0}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \right] A(x) dx, \quad (4.19)$$

where $A(x)$ means the sectional area.

Comparing (4.18) with (4.9), the first term says that the doublet strength η in x direction is to be multiplied by $(1 + \partial \phi / \partial x)$, that is, the local velocity.

This permits us an intuitive understanding.

The effect of this term is well examined and it gives a good correction for the deep draft ship.³⁾⁸⁾

The last term in the integrand gives the correction to the induced vertical velocity component and its phase is different with the above.

It is already shown in the case of the submerged body that the contribution of this term is very large,⁹⁾ but such trial in the case of floating ships can hardly be seen.

5. Neumann Function¹⁰⁾

If there exists a Green function $N(P, Q)$ such that

$$\frac{\partial}{\partial n_Q} N(P, Q) = 0, \quad \text{on } S \text{ and } F \quad (5.1)$$

then all the velocity potentials may be written by their normal derivatives as

$$\phi(P) = - \iint_{S+F} \frac{\partial \phi}{\partial n}(Q) N(P, Q) dS_Q, \quad (5.2)$$

Such function as N is called a Neumann function.⁶⁾¹⁰⁾

Since the singularity of this function at the origin is the same as $S(P, Q)$, it may be represented as

$$N(P, Q) = S(P, Q) + A(P, Q), \quad (5.3)$$

with a regular function A .

Then, it must be by (5.1)

$$\frac{\partial}{\partial n_Q} A(P, Q) = -\frac{\partial}{\partial n_Q} S(P, Q) \quad \text{on } S \text{ and } F, \quad (5.4)$$

In the other hand, it may be assumed because of (3.2) that

$$N(Q, P) = N^*(P, Q), \quad A(Q, P) = A^*(P, Q), \quad (5.5)$$

and

$$\phi^*(P) = - \iint_{S+F} \frac{\partial \phi}{\partial n}(Q) N(Q, P) dS_Q, \quad (5.6)$$

where it is assumed that

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi^* = \frac{\partial}{\partial n} \phi, \quad (5.7)$$

Since A is assumed as regular in the domain and its boundary value is given by (5.4), it can be represented by the same Neumann function as

$$A(P, Q) = \iint_{S+F} \frac{\partial}{\partial n_R} S(P, R) N(R, Q) dS_R, \quad (5.8)$$

Thence, putting (2.4) and (2.5) into the above, it has next asymptotic expansions,

$$A(P, Q) \doteq \frac{1}{2\pi r_0^3} \sum_{j=1}^2 x_j \phi_j^*(Q), \quad \text{for } x \equiv x_F \gg x_R, \quad (5.9)$$

where $r_0^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$ and

$$\phi_j^*(Q) = \iint_{S+F} \frac{\partial x_j}{\partial n_R} N(R, Q) dS_R, \quad (5.10)$$

and

$$A(P, Q) \doteq \frac{ig}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \{ \phi_0(P, \theta) \overline{\phi_1^*(Q, \theta)} - \overline{\phi_0(P, \theta)} \phi_1^*(Q, \theta) \} \sec^2 \theta d\theta, \quad \text{for } x_F \ll x_R, \quad (5.11)$$

Hence, N is also written as

$$N(P, Q) \doteq \frac{1}{2\pi r_0^3} \sum_{j=1}^2 x_j \{ x_{j'} + \phi_j^*(Q) \}, \quad \text{for } x_F \gg x_R, \quad (5.12)$$

$$N(P, Q) \doteq \frac{ig}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\phi_0(P, \theta) \{\bar{\phi}_0(Q, \theta) + \bar{\phi}_d^*(Q, \theta)\} - \bar{\phi}_0(P, \theta) \{\phi_0(Q, \theta) + \phi_d^*(Q, \theta)\}] \sec^2 \theta d\theta, \quad \text{for } x_P \ll x_R, \quad (5.13)$$

Putting these into (5.2), the asymptotic character of the velocity potential can be easily deduced, namely,

$$\phi(P) \doteq -\frac{1}{2\pi r_0^3} \sum_{j=1}^2 x_j B_j \quad \text{for } x \gg 0, \quad (5.14)$$

where

$$B_j = - \iint_{S+F} \frac{\partial \phi}{\partial n} (x_j + \phi_j^*) dS, \quad (5.15)$$

and

$$\phi(P) \doteq \frac{g}{2\pi i} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \{\phi_0(P, \theta) \bar{H}(\theta) - \bar{\phi}_0(P, \theta) H(\theta)\} \sec^2 \theta d\theta, \quad \text{for } x \ll 0, \quad (5.16)$$

where

$$H(\theta) = - \iint_{S+F} \frac{\partial \phi}{\partial n} \{\phi_0(\theta) + \phi_d^*(\theta)\} dS, \quad (5.17)$$

which is the same but more general one as (4.3).

For the slender ship,

$$B_j \doteq - \iint_{S+F} \frac{\partial \phi}{\partial n} x_j ds, \quad (5.18)$$

and especially, if

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial n}$$

then

$$\left. \begin{array}{l} B_1 \doteq V: \text{ the displacement volume} \\ B_2 \doteq 0: \end{array} \right\} \quad (5.19)$$

and

$$\phi(P) \doteq \frac{(2V)}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_0} \right), \quad \text{for } x \gg 0, \quad (5.20)^{21}$$

6. Conclusion

The second order correction to the boundary value problem of the wave-resistance theory contains many difficulties.

In this paper the author tries to formulate its boundary value problem for a floating ship with respect to the ship surface condition as a limit of a submerged ship.

But there is no promise that the solution of this problem represents the water motion around an actual floating ship, or it seems preferable to consider as that there may be many potentials satisfying the under water ship surface condition except on the a cross line of ships water line with the mean water level surface.

Nextly, the velocity potential consists of two parts by introducing the reverse flow potential which has the same boundary condition as the above but leaves the wave system in the reverse direction, the one of which is the same as the one of the reverse flow but the other of which is different only in the sign.

Thus, the wave system of both potentials is the same except the phase.

Lastly, introducing the diffraction potential, that is a potential diffracting an elementary plane wave by the ship, the equivalent of Haskind-Hanaoka's relation in the oscillating motion can be deduced. Namely, Ketchin function or the amplitude function can be calculated by the knowledge of the diffraction potential. Moreover, there is also the equivalent of the energy integral in the oscillating motion and this gives the difference between two amplitude functions of the ordinary a reverse flow potential.

For this formula, it may be possible to estimate the out of phase component to the first approximation.

These important characters of the diffraction potential come from the fact that Neumann function of this boundary value problem can be represented asymptotically at infinity by the diffraction potential.

References

1. J. V. Wehausen; "International Seminar on Theoretical Wave-Resistance" vol. 2, Univ. of Michigan, (1963)
2. M. Bessho; J. Z. K. vol. 105, (1959)
3. " ; " vol. 106, (1960)
4. " ; " vol. 110, (1962)
5. T. Hanaoka; Proc. of 9-th Congress for Appl. Mech. Japan (1959)
6. R. Timman and J. N. Newman; J. of Ship Research, vol. 5, No. 4 (1962)
7. M. Bessho; Memoirs of the Defense Academy, vol. 4, No. 2 (1964)
8. M. Ikehata; J. Z. K. vol. 117 (1965)
9. M. Bessho; J. Z. K. vol. 109 (1961)
10. S. Bergman and M. Schiffer; "Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics" New York, (1953)
11. M. Bessho; Scientific and Engg. Reports of the Defense Academy (Japanese), vol. 3, No. 2 (1965)

“On the Two-Dimensional Theory of the Rolling Motion of Ships”

(To Prof. T. Itoh this paper is dedicated.)

By Masatoshi BESSHO*

(Received March 20, 1967)

Abstract

The author treats with the problem of the rolling motion of ships among waves in view of the two-dimensional theory of the water wave.

Firstly, he constructs the integral equations to determine the velocity potentials necessary to solve this problem and shows that the diffraction potentials can be deduced from other potentials. From this fact, Haskind-Hanaoka's relation with respect to the exciting forces of the wave can be understood easily.

Secondly, he solves the equation of motion and shows that the roll-exciting moment of the wave can be represented by making use of the coefficient like as the effective wave slope one in the classical theory but this coefficient is deduced from the concept other than in the classical theory.

Thirdly, he gives the approximate values of all necessary quantities when the wave length is very much larger than the ship breadth, and considers the possibility to make zero or reduce the roll-exciting moment, he touches the experimental methods to investigate this problem, especially Motora's method to measure the roll-exciting moment of the wave.

1. Introduction.

The classical theory of rolling motion of ships developed by Froude, Kryloff and Watanabe seems reliable in most cases at present [1]. It has, as the basis, a sound physical interpretation of that phenomena but its theory has a serious weak point in view of the recent theory of the water waves, and many authors attack this problem in this stand point but there remain some points to be elucidated more clearly as Ir. G. Vossers says in his lecture [14].

In these research works, F. Ursell finds out that there is two dimensional cylindrical section shape which emits no wave in the rolling oscillation about an axis [11, 17] and T. Hishida also independently states that there is an axis of any section shape the oscillation about which emits no wave [8, 9, 10].

In another respect, we have Haskind-Hanaoka's relation with regard to the wave-ex-

* Assistant Professor; Dept. of Mechanical Engineering, the Defense Academy.

citing force that it is proportional to the square root of the wave-damping [12, 15].

Hence, we arrive easily the idea that it may be possible to reduce the wave exciting moment and then the rolling oscillation by selecting a suitable center of the rolling motion. This possibility, however, can not realize successfully although in the heaving-dipping motion it does. [21, 22]. This is mainly because of the existence of the swaying oscillation.

Thus, we feel the necessity to verify the theory once more especially in its physical meaning and validity.

2. Velocity Potentials. [5, 25, 26, 28]

Consider the water motion around an infinitite cylinder floating on the water and

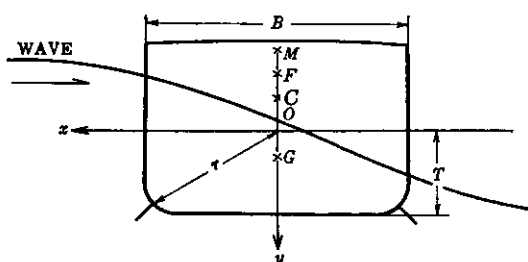


Fig. 1. Co-ordinate system.

assume that its cylinder is symmetric about its vertical center plane and stands for some section of a ship.

Taking the coordinate system as shown in Fig. 1, and assuming that all motions are periodic in time with circular frequency $\omega=2\pi/\tau$, τ is the period, we can introduce the velocity potential $\Phi(x, y, t)$ as

$$\Phi(x, y, t) = \text{Re}[\varphi(x, y)e^{i\omega t}] = \varphi_c \cos \omega t - \varphi_s \sin \omega t \quad (2.1)$$

where the suffix C and S stand for the real and imaginary part, the pressure $P(x, y, t)$ except the statical buoyancy equals, for the first approximation,

$$P(x, y, t) = \text{Re}[p(x, y)e^{i\omega t}] = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, y, t); \quad p(x, y) = i\omega \varphi(x, y), \quad (2.2)$$

and the surface dislocation downwards $\eta(x, t)$ is

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(x, t) = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, 0, t) \eta(x, t) = \text{Re} \left[\frac{\omega}{ig} \varphi(x, 0) e^{i\omega t} \right], \quad (2.3)$$

where g is the gravity constant.

The pressure must be constant on the water surface and this condition becomes for the velocity potential as follows:

$$K\varphi(x, 0) + \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, 0) = 0, \quad (2.4)$$

where

$$K = \omega^2/g.$$

Now, in the stand point of the linear theory, the whole velocity potential can be superposed of each velocity potential corresponding to all component motions.

Let the suffix stand for the related quantities of each component motion as follows:

- 0 the incident wave
- 1 the swaying motion (x)
- 2 the heaving-dipping motion (y)
- 3 the rolling motion about the origin
- 4 the diffraction of the incident wave
- 5 the rolling motion about the center of gravity and of course this is completely dependent with the motion 1 and 3.

The boundary condition of each velocity potential over the immersed cylinder surface C is

$$\frac{\partial}{\partial n} \varphi_j(x, y) = i\omega X_j \frac{\partial x_j}{\partial n}, \quad j=1, 2, 3, \quad (2.5)$$

where n is the outward normal of the curve C , X_j is the amplitude of the oscillation and, for the convenience, to be understood that it is also written as

$$X_1 \equiv X, X_2 \equiv Y, X_3 \equiv \theta, X_4 \equiv \theta, X_5 = Ka = \theta_w, \quad (2.6)$$

where a is the amplitude of the incident wave, and so θ_w is the maximum wave slope, and $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$ and x_3 is a harmonic function regular inside the cylinder and has the boundary value

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} x_3 = y \frac{\partial x}{\partial n} - x \frac{\partial y}{\partial n}, \\ \text{similarly } x_5 = x_3 - lx_1 = x_3 - lx \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

It is also convenient for the following treatment to normalize quantities, namely,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_j(x, y) &= i\omega X_j \phi_j(x, y), \quad j=1, 2, 3, 5, \\ \text{then } \frac{\partial}{\partial n} \phi_j(x, y) &= -\frac{\partial x_j}{\partial n}, \quad j=1, 2, 3, 5, \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

In these potentials, ϕ_3 is clearly given as $\phi_3 - l\phi_1$.

Similarly, being a the amplitude of the incident wave coming from the positive direction of the x -axis, we have

$$\varphi_0(x, y) = \frac{iga}{\omega} \phi_0(x, y), \quad \phi_0(x, y) = e^{-Ky + iKx} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} (\phi_0 + \phi_4) = 0 \quad (2.10)$$

Moreover, we can divide the incident wave into the stationary wave, that is,

$$\left. \begin{aligned} \phi_0 &= \phi_{0A} + i\phi_{0B} \\ \phi_{0A} &= e^{-Ky} \cos Kx, \phi_{0B} = e^{-Ky} \sin Kx, \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Accordingly, the diffraction potentials also can be done as

$$\phi_4 = \phi_{4A} + i\phi_{4B}, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(\phi_{4A} + \phi_{0A}) = \frac{\partial}{\partial n}(\phi_{4B} + \phi_{0B}) = 0, \quad (2.13)$$

Thus, considering the curve C symmetric, it is clear that

$$\left. \begin{aligned} \phi_j(x, y) &= -\phi_j(-x, y) \text{ for } j=1, 3, 5, 4B. \\ \phi_j(x, y) &= \phi_j(-x, y) \text{ for } j=2, 4A. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Meanwhile, all the velocity potentials having radiating waves can be represented as

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_c \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} G - \phi \frac{\partial}{\partial n} G \right) dS(x', y'), \quad (2.15)$$

where G is the unit sink potential and

$$G = G_c + iG_s$$

$$\left. \begin{aligned} G_c(x, y; x', y') &= \frac{1}{2} \log \left[\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{(x-x')^2 + (y+y')^2} \right] - 2P.V. \int_0^\infty \frac{e^{-K(y+y')} \cos k(x-x') dk}{k-K} \\ G_s &= 2\pi e^{-K(x-x')}, \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Since

$$G(x, y; x', y') \xrightarrow{K|x-x'| \gg 1} 2\pi i e^{-K(y+y') - iK|x-x'|} \quad (2.17)$$

then we have

$$\left. \begin{aligned} \phi \xrightarrow{Kx \gg 1} iH^+(K) e^{-Ky - iKx}, \\ \phi \xrightarrow{Kx \ll -1} iH^-(K) e^{-Ky + iKx}, \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

where

$$H^\pm(K) = \int_c \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-Ky \pm iKx} dS, \quad (2.19)$$

Moreover, since there is the relation (2.14), we have

$$\left. \begin{aligned} H_j^+(K) &= H_j^-(K) = \int_c \left(\frac{\partial}{\partial n} \phi_j - \phi_j \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-Ky} \cos Kx dS \\ &\quad \text{for } j=2, 4A. \\ H_j^+(K) &= -H_j^-(K) = i \int_c \left(\frac{\partial}{\partial n} \phi_j - \phi_j \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-Ky} \sin Kx dS, \\ &\quad \text{for } j=1, 3, 5, 4B. \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

We can write (2.15) as two formulas, that is, the real and imaginary part respectively, putting the boundary condition (2.8),

$$\left. \begin{aligned} \phi_{jc}(x, y) &= \frac{-1}{2\pi} \int_c \left(\frac{\partial}{\partial n} x_j + \phi_{jc} \frac{\partial}{\partial n} \right) G_c dS - e^{-Ky} \begin{pmatrix} \cos Kx \\ -i \sin Kx \end{pmatrix} H_{js}^+(K), \\ \phi_{js}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_c \left(-\phi_{js} \frac{\partial}{\partial n} \right) G_c dS + e^{-Ky} \begin{pmatrix} \cos Kx \\ -i \sin Kx \end{pmatrix} H_{jc}^+(K), \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

cosine term for $j=2$,
sine term for $j=1, 3, 5$,

where

$$\begin{aligned} H_{jc}^+ &= \int_c \left\{ \frac{\partial}{\partial n} (\phi_{jc}) - (\phi_{js}) \frac{\partial}{\partial n} \right\} e^{-Ky + iKx} dS, \\ H_{js}^+ &= \int_c \left\{ -\phi_{js} \frac{\partial}{\partial n} \right\} e^{-Ky + iKx} dS, \end{aligned} \quad (2.22)$$

Especially, for the diffraction potential, remembering (2.10) and (2.13), and since

$$\frac{1}{2\pi} \int_c \left(\frac{\partial}{\partial n} \phi_0 - \phi_0 \frac{\partial}{\partial n} \right) G dS = 0,$$

we have

$$\left. \begin{aligned} \phi_4 \\ \phi_{4A} \\ \phi_{4B} \end{aligned} \right\} = -\frac{1}{2\pi} \int_c \left\{ \begin{aligned} &(\phi_0 + \phi_4) \\ &(\phi_{0A} + \phi_{4A}) \\ &(\phi_{0B} + \phi_{4B}) \end{aligned} \right\} \frac{\partial}{\partial n} G dS, \quad (2.23)$$

and

$$H_4^+(K) = - \int_c (\phi_0 + \phi_4) \frac{\partial}{\partial n} e^{-Ky + iKx} dS, \quad (2.24)$$

Hence, similarly as the above, we can write down as

$$\left. \begin{aligned} \phi_{4AC}(x, y) \\ \phi_{4BC}(x, y) \end{aligned} \right\} &= -\frac{1}{2\pi} \int_c \left(\frac{\phi_{0A} + \phi_{4AC}}{\phi_{0B} + \phi_{4BC}} \right) \frac{\partial}{\partial n} G_c dS + e^{-Ky} \begin{pmatrix} -\cos Kx H_{4AS}^+ \\ i \sin Kx H_{4BS}^+ \end{pmatrix}, \\ \phi_{4AS}(x, y) \\ \phi_{4BS}(x, y) \end{aligned} \right\} &= -\frac{1}{2\pi} \int_c \left(\frac{\phi_{4AS}}{\phi_{4BS}} \right) \frac{\partial}{\partial n} G_c dS + e^{-Ky} \begin{pmatrix} \cos Kx H_{4AO}^+ \\ -i \sin Kx H_{4BO}^+ \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

All equations of (2.21) and (2.25) along the boundary C can be understood as the integral equations to determine the doublet strength ϕ on that boundary. Each pair of these are integral equations of Fredholm's second type, and might have unique solution. As easily seen, however, all of them are not independent with each other and there are the same functions as others except a constant multiplier. Thus, we can find

$$\phi_{1S}(x, y) H_{3O}^+(K) = \phi_{3S}(x, y) H_{1O}^+(K), \text{ on } C. \quad (2.26)$$

$$\left. \begin{aligned} (\phi_{0A} + \phi_{4AC})H_{4AC}^+ &= i\phi_{4AS}(1 + iH_{4AS}^+), \\ (\phi_{0B} + \phi_{4BC})H_{4BC}^+ &= i\phi_{4BS}(1 + iH_{4BS}^+), \end{aligned} \right\} \text{ on } C. \quad (2.27)$$

$$\phi_{4AS}H_{2C}^+ = \phi_{2S}H_{4AC}^+, \phi_{4BS}H_{1C}^+ = \phi_{1S}H_{4BC}^+, \text{ on } C, \quad (2.28)$$

These relations reduce very much the labour to solve the integral equations. For example, if we know ϕ_1 and ϕ_2 already, (2.27) and (2.28) show that we have a sufficient knowledge of the diffraction potential. Haskind-Hanaoka's formula is easily understood from this fact. In the form of H -function, these relations get to the following formulas

$$\frac{H_{1S}^+(K)}{H_{1C}^-(K)} = \frac{H_{3S}^+(K)}{H_{3C}^-(K)} = \frac{H_{5S}^+(K)}{H_{5C}^-(K)}, \quad (2.29)$$

$$\left. \begin{aligned} H_{4AS}^+ &= (H_{4AC}^+)^2 + (H_{4AS}^+)^2, \\ iH_{4BS}^+ &= (H_{4BC}^+)^2 + (H_{4BC}^+)^2, \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

$$\frac{H_{4AS}^+}{H_{4AC}^-} = \frac{H_{2S}^+}{H_{2C}^-}, \quad \frac{H_{4BS}^+}{H_{4BC}^-} = \frac{H_{1S}^+}{H_{1C}^-}, \quad (2.31)$$

3. Forces and Moments. [15, 25, 27, 28]

Let F_{ij} be the j -force or moment by the i -motion, then, by (2.2)

$$F_{ij} = -\rho \int_C p(x, y) \frac{\partial}{\partial n} x_j dS = -\rho i \omega \int_C \varphi(x, y) \frac{\partial}{\partial n} x_j dS,$$

in the normalized form,

$$f_{ij} = \frac{F_{ij}}{\rho \omega^2 X_j} = \int_C \phi_i \frac{\partial}{\partial n} x_j dS = - \int_C \phi_i \frac{\partial}{\partial n} \phi_j dS, \quad (3.1)$$

In the same way, the exciting force or moment E_j is represented as

$$e_j \equiv \frac{E_j}{\rho g a} = - \int_C (\phi_0 + \phi_4) \frac{\partial}{\partial n} \phi_j dS, \quad (3.2)$$

Then we can easily find the well-known relations by applying Green's theorem.

$$f_{ij} = f_{ji} \quad (3.3)$$

$$e_j = -H_j^+(K) \quad (3.4)$$

The latter is Haskind's formula and its generalized form to more general cases is derived by T. Hanaoka independently and he suggests the possibility to obtain the wave exciting force from the forced oscillation tests.

The imaginary part of (3.1), that is, the damping is also evaluated by Green's theorem, and

$$\text{Im} \{f_{ij}\} \equiv f_{ijs} = -H_i^+(K) \bar{H}_j^+(K), \quad (3.5)$$

Nextly, since the real part of (3.1) is the added mass term, we put it as follows for the simplicity;

$$\left. \begin{aligned} f_{11C} &= k_1(K) \mathcal{V}, & f_{22C} &= k_2(K) \mathcal{V}, \\ f_{31C} &= f_{13C} = k_1(K) l_1(K) \mathcal{V}, \\ f_{33C} &= k_1(K) \kappa_s^2(K) \mathcal{V}, \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

where $\mathcal{V}$ is the area of the cylinder.

Then, k_1 and k_2 are the added mass coefficients, κ_s is the radius of added inertia and l_1 is the distance from the origin to the center of the added mass for the swaying motion. Lastly, if we put

$$\left. \begin{aligned} e_3/e_1 &= H_3^+(K)/H_1^+(K) = l_w, \\ e_3/e_1 &= l_w - l, \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

we know by (2.29) that l_w is real, namely, the exciting motion of the incident wave is in phase with the exciting force in the x -direction. This is confirmed by the numerical calculation by K. Tamura [20].

From (3.5) and (3.7) we have for the damping the relations:

$$\left. \begin{aligned} f_{33S}/f_{13C} &= f_{13S}/f_{11S} = l_w, \\ f_{55S}/f_{15S} &= f_{15S}/f_{11S} = l_w - l, \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

which is also confirmed by the calculations [20].

All of these quantities for so-called Lewis forms are calculated by K. Tamura and F. Tasai so that we could solve the equation of the motion [18, 20].

However, it is convenient to show their approximate values for small K value, that is, when the wave length is much larger than the characteristic length of the cylinder in the present problem. In such case, the velocity potentials equal nearly of the limit case $K=0$, namely, when the water surface is assumed as rigid [8, 9, 11, 13].

Thus, the approximation for (3.6) is

$$\left. \begin{aligned} f_{11C} &\doteq k_1(0) \mathcal{V}, & f_{33C} &\doteq k_1(0) \kappa_s^2(0) \mathcal{V}, \\ f_{31C} &\doteq k_1(0) l_1(0) \mathcal{V}, \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Here, since $k_2(0)$ becomes usually infinite, it must be considered always as dependent on K .

For the wave exciting forces, expanding the exponential term of (2.19) and taking its first term, we have

$$H_1^+(K) \doteq iK \int_c \left(x \frac{\partial}{\partial n} \phi_1 - \phi_1 \frac{\partial x}{\partial n} \right) dS = -iKV(1+k_1), \quad (3.10)$$

$$H_2^+(K) \doteq \int_c \frac{\partial \phi_2}{\partial n} dS - K \int_c \left(y \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \phi_2 \frac{\partial y}{\partial n} \right) dS = K(1+k_2)V - B, \quad (3.11)$$

$$H_3^+(K) \doteq iK \int_c \left(x \frac{\partial \phi_3}{\partial n} - \phi_3 \frac{\partial x}{\partial n} \right) dS = -iKV(\overline{OM} + k_1 l_1), \quad (3.12)$$

where B is the breadth of the cylinder and $\overline{OM}$ is the distance between the origin O and the metacenter M measured as positive when M lies below the origin, that is,

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= -\frac{1}{V} \int_c x \frac{\partial \phi_3}{\partial n} dS = \frac{1}{V} \int_c \left(xy \frac{\partial x}{\partial n} - x^2 \frac{\partial y}{\partial n} \right) dS \\ &= \overline{OB} - \overline{BM}, \quad \overline{BM} = B^3/12, \end{aligned} \quad (3.13)$$

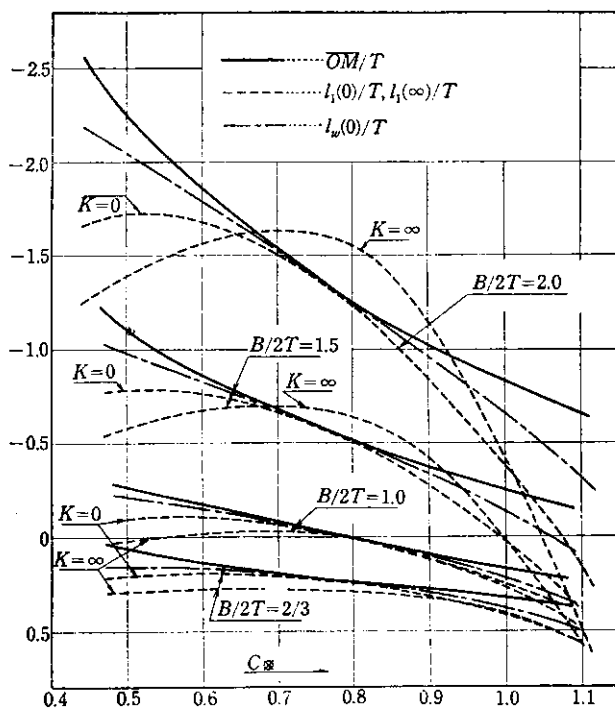


Fig. 2. Metacenter, center of added mass and point on which wave-exciting Force acts.

Since the statical inclining moment proportional to the displacement acts on the metacenter M , (3.10) and (3.12) show that the exciting force of the wave acts on the

point F which lies between M and the center of the added mass as shown in Fig. 1, where B means the center of buoyancy.

Making use of (3.10) and (3.12), (3.7) becomes

$$l_w \doteq (\overline{OM} + k_1 l_1) / (1 + k_1) , \quad (3.14)$$

Hence, for small K -value we know that:

i) The wave exciting force for x -direction, (3.10), does not vanish generally as far as the velocity potential is of single valued [24].

ii) The force for y -direction (3.11) vanishes when

$$B = K(1 + k_2) \nabla , \quad (3.15)$$

This is the fundamental idea followed by S. Motora [21].

iii) The moment about the origin, (3.12), vanishes when

$$\overline{OM} + k_1 l_1 = 0, \text{ or } l_w = 0 , \quad (3.16)$$

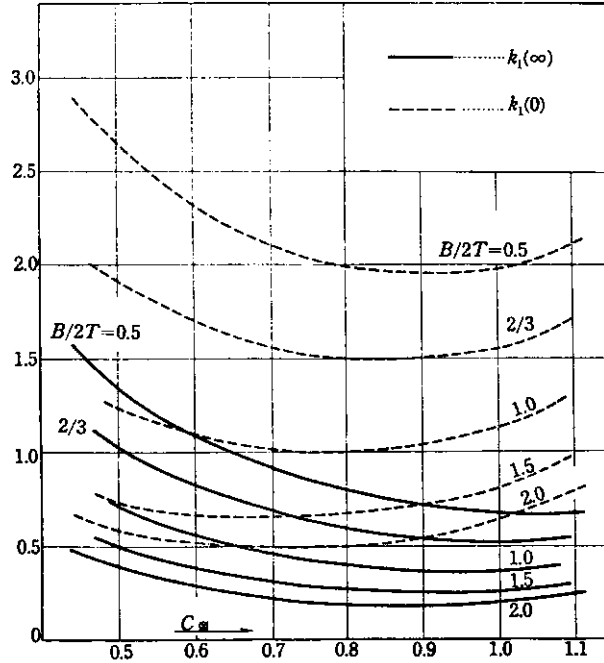


Fig. 3. Added mass coefficient.

Thus, Ursell's cylinder having no wave-damping is the section form which satisfy the relation (3.16).

iv) The exciting moment of the wave about the center of gravity vanishes by (3.7), when

$$l = l_w \doteq (\overline{OM} + k_1 l_1) / (1 + k_1) ,$$

Hence, there always exists such point as T. Hishida says, and Isshiki et al. reaffirmed this fact [9, 22].

In the same way as the above, we have the approximation for $K = \infty$ in the same form as (3.9) and, for the exciting force, since we can assume that the wave emitted from the one side can not go to the other side, considering the ship side is vertical near the water surface, we have by the formula of T. H. Havelock [4].

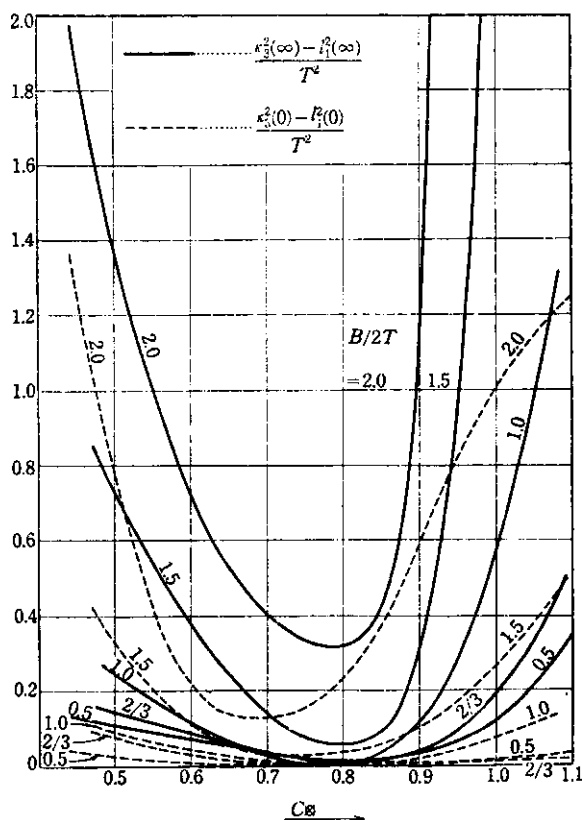


Fig. 4. Least Radius of gyration of added inertia.

$$H_1^+(K) \doteq 2 \int_0^\infty \frac{\partial \phi_1}{\partial x} e^{-Ky + \frac{iKB}{2}} dy \doteq -\frac{2}{K} e^{\frac{iKB}{2}} , \quad (3.17)$$

$$H_3^+(K) \doteq 2 \int_0^\infty \frac{\partial \phi_3}{\partial x} e^{-Ky + \frac{iKB}{2}} dy \doteq -\frac{2}{K^2} e^{\frac{iKB}{2}} , \quad (3.18)$$

Accordingly,

$$l_w = 1/K, \quad (3.19)$$

This value is an accurate approximation for large K compared with the calculated one by J. Kotik [16].

In Fig. 2, 3 and 4, these approximate values for Lewis form are shown [28].

4. The Equation of Motion. [2, 25, 28]

The equations of motion or more accurately, the balance equations of the linear forces and moments when the cylinder moves stationarily the harmonic motion among waves, are, except the time factor,

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\omega^2}{g}WX &= F_{11} + F_{15} + E_1, \\ -\frac{\omega^2}{g}WY - \rho g BY &= F_{22} + E_2, \\ -\frac{\omega^2}{g}I\theta + W\overline{GM}\theta &= F_{31} + F_{35} + E_3, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

where $W = \rho gV$, $I = W\kappa^2$ and κ is the radius of gyration.

Introducing the definition of the preceding paragraph, we can rewrite then as follows:

$$(V + f_{11})X + f_{15}\theta = \frac{a}{K}H_1^+(K), \quad (4.2)$$

$$\left(V\kappa^2 + f_{35} - \frac{V}{K}\overline{GM}\right)\theta + f_{15}X = \frac{a}{K}H_3^+(K), \quad (4.3)$$

$$\left(V + f_{22} - \frac{B}{K}\right)Y = \frac{a}{K}H_2^+(K), \quad (4.4)$$

Since we assume the symmetry of the cylinder, the heaving-dipping oscillation is independent on the other ones and the solution is

$$Y = \frac{aH_2^+(K)}{K(V + f_{22}) - B}, \quad (4.5)$$

If we put the approximation (3.11) into the above, we have

$$Y = a, \quad (4.6)$$

that is, the cylinder moves with the wave.

But, at the resonance, that is, when

$$KV(1 + f_{22c}) = KV(1 + k_2) = B, \quad (4.7)$$

we have from (3.5)

$$Y = ia/K\bar{H}_2^+(K), \quad (4.8)$$

thence, if the exciting force of the wave vanishes, comparing (4.7) with (3.15) we must conclude that the heaving amplitude becomes infinite at the resonance as far as we consider only the wave-damping.

This is a natural consequence of Haskind's formula in two dimensional problem which says that the wave-damping is proportional to the square of the exciting force. But, actually, there is another damping, say, the frictional and eddy one, so that we may expect to reduce the oscillation by reducing the exciting force.

On the other hand, the swaying and rolling oscillation are dependent with each other by the term f_{15} .

The solution is easily found as follows:

$$X/a = D_1/\Delta, \quad \theta/\theta_w = D_5/\Delta, \quad (4.9)$$

where

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{\mathcal{V}}{K} \left\{ \left(\chi^2 + k_1 \kappa_s^2 - \frac{\overline{GM}}{K} \right) - k_1(l_1 - l)(l_w - l) \right\} H_1^+(K), \\ D_5 &= \frac{\mathcal{V}}{K^2} \{ (1 + k_1)l_w - (l + k_1 l_1) \} H_1^+(K), \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

$$\left. \begin{aligned} Re\{\Delta\} &= \left\{ (1 + k_1) \left(\kappa^2 + k_1 \kappa_s^2 - \frac{\overline{GK}}{K} \right) - k_1^2(l_1 - l)^2 \right\}^2 \mathcal{V}^2, \\ -Im\{\Delta\} &= \left\{ \left(\kappa^2 + k_1 \kappa_s^2 - \frac{\overline{GM}}{K} \right) + (1 + k_1)(l - l_w)^2 - 2k_1(l_1 - l)(l_w - l) \right\} \mathcal{V} |H_1^+|^2, \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

$$k_1 \kappa_s^2 \mathcal{V} = f_{55C} = \{ \kappa_s^2 - l_1^2 + (l - l_1)^2 \} k_1 \mathcal{V}, \quad (4.12)$$

At the resonance, since there is the condition,

$$Re\{\Delta\} = 0 \quad (4.13)$$

we have from (4.11)

$$\Delta = \frac{K^4 |D_5|^2}{i(1 + k_1)}, \quad D_1 = -\frac{K k_1 (l_1 - l)}{(1 + k_1)} D_5, \quad (4.14)$$

Putting these into (4.9), we have

$$\left. \begin{aligned} \theta/\theta_w &= i(1 + k_1) \mathcal{V} / (K^4 \bar{D}_5), \\ X/a &= -i k_1 (l_1 - l) \mathcal{V} / (K^4 \bar{D}_5), \\ \theta/(KX) &= -(1 + k_1) / \{ K k_1 (l_1 - l) \}, \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

In another way, we have the exciting moment of the wave from the first and the

third equation of (4.1) as follows:

$$\frac{M}{\rho g \Delta \theta_w} = \frac{-iKD_s}{(1+k_1)V^2} = \frac{1}{iKV} \left(l_w - \frac{l+k_1 l_1}{1+k_1} \right) H_1^+(K), \quad (4.16)$$

Thus, we see in (4.14), (4.15) and (4.16) the same conclusion as in the heaving oscillation.

Moreover, if we introduce the coefficient of the effective wave-slope as usual as [1, 5, 6]

$$M/(\rho g V \theta_w) = \gamma \overline{GM}, \quad (4.17)$$

Comparing this with the above, it is given as

$$\gamma = \frac{i}{KGMV} \left(l_w - \frac{l+k_1 l_1}{1+k_1} \right) H_1^+(K), \quad (4.18)$$

When K is small, putting the approximation (3.10), (3.13) and (3.14), we have

$$\gamma \doteq 1 \quad (4.19)$$

This may be the correct conclusion of the present order of approximation [2] and this means that the exciting moment of the wave can not vanish in free rolling motion, although there exists always a point about which the exciting moment vanishes.

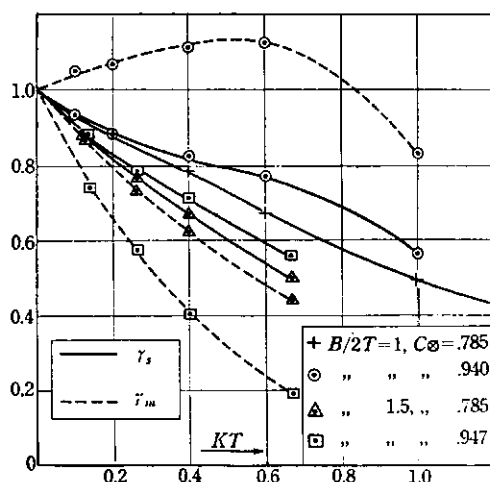


Fig. 5. Calculated examples of γ_s and γ_m .

This is because the reaction of the sway motion cancels out the exciting force of the wave as if there were no dynamical effect.

In the definition (4.18) of γ we can also divide it as

$$\gamma \overline{GM} = \gamma_s \overline{OG} - \gamma_m \overline{OM} = \gamma_s \overline{GM} - (\gamma_s - \gamma_m) \overline{OM}, \quad (4.20)$$

$$\gamma_s = iH_1^+(K)/\{K(1+k_1)V\}, \quad (4.21)$$

$$\gamma_m = \gamma_s \{(1+k_1)l_w - k_1 l_1\}, \quad (4.22)$$

Then, the effect of the center of gravity upon γ is confined itself on the first term of (4.20).

Some examples calculated from F. Tasai's tables are shown in Fig. 5. [18, 28].

Since we have, expanding the exponential term of H_i to the next,

$$\left. \begin{aligned} iH_1^+(K)/K &\doteq (1+k_1)\Delta - K \int_c \left(\phi_1 \frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial x}{\partial n} \right) xy dS, \\ iH_3^+(K)/K &\doteq (\overline{OM} + k_1 l_1)\Delta - K \int_c \left(\phi_3 \frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial x_3}{\partial n} \right) xy dS, \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

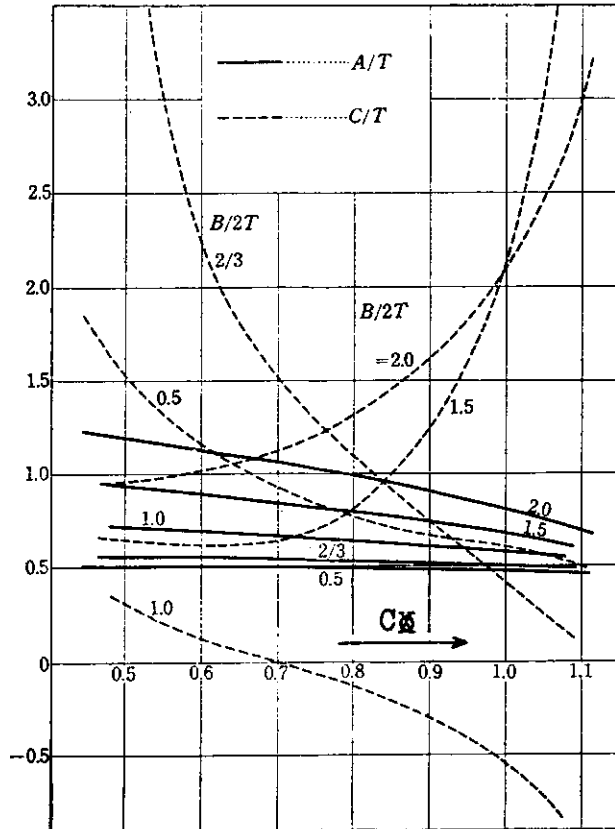


Fig. 6. Function A and C .

putting these into (4.21) and (4.22), we have the following approximation.

$$\gamma_s \doteq 1 - KA, \quad A = \frac{1}{(1+k_1)V} \int_c \left(\phi_1 \frac{\partial xy}{\partial n} + xy \frac{\partial x}{\partial n} \right) dS, \quad (4.24)$$

$$\gamma_m \doteq 1 - KC, \quad \overline{OMC} = -k_1 l_1 A + \int_c \left(\phi_s \frac{\partial xy}{\partial n} + xy \frac{\partial x_s}{\partial n} \right) dS, \quad (4.25)$$

where ϕ_1 and ϕ_s are considered as the limit potential of $K=0$.

Then A , C and approximate γ are easily calculated for Lewis form as shown in Fig. 6 and 7. Comparing these values with the exact values in Fig. 5, we can see that they are fairly good approximation for small K .

If we neglect ϕ_1 , ϕ_s and k_1 in (4.24) and (4.25), we have the classical theory by Froude-Kriloff-Watanabe and

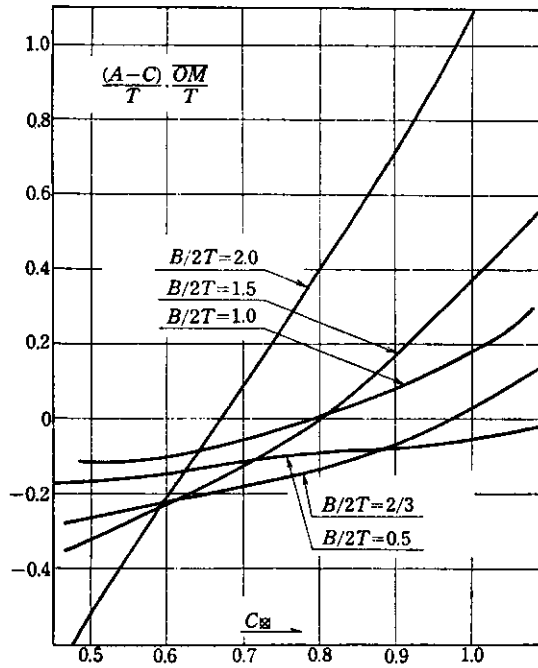


Fig. 7. Approximate value of $\overline{OM}(\gamma_m - \gamma_s) = K\overline{OM}(A - C)$.

$$\gamma' \overline{GM} = \gamma_s' \overline{OG} - \gamma_m' \overline{OM}, \quad (4.26)$$

$$\gamma_s' \doteq 1 - KA', \quad A' = \frac{1}{V} \int_c xy \frac{\partial x}{\partial n} dS = \overline{OB}, \quad (4.27)$$

$$\gamma_m' \doteq 1 - KC', \quad C' = -\frac{1}{\overline{OMV}} \iint (x^2 - y^2) dx dy, \quad (4.28)$$

These formulas are not exact theoretically, but they are analogous as (4.26) and (4.27). Hence, the present theory may not be so different with the classical one in this character.

Now, let us consider once more the problem to reduce γ to zero.

By (4.20), (4.21) and (4.22), at first,

$$\gamma = 0 \quad \text{for } \gamma_s = 0, \quad (4.29)$$

but this is not realistic because the sway-exciting force does not vanish in usual [24].

Secondly, putting (4.24) and (4.25) into (4.20) and considering that the added moment of inertia is very small in usual and K -value at the resonance is nearly

$$K \doteq \overline{GM}/\kappa^2, \quad (4.30)$$

we have

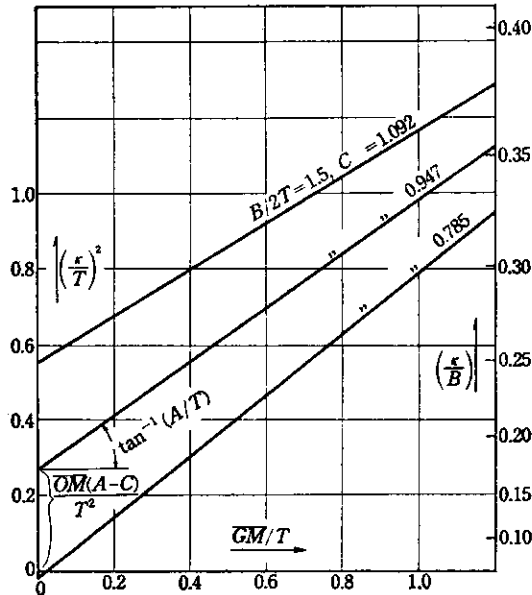


Fig. 8. Combination of the metacentric height and the radius of gyration which has no roll-exciting moment of wave.

$$\gamma \doteq 0 \quad \text{for } \kappa^2 \doteq \frac{GM}{K} \doteq A\overline{GM} - (C-A)\overline{OM}, \quad (4.31)$$

Thus, as shown in Fig. 8 for Lewis form, if we select a pair of $\overline{GM}$ and κ on the straight line, γ becomes nearly zero. However, such pair of values means generally a very short period of the resonance.

5. Experiments. [28]

Many authors have carried out the experiments with respect to the verification of the theory of waves and reports that the theory is very accurate and F. Tasai describes also that the rolling motion of a ship is predicted with fairly good approximation [19] but K. Tamura tells us that theoretical prediction of the rolling motion is not very good with the two-dimensional cylinder [20].

Now, the equations of free motion without the incident wave are from (4.2) and (4.3) except the heaving,

$$\left. \begin{aligned} (\nabla + f_{11})X + f_{15}\theta &= 0, \\ \left(\nabla \kappa^2 + f_{55} - \frac{\nabla \overline{GM}}{K} \right) \theta + f_{15}X &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Of course, they are not true equations of motion but merely linearized and neglected the external forces to keep the harmonic oscillation.

The first equation of them gives

$$X/\theta = -f_{15}/(\nabla + f_{11}) \doteq k_1(l-l_1)/(1+k_1), \quad (5.2)$$

neglecting the imaginary parts to be considered as small. This is the same as the third of (4.15), and that, putting this into the second equation of (5.1), we have

$$\overline{GM}/K \doteq \kappa^2 + f_{55}/\nabla - k_1^2(l-l_1)^2/(1+k_1), \quad (5.3)$$

which is the same as the resonance condition (4.13).

Thence, the free motion of the cylinder is similar as at the resonance among wave, and the energy loss of the cylinder in both conditions must be the same. Since the energy loss by the emitting wave per one swing is

$$\frac{\rho g K}{4} |\theta H_5^+ + X H_1^+|^2,$$

and the loss of the potential energy is

$$\rho g \nabla \overline{GM} \theta \Delta \theta,$$

where $\Delta \theta$ is the decrement of the inclining angle per one swing, equating above two loss and using (5.2) and (4.18), we have

$$\frac{\Delta \theta}{\theta} = \frac{\pi}{2} K^3 |\gamma|^2 \overline{GM} \nabla, \quad (5.4)$$

At first, this value for the usual K -value is very small, and it seems impossible to explain the damping of usual ships.

Secondly, it seems to contradict the fact that the upper the center of gravity the greater the roll-damping is [29].

Hence, in two-dimensional problem, the theory does not seem to be able to predict the actual motion as K. Tamura observes, but, in three dimension, it may success as Tasai does because the fore and aft end parts of a ships emit comparatively large wave as Hishida says [10]. In any way, since the wave damping is merely a part of the whole damping, it is more important to study the frictional or eddy damping in this respect. It is actually impossible to obtain the exciting force of the wave from the damping measurement although it is possible by Haskind's formula if there would be no viscosity.

Of course, here is yet a possibility by measuring the diverging wave amplitude of the cylinder forced the harmonic oscillation, but its measurement is very difficult [17, 22].

Hence, we may measure independently the exciting force of the wave.

S. Motora et al. proposed a method to measure the inclining moment M among waves restricting only the angular displacement [1].

The equations of motion in this case are

$$\left. \begin{aligned} (\bar{V} + f_{11})X &= \frac{a}{K} H_1^+(K), \\ f_{12}X &= \frac{a}{K} H_2^+(K) + \frac{M}{\rho g K}, \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

The swaying amplitude is given by the first equation as

$$\frac{X}{a} = \frac{H_1^+(K)}{K(\bar{V} + f_{11})}, \quad (5.6)$$

and, comparing with the definition (4.21), this is

$$\frac{X}{a} \doteq -i\gamma_s. \quad (5.7)$$

Putting (5.6) into the second equation, we have

$$\frac{M}{\rho g \bar{V} \theta_w} = - \frac{(1+k_1)H_1^+(K)}{(\bar{V} + f_{11})K} \left(l_w - \frac{l+k_1 l_1}{1+k_1} \right), \quad (5.8)$$

which equals (4.16) neglecting the imaginary part of f_{11} in the denominator.

This formula gives us the theoretical basis of Motora's test. Moreover, the formula (5.7) permits us to estimate the coefficient γ_s from the swaying amplitude and also γ_m by (4.20). These tests have been carried out successfully at Tokyo University and the present theory seems reliable at least up to this day [23].

In the experimental point of view, the present theory takes the so-called active resistance into account but its practical treatment is similar to the classical method as we see

except the physical explanation of the coefficient γ which is called the effective wave-slope one classically, because it is verified experimentally that the effect of sway oscillations does not serious for the rolling motion as a whole classically [7].

Namely, as explained in the preceding, it is more realistic to understand it as the reducing coefficient of the statical metacentric height, when a ship moves among waves receiving dynamical forces and the statical buoyancy from the water. Hence, we may call $\gamma\overline{GM}$ the dynamical metacentric height.

Another one of new points of view in this respect is of roll-reducing action of the bilge keel. Namely, it acts as an eddy-making damper and has no influence on the exciting force in the classical theory [1], but taking its added mass into account, it has also an effect to reduce it in the present theory, because the bilge keel with its added mass acts as if the cylinder has a fuller section coefficient than the true geometric one, and the fuller the section, the smaller γ is as seen in Fig. 7.

The experiments verify this fact [23].

6. Conclusion.

The theory of water wave of the two-dimensional oscillatory cylinder is one of the most advanced in this field, and explains successfully many experiments but the direct application of it to the rolling motion seems hopeless as K. Tamura's experiment because of the effect of the viscosity, especially the bilge keel, can not be neglected.

On the other hand, the classical Froude-Kryloff-Watanabe theory explains well the experimental result as a whole. Thence, in this paper, the author tries to abridge this gap in the one side and, in the other side, studies the problem to reduce the exciting moment of the wave, making use of Haskind-Hanaoka's relation.

The conclusions are as follows;

i). Some of all necessary velocity potentials are dependent with each other, especially, the diffraction potentials are all derived from other potentials.

From this fact Haskind's formula is easily understood.

The inclining moment and the swaying force of the wave excitation is in phase.

ii). When K is very small, this is usual in the rolling motion, the center C of the added mass for the swaying lies under the metacenter M but just on it in the elliptic section.

The lateral center of the wave-exciting force lies in the segment $\overline{CM}$ with the ratio 1: k_1 , k_1 is the added mass coefficient to the displacement volume, but the exciting moment of the wave in the free motion equals the statical one because the inertial reaction of the swaying cancels out the wave force corresponding to the added mass force acting on the point C .

iii). The wave-damping of the two-dimensional cylinder seems so small that the rolling motion cannot be explained theoretically in general.

iv). The inclining moment of the wave is represented in the form

$$M/\rho g \nabla \theta_w = \gamma \overline{GM}$$

as like as in the classical theory.

It seems convenient to divide it as

$$\gamma \overline{GM} = \gamma_s \overline{OG} - \gamma_m \overline{OM} = \gamma_s \overline{GM} + (\gamma_s - \gamma_m) \overline{OM},$$

because γ_s and γ_m are independent upon the center of gravity by this substitution.

Experimentally, these coefficients are measured by Motora's method.

v). There may be possibilities to make zero the rolling moment of the wave, but they seem difficult to realize for the practical case at the present stage of knowledge.

vi). The bilge keel has a function to reduce the exciting moment of the wave.

The recent experiments show that the present theory is moderately reliable.

We could a parallel analysis in the three dimensional case, but the problem is very difficult in the numerical analysis and in the point what it can not be assumed usually that the incident wave from any direction is much larger than the ship length. Of course, the strip method will be a possible way to solve the problem, and F. Tasai says that the theory fits well to the experiment. However, otherwise the effect of the viscosity were taken account into the theory, especially of the function of the bilge keel, it will be difficult to understand the motion of ships.

Lastly, the author thanks with his heart to Prof. Motora for his many kind and suggestful discussions through the present research.

References

- 1) S. Motora: "Mechanics of Ship Motion", Kyoritsu, Tokyo (1957).
- 2) J. J. Stoker: "Water Waves", Interscience, New York (1957).
- 3) J. V. Wehausen and E. V. Laitone: "Surface Waves", Handbuch der Physik Bd. 9, Springer, Berlin (1960).
- 4) T. H. Havelock: "Forced Surface-Waves on Water", Phil. Mag. S. 7, vol. 8 (1929).
- 5) Y. Watanabe: "On the Effective Wave Slope and the Motion of the Center of Gravity of a Ship when Rolling on Waves", J. Zosen Kyokai, vol. 49 (1932).
- 6) Y. Watanabe, "On the Properties of the Rolling of Ship on Waves", J. Zosen Kyokai, vol. 56 (1935).
- 7) K. Ueno: "Theory for Free Rolling of Ships", J. Zosen Kyokai, vol. 67 (1940).
- 8) T. Hishida: "A Study on the Wave-Making Resistance for the Rolling of Ships", J. Zosen Kyokai, vol. 86 (1954).
- 9) T. Hishida, "Do" Do vol. 86 (1954).

- 10) T. Hishida: "Do" Do vol. 87 (1955).
- 11) F. Ursell, "On the Rolling Motion of Cylinders in the Surface of Fluid", Q. J. Mech. and Applied Math. vol. 2, Pt. 3 (1949).
- 12) T. Hanaoka: "On the Reverse Flow Theorem Concerning Wave-Making Theory", Proc. 9-th Japan Congress for Appl. Mech. (1959).
- 13) O. Grim: "Die Hydrodynamischen Kräfte beim Rollversuch", Schiffstechnik Bd. 3 (1955/56).
- 14) Ir. G. Vossers: "Fundamentals of the Behaviour of Ships in Waves", I.S.P. vol. 7, No. 68 (1960).
- 15) J. N. Newman: "The Exciting Forces on Fixed Bodies in Waves", J. Ship Research, vol. 6, No. 3 (1962).
- 16) J. Kotik: "Damping and Inertia Coefficients for a Rolling or Swaying Vertical Strip", J.S.R. vol. 7 (1963).
- 17) W. C. McLeod and T. Hsieh: "Experiment Investigation of a Rolling Cylinder", Schiffstechnik Bd. 10, Nr. 53 (1963).
- 18) F. Tasai: "Hydrodynamic Force and Moment Produced by Swaying Oscillation of Cylinders on the Surface of a Fluid", J. Zosen Kyokai, vol. 110 (1961).
- 19) F. Tasai: "Ship Motions in Beam Seas", Rep. Res. Inst. for Applied Mech., Kyusyu Univ., vol. 8, No. 45 (1965).
- 20) K. Tamura: "The Calculation of Hydrodynamical Forces and Moments acting on the Two Dimensional Body", J. Seibu Zosen Kai, vol. 26 (1963).
- 21) S. Motora: "On Wave-Excitation Free Ship Forms", J. Zosen Kyakai, vol. 117 (1965).
- 22) H. Isshiki, H. Sasaki and T. Nishiwaki: "Some Considerations on Two-Dimensional Relation between Rolling Moment by wave and Damping Coefficient of Rolling Motion of a Ship", Graduation Thesis, Fac. Eng., Tokyo Univ. (1965)
- 23) H. Maeda: "The Relation between Two Dimensional Ship Forms and their Exciting Moments of Rolling", Master Thesis, Fac. Eng., Tokyo Univ. (1966).
- 24) M. Bessho: "On the Wave-Free Distribution in the Oscillation problem of the Ship", J. Zosen Kyokai, vol. 117 (1965).
- 25) M. Bessho: "On the Theory of Rolling Motion of Ships among Waves", Japanese Papers and Reports of the Defense Academy, vol. 3, No. 1 (1965).
- 26) M. Bessho: "On the Theory of Motions among Waves of a Ship having No Advance Speed," Do. vol. 3, No. 2 (1965).
- 27) M. Bessho: "On the Theory of Rolling Motion of Ships among Waves (The 2nd Report)", Do. vol. 3, No. 3 (1966).
- 28) M. E. Serat: "Effect of Form on Roll", T.S.N.A.M.E. (1933).

"On the Theory of Wave-Free Ship Forms"

(To Prof. Y. Ikeda this paper is dedicated.)

By Masatoshi BESSHO*

(Received March 20, 1967)

Abstract

There are ship forms having no radiating wave when they oscillate on the water surface, which are called wave-free. If a ship is wave-free, then it has no wave-damping so that it may be unfavourable to the practical application but, on the other hand, it receives no exciting force of the incident wave by Haskind-Hanaoka's relation. The latter character is very much interesting with the application to the theory of ship motions among waves.

The author develops the various methods to obtain such wave-free ship forms. In the two-dimensional case, there are wave-free sections for the heaving-dipping and rolling oscillations but not for the swaying. In the three-dimensional case, the conclusion is not only almost the same, but there are many interesting cases.

1. Introduction

The water waves produced by a ship are almost always unfavourable phenomena for the naval architects. In this point of view, the problem is of variation rather than of boundary value, and at the beginning of the 20-th century Lord Kelvin¹⁾ shew examples of a wave-less pontoon which has no canal wave by the interference and just after him Prof. Yokota²⁾ proposed the possibility of the wave-less, rolling-less, pitching-less and heaving-less ship.

Since then, after about a half century, Prof. Inui³⁾ had a success in the realization of a wave-less ship although it is not wave-less in the mathematical sense. His success encourages us to research this idea in another problems.

For this aim, it will be most effective to study the property of the wave-free potential, because the velocity potential consists of two parts, that is, it and the wave-source one.

Namely, at first, does there exist the wave-free potential which describes a motion around an actual ship-like body? Secondly, does the wave correspond to the body producing it in one-to-one manner?

* Assistant Professor; Dept. of Mechanical Engineering, the Defense Academy.

The answers are affirmative for the problem of the uniform motion except the first question in three dimension and this theory seems very useful to the practical application, especially methodologically⁴⁾.

The present note deals with the problem of the oscillation of ships with no advance speed.⁵⁾ In this case, what there is no wave means that there is no wave-damping, so that it may be not preferable in this respect but do in the sense that the exciting force of the on-coming wave vanishes if the radiating wave by the motion in the direction of that force vanishes. The last relation is a corollary of Haskind-Hanaoka's theorem⁶⁾⁷⁾⁸⁾, which is easily understood from the asymptotic character of Neumann function described in the Appendix.

2. Wave-Free Potential¹⁰⁾¹¹⁾

Let us consider a Cartesian co-ordinate, taking the origin on the mean water surface and at the center of the body, x -axis vertically upwards and x -axis length-wise forwards. Assume the water motion as a harmonic oscillation by the same motion of the body with circular frequency $\omega=2\pi/T$. Then its wave number K is ω^2/g .

Let the real part of $\phi e^{i\omega t}$ its velocity potential, then ϕ must satisfy the water surface condition⁹⁾:

$$K\phi(x, y, 0) - \frac{\partial}{\partial z} \phi(x, y, 0) = 0, \quad (2.1)$$

Now, if ϕ is deduced from the function m by the operation as follows;

$$\phi = Km + \frac{\partial}{\partial z} m, \quad (2.2)$$

then the surface condition (2.1) for m gets to

$$K^2 m - \frac{\partial^2}{\partial z^2} m = 0, \quad \text{for } z=0, \quad (2.3)$$

Hence, if m has a symmetry:

$$m(x, y, z) = -m(x, y, -z), \quad (2.4)$$

and has no wave, ϕ of (2.2) satisfies the water surface condition and clearly has no wave⁹⁾.

For example, suppose simple functions as m

$$m = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (2.5)$$

$$m = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}, \quad \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}, \\ r_2 &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

and consider a heaving oscillation.

Since the motion has an axial symmetry, the body profile may be calculated by making use of Stokes' stream function.

Let it be ϕ , then in the present case

$$\phi = \frac{\sin^2 \theta}{r} + \frac{3}{Kr^2} \sin^2 \theta \cos \theta, \quad \text{for (2.5),} \quad (2.7)$$

$$\phi = r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{1}{r_{13}} - \frac{1}{r_{23}} \right) + K \left(\frac{z+h}{r_1} - \frac{z-h}{r_2} \right), \quad \text{for (2.6),} \quad (2.8)$$

where $z = -r \cos \theta$,

and at the body surface

$$\phi = \frac{r^2}{2} \sin^2 \theta, \quad (2.9)$$

The body profiles can easily be calculated and are shown in Fig. 1 and 2 with dotted lines.

The same procedure can be applied more easily for the two-dimensional case and that the complex velocity potential can be used in this wave-free case because all the motion has the same phase.

Now, let $f(t)$, $t = y + iz$, be the complex velocity potential as

$$f(t) = \phi(y, z) + i\psi(y, z), \quad (2.10)$$

then the surface condition becomes

$$\operatorname{Re} \left\{ Kf - i \frac{d}{dt} f \right\} = 0, \quad \text{for } z=0, \quad (2.11)$$

and if there is a regular function $m(t)$ such that

$$\operatorname{Re}\{m(t)\} = 0, \quad \text{for } z=0, \quad (2.12)$$

the function f computed as

$$f(t) = Km(t) + i \frac{d}{dt} m(t), \quad (2.13)$$

is wave-free.

Some of the simplest examples are

$$m(t) = i/t^n, \quad f(t) = \frac{iK}{t^n} - \frac{n}{t^{n+1}}, \quad (2.14)$$

$$m(t) = \log \left(\frac{t+ih}{t-ih} \right), \quad f(t) = \frac{1}{t+ih} - \frac{1}{t-ih} + K \log \left(\frac{t+ih}{t-ih} \right), \quad (2.15)$$

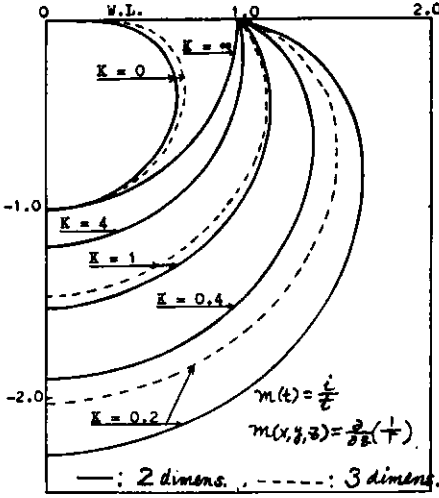


Fig. 1. Heaving oscillation

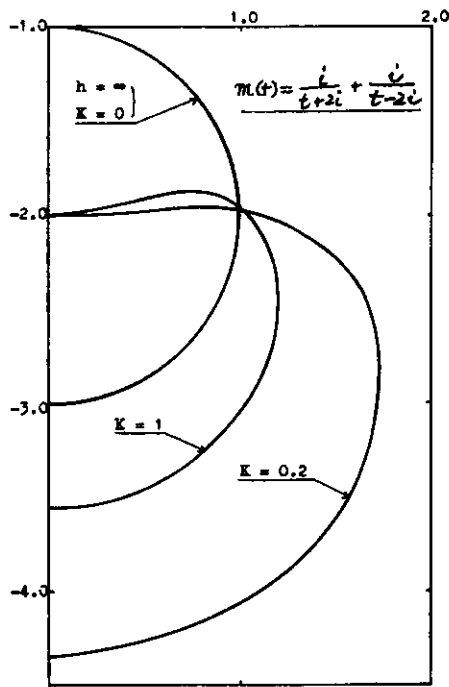


Fig. 2. Heaving oscillation

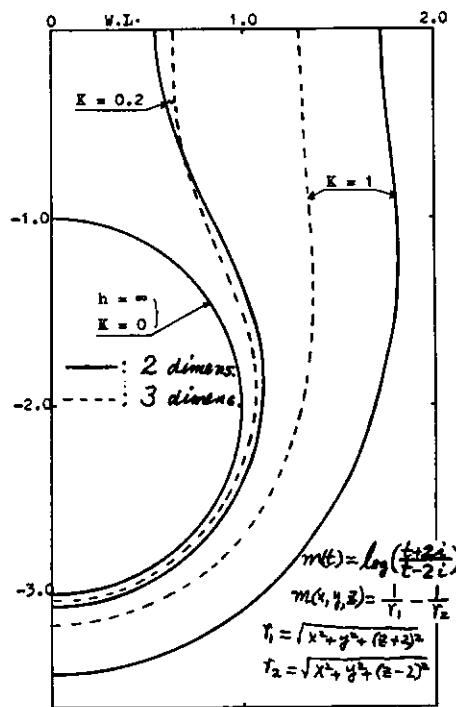


Fig. 3. Heaving oscillation

$$\left. \begin{aligned} m(t) &= \frac{A}{(t+ih)^n} - \frac{\bar{A}}{(t-ih)^n}, \\ f(t) &= \frac{KA}{(t+ih)^n} - \frac{K\bar{A}}{(t-ih)^n} - \frac{niA}{(t+ih)^{n+1}} + \frac{ni\bar{A}}{(t-ih)^{n+1}}, \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Since the boundary condition for the heaving motion is

$$\phi = -y, \quad (2.17)$$

solving the equation, the wave-free body profile can be obtained as shown in Fig. 1~3.

In general, let us imagine a half-immersed cylinder and N -points on it except on the water surface and take up N -wave-free functions such as (2.14). Then, (2.18) gives the equations to determine the potential and they may not always be singular or may have a unique solution. This means that the motion of any cylinder may be represented by wave-free potentials except near the water surface. By the same procedure, we may have wave-free ship-like form in the case of the rolling motion, but not of the swaying motion. However, their cases may be more interesting to study by another treatment succeeding.

3. Pressure Distribution

Let us consider the swaying oscillation of an infinitely long and shallow cylindrical vessel floating on the water surface⁽⁹⁾⁽¹²⁾.

The boundary condition may be written as

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi(y, 0) = -\frac{\partial}{\partial y} \phi(y, 0) = -\frac{\partial}{\partial y} \zeta(y), \quad \text{for } |y| \leq 1, \quad (3.1)$$

where $\zeta(y)$ means the offset of the cylinder, or integrating it,

$$\phi(y, 0) = \zeta(y), \quad \text{for } |y| \leq 1, \quad (3.2)$$

In this case, the function satisfying the condition (2.12) can be represented as

$$m(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\sigma(y')}{t-y'} dy', \quad (3.3)$$

where σ is a real function.

Then, the wave-free potential f becomes

$$f(t) = \frac{K}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\sigma(y')}{t-y'} dy' - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma(y') dy'}{(t-y')^2}. \quad (3.4)$$

Moreover, the linearized pressure $p(y, z)$ defined as

$$\frac{i\omega}{\rho g} p(y, z) = -K\phi + \frac{\partial}{\partial z} \phi \equiv P(y, z), \quad (3.5)$$

is given as

$$P(y, z) = \operatorname{Re} \left\{ K^2 m(t) + \frac{d^2}{dt^2} m(t) \right\}, \quad (3.6)$$

and especially

$$P(y, 0) = K^2 \sigma(y) + \frac{d^2}{dy^2} \sigma(y), \quad (3.7)$$

where the boundary values are assumed as

$$\sigma(\pm 1) = \frac{d}{dy} \sigma(\pm 1) = 0, \quad (3.8)$$

The offset of the cylinder is given by (3.2) as

$$\zeta(y) = \frac{K}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma(y') dy'}{y' - y} + \frac{d}{dy} \sigma(y). \quad (3.9)$$

Integrating (3.9) and putting the boundary condition (3.8), we have

$$\int_{-1}^1 \zeta(y) dy = \frac{K}{\pi} \int_{-1}^1 \sigma(y) \log \left| \frac{1+y}{1-y} \right| dy, \quad (3.10)$$

Then, if σ is an even function, this integral vanishes, and even if it does not, since K -value may be very small in the practical case, the displacement volume of the cylinder is very small.

For example, putting $y = -\cos \theta$ and

$$\sigma(y) = \frac{\sin(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\theta}{n+1}, \quad n \geq 2 \quad (3.11)$$

the offset becomes

$$\zeta(y) = \sin n\theta + K \left\{ \frac{\cos(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} \right\}, \quad (3.12)$$

These curves are not so like as any section of ships clearly.

Lastly, it is very interesting to remember the wave-free potential of the uniform motion with constant unit speed.

In that case, the water surface condition is

$$\operatorname{Im} \left\{ Kf - i \frac{d}{dt} f \right\} = 0, \quad \text{for } z=0 \quad (3.13)$$

and the wave-free potential is given, by the same function $m(t)$ as (2.12), in a manner that

$$f(t) = i \left\{ Km(t) + i \frac{d}{dt} m(t) \right\}, \quad (3.14)$$

Then, the surface form becomes

$$\phi(y, 0) = \text{Re} \left\{ K m + i \frac{d}{dt} m \right\}, \quad (3.15)$$

and the pressure

$$p(y)/\rho = \text{Re} \left\{ K^2 m + \frac{d^2}{dt^2} m \right\}, \quad (3.16)$$

Comparing (3.13), (3.14), (3.15), (3.16) with (2.11), (2.13), (3.9), (3.6) respectively, if the same function $m(t)$ is taken up in both cases, it is easily found that the pressure becomes the same and the complex potential is conjugate with each other.⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾

4. Long Wave Approximation⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾⁽²¹⁾

In two dimensional problem, the wave-length very much longer than the body dimension usually, that is, K is very small. When K is very small, the velocity potential near the body surface can be approximated by the one such that

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi(y, 0) = 0, \quad (4.1)$$

that is the potential assuming the water surface as a rigid surface.

On the other hand, since the wave height is given as (A.25), expanding its exponential term, $H^+(K)$ will be nearly

$$H^+(K) \doteq \alpha + K\beta + O(K^2), \quad (4.2)$$

where

$$\alpha = \int_s \frac{\partial}{\partial n} \phi ds, \quad (4.3)$$

$$\beta = \int_s \left(\frac{\partial}{\partial n} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial n} \right) (z + iy) ds. \quad (4.4)$$

Firstly, let us consider the heaving motion. The boundary condition is

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = - \frac{\partial z}{\partial n}, \quad (4.5)$$

Then, α and β is easily found to be

$$\alpha = - \int_s \frac{\partial z}{\partial n} ds = B, \quad (4.6)$$

where B means the breadth of the cylinder at the water line.

$$\beta = - \int_C (z + \phi) \frac{\partial z}{\partial n} ds = -(1 + k_z)A, \quad (4.7)$$

where A means the displaced area and k_z the added mass coefficient of the cylinder, and also the symmetry of the curve C is assumed throughout this paper.

Collecting these results, H^+ becomes

$$H^+(K) \doteq B - K(1 + k_z)A, \quad (4.8)$$

Hence, the wave-free condition is

$$B \doteq K(1 + k_z)A, \quad (4.9)$$

Here, it must be remembered that k_z is logarithmically infinite for $K \rightarrow 0$,¹⁵⁾ so that its value may be taken for a given K -value.

Motora²²⁾ obtained nearly the same conclusion as this, considering the integral (A.25) more physically,²¹⁾ and one of his wave-free cylinder is very much like the one shown in Fig. 2.

Secondly, let us consider the swaying motion. The boundary condition is

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = - \frac{\partial y}{\partial n}, \quad (4.10)$$

and

$$\alpha = - \int_C \frac{\partial y}{\partial n} ds = 0, \quad (4.11)$$

$$\beta = -i \int_C (y + \phi) \frac{\partial y}{\partial n} ds = -i(1 + k_y)A, \quad (4.12)$$

where k_y means the added mass coefficient for the swaying.

Namely,

$$H^+(K) \doteq -iK(1 + k_y)A, \quad (4.13)$$

and the swaying motion can not be wave-free to this order of the approximation.

Lastly, for the rolling motion, the boundary condition is to be

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi = y \frac{\partial z}{\partial n} - z \frac{\partial y}{\partial n}, \quad (4.14)$$

Then,

$$\alpha = 0, \quad (4.15)$$

$$\beta = -iA(\overrightarrow{OM} + k_r \overrightarrow{OC}), \quad (4.16)$$

where M means the metacenter and C the center of the added mass, that is,

$$\vec{OMA} = (\vec{OB} - \vec{MB})A = \int_c y \left(z \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial z}{\partial n} \right) ds, \quad (4.17)$$

$$k_v \vec{OCA} = \int_c \phi_1 \left(z \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial z}{\partial n} \right) ds, \quad (4.18)$$

where ϕ_1 is the potential of the swaying.¹⁸⁾²⁰⁾

Namely, for the rolling motion,

$$H^+(K) \doteq -iKA(\vec{OM} + k_v \vec{OC}), \quad (4.19)$$

so that the wave-free condition may be

$$\vec{OM}/\vec{OC} = -k_v, \quad (4.20)$$

which means that each of the metacenter and the center of the added mass lies at the other side of the origin with the ratio k_v .

Ursell¹⁵⁾ found one of such cylinder, but Hishida¹⁷⁾ found that there is always a point around which the rolling motion has no wave.

In fact, since H^+ function of such motion about a point P can be given as

$$H^+(K) \doteq -iKA[(\vec{OM} + k_v \vec{OC}) + \vec{OP}(1 + k_v)] \quad (4.21)$$

the wave-free condition is

$$\vec{OP} = -\frac{\vec{OM} + k_v \vec{OC}}{(1 + k_v)}, \quad (4.22)$$

then such point will be always found.²³⁾

5. Slender Thin Ship

In the three dimensional problem, the analysis becomes complicated and also it is not always the case that the wave length is very large compared with the ship dimension. Thus, we confine ourselves with the so-called slender thin ship. In this type, we mean the ship which is represented by the singularity distribution over the $x-z$ plane. Let us consider any singularity distribution $\mu(x, z)$ over this plane. Then, the wave produced will be given by a constant multiple of the function:

$$H(K, \theta) = \int_{-1}^1 \int_{-d}^0 \mu(x, z) e^{Kz + iKx \cos \theta} dx dz, \quad (5.1)$$

Hence, introducing an auxiliary function $\sigma(x, z)$ as

$$\mu(x, z) = \frac{d}{dz} \sigma(x, z) + K \sigma(x, z), \quad (5.2)$$

with the boundary condition

$$\sigma(x, -d) = 0, \quad (5.3)$$

and putting this into the above and integrating by parts, we have

$$H(K, \theta) = \int_{-1}^1 \sigma(x, 0) e^{iKx \cos \theta} dx, \quad (5.4)$$

This is the same form as of the slender ship theory,²⁴⁾ the difference is that $\sigma=0$ does not mean the zero-displacement, although the wave-free condition is

$$\sigma(x, 0) = 0. \quad (5.5)$$

For example, let

$$\sigma(x, z) = -m(x)z(z+d), \quad (5.6)$$

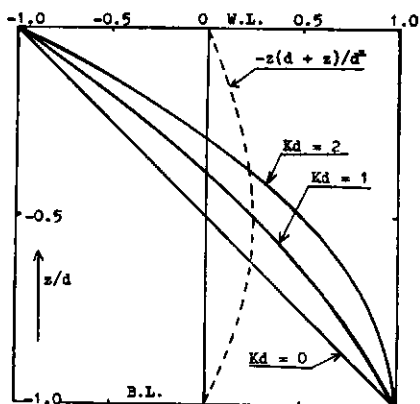


Fig. 4. Draftwise distribution of wave-free singularity

with an arbitrary function $m(x)$, then $\mu(x, z)$ may be calculated as shown in Fig. 4. From these figures, we may easily imagine that the section forms of the ship may be very similar as the forms of Fig. 1 and 2.

Now, the wave-free ship form has no wave-damping obviously, for there is no energy dissipation by the wave. Namely, there is neither wave-exciting force nor the wave-damping, so that the free motion among the wave with no viscosity is indefinite and in fact divergent because the motion is proportional to the exciting force over the damping, but the damping is the square of that force.

Here is a question whether it may be possible to make zero the exciting force but not the damping. This is easily answered by putting.

$$\sigma(x, 0) = \frac{d^2}{dx^2} a(x) + K^2 \cos^2 \alpha a(x), \quad (5.7)$$

with

$$a(\pm 1) = \frac{d}{dx} a(\pm 1) = 0, \quad (5.8)$$

because, putting these into (5.4) and integrating by parts, we have

$$H(K, \alpha) = 0, \quad \text{but } H(K, \theta) \neq 0 \quad \text{for } \theta \neq \alpha \text{ or } \alpha + \pi, \quad (5.9)$$

and this means that the exciting force by the wave coming from the direction α is zero but the damping is not.

For example, taking the slender ship approximation,²⁴⁾ let us consider

$$\sigma(x, 0) \doteq A(x), \quad (5.10)$$

for the heaving motion, where $A(x)$ means the sectional area curve, and

$$\sigma(x, 0) \doteq xA(x), \quad (5.11)$$

for the pitching motion.

Let us consider as $\alpha = 0$ and also for the simplicity put

$$a(x) = (1 - x^2)^2, \quad \text{for the heaving,} \quad (5.12)$$

$$a(x) = x(1 - x^2)^2, \quad \text{for the pitching.} \quad (5.13)$$

After the operation of (5.7), we have the sectional area curve as shown in Fig. 5.

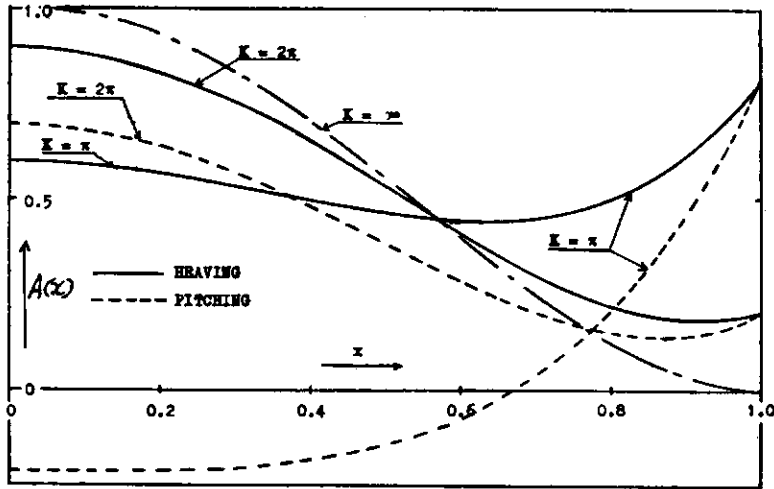


Fig. 5. Sectional area curve

As seen from the figures and the formula (5.7), these sectional area curve are the same as those of the uniform motion with the constant speed for which the transverse wave vanishes, if both wave-length is the same.⁴⁾¹⁸⁾

6. Summary

There are ship forms having no radiating wave when they oscillate without advance

speed. Then they receive no exciting force from the incident wave by Haskind-Hanaoka's formula.

To obtain such ship forms, there are following four ways:

- i) To deduce from the wave-free potential introduced by the use of the adjoint differential operator of the water surface condition.
- ii) To obtain the wave-free condition by the approximate wave-height formula when the wave-length is very large.
- iii) To consider the wave-free singularity distribution, for example, about the slender thin ship.
- iv) To cancell out the waves by their interference. This is not explained in the paper, but it will be obvious.

Thence, the two-dimensional wave-free ship form

- i) exists for the heaving motion and has large bulges,
- ii) practically does not exist for the swaying motion,
- iii) exists for the rolling motion (rotatory oscillation about an axis) but we can say more precisely that there exists always a point the motion about which produces no wave. Such ship forms does not experience the wave-exciting force but also has not the wave-damping, so that the motion among the wave may become very large.

In the three dimensional problem, the result may be like the above, which is confirmed principally by the slender thin ship theory. In this case, however, there is another type of the wave-free ship form which produces no wave in one direction but does not other direction so that the wave-damping may not vanish.

The ship motion among waves may be estimated fairly precisely by the present knowledge of the theory, but the dependence of the motion upon the ship form is not always sufficient because of the various difficulties. In this circumstances, such study as developed here may be a method to attack these difficulties.

Acknowledgement:

The author wishes to thank Prof. Motora who advised him to study this problem and gave him all kinds of help. Prof. Motora had a like idea independently and verified it experimentally.²²⁾

Appendix: Green Function and Haskind-Hanaoka's Formula.

Unit source potentials, call it fundamental singularities, are

$$4\pi S^{(3)}(P, Q) = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \lim_{\mu \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k e^{-k(z+z') + ik(x-x')\cos\theta + ik(y-y')\sin\theta}}{k - K + \mu i} dk, \quad (\text{A.1})$$

$$2\pi S^{(2)}(P, Q) = \log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + 2 \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_0^\infty \frac{e^{-k(z+z')} \cos(y-y')}{k-K+\mu i} dk, \quad (\text{A.2})$$

where

$$P \equiv (x, y, z) \text{ or } (y, z), \quad Q \equiv (x', y', z') \text{ or } (y', z'), \\ r_1 = \overline{PQ}, \quad r_2 = \overline{P\bar{Q}}, \quad \bar{Q} \equiv (x', y', -z') \text{ or } (y', -z').$$

and the subscript (2) or (3) on the shoulder of S means that it stands for the two- or three-dimensional one respectively.

Necessary Green functions to solve the present problems, Neumann functions, are such that

$$N(P, Q) = S(P, Q) + A(P, Q), \quad (\text{A.3})$$

where $A(P, Q)$ is regular in the water, and

$$\frac{\partial}{\partial n} N(P, Q) = 0 \text{ or } \frac{\partial}{\partial n} (S + A) = 0, \text{ on } C, \quad (\text{A.4})$$

where n means the outward normal of the wetted boundary C of the body. Moreover, since

$$S(P, Q) = S(Q, P), \quad (\text{A.5})$$

it will be also assumed that

$$N(P, Q) = N(Q, P), \quad (\text{A.6})$$

By this Neumann function the potential $\phi(P)$ regular in the water can be represented as follows:

$$\phi(P) = - \int_C \frac{\partial \phi}{\partial n_Q} N(P, Q) ds_Q, \quad (\text{A.7})$$

Especially, $A(P, Q)$ of (A.3) may be

$$A(P, R) = \int_C \left\{ \frac{\partial}{\partial n_Q} S(P, Q) \right\} N(Q, R) ds_Q, \quad (\text{A.8})$$

If the point P lies infinitely far from the body but near the water surface, since $S(P, Q)$ becomes approximately

$$S^{(2)}(P, Q) \rightarrow -ie^{-K(z+z')} - iK|y-y'|, \quad (\text{A.9})$$

$$S^{(3)}(P, Q) \rightarrow \sqrt{\frac{K}{2\pi i \tilde{\omega}}} \exp\{-K(z+z') - iK\tilde{\omega} + iK(x' \cos \theta + y' \sin \theta)\} \quad (\text{A.10})$$

where

$$\tilde{\omega}^2 = x^2 + y^2, \quad x = \tilde{\omega} \cos \theta \quad \text{and} \quad y = \tilde{\omega} \sin \theta,$$

$A(P, R)$ will become

$$A^{(2)}(P, R) \rightarrow -ie^{-Kz \pm iKy} \phi_d^{\pm}(R), \quad \text{for } y \geq 0, \quad (\text{A.11})$$

where

$$\phi_d^{\pm}(y, z) = \int_c \left\{ \frac{\partial}{\partial n_Q} e^{-Kz' \pm iKy'} \right\} N(P, Q) ds_Q, \quad (\text{A.12})$$

and

$$A^{(3)}(P, R) \rightarrow \sqrt{\frac{K}{2\pi i \tilde{\omega}}} \exp\{-Kz - iK\tilde{\omega}\} \phi_d(R, \theta), \quad (\text{A.13})$$

where

$$\phi_d(x, y, z; \theta) = \int_c \left\{ \frac{\partial}{\partial n_Q} e^{-Kz' + iK(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} \right\} N(P, Q) ds_Q, \quad (\text{A.14})$$

From the property of Neumann function, it is clear that

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi_d = -\frac{\partial}{\partial n} \phi_0, \quad (\text{A.15})$$

where

$$\phi_0^{\pm}(P) = e^{-Kz \pm iKy}, \quad (\text{A.16})$$

$$\phi_0(P; \theta) = e^{-Kz + iK(x \cos \theta + y \sin \theta)} \quad (\text{A.17})$$

Since $\exp.(-Kz \pm iKy)$ is a regular wave advancing to the positive (under sign) or negative (upper sign) direction and $\exp. \{-Kz + iK(x \cos \theta + y \sin \theta)\}$ is also a regular plane wave coming from the direction θ , these are all diffraction potentials.

Adding (A.11), (A.13) to (A.9), (A.10), the asymptotic formula of Neumann function will be

$$N^{(2)}(P, Q) \rightarrow -i\phi_0^{\pm}(P) \{\phi_0^{\mp}(Q) + \phi_d^{\mp}(Q)\}, \quad \text{for } y \geq 0, \quad (\text{A.18})$$

$$N^{(3)}(P, Q) \rightarrow \sqrt{\frac{K}{2\pi i \tilde{\omega}}} \exp\{-Kz - iK\tilde{\omega}\} \{\phi_0(Q; \theta) + \phi_d(Q; \theta)\}, \quad (\text{A.19})$$

Hence, putting these into (A.7), any potential tends to

$$\phi^{(2)} \rightarrow ie^{-Kz \mp iKy} H^{\pm}(K) \quad \text{for } y \geq 0, \quad (\text{A.20})$$

$$H^{\pm}(K) = \int_c (\phi_0^{\mp} + \phi_d^{\mp}) \frac{\partial \phi}{\partial n} ds, \quad (\text{A.21})$$

$$\phi^{(3)} \rightarrow -\sqrt{\frac{K}{2\pi i \tilde{\omega}}} \exp\{-Kz - iK\tilde{\omega}\} H(K, \pi + \theta), \quad (\text{A.22})$$

$$H(K, \theta) = \int_c \{ \phi_0(\theta - \pi) + \phi_d(\theta - \pi) \} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds, \quad (\text{A.23})$$

Clearly, the function H is a constant multiple of the diverging wave-height. On the other hand, since

$$\int_c \left(\phi_d \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \phi_d \right) ds = 0, \quad (\text{A.24})$$

the H -function can be written also as

$$H(K, \theta) = \int_c \left(\phi_0 \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 \right) ds, \quad (\text{A.25})$$

and this is a usual representation. Now, (A.21) and (A.23) are Haskind-Hanaoka's formulas, that is, the wave-height produced by the body-motion is proportional to the exciting force or moment of the incident wave because the pressure is proportional to the potential.

References

- 1) W. Thomson; Mathematical and Physical Papers, vol. 4, p. 387 (1910)
- 2) S. Yokota; Journal of Zosen Kyokai, vol. 13 (1914)
- 3) T. Inui; T. S. N. A. M. E. vol. 70 (1962)
- 4) M. Bessho; J. Z. K. vol. 116 (1964)
- 5) M. Bessho; J. Z. K. vol. 117 (1965)
- 6) M. D. Haskind; Otdelenie Tech. Nauk., No. 7 (1957)
- 7) J. N. Newman; J. of Ship Research, vol. 6 (1962)
- 8) T. Hanaoka; Proc. of 9-th Congress for Appl. Mech. Japan (1959)
- 9) J. V. Wehausen and E. V. Laitone; "Surface Waves" Handbuch der Physik, Bd. 9 (1960)
- 10) F. Ursell; Q. J. of Mathematics and Applied Mechanics, vol. 2, Pt. 2, p. 218 (1949)
- 11) T. H. Havelock; Proc. Roy. Soc. A. vol. 231 (1955)
- 12) R. C. MacCamy; J. of Ship Research, vol. 5 (1961)
- 13) M. Bessho; Mem. of Defense Academy, vol. 2, No. 2 (1962)
- 14) A. Ogasahara et al.; Graduation Thesis, Dep. of Mech. Eng., Defense Academy, Japan (1965)
- 15) F. Ursell; Q. J. M. A. M. vol. 2, Pt. 3, p. 335 (1949)
- 16) T. Hishida; J. Z. K. vol. 86 (1954)
- 17) T. Hishida; J. Z. K. vol. 87 (1955)
- 18) M. Bessho; Japanese Papers and Rep. of Defense Academy, vol. 3, No. 1 (1965)
- 19) M. Bessho; Japanese Papers and Rep. of Defense Academy, vol. 3, No. 2 (1965)
- 20) M. Bessho; Japanese Papers and Rep. of Defense Academy, vol. 3, No. 3 (1966)
- 21) S. Motora; J. of Ship Research; vol. 8, No. 1 (1964)
- 22) S. Motora et al.; J. Z. K. vol. 117 (1965)
- 23) H. Isshiki et al.; Graduation Thesis, Fac. of Eng., Tokyo Univ. (1965)
- 24) F. Ursell; J. of Fluid Mechanics, vol. 14 (1962)

“On Boundary Value Problems of an Oscillating Body Floating on Water”

(To Professor H. Kato this paper is dedicated)

By Masatoshi BESSHO*

(Received March 30, 1968)

Abstract

The author deals with the boundary value problem of a floating ship when it oscillates or diffracts the incident wave. At first, he defines introductly the velocity potentials, forces and moments for the oscillations corresponding to six degrees of freedom and the diffraction and shows the reciprocity between the forces and damping integrals. Secondly, he derives the asymptotic expansion of Neumann function which solves these boundary value problems and finds those coefficients of expansion relates closely to the forces and moments when the ship oscillates and diffracts the wave. Considering the variation of Neumann function, he also shows the variation of the forces and moments by a slight change of the ship form. Thirdly, he converts the boundary value problem to the integral equation for Kotchin's function and derives similar relations between the force coefficients and Kotchin's function to Kramers-Kronig's. Lastly, he introduces some integrals of which extremum problems are equivalent to satisfy the boundary condition and gives two examples of solutions at high frequency.

Introduction

Recent progress of the theory of ship motion is built up soundly on the theoretical ground of the water wave and many works have been down on the boundary value problems of oscillating ships theoretically and numerically¹⁾. In this paper, the author is interested in the mutual relations of various force coefficients, asymptotic character of the velocity potential, the variation of forces by a slight change of the ship form, Kotchin's function and the extremum property of the boundary condition.

He gives the formulation of problems and definitions in the first chapter, discusses the asymptotic property and variation of Neumann function in the second chapter, the integral equation for Kotchin's function in the third chapter and the boundary value problem as the extremum in the last chapter. In each chapter, the discussion for two-dimensional problem is added in the sub-section as far as it differs from the three dimensional one.

* Assistant Professor; Dept. of Mechanical Engineering, the Defense Academy.

1. Velocity Potentials, Forces and Reciprocity^{1,5,6,7,14,15)}

1.1 Three-dimensional Problem

Let us consider a ship floating on the water surface and take the origin at the center of the water plane of the ship, the x -axis longitudinally forwards, y -axis horizontally and z -axis vertically downwards. The velocity potential of the water motion by the harmonic oscillation of the ship or the diffraction of the incident regular wave can be represented as

$$\Re\{\varphi(x, y, z)e^{i\omega t}\}, \quad (1.1.1)$$

where ω means the circular frequency of the periodic motion, and the water pressure

$$\Re\{p(x, y, z)e^{i\omega t}\}, \quad p(x, y, z) = \rho i\omega\varphi(x, y, z), \quad (1.1.2)$$

under the restriction of the linearized theory, where ρ means the water density. The velocity potential must satisfy the condition

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + K\right)\varphi(x, y, 0) = 0, \quad K = g/\omega^2, \quad (1.1.3)$$

on the water surface and the conditions on the ship surface, which can be satisfied by superposing the velocity potentials of the following motions.

i)	The oscillation parallel to x -axis (surging)	suffix 1
ii)	" y -axis (swaying)	2
iii)	" z -axis (heaving)	3
iv)	the rotational oscillation around x -axis (rolling)	4
v)	" y -axis (pitching)	5
vi)	" z -axis (yawing)	6
vii)	the diffraction	d
viii)	the incident wave	0

In the following we use these suffixes to denote each motions. These potentials are all linear with respect to their amplitude of each motion so that we may normalize them dividing by their amplitude as follows;

$$\varphi_j = i\omega X_j \phi_j, \quad j=1, 2, \dots, 6; \quad \varphi_j = \frac{iga}{\omega} \phi_j, \quad j=0, d, \quad (1.1.4)$$

where a means the amplitude of the incident wave, and X_j the amplitude of the oscillation of each motion. The boundary conditions on the ship surface are

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi_j = -\frac{\partial x_j}{\partial n}, \quad j=1, 2, \dots, 6, \quad \frac{\partial}{\partial n} \phi_d = -\frac{\partial}{\partial n} \phi_0, \quad (1.1.5)$$

where

$$\left. \begin{aligned} x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv y, \quad x_3 \equiv z; \quad \frac{\partial}{\partial n} x_1 &= y \frac{\partial z}{\partial n} - z \frac{\partial y}{\partial n} \\ \frac{\partial}{\partial n} x_3 &= z \frac{\partial x}{\partial n} - x \frac{\partial z}{\partial n}, \quad \frac{\partial}{\partial n} x_2 = x \frac{\partial y}{\partial n} - y \frac{\partial x}{\partial n} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.6)$$

and n means the normal to the ship surface into the water. The force or moment acting on the ship may be also normalized as follows:

$$F_{ij} = - \iint_s p_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = \rho g K X_i f_{ij}, \quad (1.1.7)$$

$$f_{ij} = \iint_s \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = - \iint_s \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds, \quad (1.1.8)$$

for the force by the i -th motion to j -th direction and for the exciting force or moment by the regular plane wave coming from the direction of α radian with respect to the x -axis

$$E_j = - \iint_s (p_0 + p_a) \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = \rho g a H_j(K, \alpha), \quad (1.1.9)$$

$$H_j(K, \alpha) = \iint_s (\phi_0 + \phi_a) \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = - \iint_s (\phi_0 + \phi_a) \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds, \quad (1.1.10)$$

where

$$\phi_0(x, y, z; \alpha) = \exp[-Kz + iK(x \cos \alpha + y \sin \alpha)]. \quad (1.1.11)$$

Now, by Green's theorem, we may easily verify the reciprocity relation for the radiation and diffraction potentials

$$\iint_s \left(\phi_i \frac{\partial}{\partial n} \phi_j - \phi_j \frac{\partial}{\partial n} \phi_i \right) ds = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6, d, \quad (1.1.12)$$

then we have

$$f_{ij} = f_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6, \quad (1.1.13)$$

and

$$H_j(K, \alpha) = \iint_s \left(\phi_j \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 - \phi_0 \frac{\partial}{\partial n} \phi_j \right) ds, \quad j = 1, 2, \dots, 6 \quad (1.1.14)$$

which is called Haskind's formula⁷⁾. Another application of (1.1.12) is the following relation for the diffracted wave

$$H_d(K, \theta; \alpha) = H_d(K, \alpha; \theta), \quad (1.1.15)$$

by making use of the equality

$$\iint_s \left\{ \phi_0(\alpha) \frac{\partial}{\partial n} \phi_0(\beta) - \phi_0(\beta) \frac{\partial}{\partial n} \phi_0(\alpha) \right\} ds = 0, \quad (1.1.16)$$

that is, the diffraction of the wave has a reversible property. In the same way as the above, we have by Green's theorem, making use of the asymptotic expansion (2.1.14),

$$\iint_s \left(\phi_i \frac{\partial}{\partial n} \bar{\phi}_j - \bar{\phi}_j \frac{\partial}{\partial n} \phi_i \right) ds = \frac{iK}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_i(K, \theta) \bar{H}_j(K, \theta) d\theta, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6, d, \quad (1.1.17)$$

where the bar over the letter means the complex conjugate to be taken. Since the boundary condition is real, we have

$$\begin{aligned} \bar{f}_{ji} - f_{ij} &= \bar{f}_{ij} - f_{ji} = \bar{f}_{ij} - f_{ij} \\ &= \frac{iK}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_i(K, \theta) \bar{H}_j(K, \theta) d\theta = \frac{iK}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_j(K, \theta) \bar{H}_i(K, \theta) d\theta, \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

when i equals j , this is the energy dissipated by the wave. Putting d for i and $1, 2, \dots, 6$ for j , since

$$\phi_a \frac{\partial}{\partial n} \bar{\phi}_j - \bar{\phi}_j \frac{\partial}{\partial n} \phi_a = (\phi_0 + \phi_a) \frac{\partial}{\partial n} \bar{\phi}_j + \left(\bar{\phi}_j \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 - \phi_0 \frac{\partial}{\partial n} \bar{\phi}_j \right),$$

we have

$$\bar{H}_j(K, \alpha + \pi) - H_j(K, \alpha) = \frac{iK}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_a(K, \theta, \alpha) \bar{H}_j(K, \theta) d\theta, \quad j = 1, 2, \dots, 6. \quad (1.1.19)$$

If both i and j are the diffraction potential, (1.1.17) gives the relation

$$\bar{H}_a(K, \alpha + \pi, \beta) - H_a(K, \beta + \pi, \alpha) = \frac{iK}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_a(K, \theta, \alpha) \bar{H}_a(K, \theta, \beta) d\theta. \quad (1.1.20)$$

The reciprocity (1.1.15), the relation (1.1.19) and (1.1.20) give us much knowledge of the diffracted wave and its relation to the radiation potentials¹⁵⁾.

1.2. Two-dimensional Problem

If the ship is very long so that the water motion is limited in the y - z plane, we have two-dimensional problems corresponding to the preceding. The definition and notations are preserved but the motion is limited to the followings.

i) swaying oscillation (y -axis)	suffix 2
ii) heaving " (z -axis)	3
iii) rolling	4
iv) diffraction	d
v) incident wave	0

Thus, many of the formulas are the same form as in the former case, except that the integration is performed on the periphery curve C not on the surface.

In the following let us pick up the difference. The regular wave potential may be defined as

$$\phi_0(y, z; K) = \exp(-|K|z + iKy), \quad (1.2.1)$$

and Kotchin's function

$$\begin{aligned} H_j(K) &= - \int_C \{ \phi_0(K) + \phi_d(K) \} \frac{\partial}{\partial n} \phi_j ds \\ &= \int_C \left\{ \phi_j \frac{\partial}{\partial n} \phi_0(K) - \phi_0(K) \frac{\partial}{\partial n} \phi_j \right\} ds, \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

$$H_d(K, \pm K) = H_d(\pm K, K) = \int_C \{ \phi_0(K) + \phi_d(K) \} \frac{\partial}{\partial n} \phi_0(\pm K) ds. \quad (1.2.3)$$

The formula (1.1.17) can be deformed as

$$\int_C \left(\phi_i \frac{\partial}{\partial n} \bar{\phi}_j - \bar{\phi}_j \frac{\partial}{\partial n} \phi_i \right) ds = i \{ H_i(K) \bar{H}_j(K) + H_i(-K) \bar{H}_j(-K) \}, \quad (1.2.4)$$

then

$$\begin{aligned} \bar{f}_{ij} - f_{ij} &= \bar{f}_{ij} - f_{ji} = \bar{f}_{ij} - f_{ij} \\ &= i \{ H_i(K) \bar{H}_j(K) + H_i(-K) \bar{H}_j(-K) \} \\ &= i \{ \bar{H}_i(K) H_j(K) + \bar{H}_i(-K) H_j(-K) \}. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

For example, if the ship is symmetric with respect to the $x-z$ plane, we have clearly

$$H_3(K) = H_3(-K), \quad H_2(K) = -H_2(-K), \quad H_4(K) = -H_4(-K), \quad (1.2.6)$$

then by the above formula we have

$$H_3(K) / \bar{H}_3(K) = H_4(K) / \bar{H}_4(K) \quad (1.2.7)$$

which shows that the exciting moment and sway force of the wave have the same phase.

Putting d for i in (1.2.4), we have

$$\bar{H}_j(-K) - H_j(K) = i \{ H_d(K, K) \bar{H}_j(K) + H_d(K, -K) \bar{H}_j(-K) \}, \quad (1.2.8)$$

and that

$$\bar{H}_d(K, -K) - H_d(K, -K) = i \{ |H_d(K, K)|^2 + |H_d(K, -K)|^2 \}. \quad (1.2.9)$$

Thus, if we know H_2 and H_3 , we may calculate $H_d(K, \pm K)$ from (1.2.8)⁽¹⁾.

2. Neumann function^{3,13,14)}

2.1. Three-dimensional Problem

The velocity potential of the unit source at Q satisfying the water surface condition is well-known¹⁾ and let us call it the fundamental singularity, namely,

$$S(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{4\pi^2} \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp \{ -k(z+z') + ik(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') \}}{k - K + \mu i} k dk du, \quad (2.1.1)$$

where

$$P \equiv (x, y, z), \quad Q \equiv (x', y', z'), \quad \bar{Q} \equiv (x', y', -z'), \quad r_1 = \overline{PQ}, \quad r_2 = P\bar{Q}, \\ \tilde{\omega} = x \cos u + y \sin u, \quad \tilde{\omega}' = x' \cos u + y' \sin u.$$

If there exists Neumann function of the present problems, which has the following property:

$$\frac{\partial}{\partial n} N(P, Q) = 0 \quad \text{on } S, \quad (2.1.2)$$

$$N(P, Q) = S(P, Q) + A(P, Q), \quad (2.1.3)$$

where A is a regular function, then we may solve our boundary value problem as

$$\phi(P) = - \iint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} N(P, Q) dS_Q. \quad (2.1.4)$$

Since the function A is regular and must satisfy the condition

$$\frac{\partial}{\partial n} A(P, Q) = - \frac{\partial}{\partial n} S(P, Q) \quad \text{on } S, \quad (2.1.5)$$

it may be written by (2.1.4) as follows:

$$A(P, Q) = \iint_S N(Q, R) \frac{\partial}{\partial n} S(P, R) dS_R. \quad (2.1.6)$$

Lastly, it is natural to assume that Neumann function has the reciprocity, namely,

$$N(P, Q) = N(Q, P), \quad (2.1.7)$$

because $S(P, Q)$ has the same relation.

Now, let us consider its asymptotic expansion. At first $S(P, Q)$ can be expanded asymptotically as follows:

$$S(P, Q) \xrightarrow{P \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{K}{2\pi\rho i}} e^{-Kz - iK\rho\phi_0(Q, \varphi)} + \dots \\ + \left(z' - \frac{1}{K}\right) \{u_1(P) + x'u_2(P) + y'u_3(P)\} + \dots, \quad (2.1.8)$$

where

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad x' = \rho' \cos \varphi', \quad y' = \rho' \sin \varphi'$$

and

$$\left. \begin{aligned} u_1(P) &= -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{K} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ u_2(P) &= -\frac{\partial}{\partial x} u_1(P), \quad u_3(P) = -\frac{\partial}{\partial y} u_1(P). \end{aligned} \right\} \quad (2.1.9)$$

Putting this expansion into (2.1.6), we have also

$$A(P, Q) \xrightarrow{P \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{K}{2\pi\rho i}} e^{-Kz - iK\rho} \phi_d(Q, \varphi) + \dots \\ + \phi_s(Q)u_1(P) + \phi_{II}(Q)u_2(P) + \phi_{III}(Q)u_3(P) + \dots, \quad (2.1.10)$$

where

$$\left. \begin{aligned} \phi_d(Q, \varphi) &= \iint_S N(Q, P) \frac{\partial}{\partial n} \phi_0(P, \varphi) dS, \\ \phi_{II}(Q) &= \iint_S N(Q, P) \frac{\partial}{\partial n} \left\{ x \left(z - \frac{1}{K} \right) \right\} dS, \\ \phi_{III}(Q) &= \iint_S N(Q, P) \frac{\partial}{\partial n} \left\{ y \left(z - \frac{1}{K} \right) \right\} dS. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.11)$$

Adding (2.1.8) and (2.1.10), we have finally

$$N(P, Q) \xrightarrow{P \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{K}{2\pi\rho i}} e^{-Kz - iK\rho} \Phi_d(Q, \varphi) + \dots \\ + \Phi_s'(Q)u_1(P) + \Phi_{II}(Q)u_2(P) + \Phi_{III}(Q)u_3(P) + \dots, \quad (2.1.12)$$

where

$$\left. \begin{aligned} \Phi_d(Q, \varphi) &= \phi_0(Q, \varphi) + \phi_d(Q, \varphi), \\ \Phi_s'(Q) &= \phi_s'(Q) - \frac{1}{K}, \quad \Phi_s(Q) = \phi_s(Q) + z', \\ \Phi_{II}(Q) &= \phi_{II}(Q) + x' \left(z' - \frac{1}{K} \right), \\ \Phi_{III}(Q) &= \phi_{III}(Q) + y' \left(z' - \frac{1}{K} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.1.13)$$

Then, the velocity potential becomes approximately at infinity,

$$\phi(P) \xrightarrow{P \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{K}{2\pi\rho i}} e^{-Kz - iK\rho} H(K, \varphi) + \dots \\ - u_1(P) \iint_S \Phi_s' \frac{\partial \phi}{\partial n} dS - u_2(P) \iint_S \Phi_{II} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS - u_3(P) \iint_S \Phi_{III} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS + \dots, \quad (2.1.14)$$

where

$$H(K, \varphi) = - \iint_S \Phi_d(P, \varphi) \frac{\partial \phi}{\partial n} dS, \quad (2.1.15)$$

which is the same as the exciting force or moment by (1.1.10). Thus its first term is the wave diverging outwards but this term vanishes exponentially into the water depth, where the second term dominates over other terms and this is the doublet with the z -axis as its axis and its strength for heaving motion is

$$\iint_S \phi_s' \frac{\partial \phi_s}{\partial n} dS = - \iint_S \phi_s' \frac{\partial z}{\partial n} dS = \frac{1}{K} [A_w - K(\nabla + f_{33})], \quad (2.1.16)$$

where ∇ stands for the displacement volume and A_w the water plane area, namely, this is equal to the sum of the statical and dynamical vertical force divided by $\rho g K$. Conversely, we may verify that this term vanishes if there acts no vertical force upon the the ship, and then the influence of the oscillation of the ship is very small in deeper region of the water. When the free surface effects nothing, that is, the body is fully submerged deep, these terms as in (2.1.16) are symmetric in every direction of motion and moreover they have extremum property which results from their positive definite character²⁾, but we may not verify anything in the present case, because the kinetic energy of the present system becomes infinite. The last example of the utility of Neumann function is to estimate the variation of various coefficients resulting from a slight change of the ship surface. According to the reference³⁾, we have the variation of Neumann function when the ship surface swells outwards by the amount $\delta\nu$ measured along the normal as follows:

$$\delta N(P, Q) = \iint_S \text{grad } N(P, R) \text{ grad } N(R, Q) (\delta\nu dS)_R. \quad (2.1.17)$$

In the same way, the variation of the velocity potential is

$$\delta\Phi(P) = \iint_S \text{grad } \Phi(R) \text{ grad } N(P, R) \delta\nu dS, \quad (2.1.18)$$

where

$$\frac{\partial}{\partial n} \Phi = 0 \quad \text{on } S, \quad (2.1.19)$$

Then, putting the asymptotic expansion (2.1.12) into the above formulas and comparing both sides, we have

$$\delta H(K, \varphi) = \iint_S \text{grad } \Phi \text{ grad } \Phi_a \delta\nu dS. \quad (2.1.20)$$

Although the variation of heaving force is also deduced in the same manner as the above, other ones can not be, so that we must calculate them by the same manner as the one used to deduce (2.1.17) or (2.1.18).

The result is

$$\delta \iint_S \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} dS = \iint_S \text{grad } \phi_i \text{ grad } \phi_j \delta\nu dS, \quad (2.1.21)$$

or

$$-\delta \iint_S \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} dS = \iint_S (\text{grad } x_i \text{ grad } x_j - \text{grad } \phi_i \text{ grad } \phi_j) \delta v dS, \quad i, j=1, 2, 3. \quad (2.1.22)$$

These formula permits us to estimate the change of various forces by a slight change of the ship form, for example, we see by (2.1.22) that added mass increases as the ship swells at the part where the velocity is greater than the body velocity²⁾.

2.2. Two-dimensional Problem^{1,2,13,14)}

The fundamental singularity is given as

$$S(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\pi} \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_0^\infty \frac{e^{-k(z+z')} \cos k(x-x')}{k-K+\mu i} dk, \quad (2.2.1)$$

where

$$P \equiv (y, z), \quad Q \equiv (y', z'), \quad \bar{Q} \equiv (y', z'), \quad r_1 = \overline{PQ}, \quad r_2 = \overline{P\bar{Q}}.$$

Neumann function may be written also as (2.1.3) and the boundary condition of A is (2.1.5) and it is represented as (2.1.6). The asymptotic expansion of S becomes as

$$S(P, Q) \xrightarrow{P \rightarrow \infty} -ie^{-K(z+z')-iK|y-y'|} + \left(z' - \frac{1}{K}\right) \{u_1(P) + y' u_3(P)\} + \dots, \quad (2.2.2)$$

where

$$\left. \begin{aligned} u_1(P) &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{r^2} - \frac{y^2 - z^2}{Kr^4} \right), \quad r = \sqrt{y^2 + z^2}, \\ u_3(P) &= -\frac{\partial}{\partial y} u_1(P). \end{aligned} \right\} \quad (2.2.3)$$

Putting this expansion into (2.1.6), (2.1.3) and (2.1.4), we have the following expansions.

$$A(P, Q) \xrightarrow{P \rightarrow \infty} -ie^{-Kz-iK|y|} \phi_d(Q, (\text{sgn } y)K) + \phi_3(Q) u_1(P) + \phi_{III}(Q) u_3(P) + \dots, \quad (2.2.4)$$

$$\begin{aligned} N(P, Q) &\xrightarrow{P \rightarrow \infty} -ie^{-Kz-iK|y|} \phi_d(Q, (\text{sgn } y)K) \\ &\quad + \phi_3'(Q) u_1(P) + \phi_{III}(Q) u_3(P) + \dots, \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

$$\begin{aligned} \phi(P) &\xrightarrow{P \rightarrow \infty} ie^{-Kz-iK|y|} H\{(\text{sgn } y)K\} \\ &\quad - u_1(P) \int_C \phi_3' \frac{\partial \phi}{\partial n} dS - u_3(P) \int_C \phi_{III} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS + \dots. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

The meaning of notations is like as the preceding. The last discussions of the variational formula are the same as in the three-dimensional case.

3. Integral equation for Kotchin's function^{1,4,5,6,12)}

3.1. Three-dimensional Problem

The velocity potential may be represented by making use of $S(P, Q)$ as follows:

$$\phi(P) = \iint_S \left(\phi \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \phi \right) S(P, Q) dS_Q, \quad (3.1.1)$$

Changing the order of integration, it may also be written as

$$\phi(P) = \phi_1(P) + \phi_2(P), \quad (3.1.2)$$

$$\phi_1(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\phi \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \phi \right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) dS, \quad (3.1.3)$$

$$\phi_2(P) = \frac{1}{4\pi^2} \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{H(k, u + \pi) \exp \{-kz + ik\bar{\omega}\}}{k - K + \mu i} k dk du, \quad (3.1.4)$$

$$H(k, u) = \iint_S \left(\phi \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \phi \right) \exp \{-kz + ik\bar{\omega}\} dS. \quad (3.1.5)$$

Now Neumann function of the domain outside the surface S with its mirror image with respect to the water surface is often known if its water surface is considered as rigid. Let it be $N(P, Q)$, then

$$\phi_1(P) = - \iint_S M(P, Q) \frac{\partial}{\partial n} \phi_1 dS, \quad (3.1.6)$$

where

$$M(P, Q) = N(P, Q) - N(P, \bar{Q}),$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi_1 = \frac{\partial}{\partial n} (\phi - \phi_2).$$

Then, we may write down the velocity potential as follows;

$$\phi(P) = - \iint_S M(P, Q) \frac{\partial \phi}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{H(k, u + \pi) \mathcal{N}(P; k, u)}{k - K + \mu i} k dk du, \quad (3.1.7)$$

$$\mathcal{N}(P; k, u) = \exp \{-kz + ik\bar{\omega}\} + \mathcal{N}(P; k, u), \quad (3.1.8)$$

$$\mathcal{N}(P; k, u) = \iint_S M(P, Q) \frac{\partial}{\partial n} \exp \{-kz + ik\bar{\omega}\} dS, \quad (3.1.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \mathcal{N}(P; k, u) = 0 \quad \text{on } S. \quad (3.1.10)$$

Putting (3.1.7) into (3.1.5), we have the integral equation to determine Kotchin's function, that is,

$$H(p, \theta) = H_0(p, \theta) + \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{H(k, u + \pi) L(p, \theta; k, u)}{k - K + \mu i} k dk du, \quad (3.1.11)$$

where

$$H_0(p, \theta) = - \iint_S \mathcal{N}(P; p, \theta) \frac{\partial \phi}{\partial n} dS, \quad (3.1.12)$$

$$L(p, \theta; k, u) = \iint_S \mathcal{N}(P; k, u) \frac{\partial}{\partial n} \exp \{-pz + ip\tilde{\omega}(\theta)\} dS. \quad (3.1.13)$$

This is of the second type of Fredholm's equation so that it may have a unique solution. In general, to solve this equation numerically is difficult and is not the present problem. Here we will proceed to obtain some interesting relations by applying (3.1.7) and (3.1.11).

Firstly, multiplying boundary value to (3.1.7) and integrating over S , we have

$$f_{ij} = - \iint_S \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dS = - \iint_S \phi_{i0} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{H_j(k, u + \pi) H_{i0}(k, u)}{k - K + \mu i} k dk du, \quad (3.1.14)$$

where

$$\phi_{i0}(P) = - \iint_S M(P, Q) \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dS, \quad (3.1.15)$$

$$H_{i0}(k, u) = - \iint_S \mathcal{N}(P; k, u) \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dS. \quad (3.1.16)$$

Secondly, putting d for j in (3.1.14) and adding a simple term, we have

$$H_i(K, \alpha) = H_{i0}(K, \alpha) + \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{H_d(K, \alpha; k, u + \pi) H_{i0}(k, u)}{k - K + \mu i} k dk du, \quad (3.1.17)$$

and putting K, α for p, θ in (3.1.11), we have also very similar formula as the above, that is

$$H(K, \alpha) = H_0(K, \alpha) + \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{H(k, u + \pi) L(K, \alpha; k, u)}{k - K + \mu i} k dk du, \quad (3.1.18)$$

where it is to be noticed that

$$H_{d0}(K, \alpha; k, u) = - \iint_S \mathcal{N}(P; k, u) \frac{\partial \phi_d(K, \alpha)}{\partial n} dS = L(K, \alpha; k, u). \quad (3.1.19)$$

These are similar to Kramers-Kronig relations⁹⁾ and useful to estimate the second approximation to the first one⁷⁾.

3.2. Two-dimensional Problem

The velocity potential is to be

$$\phi(P) = \phi_1(P) + \phi_2(P), \quad (3.2.1)$$

$$\phi_1(P) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left(\phi \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \phi \right) \log \frac{r_2}{r_1} dS, \quad (3.2.2)$$

$$\phi_2(P) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(-k) e^{-|k|z + ikv}}{|k| - K + \mu i} dk, \quad (3.2.3)$$

$$H(k) = \int_C \left(\phi \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \phi \right) e^{-k|z| + ikv} dS. \quad (3.2.4)$$

If there is Neumann function stated as the preceding section, we may write as (3.1.6), namely,

$$\phi_1(P) = - \int_C M(P, Q) \frac{\partial}{\partial n} (\phi - \phi_2) dS, \quad (3.2.5)$$

then putting this into (3.2.1) with (3.2.3) we have finally

$$\phi(P) = - \int_C M(P, Q) \frac{\partial \phi}{\partial n} dS + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(-k) \mathcal{N}(P; k)}{|k| - K + \mu i} dk, \quad (3.2.6)$$

where

$$\mathcal{N}(P, k) = e^{-|k|z + ikv} + \mathcal{N}(P, k), \quad (3.2.7)$$

$$\mathcal{N}(Q, k) = \int_C M(Q, P) \frac{\partial}{\partial n} e^{-|k|z + ikv} dS, \quad (3.2.8)$$

and

$$\frac{\partial}{\partial n} \mathcal{N}(P, k) = 0 \quad \text{on } C. \quad (3.2.9)$$

The integral equation for $H(k)$ is obtained by putting (3.2.6) into (3.2.4) and we get

$$H(p) = H_0(p) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(-k) L(p, k)}{|k| - K + \mu i} dk, \quad (3.2.10)$$

where

$$H_0(k) = - \int_C \mathcal{N}(P, k) \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \int_C \left(\phi_0 \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \phi_0 \right) e^{-|k|z + ikv} dS, \quad (3.2.11)$$

$$\phi_0(P) = - \int_C M(P, Q) \frac{\partial \phi}{\partial n} dS, \quad (3.2.12)$$

and

$$L(p, k) = \int_C \mathcal{N}(P, k) \frac{\partial}{\partial n} e^{-|p|z + ipv} dS. \quad (3.2.13)$$

In the same way as the preceding the force coefficients becomes

$$f_{ij} = - \int_C \phi_{i0} \frac{\partial}{\partial n} \phi_j dS + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_j(-k) H_{i0}(k)}{|k| - K + \mu i} dk, \quad (3.2.14)$$

and

$$H(K) = H_0(K) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_a(K, -k)H_0(k)}{|k| - K + \mu i} dk, \quad (3.2.15)$$

$$H(K) = H_0(K) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(-k)H_{a0}(K, k)}{|k| - K + \mu i} dk, \quad (3.2.16)$$

where

$$H_{a0}(K, k) = L(K, k). \quad (3.2.17)$$

4. Boundary Value Problem as Extremum^{8,10)}

4.1. Pressure distribution

A. H. Flax introduces the variational principle into the theory of thin wing to solve its boundary value problem by making use of Rayleigh-Ritz's method¹⁰⁾. His principle is directly applicable to the present problem for the pressure distribution pulsating on the water surface, and it is easier than his case because of the reciprocity of the velocity potential and no use of the reverse flow potential.

Now, let us consider the pressure distribution $p(x, y) \exp(i\omega t)$ over a part S of the water surface, and the resulting velocity potential $i\omega\phi \exp(i\omega t)$, then they must satisfy the following equation at the water surface

$$\left(K + \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi(x, y, 0) = \begin{cases} \frac{1}{\rho g} p(x, y) & \text{on } S \\ 0 & \text{outside of } S \end{cases}. \quad (4.1.1)$$

Hence, using the fundamental singularity (2.1.1), we have the representation

$$\phi(P) = -\frac{1}{\rho g} \iint_S p(Q) S(P, Q) dSQ, \quad z' = 0. \quad (4.1.2)$$

The boundary value problem is to determine p so as to satisfy the given vertical velocity on S .

It is easy to see the reciprocity

$$\iint_S p_i \frac{\partial}{\partial z} \phi_j dS = \iint_S p_j \frac{\partial}{\partial z} \phi_i dS. \quad (4.1.3)$$

Then, let us consider the integral

$$I = \iint_S p \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} - 2 \frac{\partial f}{\partial z} \right) dS, \quad (4.1.4)$$

where $\partial f / \partial z$ is the given boundary value, ϕ is supposed to be any potential resulting from the pressure p , and f is the accurate potential of the pressure π . Taking the variation of I and making use of (4.1.3), we have

$$\delta I = 2 \iint_S \delta p \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \right) dS, \quad (4.1.5)$$

then if $\partial \phi / \partial z$ equals $\partial f / \partial z$, I equals zero, and inversely if δI equals zero under arbitrary variation of p , $\partial \phi / \partial z$ equals $\partial f / \partial z$. Namely, the boundary value problem is equivalent to the extremum problem of I . Thus we may use Rayleigh-Ritz's procedure to solve the present problem.

Although this numerical process is practically the same as the usual one in which we approximate the boundary value by making use of any set of orthogonal functions, but this is basically rational especially as the method to obtain approximate force coefficients.

4.2. Gauss's integral

The preceding method is unfortunately not applicable to the displacement ship but we may find Gauss's integral which is made use of to solve Dirichlet Problem in the text book of the potential theory³⁾. It is the integral as

$$G = \int_C \sigma (2f - \phi) dS, \quad (4.2.1)$$

where ϕ is any comparable potential of the source distribution σ over C and f is the given boundary value. It is easily seen that the extremum of this integral is equivalent to Dirichlet problem. In the same way, we may consider for Neumann Problem the following integral

$$N = \int_C \mu \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - 2 \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS, \quad (4.2.2)$$

where ϕ is any potential of the doublet distribution to be determined and $\partial f / \partial n$ is the given boundary value, but this integral is usually improper and more difficult to evaluate numerically than the former. Fortunately, since Neumann problem is converted to Dirichlet Problem in the two-dimensional problem by introducing the stream function, we may make use of Gauss's integral in the present case. The integral to be extremized is

$$G' = \int_C \gamma (2f - \phi) dS, \quad (4.2.3)$$

where ϕ is any stream function by the circulation distribution γ and f is the given boundary value.

These two integrals may be equally usefull to the present problem but there is an inconvenient point. That is, what the extremum of these integral gives is not always the force coefficient as it does in the preceding section especially in the case of the floating body. In fact, if we define

$$\text{Extrem. } (N) = N_0 = - \int_C \mu \frac{\partial \phi}{\partial n} dS, \quad (4.2.5)$$

$$\text{Extrem. } (G') = G_0' = - \int_C \gamma \phi dS, \quad (4.2.6)$$

considering μ, ϕ and γ, ϕ is the correct value, since

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \phi_+ - \phi_-, \\ \gamma &= \frac{\partial}{\partial S} (\phi_+ - \phi_-), \end{aligned} \right\} \quad (4.2.7)$$

where suffix $+$ $-$ means the value at just outside and inside of C , we may calculate them as follows;

$$N_0 = G_0' = - \int_C \phi_+ \frac{\partial \phi}{\partial n} dS + \int_C \phi_- \frac{\partial \phi}{\partial n} dS, \quad (4.2.8)$$

The first term of the right hand side is the force and the second term the force from the inside of C when we assume that C is a very thin shell bowl immersed in the water, so that the force acting on the floating ship may not be estimated directly from N and G' except the special case. The heaving motion is one of such special cases, and we have

$$\begin{aligned} \int_C \phi_- \frac{\partial \phi}{\partial n} dS &= - \int_C \left\{ \phi_- \frac{\partial}{\partial n} \left(z - \frac{1}{K} \right) - \left(z - \frac{1}{K} \right) \frac{\partial}{\partial n} \phi_- \right\} dS + \int_C \left(z - \frac{1}{K} \right) \frac{\partial z}{\partial n} dS \\ &= \int_C \left(z - \frac{1}{K} \right) \frac{\partial z}{\partial n} dS, \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

because both $(z - 1/K)$ and ϕ_- are regular inside C and satisfy the water surface condition. Other cases are when the ship is fully submerged and the motion is translational and then this term becomes simply the displacement volume.

4.3. Examples of Application

There may be proposed another type of such integral, namely,

$$J = \iint_S \phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - 2 \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS. \quad (4.3.1)$$

of which extremum problem is also equivalent to the boundary value problem, and its extremum equals the force.

As an example of its utility, let us consider a semi-submerged circular cylinder of unit radius in heaving motion with very high frequency. Assume the potential take the following form,

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \phi_1 + A \phi_2, & y &= r \cos \theta, & z &= r \sin \theta, \\ \phi_1 &= \frac{\sin \theta}{r} - \frac{\cos 2\theta}{Kr^2}, & \frac{\partial f}{\partial n} &= \frac{\partial f}{\partial r} = -\sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (4.3.2)$$

$$\phi_2 = \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_0^\infty \frac{e^{-kz} \cos ky}{k - K + \mu i} dk, \quad \Bigg|$$

where A is assumed as a small parameter to be determined and ϕ_1 is considered to be the predominant part of ϕ at high frequency³⁾, then

$$J = 2(\phi_1, f) - (\phi_1, \phi_1) + 2A(\phi_2, f - \phi_1) - A^2(\phi_2, \phi_2), \quad (4.3.3)$$

where

$$(\phi_i, \phi_j) = (\phi_j, \phi_i) = - \int_C \phi_i \frac{\partial}{\partial n} \phi_j dS, \quad (4.3.4)$$

then the extremum condition becomes

$$\frac{1}{2} \frac{\delta I}{\delta A} = (\phi_2, f - \phi_1) - A(\phi_2, \phi_2) = 0, \quad (4.3.5)$$

namely

$$A = (\phi_2, f - \phi_1) / (\phi_2, \phi_2). \quad (4.3.6)$$

Putting this value into (4.3.3), we have

$$\text{Extrem. } (J) = f_{3,3} = 2(\phi_1, f) - (\phi_1, \phi_1) + (\phi_2, f - \phi_1)^2 / (\phi_2, \phi_2). \quad (4.3.7)$$

Calculating these terms, they are

$$\left. \begin{aligned} (\phi_1, \phi_1) &= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{K} + \frac{\pi}{K^2}, & (\phi_1, f) &= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3K}, \\ 2(\phi_1, f) - (\phi_1, \phi_1) &= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{4}{3\pi K} - \frac{1}{K^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (4.3.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_2 &\xrightarrow{K \rightarrow \infty} -\frac{1}{K} \phi_1 - \pi i e^{-Kz - iK|y|}, & (\phi_2, \phi_2) &\doteq -i\pi^2 e^{-2iK}, \\ (\phi_2, f - \phi_1) &\doteq -\frac{4\pi i}{K^2} e^{-iK} \left(1 + \frac{i}{3\pi} e^{iK} \right), \\ A &\doteq \frac{4}{\pi K^2} e^{iK} \left(1 + \frac{i}{3\pi} e^{iK} \right), \\ \phi &\xrightarrow{K \rightarrow \infty} \phi_1 - \frac{4i}{K^2} \left(1 + \frac{i}{3\pi} e^{iK} \right) e^{-Kz + iK(1-|y|)}. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.9)$$

Accordingly, we have

$$f_{3,3} \doteq \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{4}{3\pi K} - \frac{4}{K^2} \right) + \frac{16}{\pi^2 K^4} e^{2iK} \left(1 + \frac{i}{3\pi} e^{iK} \right)^2 + \dots, \quad (4.3.10)$$

so that the coefficient of the added mass k may be

$$k \doteq 1 - \frac{4}{3\pi K} + \dots \quad (4.3.11)$$

The results (4.3.10) and (4.3.12) and the similar ones of the following example are the same as ones except smaller terms^{8,11)} obtained by F. Ursell after very long arguments.

For the other example, let us consider a heaving semi-submerged sphere at high frequency, and assume the potential as

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \phi_1 + A\phi_2, \quad \partial f / \partial r = -\cos \theta \\ \phi_1 &= \frac{\cos \theta}{2r^2} + \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2Kr^3}, \quad z = r \cos \theta, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r \sin \theta = \rho \\ \phi_2 &= \int_0^\infty \frac{e^{-kz} J_0(kr \sin \theta)}{k - K + \mu i} k dk \xrightarrow{K \rightarrow \infty} -\frac{2}{K} \phi_1 + \sqrt{\frac{2\pi K}{i\rho}} e^{-Kz - iK\rho} \end{aligned} \right\} \quad (4.3.13)$$

$$(\phi_1, \phi_1) = \frac{\pi}{3} \left(1 + \frac{15}{8K} + \frac{18}{5K^2} \right), \quad 2(\phi, f) - (\phi_1, \phi_1) = \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{3}{8K} - \frac{18}{5K^2} \right), \quad (4.3.14)$$

$$\left. \begin{aligned} (\phi_2, \phi_2) &\doteq 2\pi^2 K e^{-2iK}, \quad (\phi_2, f - \phi_1) \doteq 3\sqrt{\frac{2\pi^3}{iK^3}} e^{-iK} + \frac{3\pi}{4K^2} \\ A &\doteq \frac{3e^{iK}}{\sqrt{2\pi i K^3}} + \frac{3e^{2iK}}{8\pi K^3}, \end{aligned} \right\} \quad (4.3.15)$$

and

$$\left. \begin{aligned} \phi &\xrightarrow{K \rightarrow \infty} \phi_1 + \frac{3}{iK^2 \sqrt{\rho}} e^{-Kz + iK(1-\rho)}, \\ k &\doteq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{8K} - \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.3.16)$$

Conclusion

Considering the force acting on and the boundary value problem of the floating ship without advance speed, we have the conclusion as follows:

There are the mutual relations between forces, dampings and the diffracted wave is completely determined from the wave of the radiation potentials especially in two-dimensional problem. The first term of the asymptotic expansion of Neumann function which solves the present boundary value problem is of course the radiated wave of which amplitude is the diffraction potential and the second term is the doublet potential with vertical axis and its strength proportional to the heaving potential. The variation of forces acting on the ship by a slight change of its form is estimated if we know the velocity around the ship surface and for example the added mass coefficient increases as the surface swells slightly at the part where the local velocity is greater than the oscillating velocity.

The boundary value problem is converted to the problem to solve the integral equa-

tion for Kotchin's function and the relation between the force and this function similar to Kramers-Kronig's one is obtained and will be useful to the approximate evaluation of forces and waves.

The method to solve the boundary value problem as the extremum of some integral which is proposed by A. H. Flax in the wing theory and Gauss in the potential theory is applicable to the present problem and proposes a sound basis of the approximate evaluation of the potential.

References

- 1) J. V. Wehausen and E. V. Laitone, "Surface Waves," Handbuch der Physik, Bd. 9, 1960.
- 2) S. Bergman and M. Schiffer, "Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics," Academic Press, New York, 1953.
- 3) M. Inoue, "Potential Theory," Kyoritsu, Tokyo, 1952.
- 4) N. E. Kotchin, Technical and Research Bulletin, No. 1-8, S.N.A.M.E., 1951.
- 5) N. E. Kotchin, Technical and Research Bulletin, No. 1-9, S.N.A.M.E., 1952.
- 6) N. E. Kotchin, Technical and Research Bulletin, No. 1-10, S.N.A.M.E., 1952.
- 7) M. D. Haskind, Otdel. Tekhn. Nauk., No. 7, 1957.
- 8) F. Ursell, Q.J.M.A.M., vol. 7, 1954.
- 9) J. Kotik and V. Mangulis, Int. Shipb. Progress, vol. 9, Sept. 1962.
- 10) A. H. Flax, J. Aeron. Science, vol. 19, 1952.
- 11) W. D. Kim, J. Fluid Mech., vol. 21, 1965.
- 12) M. Bessho, J. Zosen Kyokai, vol. 105, 1959.
- 13) M. Bessho, Mem. Defense Academy, vol. 6, 1967.
- 14) M. Bessho, Mem. Defense Academy, vol. 7, 1967.
- 15) M. Bessho, Rept. Sci. Eng. Res., Defense Academy, vol. 3, No. 2, 1965.

「船の波形解析への一寄与」

(この論文を遠藤山田両教授に捧ぐ)

別 所 正 利*
(昭和 44 年 3 月 31 日受付)

1. 序 言

乾教授が船の造波抵抗理論において波模様の観察が重要である事を強調して以来波形の測定から造波抵抗等を求める研究が続出した。

これらの所謂波形解析では船の後方に出来るケルビン波系を測定してそれから

1. 造波抵抗を直接計算する
2. それをフーリエ変換して振幅函数を求める
3. 船の等価特異点分布を求める

等の事を目的として研究され幾つかの方法がある。

いづれの方法にしても得られた大量の波形記録を計算機に入れて処理しなければならぬので最も望ましい近似値に関する考察が必要であると考えられる。以下に夫々の方法を列挙してこのような見地から考察を試みる次第である。

2. 関係式¹⁾

考察に入る前に必要な式類をまとめて掲げて置こう。

原点を船体中央水線上に置き z 軸を鉛直上方に x 軸を前進方向にとって右手座標系を考え船速は V であるとする。船が没水表面上 S の吹出し分布 $V\sigma(S)$ で表わされるものとし、その振幅函数を

$$F(\kappa_0, \theta) = \iint_S \sigma(S) e^{\kappa_0 x \sec \theta + i(p x + q y)} dS, \quad (1)$$

但し $\kappa_0 = g/V^2$, $p = \kappa_0 \sec \theta$, $q = \kappa_0 \sec^2 \theta \sin \theta$, とすると船の充分後方における水面変位 ζ は次式で与えられる。

$$\zeta(x, y) = \frac{\kappa_0}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ F e^{-i(p x + q y)} + F e^{i(p x + q y)} \right\} \sec^3 \theta d\theta, \quad (2)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\kappa_0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \text{ } \end{array} \right\} \frac{dp}{\sin \theta \cos \theta}, \quad (2')$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \text{ } \end{array} \right\} \frac{dq}{1 + \sin^2 \theta}, \quad (2'')$$

以上上横棒は複素共役値を示すものとする。

* 防衛大学校 機械工学教室 教授

(2) 式で与えられる波形を測定しそれをフーリエ変換すれば振幅函数が求められる。即ち縦切り方式では

$$\int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x, y) e^{i p x} dx = \frac{e^{-i q y}}{\sin \theta \cos \theta} F(\kappa_0, \theta), \quad (3)$$

又横切り方式では

$$\int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x, y) e^{i q y} dy = \frac{2 e^{-i / \pi}}{1 + \sin^2 \theta} F(\kappa_0, \theta), \quad (4)$$

となる。振幅函数が求まれば造波抵抗 R_W は次式で計算出来る。

$$\frac{R_W}{\rho g} = \frac{\kappa_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} |F(\kappa_0, \theta)|^2 \sec^3 \theta d\theta, \quad (5)$$

なお以下船は左右対称と考える。

所でこのような解析方法では後方の波形が同じならば F も R_W も同じである事は明らかであるが一方波が同じでも船形は異なる場合があるので (1) 式の特異点分布は一義的には定められず所謂波無し分布だけ常に不定である⁵⁾。つまりいわば波源特異点分布しか求められない。このような波源の形式等は多分に任意性を含んでいるがともかく波系を表現出来なければならない。こゝでは簡単の為に水線上船体中心線に沿う線分布を与えて振幅函数は次のように表わされるものと考えて置こう。

$$F(\kappa_0, \theta) = \frac{\cos \theta}{i \kappa_0} \int_{-L/2}^{L/2} m(x) e^{i p x} dx, \quad (1')$$

これを (2) 式に代入して θ について積分すると

$$\zeta(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_{-L/2}^{L/2} m(x') P_{-2}^*(\kappa_0 \overline{x-x'}, \kappa_0 y) dx', \quad (6)$$

となり又 (1') を (5) に代入して θ について積分すると

$$\frac{R_W}{\rho g} = \frac{1}{\pi \kappa_0} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} m(x) m(x') P_{-1}(\kappa_0 \overline{x-x'}) dx dx', \quad (7)$$

となる。ここに⁶⁾

$$P_{-1}(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x \sec \theta) \sec \theta d\theta,$$

$$P_{-2}^*(x, y) = \begin{cases} - \int_0^{\pi/2} \sin(x \sec \theta) \cos(y \sec^2 \theta \sin \theta) \sec^2 \theta d\theta, & \text{for } x < 0 \\ 0, & \dots \dots \dots \text{for } x > 0 \end{cases}$$

ここで (6) 式の積分中上式の部分は普通不定積分の形に書かれているがこの理論の近似の範囲内では上式のように取っても変りはなく且つこの積分は計算に都合のよい積分表示がある⁶⁾ ので便利であろう。

又 Newman によれば (3) 式を (5) 式に代入して θ について先に積分すれば

$$\frac{R_W}{\rho g} = \frac{\kappa_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x, y) \zeta(x', y) K(x-x') dx dx', \quad (8)$$

但し

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(\kappa_0 x \sec \theta) \sec \theta \sin^2 \theta d\theta,$$

つまり波形がわかれば造波抵抗が計算出来る訳であるが2重積分であるから計算は大変面倒である。もし波形の微分や積分が求められるならば次のようにして造波抵抗を求める事が出来る。

即ち2つの波系について

$$\int_{-\infty}^{\infty} \zeta_1(x, y) \zeta_2(x, y) dx = \kappa_0 \int_0^{\pi/2} (F_1 \bar{F}_2 + F_2 \bar{F}_1) \frac{d\theta}{\sin \theta \cos^3 \theta}, \quad (9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \zeta_1(x, y) \zeta_2(x, y) dx = 2\kappa_0 \int_0^{\pi/2} (F_1 \bar{F}_2 + F_2 \bar{F}_1) \frac{\sec^3 \theta d\theta}{1 + \sin^2 \theta}, \quad (10)$$

となる事は容易に証明出来よう。但し (9) 式右辺の積分は一般には存在しないので注意しなければならない。(9), (10) 式を使えば次式が成立つ事は容易に示されよう。

$$\frac{R_W}{\rho g} = \frac{\kappa_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x, y) \zeta_y^{**}(x, y) dy, \quad (11)$$

$$\frac{R_W}{\rho g} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x, y) \left\{ \zeta(x, y) + \frac{\kappa_0^2}{2} \zeta^{**}(x, y) \right\} dy, \quad (12)$$

ここに下添字 y は y に関する偏微分右肩添字 x は x に関する積分 $\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \right)$ を意味するものとする。

なお二つの波系に関して次の可逆性がある。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \zeta_1 \zeta_{2y}^{**} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_2 \zeta_{1y}^{**} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_1^{**} \zeta_{2y} dx, \quad (13)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \zeta_1 \zeta_2^{**} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_2 \zeta_1^{**} dy = - \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_1^* \zeta_2^* dy, \quad (14)$$

3. 最小自乗法

直接最小自乗法を使って波形解析を行うのは Pien の方法だけである。彼は縦切り方式によって充分な数の測定点を選び出しその点における波高と仮想した振幅函数による計算した波高との誤差の自乗の総和が最小になるように振幅函数を決める事を提唱した²⁾。

この方法で総和のかわりに積分をとると

$$E(X) = \int_{-X}^{\infty} \left[\zeta_E(x, y) - \frac{\kappa_0}{2\pi} \mathcal{R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F e^{-i(pz+qx)} \sec^3 \theta d\theta \right]^2 dx, \quad (15)$$

を最小にするように F を決める訳である。ここに下添字 E は今後共測定値を示すものとする。

この方法によれば縦切り方式の欠点である有限な長さで打切るための修正を必要としないと言う利点がある。

又上式は (6) により

$$E(X) = \int_{-X}^{\infty} \left[\zeta_E(x, y) - \frac{2}{\pi} \int_{-L/2}^{L/2} m(x') P_{-2}^*(\kappa_0 x - x', \kappa_0 y) dx' \right]^2 dx, \quad (16)$$

と書きかえると今度は等価特異点分布 m を求める問題となり池畑の所謂逆解析⁴⁾ が出来事になる。

更にこの際局部波系をも計算して自由波系に加えておきそれを ζ^* と記し

$$E(X) = \int_{-X}^{\infty} [\zeta_E - \zeta^*]^2 dx, \quad (17)$$

と置くと充分ではないが波高計測位置が船に近寄ってもよい事になり実験上有利である。
後述の方法に比しこの方法で不利な点は只一つ (9) 式により

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-X}^{\infty} \zeta_E^2 dx \rightarrow \infty, \quad (18)$$

となる事である。

しかしこの方法を横切り方式に適用すれば (10) 式により

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} (\zeta_E - \zeta)^2 dy = 4\kappa_0 \int_0^{\pi/2} [F\bar{F} - (F\bar{F}_E + \bar{F}F_E) + F_E\bar{F}_E] \frac{\sec^3 \theta d\theta}{1 + \sin^2 \theta}, \quad (19)$$

となって有限である。

4. 池畑の逆解析⁴⁾

池畑等は縦切り方式で得られた振幅函数から等価特異点分布を求める為の積分方程式の解法を試みた。

この問題を最適近似値問題として考えるには

$$E = \int_0^{\pi/2} |F_E - F|^2 w(\theta) d\theta, \quad (20)$$

なる積分を考えて、これが最小になるように F を決める事を考えればよい。但し w は適当な正の重味とする。特に $w = \sec^3 \theta$ とすると上式は真の値との誤差の造波抵抗を最も小さくするような近似値を求めると言う事であり合理的であろう。

実行上は

$$I = \int_0^{\pi/2} (F\bar{F}_E + \bar{F}F_E - F\bar{F}) w d\theta, \quad (21)$$

なる積分の最大値問題を解く事と同じになるので

$$\text{Max. } [I] = \frac{\pi}{\rho g \kappa_0} - R_W \quad (w = \sec^3 \theta \text{ として}) \quad (22)$$

なる事も考えるとこの形の方が便利であろう。

(1') 式中 $m(x)$ をマシウ函数に展開して上の変分問題をラグランジュの未定係数法で解く事を考えると結局 F_E を虚変数のマシウ函数 (抵抗積分に関して直交系を作っている) に展開する事に帰着し実際に池畑等の試みた解法⁴⁾ に一致する。彼等の計算例ではあまり良い結果が得られていない事から考えると w の選定にあたって造波抵抗に拘わるのは必ずしも得策ではないかも知れない。つまり実験上精度の悪い所では重味をもつと小さくして置く事が考えられる。そうすると異なった形の解法が出て来る事は自ら明らかであろう。この事は次節の考察についても言える事である。

5. 変分法

波高の測定値から (3) 又は (4) 式の積分を実行して振幅函数を求める方法は非常に手数がかかる。しかし前節、前々節におけるように振幅函数の形をあらかじめ仮定しておけ

ば最適近似を求める問題になって来て手数も省ける事が考えられる。そして又この際の誤差の評価函数として抵抗積分を採用すれば物理的にも好ましいであろう。この節ではこのような方法について述べる。

さて横切り方式では (12), (14) 式を考慮して

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left[2\zeta_E \left(\zeta + \frac{\kappa_0}{2} \zeta^{**} \right) - \zeta \left(\zeta + \frac{\kappa_0}{2} \zeta^{**} \right) \right] dy, \quad (23)$$

なる積分を考える。この変分が 0 になれば $\zeta = \zeta_E$ となり且つ

$$\text{Max. } [I] = \frac{2\pi}{\rho g} R_W, \quad (24)$$

となる。

(23) 式中振幅函数を求める時は ζ として (2) 式の表現を用いるものとする。そうすると右辺の最初の積分の演算は (4) 式のフーリエ変換と同じになる。しかし等価特異点分布を仮定して例えば (6) の表現を用いる事にするとフーリエ積分をする必要がなく且つあらかじめ仮定した特異点分布に対する ζ 等の数表を用意して置く事も出来計算を簡単化する事が可能である。

又 (24) 式によって I の極値は真の造波抵抗に対し下からの近似値を与える。

同様に縦切り方式では (11), (13) を考慮して

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} [2\zeta_E \zeta_y^{***} - \zeta \zeta_y^{***}] dx, \quad (25)$$

なる積分の極値問題を解いて最適近似を求めればよい。

この時

$$\text{Max. } [J] = \frac{2\pi}{\rho g \kappa_0^2} R_W, \quad (26)$$

となるがこの場合の難点は所謂打切修正である。附録に記すように Newman の方式に従って推定して見るとその修正量は $y/|x|$ に比例する。従ってフーリエ変換を行う場合に比して小さいと考えられる¹⁾ がやはり面倒である事は変わらない。もしも波傾斜とその積分が求められるならば 3 節の方法にならって

$$E(X) = \int_{-X}^{\infty} (\zeta - \zeta_E) (\zeta_y^{***} - \zeta_{Ey}^{***}) dx, \quad (27)$$

の最小値問題を解く事にすれば打切り修正を必要としない。そして

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \int_{-X}^{\infty} \zeta \zeta_y^{***} dx = \frac{2\pi}{\rho g \kappa_0^2} R_W, \quad (28)$$

となるが近似値が求まった後では抵抗は (7) 式等で計算する方が早い。

6. 結 論

船の後方に出来るケルビン波系を観測してその船の造波特性を調べる所謂波形解析に関するこれまでの方法を比較検討して最適近似法の観点から一つの提案を行なった。その結果をまとめて見ると次のようになろう。

1. Pien の最小自乗法は打切修正を必要とせず又完全ではないが局部波の影響も修正出来る点で極めて有利であり、さらに等価特異点分布を許容函数として選べば一層便

利であろう。

2. 池畑等の逆解析法は誤差の造波抵抗を最小にするような特異点分布を求める事に略々等価である。しかしこの方法は振幅函数を求めてから行う必要はなく直接波高の測定値から前項の或いは後項の方法によって行う方が計算技術上からも望ましい。
3. 以上の考察から抵抗積分を誤差の評価函数とする変分問題に変えて最適近似の等価特異点を求めそれから振幅函数造波抵抗を計算する方法を提案した。

参 照 文 献

- 1) Eggers, K.W.H., Sharma, S. D. and Ward, L. W.; T. S. N. A. M. E. vol. 75 (1967)
- 2) Pien, P.C. and Moore, W. L.; International Seminar on Theoretical Wave Resistance, Ann Arbor, Michigan (1963)
- 3) 池畑, 野沢; 造船協会論文集 121号 (昭和42年)
- 4) " ; " 124号 (" 44 ")
- 5) 別所, 水野; " 116号 (" 39 ")
- 6) Bessho, M; Mem. Defense Academy, vol. 4 (1964)

附録 漸近展開について

(2) 式の右辺を $|x|/y > 2\sqrt{2}$ なる場合について定常点法で漸近値を求めるとよく知られているように

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) \doteq \kappa_0 \sqrt{\frac{2}{\pi |f''(\theta_1)|}} \operatorname{Re} \left[F(\theta_1) e^{i f(\theta_1) - \pi/4 i \sec^2 \theta_1} \right] \\ + \kappa_0 \sqrt{\frac{2}{\pi |f''(\theta_2)|}} \operatorname{Re} \left[F(\theta_2) e^{i f(\theta_2) + \pi/4 i \sec^2 \theta_2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 1)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} f(\theta) &= \kappa_0 \sec^2 \theta (x \cos \theta + y \sin \theta) \\ f''(\theta) &= (1 - 2 \tan^2 \theta) f(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A}\cdot 2)$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \theta_1 \\ \tan \theta_2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{4} \left(m \pm \sqrt{m^2 - 8} \right) \quad \left. \begin{aligned} m = x/y > 2\sqrt{2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A}\cdot 3)$$

波形測定を打切るのは m のかなり大きい所であると考えてよいので更に m が充分大きいと仮定すると (A.3) から

$$\left. \begin{aligned} \tan \theta &\doteq m/2, \quad \tan \theta_2 \doteq 1/m \\ f(\theta_1) &\doteq \kappa_0 x^2 / (4y), \quad f(\theta_2) \doteq \kappa_0 x \\ f''(\theta_1) &\doteq m^2 f(\theta_1) / 2, \quad f''(\theta_2) \doteq -f(\theta_2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A}\cdot 4)$$

のようになるから (A.1) はさらに

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) \doteq \frac{m \kappa_0}{2 \sqrt{\pi \kappa_0 y}} \operatorname{Re} \left[F \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{m} \right) e^{-\pi/4 i + i \kappa_0 x^2 / y} \right] \\ + \kappa_0 \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa_0 |x|}} \operatorname{Re} \left[F \left(\frac{1}{m} \right) e^{\pi/4 i + i \kappa_0 x} \right] \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 5)$$

となる。右辺第1項の発散波と第2項の横波との振幅の比を求めると

$$\frac{F \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{m} \right)}{F \left(\frac{1}{m} \right)} \left(\frac{m}{2} \right)^{3/2} \quad (\text{A}\cdot 6)$$

となるので振幅函数が $\theta = \frac{\pi}{2}$ の近くでつまり発散波成分が充分小さくないとこれを横波のみで近似するのは難かしいように見える。しかし實際上横波のみと見なしてもあまり不都合とも思われないので Newman にならって^{*)}

$$\zeta \doteq \frac{A}{\sqrt{\kappa_0 |x|}} \cos(\kappa_0 x + \varepsilon) \quad (\text{A}\cdot 7)$$

と近似する事にすると同様な方法で

$$\zeta y^{xxx} \doteq - \frac{A}{m \kappa_0^2 \sqrt{\kappa_0 x}} \cos(\kappa_0 x + \varepsilon), \quad (\text{A}\cdot 8)$$

なる近似式が得られる。

従って

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-X} \zeta y^{xxx} dx &\doteq - \frac{A^2}{2 \kappa_0^2} \int_{X/y}^{\infty} \frac{dm}{m^2} [1 + \cos(2 \kappa_0 x + 2 \varepsilon)] \\ &\doteq - \frac{A^2 y}{2 \kappa_0^2 X}, \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 9)$$

となるから (25) 式の打ち切り修正は $O(y/X)$ であると推定出来る

“A Contribution to Ship Wave-Analysis”

By Masatoshi BESSHO*

Abstract

There are various methods of ship wave-analysis by which wave-making characteristics can be calculated from the observation of its Kelvin wave pattern. The author studies them in the stand point of the optimum approximation and obtains the following conclusion:

1. Pien's method of the least square is very much favorable, especially if we don't take the amplitude function but the equivalent singularity as its admissible function.
2. Ikehata's method to obtain the equivalent singularity from the amplitude function is very similar to the one which minimizes the wave-making resistance of the error singularity and it is recommended to use the first or third method directly for this purpose.
3. The variational method to minimize the wave-making resistance of the error of the amplitude function of the singularity is proposed.

* Professor; Dept. of Mechanical Engineering, the Defense Academy.

A Contribution to the Theory of Two-Dimensional Hydro-Planing

(Dedicated to Professor T. Tanegashima, Professor M. Honda, Professor
S. Murai and Assistant Professor E. Hattori)

By Masatoshi BESSHO* and Katsuhiro NOMURA**

(Received Feb. 28, 1970)

Abstract

The authors propose to solve the integral equation of a planing plate ordinate instead of the one of the plate inclination. This method enables us to treat wider class of the pressure distribution which does not always satisfy Kutta-Joukowski condition, for example, eigen-function of the integral equation of the plate inclination, which is verified to be the influence function of splash. The solutions are obtained and verified to agree well with the preceding results. This boundary value problem may be deduced from the variational principle of an integral which becomes Lagrangean of the system in its stationary point.

1. Introduction

In airplane wing theory, A. H. Flax introduced a variational method to solve the boundary value problem and showed that it was a systematic means of obtaining various approximate solutions.¹²⁾ However, F. Ursell and G. N. Ward showed that this method was applicable only for the linearized theory.¹¹⁾ There is the other way to construct a variational method for such problems which the one of the authors proposed. This method may be applied to the problems of bodies having various shapes and not limited to the linear boundary value problem¹⁴⁾ and moreover permits us to obtain eigen-solutions which do not satisfy with Kutta-Joukowski condition at tail end. The authors try to apply this variational method to the two-dimensional hydroplaning problem and calculate solutions numerically. In way of these calculations and formulations, they find from the reverse flow relations that the eigen function so obtained is the influence function of splash.

2. Direct Flow¹⁾⁻⁸⁾

Let us consider a water flow around a planing plate of infinite breadth on the surface.

* Professor, Department of Mechanical Engineering, the Defense Academy.

** Post-Graduate Student, Department of Mechanical Engineering, the Defense Academy.

of infinitely deep water flow as shown in Figure 1. As well known, this water flow is described approximately by the velocity potential of some pressure distribution over the water surface. The condition of water surface is

$$\lim_{y \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{d}{dz} + i\gamma \right) f(z) \right\} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \gamma \psi \right) = \begin{cases} -p(x) & \text{for } |x| < 1 \\ 0 & \text{for } |x| > 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

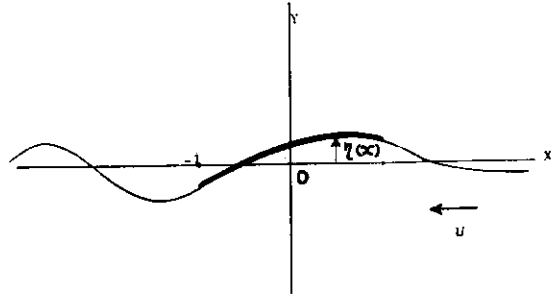


Fig. 1. Co-ordinate system.

where the co-ordinate system is normalized so the half-length of the plate as to be unit and the velocity to be unit, then $\gamma = gl/U^2$ and the pressure to be $\rho U^2 p(x)$, (ρ the water density and g the gravity constant).

$f(z)$ means the complex velocity potential, φ the velocity potential, ψ the stream function and $z = x + iy$.

They are expressed as follows:

$$f(z) = \varphi + i\psi = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 p(\xi) S\{\gamma(z - \xi)\} d\xi \quad (2.2)$$

where

$$S(\gamma z) = \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_0^\infty \frac{e^{-ikz}}{k - \gamma - i\mu} dk \quad (2.3)$$

The problem to be solved is to determine the pressure distribution $p(x)$ for given planing plate shape. This boundary condition can be written down in two ways, namely,

$$\left. \begin{aligned} \phi(x, 0) &= -\eta(x), \\ \text{and } \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad \text{for } |x| < 1 \quad (2.5)$$

where $\eta(x)$ means the ordinate of planing plate.

Putting each condition into (2.2) and its derivative, we obtain two integral equations;

$$\eta(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(\xi) S\{\gamma(x - \xi)\} d\xi \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \eta(x)}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(\xi) \left[\frac{1}{\xi - x} + \gamma S\{\gamma(x - \xi)\} \right] d\xi \quad (2.6)$$

where

$$S_o(\gamma x) + iS_s(\gamma x) = S(\gamma x) \quad (2.7)$$

In the former equation, the kernel has logarithmic singularity at origin, so that it may have unique solution and the latter is a singular equation and not uniquely determined, so that the Kutta-Joukowski condition should be added to have a unique solution. From this consideration it may be clear that the eigen solution in the latter case will be the solution for $\gamma(x) = \text{constant}$ of the former case.

3. Reversed Flow^{12, 13)}

Let us consider the water flow reversed the stream direction against the direct flow around the same planing plate and call it the reversed flow.

The water surface condition is the same as of the direct flow, namely,

$$\lim_{\gamma \rightarrow -0} \operatorname{Re} \left(\frac{d}{dz} + i\gamma \right) \tilde{f}(z) = \begin{cases} -\tilde{p}(x) & \text{for } |x| < 1 \\ 0 & \text{for } |x| > 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

and the complex velocity potential is written as

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \tilde{p}(\xi) \tilde{S}(\gamma(z-\xi)) d\xi \quad (3.2)$$

where

$$\tilde{S}(\gamma z) = \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_0^\infty \frac{e^{-ikz}}{k - \gamma + \mu i} dk \quad (3.3)$$

and sign $\sim$ over the letter means the reversed flow quantity. The kernel $\tilde{S}$ has the wave train on the positive side of the x -axis and differs from the direct flow kernel S only by the wave term as follows;

$$\tilde{S}(\gamma z) = S(\gamma z) - 2\pi i e^{-i\gamma z} \quad (3.4)$$

and that they are adjoint with each other in the following sense

$$S^*(\gamma z) = \tilde{S}(-\gamma \bar{z}) \quad (3.5)$$

where S^* means the complex conjugate value of S .

The boundary condition is now

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\phi}(x, 0) &= \eta(x) \\ \text{or } \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} \Big|_{y=0} &= -\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \Big|_{y=0} = -\frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

and the integral equation is

$$\eta(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{p}(\xi) \tilde{S}_s(\gamma(x-\xi)) d\xi \quad (3.7)$$

or

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \tilde{p}(\xi) \left[\frac{1}{x-\xi} + \gamma \tilde{S}_s \{ \gamma(x-\xi) \} \right] d\xi \quad (3.8)$$

where

$$\tilde{S} = \tilde{S}_s + i\gamma \tilde{S}_s \quad (3.9)$$

Comparing (3.7) with (2.5) and remembering the adjoint relation (3.5) we have

$$\left. \begin{aligned} p(x) &= -\tilde{p}(-x) & \text{if } \eta(x) &= \eta(-x) \\ \text{and } p(x) &= \tilde{p}(-x) & \text{if } \eta(x) &= -\eta(-x) \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

This duality is the fundamental property between the direct and reversed flow. The most important and basic properties between both flows are following integral identities called as the reversed flow theorem

$$\int_{-1}^1 p_1(x) \eta_2(x) dx = - \int_{-1}^1 \tilde{p}_2(x) \eta_1(x) dx \quad (3.11)$$

and

$$\int_{-1}^1 p_1(x) \frac{\partial \eta_2}{\partial x} dx = \int_{-1}^1 \tilde{p}_2(x) \frac{\partial \eta_1}{\partial x} dx \quad (3.12)$$

for p_1 , $\tilde{p}_2$ corresponding boundary value η_1 , η_2 respectively. p_1 and $\tilde{p}_2$ must vanish at tail end in the latter integral but not necessary in the former.

4. Variational Principle^{(12), (14)}

By the method of A. H. Flax, introducing the integral

$$J = \int_{-1}^1 \{ p + \tilde{p} \} \frac{\partial \eta}{\partial x} dx - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{p}(x) p(\xi) S'_s \{ \gamma(x-\xi) \} dx d\xi \quad (4.1)$$

where

$$S'_s \{ \gamma x \} = -\frac{1}{x} + \gamma S_s \{ \gamma x \},$$

taking its variation with regard to $\tilde{p}$ and making use of the reciprocity (3.12), we have

$$\delta J = \int_{-1}^1 \delta \tilde{p} dx \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \int_{-1}^1 p S'_s d\xi \right) \quad (4.2)$$

Then, the boundary value problem (2.6) is equivalent to the variational one of J . Here each of p and $\tilde{p}$ must vanish at each tail end because otherwise the integral does not exist.

The integral J is closely related to the linearized momentum integral and its station-

ary value is the pressure drag, so that this method is only applicable to very thin bodies.

The other way is to make use of the reciprocity (3.11). For this aim, introducing the integral

$$I = \int_{-1}^1 \{ \bar{p}(x) - \bar{p}(x) \} \eta(x) dx + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{p}(x) \bar{p}(\xi) S_e \{ \gamma(x - \xi) \} dx d\xi \quad (4.3)$$

and taking the variation, we have

$$\delta I = - \int_{-1}^1 \delta \bar{p} dx \left\{ \eta(x) - \int_{-1}^1 \bar{p} S_e d\xi \right\} \quad (4.4)$$

which is equivalent to the equation (2.5).

In this form there is no difficulty of the existence of the integral or non applicability to thick body. To understand the dynamical meaning of I , let us consider its stationary value, then by making use of the water surface conditions (2.1) and (3.1), we have

$$[I] = - \int_{-1}^1 p \phi dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\phi_y - \gamma \phi) \phi dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\phi \phi_y - \gamma \eta^2) dx \quad (4.5)$$

and by Green's theorem it becomes

$$[I] = \int_D \nabla \phi \nabla \phi dx dy - \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 dx \quad (4.6)$$

The first term of the right hand side is the kinetic energy of the disturbed flow and the second term is the potential energy and both are infinite but the difference, Lagrangean or kinetic potential,¹⁶⁾ is finite because they are equal each other in the regular wave train.

Thus it becomes clear that the proposed method is founded on the stationary property of Lagrangean, so that it may be applied to the wider classes of the problem than Flax's method except non-linear problems of free surface.

5. Relations between Various Solutions

Before entering numerical calculations, let us obtain some mutual relations between solutions deduced from the formulas (3.10), (3.11) and (3.12).

Firstly, since all boundary conditions may be represented by Fourier series, let the solutions of (2.5) and (3.7) for $\eta_n = \cos n\theta$ be

$$\left. \begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{\sin \theta} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^* \cos m\theta \\ \bar{P}_n(x) &= \frac{1}{\sin \theta} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{A}_m^* \cos m\theta \end{aligned} \right\} x = -\cos \theta \quad (5.1)$$

then, by (3.11), we have adjoint relations

$$\left. \begin{aligned} A_0^0 &= -\tilde{A}_0^0 \\ A_n^0 &= -2\tilde{A}_0^n, \quad 2A_0^n = -\tilde{A}_n^0, \quad \text{for } n \neq 0 \\ A_m^n &= -\tilde{A}_n^m \quad \text{for } n, m \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

and that by (3.10)

$$A_m^n = (-1)^{n+m+1} \tilde{A}_m^n, \quad (5.3)$$

so that

$$\left. \begin{aligned} A_m^0 &= 2(-1)^m A_0^m \quad \text{for } m \neq 0 \\ A_m^n &= (-1)^{n+m} A_n^m \quad \text{for } m, n \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Secondly, let corresponding solutions satisfying Kutta-Joukowski condition to these be

$$\left. \begin{aligned} p_n(x) &= \frac{1}{\sin \theta} \sum_{m=0}^{\infty} a_m^n \cos m\theta \\ \tilde{p}_n(x) &= \frac{1}{\sin \theta} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{a}_m^n \cos m\theta \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Their boundary conditions are

$$\frac{\partial}{\partial x} \eta_n(x) = v_n(x) = -n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \quad (5.6)$$

and Kutta-Joukowski condition means

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m^n = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \tilde{a}_m^n = 0 \quad (5.7)$$

By the same way as the above, we have

$$a_m^n = (-1)^{n+m+1} \tilde{a}_m^n \quad (5.8)$$

and

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{\mu=0}^n a_{2\mu}^{2n+1} = \frac{1}{2m+1} \sum_{\mu=0}^m a_{2\mu}^{2m+1}, \quad \text{etc.} \quad (5.9)$$

remembering the identity

$$\frac{\sin n\theta}{\sin \theta} = \sum_{\mu=0}^{n/2} \varepsilon_n \varepsilon_{n-2\mu-1} \cos(n-2\mu-1)$$

where

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = 2 \quad \text{for } n > 0$$

Thirdly, since p_n and P_n differs only with a constant in boundary values, we may write

$$\left. \begin{aligned} p_n(x) &= \alpha_n P_0(x) + P_n(x) \\ \tilde{p}_n(x) &= \tilde{\alpha}_n \tilde{P}_0(x) + \tilde{P}_n(x) \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

where α_n and $\tilde{\alpha}_n$ must be determined by the conditions (5.7), namely,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n &= - \sum_{m=0}^{\infty} A_m^n / \sum_{m=0}^{\infty} A_m^0 \\ \tilde{\alpha}_n &= - \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \tilde{A}_m^n / \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \tilde{A}_m^0 \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

and that by the adjoint relation (5.3), we know

$$\tilde{\alpha}_n = (-1)^n \alpha_n \quad (5.12)$$

Making use of this value, when we know the former solution we may obtain the latter solution as follows;

$$a_m^n = \alpha_n A_m^0 + A_m^n \quad (5.13)$$

Since the surface elevation corresponding $p_n(x)$ is $\eta = \alpha_n + \cos n\theta$, the coefficient α_n is the weighted mean elevation, that is,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (\alpha_n + \cos n\theta) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \alpha_n$$

Another equality may be deduced by making use of both reciprocities (3.11) and (3.12) as

$$-\int_{-1}^1 p_n(x) dx = \int_{-1}^1 p_n v_1 dx = \int_{-1}^1 \tilde{p}_1 v_n dx = \int_{-1}^1 \tilde{P}_0(x) (\alpha_n + \cos n\theta) dx \quad (5.14)$$

from which we have

$$\alpha_n A_0^0 = - \int_{-1}^1 \tilde{p}_1 v_n dx + \int_{-1}^1 \tilde{P}_0(x) \left(\int_{-1}^x v_n dx + 1 \right) dx \quad (5.14)$$

which permits us to calculate α_n if we know $\tilde{P}_0(x)$ and $\tilde{p}_1$.

Fourthly, let us obtain the representation of the following value

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_m^n \\ \tilde{\sigma}_n &= \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{a}_m^n = (-1)^{n+1} \sigma_n \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

which is necessary to estimate the splash resistance as seen in the following paragraph.

It is also written as

$$\sigma_n = 2 \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}^n = -2 \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1}^n \quad (5.16)$$

because of the condition (5.7).

Then, in the same way as the above, we obtain successively

$$\frac{\sigma_n}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^m a_{2m}^n = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p_n(x) \frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin \theta} d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\pi} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2m+1} \int_{-1}^1 p_n v_{2m+1} dx \\
&= -\frac{1}{\pi} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2m+1} \int_{-1}^1 \hat{p}_{2m+1} v_n dx \\
&= -\frac{1}{\pi} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\tilde{\alpha}_{2m+1}}{2m+1} \int_{-1}^1 \tilde{P}_0 v_n dx + \frac{1}{2m+1} \int_{-1}^1 \tilde{P}_{2m+1} v_n dx \right).
\end{aligned}$$

The second term of the last line tends to zero, but the first term tends to

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\alpha}_{2m+1}}{2m+1} = -\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{2m+1}}{2m+1} = -\frac{\sigma_1}{2A_0^0} \quad (5.17)$$

by making use of (5.14).

Thus we have finally

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1}{\pi A_0^0} \int_{-1}^1 \tilde{P}_0(x) v_n(x) dx \quad (5.18)$$

which permit us to calculate σ_n when we know $\tilde{P}_0$ and σ_1 which is the value for the flat plate.

Fifthly and lastly, let us consider the solutions for $\eta = \cos \gamma x$ and $\sin \gamma x$ and write

$$\left. \begin{aligned} P_c(x) &= \frac{1}{\sin \theta} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^c \cos m\theta \\ P_s(x) &= \frac{1}{\sin \theta} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^s \cos m\theta \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

Corresponding results satisfying Kutta-Joukowski condition may be written as

$$p_{c,s}(x) = \frac{1}{\sin \theta} \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{c,s} \cos m\theta = \alpha_{c,s} P_0(x) + P_{c,s}(x) \quad (5.20)$$

Since

$$e^{i\gamma x} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(\gamma) \cos n\theta$$

where J_n means Bessel function, we have clearly

$$\left. \begin{aligned} A_m^c &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-1)^n A_m^{2n} J_{2n}(\gamma) \\ A_m^s &= -2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_m^{2n+1} J_{2n+1}(\gamma) \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

and corresponding equations for $a_m^{c,s}$.

This means that these solutions can be calculated from all p_n or P_n solutions. We call these diffraction potentials in the following.

6. Lift, Moment and Drag^{8,9)}

The lift L , moment M and pressure drag D acting on the planing plate are given as follows;

$$\frac{L}{\rho U^2 l} = C_L = \int_{-1}^1 p(x) dx \quad (6.1)$$

$$\frac{M}{\rho U^2 l^2} = C_M = \int_{-1}^1 p(x) x dx \quad (6.2)$$

and

$$\frac{D_p}{\rho U^2 l} = C_{D_p} = \int_{-1}^1 p(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} dx \quad (6.3)$$

The drag is composed of two parts, that is, the wave-making and splash,

$$D_p = D_w + D_s \quad (6.4)$$

The wave drag is proportional to the square of the amplitude of the regular wave train and given as

$$\frac{D_w}{\rho U^2 l} = C_w = \gamma |F(\gamma)|^2 \quad (6.5)$$

where

$$F(\gamma) = \int_{-1}^1 p(x) e^{i\gamma x} dx \quad (6.6)$$

On the other hand, the splash drag is given as

$$\frac{D_s}{\rho U^2 l} = C_s = \frac{\pi}{4} \sigma^2 \quad (6.7)$$

where

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad (6.8)$$

when

$$p(x) = \frac{1}{\sin \theta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta$$

Applying the reversed flow theorem (3.12), we have Munk's theorem for lift and moment as

$$C_L = - \int_{-1}^1 \tilde{p}_1(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} dx \quad (6.9)$$

$$C_M = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \tilde{p}_2(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} dx \quad (6.10)$$

In the same way, applying (3.11), we have similar results as

$$C_L = - \int_{-1}^1 \tilde{P}_0(x) \eta(x) dx \quad (6.11)$$

$$C_M = \int_{-1}^1 \tilde{P}_1(x) \eta(x) dx \quad (6.12)$$

These formulas enable us to calculate the lift and moment of the planing plate of arbitrary shape if we know only the pressure distribution of a flat plate.

Similarly, since we have for splash drag from (5.18)

$$\sigma = \frac{\sigma_1}{\pi A_0} \int_{-1}^1 \tilde{P}_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} dx \quad (6.13)$$

we need only $\tilde{P}_0$. For wave drag, since we have

$$F(\gamma) = \frac{1}{i\gamma} \int_{-1}^1 \{ \tilde{p}_e(x) + i\tilde{p}_s(x) \} \frac{\partial \eta}{\partial x} dx = - \int_{-1}^1 \{ \tilde{P}_e + i\tilde{P}_s \} \eta(x) dx \quad (6.14)$$

we need only the diffraction potential.

7. Calculations

If we try to solve the boundary value problem by expanding η and p in Fourier series and applying the variational principle, the obtained equations are not other than the one of the usual Fourier expansion method. In another word, the method to solve by expanding into orthogonal series is justified by the variational principles in this case, so that the error in the drag or Lagrangean may be the least.

Preliminary calculations are carried out by Flax's method for a flat plate, putting $p(x) = a_0^{1/2} \tan \theta/2$ and making use of Miller's table.¹⁰⁾ The results are very good for small γ and given in Table 10 compared with other author's results.

Now, it may be convenient for calculation to decompose η into odd and even part, because numbers of the unknown of the system of linear equation reduce to half. Hence, standing c or s on the shoulder for the even or odd part respectively, we may write the equation (2.5) as

$$\left. \begin{aligned} \eta^e(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p^e(\xi) \bar{S}_e[\gamma(x-\xi)] d\xi - F^e(\gamma) \cos \gamma x \\ \eta^s(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p^s(\xi) \bar{S}_s[\gamma(x-\xi)] d\xi + F^s(\gamma) \sin \gamma x \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

where

$$\bar{S}_o(\gamma x) = P.V. \int_0^\infty \frac{\cos kx}{k-\gamma} dk, \quad (7.2)$$

and

$$F^o(\gamma) + iF^s(\gamma) = \int_{-1}^1 \{p^o(x) + ip^s(x)\} e^{i\gamma x} dx \quad (7.3)$$

These equations may be decomposed once more, if we put

$$\begin{aligned} p^o(x) &= \bar{p}^o(x) + F^o(\gamma) \bar{p}^o(x) \\ p^s(x) &= \bar{p}^s(x) - F^o(\gamma) \bar{p}^s(x) \end{aligned} \quad (7.4)$$

we have four equations as follows;

$$\eta^j(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \bar{p}^j(\xi) \bar{S}_o(\gamma(x-\xi)) d\xi, \quad j=c \text{ or } s \quad (7.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \\ \sin \end{aligned} \right\} (\gamma x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left\{ \begin{aligned} \bar{p}^o \\ \bar{p}^s \end{aligned} \right\} \bar{S}_o d\xi \quad (7.6)$$

Solving these equations, determining F^o and F^s by (7.3) as

$$\begin{aligned} F^o(\gamma) &= (\bar{F}^o + \bar{\varphi}^o \bar{F}^s) / (1 + \bar{\varphi}^o \bar{\varphi}^s) \\ F^s(\gamma) &= (\bar{F}^s - \bar{\varphi}^s \bar{F}^o) / (1 + \bar{\varphi}^o \bar{\varphi}^s) \end{aligned} \quad (7.7)$$

where

$$\begin{aligned} \bar{F}^o + i\bar{F}^s &= \int_{-1}^1 (\bar{p}^o + i\bar{p}^s) e^{i\gamma x} dx \\ \bar{\varphi}^o + i\bar{\varphi}^s &= \int_{-1}^1 (\bar{p}^o + i\bar{p}^s) e^{i\gamma x} dx \end{aligned} \quad (7.8)$$

and adding them in (7.4), we have finally the solutions. The actual calculations are carried out by expanding the above equations into Fourier series as

$$\bar{p}^o(x) = \frac{1}{\sin \theta} \sum_{m=0}^1 \bar{B}_{2m} \cos 2m\theta, \quad \bar{p}^s(x) = \frac{1}{\sin \theta} \sum_{m=0}^1 \bar{B}_{2m+1} \cos (2m+1)\theta \quad (7.9)$$

and

$$\bar{p}_n^o(x) = \frac{1}{\sin \theta} \sum_{m=0}^1 \bar{A}_{2m}^n \cos 2m\theta, \quad \bar{p}_n^s(x) = \frac{1}{\sin \theta} \sum_{m=0}^1 \bar{A}_{2m+1}^n \cos (2m+1)\theta \quad (7.10)$$

for values

$$\eta = \cos n\theta, \quad n=0, 1, 2, 3.$$

The necessary coefficients

$$C_{n,m} = P.V. \int_0^\infty \frac{J_n(k) J_m(k)}{k-\gamma} dk \quad (7.11)$$

or

$$C_{2n,2m} = \frac{(-1)^{n+m}}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \bar{S}_e \{ \gamma (\cos \theta - \cos \vartheta) \cos 2n\theta \cdot \cos 2m\vartheta d\theta d\vartheta$$

$$C_{2n+1,2m+1} = \frac{(-1)^{n+m}}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \bar{S}_e \{ \gamma (\cos \theta - \cos \vartheta) \cos (2n+1)\theta \cos (2m+1)\vartheta d\theta d\vartheta \quad (7.12)$$

are calculated numerically from Miller's table¹⁰⁾ and shown in Table 1. The number of the unknown in this case are two, and to solve them is very easy and the results are shown in Table 2 and 3.

After obtaining these coefficients, putting them into (7.8), we may obtain

$$\bar{\varphi}^e = \pi \sum_{m=0}^1 (-1)^m \bar{B}_{2m} J_{2m}(\gamma), \quad \bar{\varphi}^s = -\pi \sum_{m=0}^1 (-1)^m B_{2m+1} J_{2m+1}(\gamma) \quad (7.13)$$

Table 1. Coefficient $C_{n,m}$

γ	$C_{0,0}$	$C_{0,2}=C_{2,0}$	$C_{2,2}$	$C_{1,1}$	$C_{1,3}=C_{3,1}$	$C_{3,3}$
0.05	3.0435	0.0080	0.2544	0.5233	0.0015	0.1685
0.1	2.2770	0.0170	0.2590	0.5489	0.0031	0.1704
0.2	1.4296	0.0357	0.2690	0.6026	0.0067	0.1744
0.5	0.0643	0.0759	0.3077	0.7450	0.0223	0.1886
1.0	-1.0471	0.0124	0.4048	0.7701	0.0644	0.2197
2.0	-0.8882	-0.5148	0.5264	-0.0426	0.0658	0.3376

Table 2. Coefficient $\bar{A}_m^n$

γ	$\bar{A}_0^0$	$\bar{A}_2^0$	$\bar{A}_0^2$	$\bar{A}_2^2$	$\bar{A}_1^1$	$\bar{A}_3^1$	$\bar{A}_1^3$	$\bar{A}_3^3$
0.05	0.3286	0.0104	0.0052	1.9660	0.9555	0.0083	0.0083	2.8537
0.1	0.4394	0.0289	0.0144	1.9318	0.9111	0.0164	0.0164	2.9343
0.2	0.7018	0.0931	0.0466	1.8653	0.8301	0.0318	0.0318	2.8683
0.5	21.9184	5.4043	2.7022	2.2911	0.6736	0.0797	0.0797	2.6603
1.0	-0.9547	-0.0293	-0.0146	1.2347	0.6656	0.1950	0.1950	2.3330
2.0	-0.7185	0.7027	0.3514	0.6062	-9.0251	-1.7579	-1.7579	1.1386

Table 3. Coefficient $\bar{B}_n$

γ	$\bar{B}_0$	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_2$	$\bar{B}_3$
0.05	0.3284	-0.0478	0.0091	-0.0004
0.1	0.4383	-0.0910	0.0240	-0.0015
0.2	0.6943	-0.1652	0.0736	-0.0054
0.5	20.4044	-0.3260	4.9315	-0.0250
1.0	-0.7272	-0.5782	-0.2860	-0.0803
2.0	-0.4088	9.9566	-0.2704	2.3213

and

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_{2n}^c &= \pi \sum_{m=0}^1 (-1)^m \bar{A}_{2m}^{2n} J_{2m}(\gamma), \quad \bar{F}_{2n}^s = 0 \\ \bar{F}_{2n+1}^c &= 0, \quad \bar{F}_{2n+1}^s = -\pi \sum_{m=0}^1 (-1)^m \bar{A}_{2m+1}^{2n+1} J_{2m+1}(\gamma) \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

and they are shown in Table 4 and 5.

Putting these value into (7.7), we may obtain

$$\left. \begin{aligned} F_{2n}^c &= \frac{\bar{F}_{2n}^c}{1 + \bar{\varphi}^c \bar{\varphi}^s}, \quad F_{2n}^s = -\frac{\bar{\varphi}^s \bar{F}_{2n}^c}{1 + \bar{\varphi}^c \bar{\varphi}^s} \\ F_{2n+1}^c &= \frac{\bar{\varphi}^c \bar{F}_{2n+1}^s}{1 + \bar{\varphi}^c \bar{\varphi}^s}, \quad F_{2n+1}^s = \frac{\bar{F}_{2n+1}^s}{1 + \bar{\varphi}^c \bar{\varphi}^s} \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

shown in Table 6.

Lastly, we have the expansion coefficients of $P_n(x)$ in the form (5.1) by (7.4) as

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_{2m}^{2n} &= \bar{A}_{2m}^{2n} + F_{2n}^s \bar{B}_{2m}, \quad A_{2m+1}^{2n} = -F_{2n}^c \bar{B}_{2m+1} \\ A_{2m}^{2n+1} &= F_{2n+1}^s \bar{B}_{2m}, \quad A_{2m+1}^{2n+1} = \bar{A}_{2m+1}^{2n+1} - F_{2n+1}^c \bar{B}_{2m+1} \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

which are shown in Table 7.

Then, calculating α_n by (5.11), we may obtain a_m^n shown in Table 9 by (5.13). The results are compared with other author's results in Table 10 and Figure 2 and seen agreement to be good. Finally, Figure 3 shows the curves of $P_0(x)$ which is the eigen function of the equation (2.6) and the influence function of splash in the sense of (6.13). We may

Table 4. Coefficient $\bar{F}_n^c$ and $\bar{F}_n^s$

γ	$\bar{F}_0^c$	$\bar{F}_2^c$	$\bar{F}_1^s$	$\bar{F}_3^s$
0.05	1.0316	0.0144	-0.0750	-0.0006
0.1	1.3768	0.0376	-0.1429	-0.0024
0.2	2.1813	0.1156	-0.2595	-0.0084
0.5	64.1023	7.7466	-0.5120	-0.0393
1.0	-2.2844	-0.4809	-0.9082	-0.1262
2.0	-1.2843	-0.4248	15.6398	3.7466

Table 5. Coefficient $\bar{\varphi}^c$ and $\bar{\varphi}^s$

γ	$\bar{\varphi}^c$	$\bar{\varphi}^s$
0.05	1.0301	0.0038
0.1	1.3733	0.0143
0.2	2.1584	0.0516
0.5	59.6840	0.2479
1.0	-1.6448	0.7944
2.0	0.0122	-17.0995

Table 6. Coefficient F_n^c and F_n^s

γ	F_0^c	F_1^c	F_2^c	F_3^c	F_0^s	F_1^s	F_2^s	F_3^s
0.05	1.0277	-0.0770	0.0143	-0.0006	-0.0039	-0.0747	-0.0001	-0.0006
0.1	1.3504	-0.1925	0.0369	-0.0032	-0.0193	-0.1402	-0.0005	-0.0023
0.2	1.9626	-0.5039	0.1040	-0.0164	-0.1013	-0.2335	-0.0054	-0.0075
0.5	4.0584	-1.9347	0.4904	-0.1484	-1.0060	-0.0324	-0.1216	-0.0025
1.0	7.4519	-4.8730	1.5687	-0.6769	-5.9194	2.9626	-1.2461	0.4115
2.0	-1.6233	0.2414	-0.5369	0.0578	-27.7570	19.7673	-9.1806	4.7354

Table 7. Coefficient A_n^m

γ	A_0^0	A_1^0	A_2^0	A_3^0	A_0^1	A_1^1	A_2^1	A_3^1
0.05	0.3273	0.0491	0.0103	0.0004	-0.0245	0.9519	-0.0007	0.0076
0.1	0.4309	0.1229	0.0284	0.0020	-0.0614	0.8936	-0.0034	0.0161
0.2	0.6314	0.3242	0.0857	0.0105	-0.1621	0.7469	-0.0172	0.0291
0.5	1.3910	1.3229	0.4430	0.1015	-0.6614	0.0429	-0.1599	0.0314
1.0	3.3497	4.3084	1.6636	0.5985	-2.1543	-2.1518	-0.8473	-0.1964
2.0	10.6289	16.1623	8.2090	3.7681	-8.0812	-11.4284	-5.3457	-2.3182

γ	A_0^2	A_1^2	A_2^2	A_3^2	A_0^3	A_1^3	A_2^3	A_3^3
0.05	0.0052	0.0007	1.9660	0.0000	-0.0002	0.0083	0.0000	2.8537
0.1	0.0142	0.0034	1.9318	0.0001	-0.0010	0.0161	-0.0001	2.9343
0.2	0.0428	0.0172	1.8649	0.0006	-0.0053	0.0291	-0.0006	2.8682
0.5	0.2215	0.1599	1.6916	0.0123	-0.0507	0.0314	-0.0123	2.6566
1.0	0.8915	0.9059	1.5911	0.1260	-0.2992	-0.1964	-0.1177	2.2787
2.0	4.1045	5.3457	3.0889	1.2463	-1.9359	-2.3336	-1.2806	1.0044

Table 8. Coefficient α_n

γ	α_0	α_1	α_2	α_3
0.05	-1.0000	-2.4132	-5.0931	-7.3918
0.1	-1.0000	-1.4460	-3.3366	-5.0481
0.2	-1.0000	-0.5673	-1.8305	-2.7490
0.5	-1.0000	0.2293	-0.6400	-0.8056
1.0	-1.0000	0.5393	-0.3543	-0.1679
2.0	-1.0000	0.7009	-0.3556	0.1173

Table 9. Coefficient a_m^n

γ	a_0^1	a_1^1	a_2^1	a_3^1	a_0^2	a_1^2	a_2^2	a_3^2
0.05	-0.8144	0.8334	-0.0256	0.0067	-1.6619	-0.2493	1.9133	-0.0021
0.1	-0.6846	0.7159	-0.0444	0.0131	-1.4237	-0.4066	1.8371	-0.0067
0.2	-0.5203	0.5630	-0.0658	0.0231	-1.1130	-0.5763	1.7081	-0.0187
0.5	-0.3425	0.3462	-0.0583	0.0536	-0.6687	-0.6867	1.4080	-0.0527
1.0	-0.3479	0.1717	0.0499	0.1264	-0.2952	-0.6024	1.0017	-0.0860
2.0	-0.6312	-0.0999	0.4082	0.3229	0.3251	-0.4014	0.1699	-0.0936

γ	a_0^3	a_1^3	a_2^3	a_3^3
0.05	-2.4197	-0.3545	-0.0764	2.8506
0.1	-2.1765	-0.6042	-0.1434	2.9241
0.2	-1.7411	-0.8621	-0.2360	2.8393
0.5	-1.1713	-1.0343	-0.3692	2.5748
1.0	-0.8616	-0.9196	-0.3970	2.1782
2.0	-0.6896	-4.2287	-0.3181	1.4462

Table 10. Comparison with other Methods

	By 1 term Flax's Method	By Squire			
γ	$-a_0^1 = a_1^1$	$-a_0^1$	a_1^1	$-a_2^1$	a_3^1
0.05	0.8144	0.7840	0.8084	0.0370	0.0126
0.1	0.6840	0.6762	0.7152	0.0614	0.0224
0.2	0.5201	0.5112	0.5643	0.0912	0.0383
0.5	0.3375	0.3335	0.3513	0.1003	0.0825
1.0	0.4050	0.3428	0.1703	-0.0029	0.1695
2.0	-0.2604	0.6514	-0.1122	-0.3680	0.3956

	By Maruo			
γ	a_0^1	a_1^1	a_2^1	a_3^1
0.1	0.6829	-0.7163	0.0447	-0.0163
0.2	0.5185	-0.5640	0.0660	-0.0284
0.3	0.4248	-0.4683	0.0734	-0.0399
0.4	0.3704	-0.4005	0.0704	-0.0520
0.5	0.3392	-0.3479	0.0605	-0.0649

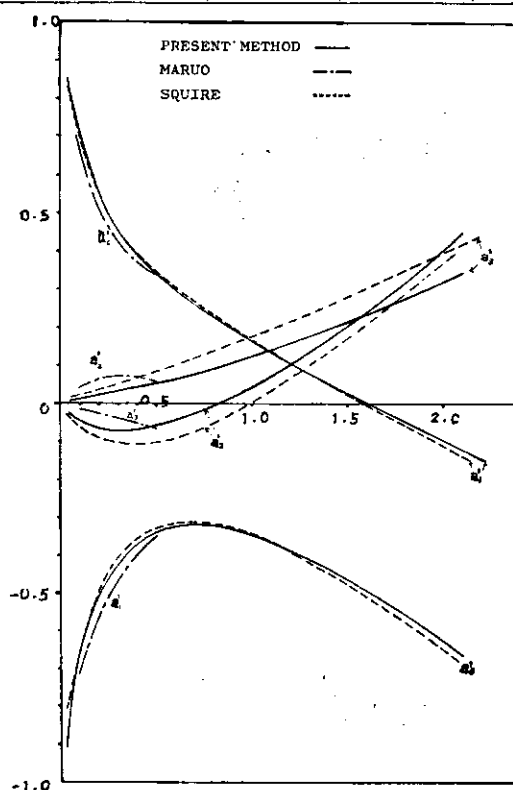


Fig. 2. Comparison with other author's results.

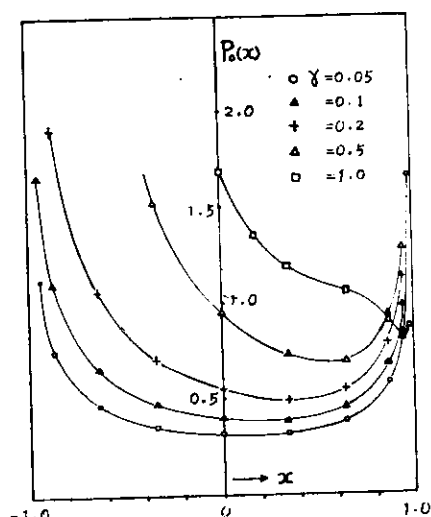


Fig. 3. Influence function for splash $P_0(x)$.

imagine easily the relation between the shape of plate and the splash from this figure.

8. Conclusion

Many works have been done about the problem of the hydro-planing and there is hardly anything left. We try to reconstruct here the boundary value problem on the basis of variational principles.

The conclusions are summarized as follows;

1) The integral equation may be written in two ways. The one represents the ordinate of planing plate and the other its inclination.

2) All preceding works treat with the equation of inclination. Flax's variational principle may be applied to it and the stationary value of the integral to be considered is the drag. The pressure distribution must satisfy Kutta-Joukowski condition.

3) The proposed method may be applied to the integral equation for the plate ordinate instead of the inclination and the integral to be extremized is Lagrangean. The pressure distribution may not always satisfy Kutta-Joukowski condition, namely, this method contains wider class of the pressure distribution than the former.

4) The eigen function of the integral equation for plate inclination is calculated by the latter method and it is found that this eigen function is also the influence function of splash.

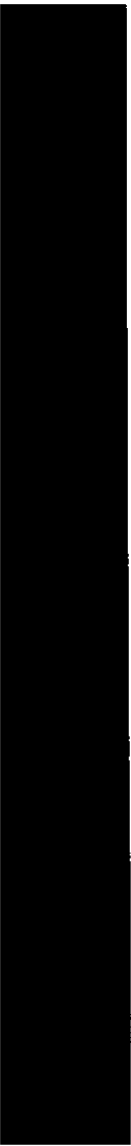
5) The numerical calculations are carried out and found to be in good agreement with the preceding results.

References

- 1) J. V. Wehausen and E. V. Laitone; Surface Waves, Handbuch der Physik, Bd. 9, 1960.
- 2) L. I. Sedov; Two-Dimensional Problems in Hydrodynamics and Aerodynamics, Interscience Publ. New York, 1965.
- 3) H. Maruo; Journal of Zosen Kyokai, vol. 78, 1947.
- 4) H. Maruo; Journal of Zosen Kyokai, vol. 81, 1949.
- 5) H. Maruo; Journal of Zosen Kyokai, vol. 91, 1956.
- 6) H. Maruo; Journal of Zosen Kyokai, vol. 92, 1957.
- 7) H. Maruo; Journal of Zosen Kyokai, vol. 105, 1959.
- 8) H. Maruo; Memo. of Yokohama National University, Department of Engin. vol. 1, 1951.
- 9) H. B. Squire; Proc. Roy. Soc., A, vol. 243, 1958.
- 10) G. F. Miller; Proc. Roy. Soc., A, vol. 243, 1958.

A Contribution to the Theory of Two-Dimensional Hydro-Planing

- 11) F. Ursell and G.N. Ward; Q. J. Mech. and Appl. Mech., vol. 3, 1950.
- 12) A. H. Flax; J. of the Aeron. Science, vol. 19, 1952.
- 13) T. Hanaoka; Proc. of 9-th Japan Natio. Congress for Appl. Mech., 1959.
- 14) M. Bessho; Memo. of the Defense Academy, vol. 8, 1968.
- 15) J. C. Luke; J. of Fluid Mech., vol. 27, 1967.



A Contribution to The Theory of Free Surface Flow

By Masatoshi BESSHO*

(Received Aug. 31, 1970)

Synopsis

There is a variational principle equivalent to the boundary value problem of a flow with free surface making use of Lagrangean. In this paper, this principle is transformed to the one of the doublet or circulation strength. Then, for example, it is found that the circulation strength over the free surface without gravity must be constant. Such simple relation enables us to construct a new integral equation for the flow with free surface.

Introduction

There is a variational principle for the water flow with free surface that Lagrangean of the actual flow is minimum.²⁾ This variational principle can be transformed so that the variational problem could be equivalent to the boundary value problem.^{3,5)} This method is very attractive but seems not to be practical for numerical analysis.⁵⁾ In this paper, we try to construct a variational principle for the doublet or circulation distribution over every surfaces equivalent to this boundary value problem. Then, we will find that the singularity density over free surface is very simple and given by the coordinate of that surface. This knowledge will introduce us to a new integral equation of this boundary value problem but it will be similar as Trefftz's²⁾ and Zwick's.⁴⁾

1. Variational Principle

Let us consider a functional J with respect to a flow outside a body and cavity as in Fig. 1:^{3,5)}

$$J = \frac{1}{2} \iint_{B+F} \mu(\phi_\nu + 2x_\nu) dS - \frac{c^2}{2} V - \frac{g}{2} \iint_{B+F \cap \sigma - F_L} \eta^2 dx dz, \quad (1.1)$$

where ϕ means a velocity potential with doublet distribution μ over B and F , that is, the the body surface and free surface as follows:

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{B+F} \mu(Q) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r(P, Q)} dS(Q), \quad (1.2)$$

* Professor: Dept. of Mechanical Engineering, The DEFENSE ACADEMY.

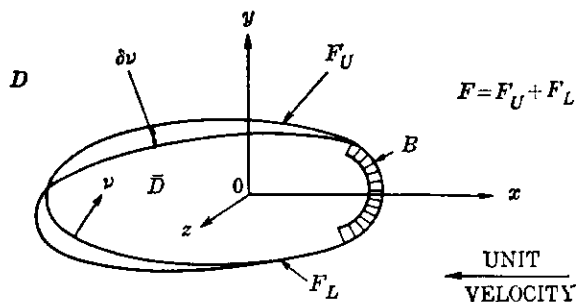


Fig. 1.

V the volume of the domain $\bar{D}$, that is, the body plus cavity:

$$V = \iiint_{\bar{D}} d\tau, \quad (1.3)$$

g the gravity constant, η the vertical location of the free surface and C a constant velocity defined as

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}q^2 + g\eta = \frac{c^2}{2}, \quad (1.4)$$

where p means the pressure, ρ the density of the fluid and

$$q^2 = (V\Phi)^2, \quad (1.5)$$

$$\Phi = x + \phi. \quad (1.6)$$

Now, the velocity potential ϕ is regular in D and $\bar{D}$ by definition and that has a continuous normal derivative on B and F but jumps its value on crossing B and F as follows:

$$\phi_v^+ = \phi_v^- \quad \text{on } B \text{ and } F, \quad (1.7)$$

$$\mu = \phi^- - \phi^+ \quad \text{on } B \text{ and } F, \quad (1.8)$$

where $\pm$ sign on the shoulder means that its value stands for the one of the outward domain D (+) or the inner one $\bar{D}$ (-).

Putting (1.7) and (1.8) into (1.1), we have

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \iint_{B+F} \phi^- (\phi_v^- + 2x_v) dS - \frac{1}{2} \iint_{B+F} \phi^+ (\phi_v^+ + 2x_v) dS - \frac{c^2}{2} V - \frac{g}{2} \iint_{B+F} \eta^2 dx dz \\ &= - \iint_{\bar{D}} \frac{1}{2} [(V\phi^-)^2 + 2\phi_x^-] d\tau - \frac{1}{2} \iint_D [(V\phi^+)^2 + 2\phi_x^+] d\tau - \frac{c^2}{2} \iint_{\bar{D}} d\tau - g \iint_{\bar{D}} y d\tau \\ &= - \frac{1}{2} \iint_{\bar{D}} [(V\Phi^+)^2 - 1] d\tau - \frac{1}{2} \iint_D [(V\Phi^-)^2 - 1 + c^2 - 2gy] d\tau. \end{aligned} \quad (1.9)$$

When ϕ changes slightly by $\delta\phi$ and free surface deflects by $\delta\nu$ the variation of J becomes

$$\begin{aligned}\delta J &= - \iiint_B \nabla \delta\phi^+ \nabla \Phi^+ d\tau - \iiint_{\bar{D}} \nabla \delta\phi^- \nabla \Phi^- d\tau - \frac{1}{2} \iint_F [(\nabla \Phi^+)^2 - (\nabla \Phi^-)^2 - c^2 + 2gy] \delta\nu dS \\ &= - \iint_{B+F} \delta\mu(\phi_\nu + x_\nu) dS - \frac{1}{2} \iint_F [(\nabla \Phi^+)^2 - (\nabla \Phi^-)^2 - c^2 + 2gy] \delta\nu dS, \end{aligned} \quad (1.10)$$

where

$$\delta\mu = \delta\phi^- - \delta\phi^+. \quad (1.11)$$

Then the stationary conditions for J are^{3),5)}

$$\phi_\nu + x_\nu = 0 \quad \text{on } B \text{ and } F, \quad (1.12)$$

and

$$\frac{1}{2} \{(\nabla \Phi^+)^2 - (\nabla \Phi^-)^2\} + gy = \frac{c^2}{2}. \quad (1.13)$$

If the former condition is satisfied, the inner potential Φ^- must be zero;

$$\Phi^- = x + \phi^- = 0 \quad \text{in } \bar{D}, \quad (1.14)$$

because its normal derivative vanishes on B and F and it is regular throughout the finite domain $\bar{D}$.

Hence, by (1.8), we have

$$\mu = \phi^- - \phi^+ = -(x + \phi^+) = -\Phi^+. \quad (1.15)$$

Then, the latter condition becomes as

$$\frac{1}{2} q^2 + gy = \frac{c^2}{2} \quad \text{on } F, \quad (1.16)$$

which means the constancy of the pressure.

Moreover, the doublet density becomes by (1.12), (1.15) and (1.16) as

$$\frac{1}{2} (\mu_s^2 + \mu_t^2) = \frac{c^2}{2} - g\eta \quad \text{on } F, \quad (1.17)$$

where s and t means the orthogonal curvilinear co-ordinates over the surface F .

Inversely, if we assume the doublet density on F as (1.17) beforehand, we have

$$\begin{aligned}\delta J &= - \iint_B \delta\mu(\phi_\nu + x_\nu) dS - \frac{1}{2} \iint_F [(\Phi_\nu^+)^2 - (\Phi_\nu^-)^2] \\ &\quad + \{(\Phi_s^+)^2 - (\Phi_s^-)^2 - \mu_s^2\} + \{(\Phi_t^+)^2 - (\Phi_t^-)^2 - \mu_t^2\} \delta\nu dS \\ &= - \iint_B \delta\mu(\phi_\nu + x_\nu) dS + \iint_F (\mu_s \Phi_s^- + \mu_t \Phi_t^-) \delta\nu dS, \end{aligned} \quad (1.18)$$

because it might be $\delta\mu = 0$ on F , that is, μ is given by (1.17) and there is the continuity (1.7).

Then, the stationary conditions of J are

$$\phi_\nu + x_\nu = 0 \quad \text{on } B, \quad (1.19)$$

$$\mu_s \Phi_s^- + \mu_t \Phi_t^- = 0 \quad \text{on } F. \quad (1.20)$$

Since μ is not vanish identically, the latter condition means

$$\Phi^- = 0 \quad \text{on } F, \quad (1.21)$$

but this means also that Φ^- must be identically zero in $\bar{D}$ and

$$\phi^- = \Phi^- - x = -x$$

that is,

$$\phi_\nu^- = -x_\nu = \phi_\nu^+ \quad \text{on } F. \quad (1.22)$$

Thence, the constant pressure condition (1.16) is satisfied naturally. In any way, the stationary value of J is²⁾⁵⁾

$$[J] = \frac{1}{2} \iiint_D (\nabla \phi)^2 d\tau - \frac{c^2 - 1}{2} V - \frac{g}{2} \iint_{B+F \cup \Gamma-L} \eta^2 dx dz. \quad (1.23)$$

The doublet density over F of (1.17) is determined if the surface F is given and is very simple. Hence, it may be preferable to select the latter procedure for the practical analysis.

Moreover, from these observation, we may obtain the following integral equation:

$$\phi_\nu(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{B+F} \mu(Q) \frac{\partial^2}{\partial \nu_P \partial \nu_Q} \frac{1}{r(P, Q)} dS(Q) = -x_\nu(P), \quad (1.24)$$

where μ on F is to be integrated from (1.17).

In this equation, the unknowns are μ on B and the form and location of F . If this equation is satisfied by some μ and F , the conditions (1.12) and (1.14) are fulfilled and then, by (1.15), (1.16) and (1.17), the pressure condition does also.

It will be seen in the later section that this equation is also consistent with our linear theory.

The integration of μ over F by (1.17) may not be so simple for a general surface but is very simple for a rotationally symmetric flow and a two-dimensional flow.

Finally it is noticed that the integral equation (1.18) is applicable for a infinite cavity although the variational problem is not for such case.²⁾⁵⁾

2. Two-Dimensional Problem

In two-dimensional case, it is preferable and simple to take up the circulation distribution instead of the doublet.

The functional becomes

$$J = \frac{1}{2} \int_{B+F} \gamma(\psi+2y) dS - \frac{c^2}{2} A - \frac{g}{2} \int_{B+F \cup \Gamma_L} \eta^2 dx, \quad (2.1)$$

where

$$\phi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{B+F} \gamma(Q) \log r(P, Q) dS(Q), \quad (2.2)$$

$$A = \iint_{\bar{D}} dx dy, \quad (2.3)$$

and c given also by (1.4) but

$$q^2 = (\nabla \Psi)^2, \quad (2.4)$$

$$\Psi = \phi + y. \quad (2.5)$$

For the simplicity, let us assume

$$\int_{B+F} \gamma dS = 0, \quad (2.6)$$

so that ϕ would be one valued.

From (2.2), we have

$$\phi_v^- - \phi_v^+ = \gamma, \quad (2.7)$$

and

$$\phi^- = \phi^+. \quad (2.8)$$

In a similar way as the preceding, since we have

$$J = -\frac{1}{2} \iint_D [(\nabla \phi^+)^2 + 2\phi_v^+] dx dy - \frac{1}{2} \iint_{\bar{D}} [(\nabla \phi^-)^2 + 2\phi_v^- + c^2 - 2gy] dx dy, \quad (2.9)$$

taking the variation as in the preceding, we have

$$\delta J = \iint_{B+F} \delta \gamma (\phi + y) dS - \frac{1}{2} \int_F [(\nabla \phi^+)^2 - (\nabla \phi^-)^2 - c^2 + 2g\eta] \delta v dS, \quad (2.10)$$

where

$$\delta \gamma = \delta \phi_v^- - \delta \phi_v^+, \quad (2.11)$$

from which we can conclude that the stationary conditions of J are

$$\phi + y = 0 \quad \text{on } B+F, \quad (2.12)$$

then

$$\Psi^- = 0, \quad \phi = -y \quad \text{in } \bar{D}, \quad (2.13)$$

and

$$\frac{1}{2} q^2 + g\eta = \frac{c^2}{2}. \quad (2.14)$$

The circulation strength, then, becomes

$$\gamma^2 = c^2 - 2g\gamma. \quad (2.15)$$

Inversely, if we assume that the circulation strength over F is given by (2.15), we have for the stationary conditions of J the boundary condition (2.12) and consequently (2.14) as in the preceding. The stationary value of J becomes

$$[J] = \frac{1}{2} \iint_D (\nabla \phi)^2 dx dy - \frac{c^2 - 1}{2} A - \frac{g}{2} \int_{B+F_U-F_L} \gamma^2 dx. \quad (2.16)$$

Finally, if we put the circulation on F as (2.14), then we have the integral equation for this boundary value problem as follows;

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \int_B \gamma \log rdS + \frac{1}{2\pi} \int_F [\pm \sqrt{c^2 - 2g\gamma}] \log rdS = -y, \quad (2.17)$$

where the sign of γ on F is to be determined as the problem becomes appropriate.

3. Linearization

In general, the variational technique is not so practical that we have had not yet few examples in application.

The integral equations, however, introduced here are very simple and analogous to Trefftz's method²⁾ and may be practical in application.

Thence, in this section, let us ascertain their validity by comparing their linearized forms with the well-known ones in the two-dimensional case.

Firstly, let us assume that $g=0$ and the body is very thin and symmetric as Fig. 2.

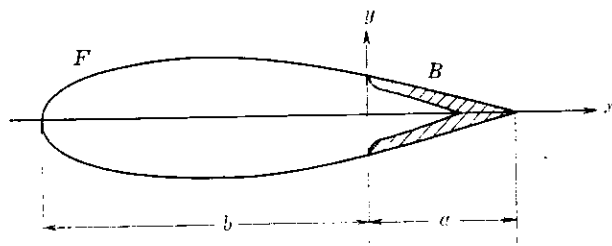


Fig. 2.

Then, the stream function in (2.17) can be approximated as follows;

$$\begin{aligned} \phi &\doteq \frac{1}{2\pi} \int_B \gamma(\xi) \log \sqrt{\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}} d\xi + \frac{c}{2\pi} \int_F \log \sqrt{\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}} d\xi, \\ &\doteq -\frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\gamma(\xi)\eta(\xi)y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi - \frac{c}{\pi} \int_{-b}^0 \frac{\gamma(\xi)y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi, \end{aligned} \quad (3.1)$$

where η means a half breadth of the body or cavity.

The corresponding potential will be

$$\phi \doteq \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\gamma(\xi)\eta(\xi)(x-\xi)}{(x-\xi)^2+y^2} d\xi + \frac{c}{\pi} \int_{-b}^0 \frac{\eta(\xi)(x-\xi)}{(x-\xi)^2+y^2} d\xi. \quad (3.2)$$

The integral equation (2.17) now becomes

$$\lim_{y \rightarrow +0} \phi = -\mu(x)\eta(x) - \frac{\gamma(x)}{\pi} \int_0^a \frac{\gamma\eta}{(x-\xi)^2} d\xi - \frac{c\eta(x)}{\pi} \int_{-b}^0 \frac{\eta(\xi)d\xi}{(x-\xi)^2} = -\eta(x), \quad (3.3)$$

or

$$1 = \mu(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\gamma(\xi)\eta(\xi)}{(x-\xi)^2} d\xi + \frac{c}{\pi} \int_{-b}^0 \frac{\eta(\xi)d\xi}{(x-\xi)^2}, \quad (3.4)$$

where

$$\left. \begin{aligned} \mu(x) &= c & \text{for } -b < x < 0 \\ &= \gamma(x) & \text{for } a > x > 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

and the improper integrals stand for following values

$$\int \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2} d\xi = -\frac{\partial}{\partial x} \left[P. V. \int \frac{f d\xi}{(x-\xi)} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \int \frac{f d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2}.$$

On the other hand, the usual linearized boundary conditions for ϕ are²⁾

$$\left. \begin{aligned} \phi(x, 0) &= -\eta(x) & \text{for } a > x > 0 \\ \phi_x(x, 0) &= c-1 & \text{for } -b < x < 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

The integral equation (3.3) is equivalent to the former condition for $a > x > 0$, and also to the latter one for $-b > x > 0$, because we have, from (3.2) and (3.4),

$$\phi_x(x, 0) \doteq -\frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\gamma\eta d\xi}{(x-\xi)^2} - \frac{c}{\pi} \int_{-b}^0 \frac{\eta d\xi}{(x-\xi)^2} = c-1 \quad \text{for } -b < x < 0. \quad (3.7)$$

Thus, although the expression seems different with usual one, the solution of (3.4) must give the same one as the usual method except that we treat as doublet distribution

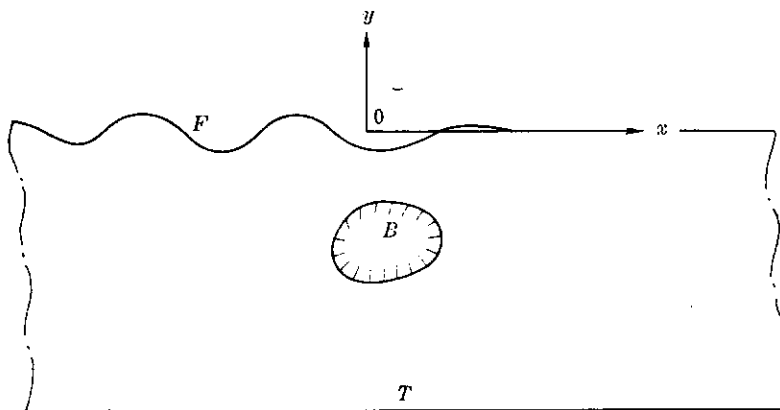


Fig. 3.

instead of a source-sink one.

Secondly, let us imagine a submerged body in a uniform stream of infinite depth as Fig. 3. Thence, the stream function becomes from (2.17) as

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_B \gamma \log r dS - \frac{1}{2\pi} \int_F \sqrt{1-2g\eta} \log r dS + \frac{1}{2\pi} \int_T \gamma \log r dS. \quad (3.8)$$

The circulation at the bottom T will be uniform and the unit because we assume it lies at infinitely deep place, and since we could have

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log \sqrt{(x-\xi)^2 + (T+y)^2} d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \log \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi = 0, \quad (3.9)$$

subtracting this from (3.8) and neglecting higher order terms, we have a linearized form

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_B \gamma \log r dS + \frac{g}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\xi) \log \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\eta(\xi) d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2}, \quad (3.10)$$

where it is to be assumed that

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta(\xi) d\xi = 0 \quad \text{and} \quad \int_B \gamma dS = 0. \quad (3.11)$$

The integral equation (2.17) at the free surface gets the form

$$-\eta(x) = \frac{1}{\pi} \int_B \gamma \log \sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2} dS + \frac{g}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\xi) \log |x-\xi| d\xi. \quad (3.12)$$

Differentiating by x , multiplying by e^{ikx} and integrating both hands, we have

$$A(k) = \frac{H(k)}{k-g}, \quad \overline{A(k)} = \frac{\overline{H(k)}}{k-g}, \quad (3.13)$$

where

$$A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x) e^{ikx} dx, \quad (3.14)$$

$$H(k) = \int_B \gamma e^{ky + ikx} dx. \quad (3.15)$$

Putting this result into (3.10), we have

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_B \gamma \log r dS - \frac{1}{\pi} \int_B \gamma dS \int_0^{\infty} \frac{k+g}{k-g} e^{k(y+\eta)} \cos k(x-\xi) \frac{dk}{k}. \quad (3.16)$$

This is the same expression as the usual linearized stream function.¹⁾

Conclusion

We have considered the boundary value problem of a water flow with free surface and introduced the equivalent variational principle with respect to the doublet or circula-

tion density over the every boundary surfaces.

Then, we find that its density on a free surface is determined solely by a location of its surface, especially the circulation must be constant on the cavity surface without gravity. This fact is deduced naturally if we assume that there is still water outside the water flow considered, then we must put a singularity density appropriate to cancel out the dynamical effect of the water flow so that the water outside the domain considered would be rest.

From these results, we have proposed a new integral equation to solve our boundary value problem, which is similar as of Trefftz's and Zwick's but simpler than them and is verified that it is equivalent to the theory which we have had when linearized. This integral equation may fit well to the numerical analysis and may be applied to an infinite flow, although the variational one could not be.

References

- 1) J. V. Wehausen and E. V. Laitone: "Surface Waves", Handbuch der Physik Bd. 9, Springer, 1960.
- 2) D. Gilberg: "Jets and Cavity", Do.
- 3) J. C. Luke; "A Variational Principle for a Fluid with a Free Surface", J. of Fluid Mech, Vol. 27, 1967.
- 4) W. Zwick: "Zur nichtlinearen Theorie des Wellenwiderstandes für kleine Froudesche Zahlen", Z. A. M. M., Bd. 47, 1967.
- 5) M. Bessho: "Variational Approach to Steady Ship Wave Problem" To be read at the 8-th Symp. on Naval Hydrodynamics at Pasadena, 1970.

船体運動のイムパルス応答とその発散波について

(故玉井教授に捧ぐ)

別 所 正 利*

(昭和48年2月28日受付)

序 言

波を伴う船体運動は水面変形の線型性の仮定の下に解くことが可能であるけれども、定常運動、つまり一様な速度で前進する場合とか一様な円周波数で振動する場合を除けば問題は複雑で解くのは難しい。

しかし運動による変位が微小であるならば境界条件をその平均位置において指定することが出来るので任意の運動をするとしても問題は簡単になりカミンスの言うように自動制御理論的に考えて周波数応答もしくはイムパルス応答がわかればすべての運動は推定出来るはずである。

また実際それは実証されている¹⁾³⁾⁴⁾⁸⁾。

一方アーセルは純解析的に半没円筒の上下動を求めている²⁾。

本文ではアーセルの方法に従って二次元運動で前進速度のない場合の上下動およびローリングをとりあげ波浪中の運動との関連において線型応答理論を組立てる。

その際ハスキントの関係を導入する⁷⁾ ことによって発散波の応答と波浪中の運動との間に簡単な関係があることが推定出来る。つまり原理的には静水中で船を少し動かしてその運動と放射波を測定すれば波浪中の応答まで求まることになる。

さらに関連問題として竹沢の言う transient wave の性質特にその分散についても少し検討したハミルトンの変分原理による運動方程式等の誘導についても言及した。

1. 速度ポテンシャルおよび力のフーリエ変換⁷⁾

座標軸を図1のようにとって2次元筒体の運動を考えよう。

まず圧力 p は

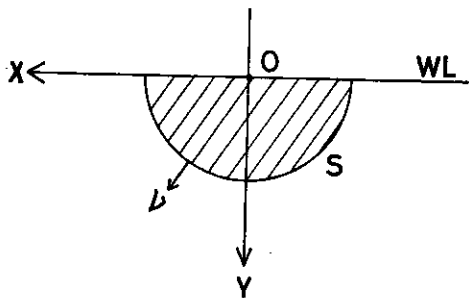
$$\frac{1}{\rho} p(x, y, t) = \phi_t(x, y, t) + gy \quad (1)$$

で与えられる。ここに ϕ は速度ポテンシャル、下添字は偏微分を意味し、 g は重力の定数とする。

水面変位を η とすると水面条件は

$$\phi_t(x, 0, t) = -g\eta(x, t), \quad (2)$$

$$\eta_t(x, t) = -\phi_y(x, 0, t), \quad (3)$$



第1図 座 標 系

* 防衛大学校 機械工学教室 教授

$$\phi_{tt}(x, 0, t) - g\phi_s(x, 0, t) = 0. \quad (4)$$

物体の表面条件は

$$\phi_n = - \sum_{j=1}^3 u_j(t) x_{jn} \text{ on } S, \quad (5)$$

ここに

$$U_j(t) = a_j' \frac{d}{dt} = \dot{a}_j, \quad (6)$$

$a_1 \equiv a_x$ (後には x); x 方向の変位,

$a_2 \equiv a_y$ (後に y); y 方向の変位,

$a_3 \equiv a_\theta$ (後に θ); 角変位,

また

$$x_{1n} = x_n$$

$$x_{2n} = y_n$$

$$x_{3n} = xy_n - yx_n$$

重心周りの運動としては添字 3 の替りに 5 を使うことにする。

船に働く水の力は

$$f_j = - \int_S p x_{jn} ds = - \rho \int_S \phi_t x_{jn} ds$$

$j = 1, 2$ はそれぞれ x, y 方向の力, $j = 3, 5$ はモーメントとする。

$t = 0$ まで $\phi = \phi_t = 0$ としてこれらをフーリエ変換すると

$$\int_0^\infty \phi(x, y, t) e^{-i\omega t} dt = \Phi(x, y; \omega) = \bar{\Phi}(x, y; -\omega)$$

逆に

$$\phi(x, y; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \Phi(x, y; \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (8)$$

であり

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \phi_t e^{-i\omega t} dt &= i\omega \Phi \\ \int_0^\infty \phi_{tt} e^{-i\omega t} dt &= -\omega^2 \Phi \\ H(x, \omega) &= \int_0^\infty \eta(x, t) e^{-i\omega t} dt = -\frac{i\omega}{g} \Phi \\ P(x, y, \omega) &= \rho \int_0^\infty \phi_t e^{-i\omega t} dt = \rho i\omega \Phi \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

がえられるから水表面条件は

$$\left. \begin{aligned} H &= -\frac{i\omega}{g} \Phi \\ i\omega H &= -\Phi_n \\ \frac{\omega^2}{g} \Phi + \Phi_n &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ on } y = 0 \quad (10)$$

船体表面条件は

$$\int_0^\infty u_j(t)e^{-i\omega t}dt = u_j(\omega) \quad (11)$$

とおくと

$$\Phi_\nu(x, y; \omega) \Big|_{\text{on } S} = \int_0^\infty \phi_\nu \Big|_{\text{on } S} e^{-i\omega t} dt = - \sum_{j=1}^3 U_j x_{j\nu} \quad (12)$$

となる。

今

$$\Phi = \sum_{j=1}^3 U_j \Phi_j, \quad (13)$$

とおいて

$$\Phi_{j\nu} = -x_{j\nu} \text{ on } S \quad (14)$$

とすれば, (12) 式は満足され, それに対応して

$$\phi(x, y; t) = \sum_{j=1}^3 \phi_j, \quad \phi_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty U_j \Phi_j e^{i\omega t} d\omega, \quad (15)$$

となる。

力は

$$\begin{aligned} F_j(\omega) &= \int_0^\infty f_j e^{-i\omega t} d\omega = -\rho i \omega \int_S \Phi x_{j\nu} ds = -\rho i \omega \sum_{k=1}^3 U_k \int_S \Phi_k x_{j\nu} ds \\ &= -\rho i \omega \sum_{k=1}^3 U_k C_{jk}, \end{aligned} \quad (16)$$

ここに

$$C_{jk} = C_{kj} = \int_S \Phi_k x_{j\nu} ds = \int_S \Phi_j x_{k\nu} ds, \quad (17)$$

船の遠方では波だけになるので

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y; \omega) &\xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} iD^+(K)e^{-Ky - iKx}, \quad \text{for } x > 0 \\ &iD^-(K)e^{-Ky + iKx}, \quad \text{for } x < 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ただし $K = \omega^2/g$ で $\omega > 0$ とする。 $\omega < 0$ に対しては $\Phi(-\omega) = \overline{\Phi(\omega)}$ である。以下同様。

$$D^\pm(K) = \int_S \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \Phi - \Phi \frac{\partial}{\partial \nu} \right) e^{-Ky \pm iKx} ds = \sum_{j=1}^3 U_j D_j^\pm(K) \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} H(x, \omega) &= -\frac{i\omega}{g} \Phi(x, 0; \omega) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \frac{\omega}{g} D^+ e^{-iKx}, \quad \text{for } x > 0 \\ &\frac{\omega}{g} D^- e^{+iKx}, \quad \text{for } x < 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

よって

$$\left. \begin{aligned} \eta(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty H e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [H(x, \omega) e^{i\omega t} + \overline{H(x, \omega)} e^{-i\omega t}] d\omega \\ &\xrightarrow{z \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi g} \int_0^\infty [D^+(K) e^{-iKx + i\omega t} + \overline{D^+(K)} e^{iKx - i\omega t}] \omega d\omega, \\ &\xrightarrow{z \rightarrow -\infty} \frac{1}{2\pi g} \int_0^\infty [D^-(K) e^{iKx + i\omega t} + \overline{D^-(K)} e^{-iKx - i\omega t}] \omega d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

これらの積分の漸近値は次のようになる。

一般に

$$\left. \begin{aligned} I &= \int_0^\infty f(\omega) e^{-i\omega^2 x/g + i\omega t} d\omega = \int_0^\infty f(\omega) e^{-i\xi^2 + i g t^2/4x} d\xi \\ \frac{\omega^2}{g} x - \omega t &= \xi^2 - \frac{g t^2}{4x}, \\ \xi &= \omega \sqrt{\frac{x}{g}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{x}} t. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

したがって

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{g}{x}} e^{i g t^2/4x} \int_{-\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{x}}}^\infty f(\omega) e^{-i\xi^2} d\xi \\ \xrightarrow{\frac{g t^2}{4x} \rightarrow \infty} & \sqrt{\frac{g}{x}} e^{i g t^2/4x} f\left(\frac{g t}{2x}\right) \int_{-\infty}^\infty e^{-i\xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi g}{2x}} e^{i g t^2/4x} f\left(\frac{g t}{2x}\right). \end{aligned} \quad (23)$$

なお

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\xi \cos u^2 du &\xrightarrow{\xi \gg 1} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\xi \sqrt{\pi}} \sin \xi^2 \right), \\ \int_0^\xi \sin u^2 du &\rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\xi \sqrt{\pi}} \cos \xi^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

2. イムパルス応答による表現¹⁾³⁾

前節の表現はまたイムパルス応答によって書直すことが出来る。

§1 (8) 式より

$$\begin{aligned} \phi(x, y; t) &= \frac{1}{2\pi} \int \phi e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_j \int u_j \phi_j e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^3 \int_0^\infty u_j(\tau) d\tau \int_{-\infty}^\infty \phi_j e^{i\omega(t-\tau)} d\omega \\ &= \sum_{j=1}^3 \int_0^t u_j(\tau) \phi_j(x, y; t-\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1)$$

ここに

$$\phi_j(x, y; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \phi_j(x, y; \omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2)$$

§1 (12) によって

$$\phi_{j\nu}|_s = -x_{j\nu} \delta(t), \quad (3)$$

であるから, ϕ_j は $t=0$ の瞬間におけるイムパルスの運動に基づくポテンシャルとなる。

同様にして

$$\begin{aligned} f_j &= -\rho \sum_{k=1}^3 \int_S x_{j\nu} ds \int_0^t u_k(\tau) \phi_k(x, y; t-\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=1}^3 \int_0^t u_k(\tau) f_{jk}^\delta(t-\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (4)$$

ここに

$$f_{jk}^\delta(t) = -\rho \int_S \phi_{k\nu} x_{j\nu} ds$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \omega e^{i\omega t} d\omega \int_S \phi_k x_j ds \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} C_{jk}(\omega) e^{i\omega t} \omega d\omega,
 \end{aligned} \tag{5}$$

であってこれは力のイムパルス応答である。

また

$$\eta(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^3 \int_0^t u_j(\tau) R_j^+(x, t-\tau) d\tau, \tag{6}$$

$$R_j^+(x, t) = \frac{1}{2\pi g} \int_0^{\infty} (D_j^+ e^{-iKx+i\omega t} + \overline{D_j^+} e^{iKx-i\omega t}) \omega d\omega, \tag{7}$$

となるからは R_j は発散波のイムパルス応答である。

3. 入射波と波の力⁷⁾

入射波は次式によって与えられる x の正方向から負方向に向う波であるとしよう。

$$\left. \begin{aligned} \eta_I(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{iKx+i\omega t} d\omega, \\ K &= \frac{\omega|\omega|}{g}, \quad A(-\omega) = A(\omega), \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

$\mathcal{L}$ でフーリエ変換を代表させると,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\equiv \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} dt \\ \mathcal{L}\eta_I &= H_I(x, \omega) = A(\omega) e^{i\omega|x|z/g}, \end{aligned} \tag{2}$$

(1) に対応する速度ポテンシャルは

$$\left. \begin{aligned} \phi_I(x, y; t) &= \frac{ig}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\omega)}{\omega} e^{iKx+i\omega t-|K|y} d\omega, \\ \mathcal{L}\phi_I &\equiv \phi_I(x, y; \omega) = \frac{ig}{\omega} A(\omega) \phi_0(x, y; \omega), \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

ここに

$$\phi_0(x, y; \omega) = e^{-\omega^2 y/g + i\omega|x|z/g},$$

入射波 ϕ_I に対する船体の反射波のポテンシャルを ϕ_D とおけば

$$\left. \begin{aligned} \phi_{D\nu} + \phi_{I\nu} &= 0 \\ \phi_{D\nu} + \phi_{I\nu} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ on } S \tag{4}$$

今

$$\left. \begin{aligned} \phi_D(x, y; \omega) &= \frac{ig}{\omega} A(\omega) \phi_d(x, y; \omega), \\ \phi_{d\nu} + \phi_{0\nu} &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

この波による力は

$$f_{w_j} = -\rho \int_s (\phi_{11} + \phi_{D1}) x_j ds, \quad (6)$$

つまり

$$\mathcal{L} f_{w_j} = F_{w_j} = \rho g A(\omega) \int (\phi_0 + \phi_d) x_j ds = -\rho g A(\omega) D_j^+(K), \quad (7)$$

この D_j は §1 (19) と同じものである。(ハスキントの関係式)

つまり

$$\begin{aligned} D_j^+(K) &= -\int_s (\phi_0 + \phi_d) x_j ds = \int_s (\phi_0 + \phi_d) \phi_j ds \\ &= \int (\phi_0 \phi_{j_v} - \phi_j \phi_{0_v}) ds \\ &= \int \left(\frac{\partial}{\partial v} \phi_j - \phi_j \frac{\partial}{\partial v} \right) e^{-Kv + iKx} ds, \end{aligned} \quad (8)$$

したがって (7) はまた次のようにも書ける

$$f_{w_j} = -\frac{\rho g}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) D_j^+(K) + \overline{A(\omega) D_j^+(K)}] e^{i\omega t} d\omega, \quad (7')$$

竹沢の研究はこの入射波として船体近くで集中波を作って船の応答を求めるものであるが、入射波は種々の簡単な特性をもっている所以で以下それを列举しよう。

ある点 x における t に関するフーリエ変換が (2) で与えられるとすると

i) 時間 t において x に関するフーリエ変換は

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(k, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \eta_1(x, t) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx \mathcal{P} \int_0^{\infty} A e^{ikx} d\omega \\ &= \sqrt{\frac{g}{k}} A(\sqrt{gk}) e^{i\sqrt{gk}t}, \quad \text{for } k > 0 \\ &= \sqrt{\frac{g}{|k|}} \bar{A}(\sqrt{g|k|}) e^{-i\sqrt{g|k|}t}, \quad \text{for } k < 0 \end{aligned} \quad (9)$$

従って $k = \omega^2/g$ の時は

$$\left| H_1(x, \omega) \right|^2 = \left| A(\omega) \right|^2 = \frac{k}{g} \left| \mathcal{H}_1(k, t) \right|^2, \quad (10)$$

つまり波高の空間分布は時間分布から導かれる。

ii) このことを相関形式で表現すれば

$$\begin{aligned} \eta_1(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-t) + i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \eta_1(\xi, \tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \eta_1(\xi, \tau) W(x-\xi, t-\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (11)$$

ただし

$$W(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(kx + \omega t) d\omega, \quad k = \omega^2/g, \quad (12)$$

一方

$$\eta_1(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(k, t) e^{ikx} dk$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \eta_I(\xi, \tau) W^*(x - \xi, t - \tau) d\xi, \quad (13)$$

$$W^*(x, t) = \frac{1}{\pi g} \int_0^{\infty} \omega \cos(kx + \omega t) d\omega, \quad (14)$$

なる2種の表現がある。これを利用すると例えば $t = t_0$ において

$$\eta_I(x, t_0) = \delta(x - x_0)$$

なる波を作るにはこれを (9) に代入して直ちに

$$A(\omega) = \frac{\omega}{g} e^{-ikx_0 - i\omega t_0}, \quad (15)$$

であればよいことがわかる。

iii) 波のポテンシャルエネルギー V は

$$\frac{V}{\rho} = \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_I^2 dx = \frac{g}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{H}(k, t)|^2 dk = \frac{g^2}{\pi} \int_0^{\infty} |A(\omega)|^2 \frac{d\omega}{\omega}, \quad (16)$$

一方運動エネルギー T は

$$\frac{T}{\rho} = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi \phi_x dx = \frac{g^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega, t)|^2 dk = \frac{g^2}{\pi} \int_0^{\infty} |A(\omega)|^2 \frac{d\omega}{\omega}, \quad (17)$$

従って

$$T = V \quad (18)$$

iv) 一方

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta_I(x, t) \eta_I(x, t + \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 e^{-i\omega t} d\omega, \quad (19)$$

であるので η の自乗積分 (t に関する) はそのままポテンシャルエネルギーに一致しないので注意すべきである。

これに関連して次の積分がある。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_I(\xi, t) \eta_I(x + \xi, t) d\xi &= \frac{g}{\pi} \int_0^{\infty} |A(\omega)|^2 \cos kx \frac{dk}{k} \\ &= \frac{2g}{\pi} \int_0^{\infty} |A(\omega)|^2 \cos\left(\frac{\omega^2 x}{g}\right) \frac{d\omega}{\omega}, \end{aligned} \quad (20)$$

v) 最後に (1) と (9) から

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta_I(x, t) dt = A(0) \quad (21)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta_I(x, t) dx = g \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{A(\omega)}{\omega} \quad (22)$$

となるが (20) は有限確定であると考えられるから $A(0) = 0$ で少なくとも $A(\omega) = 0$ である。

従って (19) 式の η の時間平均は 0 でなければならない。また (22) 式によってその空間平均は時間に関係せず一定かまたは 0 である。

4. 上下運動²⁾

$a_z = y(t)$, $\mathcal{L}y(t) = Y(\omega)$ を重心の上下運動とすると運動方程式は

$$M\ddot{y} + \gamma B y = f_z + q_z, \quad (1)$$

$\gamma = \rho g$, M 船体質量, q_z は外力とする。

周波数領域では

$$M\ddot{Y} + \gamma B Y = F_z + Q_z, \quad (2)$$

ここに

$$\ddot{y} = \mathcal{L} \ddot{Y}$$

また

$$F_z = -\rho i \omega U_z C_{22},$$

である。

i) §3 (1) のような波をうけると Q_z は §3 (7) で与えられるから $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ として (2) 式は

$$[-\omega^2(M + \rho C_{22}) + \gamma B] Y(\omega) = -\gamma A(\omega) D_z^+ \left(\frac{\omega^2}{g} \right), \quad (3)$$

$$\therefore Y(\omega) = A(\omega) M_2(\omega) \quad (4)$$

ここに

$$M_2(\omega) = \frac{-\gamma D_z^+ (\omega^2/g)}{\gamma B - \omega^2(M + \rho C_{22})} \quad (5)$$

つまり規則波に対する Magnification factor である。

この時発散波は

$$\mathcal{L} \eta = H(x, \omega) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} i \frac{\omega^2}{g} A(\omega) M_2(\omega) D_z^+ \left(\frac{\omega^2}{g} \right) e^{-i\omega^2 x/g}, \quad (6)$$

となっている。

ii) 次に $Q_z = 0$ とし静水中の自由運動を考えよう。

$$t = 0 \text{ で } y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad (7)$$

とおくと

$$\left. \begin{aligned} U_z(\omega) &= \mathcal{L} \dot{y} = -y_0 + i\omega Y, \\ \ddot{Y}(\omega) &= \mathcal{L} \ddot{y} = -i\omega y_0 - \omega^2 Y, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(2) 式は

$$[-\omega^2(M + \rho C_{22}) + \gamma B] Y(\omega) = i\omega y_0(M + \rho C_{22}),$$

となって

$$\frac{Y(\omega)}{y_0} = \frac{i\omega(M + \rho C_{22})}{\gamma B - \omega^2(M + \rho C_{22})} = \frac{1}{i\omega} - \frac{\gamma B}{i\omega[\gamma B - \omega^2(M + \rho C_{22})]}, \quad (9)$$

また

$$U_z(\omega) = i\omega Y - y_0 = \frac{-\gamma B y_0}{\gamma B - \omega^2(M + \rho C_{22})}. \quad (10)$$

よって

$$H(x, \omega) \xrightarrow[\omega > 0]{x \rightarrow +\infty} \frac{\omega}{g} B y_0 M_2(\omega) e^{-i\omega^2 x/g}, \quad (11)$$

となって $y(t)$ のフーリエ変換は伝達関数を与えて行く波のフーリエ変換から M_2 が求

まり、またこの計算の過程では造波理論としてはハスキントの関係だけ使っているので他の線型的減衰があってもハスキントの関係が妥当なものならば (11) は成り立つ。

(11) 式を物理面に戻すと

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{By_0}{\pi g} \mathcal{R} \int_0^{\infty} M_2(\omega) e^{-i\omega^2 x/g + i\omega t} \omega d\omega \\ &\xrightarrow{i\omega t/x^2 \gg 1} \frac{By_0 t \sqrt{g}}{2\sqrt{2\pi x}} \mathcal{R} M_2\left(\frac{gt}{2x}\right) e^{igt^2/4x}, \end{aligned} \quad (12)$$

であるから波群の envelope が M_2 を与える訳である。

5. ローリング⁷⁾

運動方程式は前同様にして

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x} &= f_1 + q_1 \\ I\ddot{\theta} + Wm\theta &= f_2 + q_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

m はメタセンター高さとする。

周波数領域では

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{X} &= F_1 + Q_1 \\ I\ddot{\Theta} + Wm\Theta &= F_2 + Q_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

i) 波の中の運動は $t=0$ で $x = \dot{x} = \theta = \dot{\theta} = 0$ として

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X} &= -\omega^2 X, \quad \dot{X} = i\omega X, \\ \ddot{\Theta} &= -\omega^2 \Theta, \quad \dot{\Theta} = i\omega \Theta. \end{aligned} \right\}$$

となるから

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2(M + \rho C_{11})X(\omega) - \rho\omega^2 C_{12}\Theta(\omega) &= -\rho g A(\omega) D_1 + \left(\frac{\omega^2}{g}\right), \\ -\rho\omega^2 C_{12}X + [-\omega^2(I + \rho C_{22}) + Wm]\Theta &= -\rho g A D_1 +. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore X(\omega) &= -iA M_1(\omega), \\ \Theta(\omega) &= \Theta_w(\omega) M_2(\omega), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} M_1(\omega) &= \frac{\rho g}{\Delta i} \left\{ [Wm - \omega^2(I + \rho C_{22})] D_1 + \left(\frac{\omega^2}{g}\right) + \rho\omega^2 C_{12} D_2 + \right\}, \\ M_2(\omega) &= \frac{i\rho g^2}{\Delta} [D_2 + (M + \rho C_{11}) - D_1 + \rho C_{12}], \\ \Delta &= -\omega^2(M + \rho C_{11})[Wm - \omega^2(I + \rho C_{22})] - (\rho\omega^2 C_{12})^2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

また

$$\Theta_w(\omega) = \frac{\omega^2}{g} A(\omega), \quad (6)$$

これは次のように波傾斜のフーリエ変換である。

$$\frac{\partial}{\partial x} \eta_1(x, t) = \frac{i}{2\pi g} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i\omega^2 x/g + i\omega t} \omega^2 d\omega$$

$$= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\Theta_w(\omega) e^{i\omega^2 x/g + i\omega t} - \overline{\Theta_w(\omega)} e^{-i\omega^2 x/g - i\omega t}] d\omega, \quad (7)$$

さて

$$D_s^+ \left(\frac{\omega^2}{g} \right) / D_1^+ \left(\frac{\omega^2}{g} \right) = l_w - l, \quad (\text{実数}) \quad (8)$$

なる関係があり、かつ $\omega \rightarrow 0$ とすると

$$\left. \begin{aligned} D_1^+ &\rightarrow -i \frac{\omega^2}{g} \nabla(1+k_1), \\ D_s^+ &\rightarrow -i \frac{\omega^2}{g} \nabla[\overline{OM} + k_1 l_1] - (1+k_1)l \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} \Delta \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} & -\omega^2 M(1+k_1) W_m \\ M_1 \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} & 1 \\ M_s \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} & 1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

である。

ii) 波はなく、 θ_0 だけ船を傾けて離すと (モーメントだけかけることにする) $t=0$ で $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta} = 0 = x = \dot{x}$ とすると

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Theta} &= -\theta_0 + i\omega\Theta, \\ \ddot{\Theta} &= -i\omega\theta_0 - \omega^2\Theta, \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \dot{X} &= i\omega X, \\ \ddot{X} &= -\omega^2 X. \end{aligned} \right\}$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2(M + \rho C_{11})X - \rho\omega^2 C_{1s}\Theta &= i\rho\omega\theta_0 C_{1s} \\ -\rho\omega^2 C_{1s}X + [Wm - \omega^2(I + \rho C_{ss})]\Theta &= i\omega\theta_0(I + \rho C_{ss}) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore X &= \frac{i\theta_0}{\Delta} \rho\omega Wm C_{1s}, \\ \Theta &= \frac{\theta_0}{i\omega} \left[1 + \frac{\omega^2 Wm(M + \rho C_{11})}{\Delta} \right], \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= -\frac{\theta_0}{\Delta} \rho\omega^2 C_{1s} Wm, \\ \dot{\Theta} &= \frac{\theta_0}{\Delta} \omega^2 Wm(M + \rho C_{11}). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

従って

$$\begin{aligned} H(x, \omega) &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\omega}{g} (\dot{X} D_1^+ + \dot{\Theta} D_s^+) e^{-i\omega^2 x/g} \\ &= \frac{\theta_0 \omega^3}{i\rho g^3} Wm M_s(\omega) e^{-i\omega^2 x/g}, \end{aligned} \quad (14)$$

前同様 η に戻すと

$$\eta(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\frac{Wm\theta_0}{\pi\rho g^3} \mathcal{F}_m \int_0^\infty M_s(\omega) e^{-i\omega^2 x/g + i\omega t} \omega^3 d\omega$$

$$\rightarrow -\frac{Wm\theta_0\sqrt{g}}{\rho\sqrt{2\pi}} \frac{t^3}{x^{3.5}} \mathcal{S}_m M_s \left(\frac{gt}{2x} \right) e^{igt^2/4x}, \quad (15)$$

(12) 式において $\omega \rightarrow 0$ とすると

$$\left. \begin{aligned} X(\omega) &\xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{\theta_0}{i\omega} \left[\frac{k_1(l_1-l)}{1+k_1} \right], \\ \Theta(\omega) &\xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \theta_0 \left[\frac{k_1(l_1-l)}{1+k_1} \right], \\ \theta(t) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \right\} \quad (16')$$

である。つまり最終的に船は上の量だけドリフトすることになる。

また θ については Ursell²⁾ と同じように議論を進めれば漸近値を求めることが出来るが大変複雑であってここではふれないが見当としてはやはり t^{-n} (n は恐らく 4 以上) のように減衰するであろう。

一方勿論振動する部分もあるからこの項は振動が左右非対称になることを意味する。この非対称のために上述のドリフトが生ずるのであろう。

iii) 最後に $t=0$ で $x=\dot{x}=\theta=\dot{\theta}=0$ で重心上方 a の点で x 方向に $f\delta(t)$ なるインパルスを加えた場合を考えよう。

$Q(\omega) = \mathcal{L}f\delta(t) = f$: 定数となるから

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2(M+\rho C_{11})X - \rho\omega^2 C_{12}\Theta &= f \\ -\rho\omega^2 C_{12}X + [Wm - \omega^2(I+\rho C_{33})]\Theta &= af \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore X &= \frac{f}{\Delta} [-\omega^2(I+\rho C_{33}) + Wm + \rho a \omega^2 C_{12}], \\ \Theta &= \frac{f}{\Delta} [-a\omega^2(M+\rho C_{11}) + \rho\omega^2 C_{12}], \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$H(x, \omega) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\frac{\omega^2}{\rho g^2} f \left[M_1(\omega) + \frac{\omega^2 a}{g} M_2(\omega) \right]. \quad (19)$$

よって例えば $a=0$ とすると M_1 が求まる。

またこの時

$$\left. \begin{aligned} X(\omega) &\xrightarrow{\omega \rightarrow 0} -\frac{f}{\omega^2(M+\rho C_{11})}, \\ \Theta(\omega) &\rightarrow -\frac{f\rho C_{12}}{Wm(M+\rho C_{11})}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

従って

$$x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{f}{M(1+k_1)} t. \quad (21)$$

これは (少々奇異に見えるが) 波のない時と同じ運動である。

θ については前同様計算は大変面倒である。

6. 変分原理とエネルギー原理

物体の運動はハミルトンの変分原理から導かれるはずであるが、波のある場合にこれを適用した例は見られない。しかし問題が複雑になって来ると非常に有用な方法であるので以下に検討する。

今ラグランジアンを L 、運動エネルギー T 、ポテンシャルエネルギー V とし下添字 s で船の、 w で水のそれらを表わすことにしよう。

$$\left. \begin{aligned} L_s &= T_s - V_s, \\ L_w &= T_w - V_w, \end{aligned} \right\} L = L_s + L_w. \quad (1)$$

外力のなす仕事を W とすれば、ハミルトンの原理は

$$\delta \int_0^\infty L dt = \delta \int_0^\infty W dt \quad (2)$$

である。船については

$$T_s = \frac{1}{2} [M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + I\dot{\theta}^2] \quad (3)$$

$$V_s = \frac{\rho g}{2} B y^2 + \frac{W m}{2} \theta^2 \quad (4)$$

流体のものは (radiation potential のみ)

$$\left. \begin{aligned} T_w &= \frac{\rho}{2} \iint_D (\phi_x^2 + \phi_y^2) dx dy, \\ V_w &= \frac{\rho g}{2} \int_F \eta^2 dx. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

よって

$$L_w = T_w - V_w = -\frac{\rho}{2} \int_F (\phi \phi_y + g \eta^2) dx - \frac{\rho}{2} \int_S \phi \phi_n ds,$$

水面条件によって上式は

$$L_w = -\frac{\rho}{2g} \frac{d}{dt} \int_F \phi \phi_t dx - \frac{\rho}{2} \int_S \phi \phi_n ds \quad (6)$$

となる。 $t=0$ および ∞ で ϕ, ϕ_t のどちらかが 0 になるものとすれば

$$\int_0^\infty L_w dt = -\frac{\rho}{2} \int_0^\infty dt \int_S \phi \phi_n ds \quad (7)$$

となって S 上の境界値のみでこの値は決まる。

ϕ の境界条件は

$$\phi_n = -\sum_j u_j x_{j_n},$$

であるから

$$\int_0^\infty L_w dt = \frac{\rho}{2} \int_0^\infty dt \sum_j u_j \int_S \phi x_{j_n} ds = \frac{1}{2} \sum_j \int_0^\infty x_j f_j dt \quad (8)$$

今 $W=0$ として y 方向の運動のみ考えて (2) 式を適用すれば

$$\int_0^\infty \left[-(M\ddot{y} + rBy)\delta y + \frac{1}{2}(\delta y f_2 + y \delta f_2) \right] dt = 0, \quad (9)$$

を得る。

しかし

$$\begin{aligned} \int_S (\phi_1 \phi_{2v} - \phi_2 \phi_{1v}) ds &= - \int_F (\phi_1 \phi_{2v} - \phi_2 \phi_{1v}) dx + \int_{x \rightarrow \pm \infty} [\] dy \\ \text{で } x \rightarrow \pm \infty \text{ の検査面は常に波の外側にとることにすれば消えて水面条件を入れると} \\ &= - \int_F (\phi_1 \phi_{2u} - \phi_2 \phi_{1u}) dx \end{aligned}$$

よって t で積分すれば

$$\int_0^\infty dt \int_S (\phi_1 \phi_{2v} - \phi_2 \phi_{1v}) ds = - \int_F [\phi_2 \phi_{1t} - \phi_1 \phi_{2t}]_{t=0}^\infty dx = 0 \quad (10)$$

この相反定理を利用すれば

$$\begin{aligned} \int_0^\infty y \delta f_2 dt &= - \int_0^\infty y \left[\frac{d}{dt} \rho \int \delta \phi_2 y_v ds \right] dt = \rho \int_0^\infty dt \left[y \int_S \delta \phi_2 y_v ds \right] \\ &= - \rho \int_0^\infty dt \int_S \phi_{2v} \delta \phi_2 ds = \rho \int_0^\infty dt \delta \dot{y} \int_S \phi_2 y_v ds \\ &= \int_0^\infty f_2 \delta y dt, \end{aligned} \quad (11)$$

なる相反性がある。

よって (9) 式から

$$M\ddot{y} + rBy = f_2. \quad (12)$$

なる運動方程式を得る。

これを周波数領域で考えれば

$$M\ddot{Y}(\omega) + rBY(\omega) = F_2(\omega) \quad (13)$$

であるからこれに δY をかけて ω について積分すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty [F_2 - (M\ddot{Y} + rBY)] \delta Y d\omega \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty [f_2 - (M\ddot{y} + rBy)] \delta y^* dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty (M\dot{y} \delta \dot{y}^* - rBy \delta y^* + f_2 \delta y^*) dt. \end{aligned} \quad (14)$$

を得る。ここに

$$\left. \begin{aligned} y^*(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty Y(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ y^*(t) &= y(-t) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

となっているから y^* を time reversed motion と呼べる。

(13) 式から

$$\left. \begin{aligned} T_s^* &= \frac{M}{2} \dot{y} \dot{y}^* \\ V_s^* &= \frac{r}{2} By y^* \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\int_0^\infty L_w^* dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^* f_2 dt, \quad (17)$$

$$L^* = L_s^* + L_w^*, \quad (18)$$

とおき Modified Lagrangian と呼ぶことにするとそれらの積分の周波数領域における表現は

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty T_*^* dt &= \frac{M}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \dot{Y}(\omega)^2 d\omega \\ \int_0^\infty V_*^* dt &= \frac{\gamma B}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty Y^2(\omega) d\omega \\ \int_0^\infty L_w^* dt &= -\frac{\rho}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \{\dot{Y}(\omega)\}^2 C_{22}(\omega) d\omega \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

となるから L^* に対して変分原理を適用すると (13) が直ちに導ける。($\delta \dot{Y} = i\omega \delta Y$ である)

次に (12) の両辺に $\dot{y}$ をかけると、まず左辺は

$$M\dot{y}\ddot{y} + \gamma B y \dot{y} = \frac{d}{dt} [T_* + V_*]$$

右辺は

$$f_2 \dot{y} = -\rho \dot{y} \int_S \phi_i y_i ds = \rho \int_S \phi_i \dot{\phi}_i ds = -\rho \iint_D \nabla \phi_i \nabla \phi_i dx dy - \rho \int_F \phi_i \dot{\phi}_i dx,$$

水面条件を入れると

$$= -\frac{d}{dt} [T_w + V_w]$$

よって

$$\frac{d}{dt} [T + V] = 0$$

$$T + V = T_* + V_* + T_w + V_w = \text{Const.} \quad (20)$$

すなわち外力がなければ全系のエネルギーは不変である。

周波数領域では

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{T}_*(\omega) &= \int_0^\infty T_* e^{-i\omega t} dt = \frac{M}{2} \int_0^\infty \dot{y}^2 e^{-i\omega t} dt = \frac{M}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty (\dot{Y}(\omega')) \dot{Y}(\omega - \omega') d\omega' \\ \mathcal{V}_*(\omega) &= \mathcal{L} V_* = \frac{\gamma B}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty Y(\omega') Y(\omega - \omega') d\omega' \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_w(\omega) + \mathcal{V}_w(\omega) &= -\int_0^\infty e^{-i\omega t} dt \int_0^t f_2 \dot{y} dt = \frac{i}{\omega} \int_0^\infty f_2 \dot{y} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{\rho}{2\pi\omega} \int_{-\infty}^\infty \dot{Y}(\omega - \omega') \dot{Y}(\omega') C_{22}(\omega') \omega' d\omega' \end{aligned} \quad (22)$$

よって

$$\mathcal{T}(\omega) = \mathcal{T}_* + \mathcal{V}_* + \mathcal{T}_w + \mathcal{V}_w = \frac{1}{2\pi\omega i} \int_{-\infty}^\infty \dot{Y}(\omega - \omega') [M\ddot{Y} + \gamma B Y + \rho i \omega' C_{22} \dot{Y}] d\omega'.$$

を得るが右辺 [] の中は 0 であるので

$$i\omega \mathcal{T}(\omega) = 0 \quad (23)$$

つまり

$$\frac{d}{dt} T = 0 \quad (24)$$

従って外力の働かない場合はエネルギー保存則によって運動を求めることもできるわけである。

7. 変分原理と境界値問題⁶⁾

ハミルトンの原理を水そのものの運動に適用すると境界値問題に関する変分原理になる。

この時は次のような積分を考える方がより一般的であり、またハミルトンの原理になることが判っている。

$$P = \frac{1}{\rho} \iint_D p(x, y, t) dx dy, \quad (1)$$

ここに D は流体の全領域とした

$$\frac{p}{\rho} = \phi_t - \frac{1}{2} q^2 + g y. \quad (2)$$

これを別けて

$$P = M - T - V + \text{Const.}, \quad (3)$$

とすれば

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \phi_t dx dy = \frac{d}{dt} \iint_D \phi dx dy + \int_F \phi v_n ds \\ &= \int_F \phi \eta_t dx + \frac{d}{dt} \iint_D \phi dx dy, \end{aligned} \quad (4)$$

$$v_n = \eta_t y_n.$$

$$T = \frac{1}{2} \iint_D (\nabla \phi)^2 dx dy = -\frac{1}{2} \int_F \phi \phi_n ds, \quad (5)$$

$$V = \frac{g}{2} \int_F \eta^2 dx, \quad (6)$$

となるから変分をとると、つまり

$$\delta \int P dt = 0 \quad (7)$$

から

$$\int_F \delta \phi (v_n + \phi_n) ds - \int_F \delta \eta \left(\phi_t - \frac{q^2}{2} + g \eta \right) ds = 0 \quad (8)$$

を得る。

従って

$$\left. \begin{aligned} \phi_n + v_n &= 0 \\ \frac{v}{\rho} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ on } F \quad (9)$$

と等価になる。

これは簡単でしかも非線型問題も取扱かえるので便利であり、Whitham 等は波の分散の問題に応用しているが、実際上の計算は複雑であってまたさらに簡単化が要求される。次節には別の方法でこの問題を扱う。

なおこの方法は物体があっても勿論成立つ。

8. 波の分散⁽¹⁾⁽²⁾

竹沢の Transient wave の実験によれば波の集中前後で著しいスペクトルの変化があるという。

また Benjamin 等は規則的なストークス波に波長の異なる成分波を合成すると不安定になり、崩れてしまうと言う。

一般に有限波高の波では波速 C は

$$C^2 = \frac{g}{k}(1+k^2 a^2), \quad a \text{ は振幅}$$

で与えられる。つまり線型理論よりも少し大きくなるが、これは波長の短い ($\lambda = 2\pi/k$) もので著しい。

従って相対的に短波長の波が早く伝わるので時間的スペクトルは伝わるにつれて高周波成分がなくなっていくことになる。

一方全エネルギーは一定であるはずだからこのポテンシャルエネルギーの減少分は運動エネルギーに転換するはずである。これは表面近くで行なわれるであろうから表面近くの水を加速して遂には波は崩れ、渦などとなって一層スペクトルの変化を増すであろう。またさらには表面張力等も考えねばならないだろうがここでは考えないことにしよう。

この問題は複雑であるが波の崩れ等はないものとして以下定性的に具体的な例について考察しよう。

前節の式から境界条件を 2 次の項までとると

$$\left. \begin{aligned} \eta_i(x, t) &= -\phi_y(x, 0, t) + c(x, t) \\ \eta(x, t) &= -\frac{1}{g}\phi_i(x, 0, t) + d(x, t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} c(x, t) &= \eta_x(x, t)\phi_x(x, 0, t) + \eta(x, t)\phi_{xx}(x, 0, t) \\ d(x, t) &= \frac{1}{2g}\{\phi_x^2 + \phi_y^2\} - \frac{1}{g}\eta\phi_{ty} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで η, ϕ は次のように表現出来るものとしよう。

$$\left. \begin{aligned} \eta(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)e^{ikx+i\omega t}d\omega \\ \phi(x, y, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega)e^{-|k|y+ikx+i\omega t}d\omega, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

第 1 近似では

$$k \doteq \frac{\omega|\omega|}{g} \quad (4)$$

であるが、今は

$$k = k(\omega, x) \quad (5)$$

となるものと考えて、 t に関してをフーリエ変換すれば

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}\eta &= Ae^{ikx}, \quad \mathcal{L}\eta_x = ikAe^{ikx}, \\ \mathcal{L}\phi &= Be^{ikx} \doteq \frac{ig}{\omega} Ae^{-|k|y+ikx}, \end{aligned} \right\}$$

船体運動のイムパルス応答とその発散波について

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}\phi_y|_{y=0} &\doteq -|\omega|Ae^{ikx}, \\ \mathcal{L}\phi_x|_{y=0} &\doteq -i\omega Ae^{ikx}, \\ \mathcal{L}\phi_{xx} &\doteq -\frac{i\omega^3}{g}Ae^{ikx}, \\ \mathcal{L}\phi_t &\doteq \omega^2Ae^{ikx}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここに

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt$$

であるから c, d には第1近似を代入して計算することにして

$$\left. \begin{aligned} i\omega A(\omega) &= |k|B(\omega) + C(\omega, x)e^{-ikx} \\ A(\omega) &= -\frac{i\omega}{g}B(\omega) + D(\omega, x)e^{-ikx} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

を得る。これから B を消去すれば (以下 $k>0$ とする)

$$k - \frac{\omega^2}{g} = E(\omega, x), \quad (8)$$

$$E = \frac{1}{A} \left(\frac{i\omega}{g} C + kD \right) e^{-ikx}, \quad (9)$$

(8) 式によって k の x に関する変化量が求まる訳である。これは明らかに複素値をとるからその虚数部は x に関する減衰, 発散を示すことになる。

さてこの E を第1近似値によって以下に計算しよう。

$$\left. \begin{aligned} C(\omega, x) &= \mathcal{L}c(x, t), \\ D(\omega, X) &= \mathcal{L}d(x, t), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

であるからこれを $\omega>0$ として計算すると

$$\begin{aligned} giCe^{-ikx} &= \int_0^\omega A(\omega')A(\omega-\omega')\{\omega'^2 + (\omega-\omega')^2\}e^{i\Omega_1 x}d\omega', \\ &+ \omega \int_0^\infty A(\omega+\omega')A(-\omega')(\omega+2\omega')^2e^{i\Omega_2 x}d\omega' \end{aligned} \quad (11)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} g\Omega_1 &= \omega'^2 + (\omega-\omega')^2 - \omega^2, \\ g\Omega_2 &= (\omega+\omega')^2 - \omega'^2 - \omega^2, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} gDe^{-ikx} &= -\int_0^\omega A(\omega')A(\omega-\omega')\omega'^2e^{i\Omega_1 x}d\omega' \\ &- \omega^2 \int_0^\infty A(\omega-\omega')A(-\omega')e^{i\Omega_2 x}d\omega', \end{aligned} \quad (13)$$

ここで具体的に $t=0$ で

$$\eta(x, 0) = \frac{\varepsilon a}{\pi(x^2 + a^2)} \quad (14)$$

のような集中波について計算を進めて見よう。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta(x, 0)e^{-ikx}dx = \varepsilon e^{-|k|a},$$

であるから

$$\eta(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{ikx + i\omega t} d\omega, \quad (15)$$

と書くと

$$A(\omega) = \frac{\varepsilon}{\pi g} e^{-\omega^2 a / g} |\omega| \quad (16)$$

である。これを代入すると長い計算の後に

$$E(\omega, x) = \frac{\varepsilon}{\pi} \frac{\omega^6}{g^3} \left[\int_0^1 e^{2u(1-u)(a-ix)\omega^2/g} u(1-u)\{(1-u)^3 - u^3\} du \right. \\ \left. + 4 \int_0^{\infty} e^{2\omega^2 u[-a(1+u)+ix]/g} u^2(1+u^2) du \right], \quad (17)$$

をうる。

$x \rightarrow 0$ とすると

$$E(\omega, 0) \doteq \frac{\varepsilon}{\pi a^3}, \quad (18)$$

となるが、これは第 2 近似では集中点のスペクトルは $t=0$ でも第 1 近似とはこれだけ異なってくることを示すものである。

x が大きくなると近似的に

$$E(\omega, x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{3i\varepsilon k^2 x}{2\pi(x^2 + a^2)} e^{i(a-ix)/2}, \quad (19)$$

となるから

$$i\left(k - \frac{\omega^2}{g}\right)x \doteq -\frac{3\varepsilon}{2\pi} \left(\frac{x^2}{x^2 + a^2}\right) \left(\frac{\omega^2}{g}\right)^2 e^{\omega^2(a+ix)/2g}, \quad (20)$$

となり、 x が大きくなると（集中点から離れると）急激に高周波成分が小さくなることがわかる。

しかし x が a に比して充分大きくなるとさらに

$$\left(k - \frac{\omega^2}{g}\right)x \rightarrow -\frac{3\varepsilon}{2\pi} \left(\frac{\omega^2}{g}\right) e^{\omega^2(a+ix)/2g} \quad (21)$$

となるから、その絶対値は略々一定となる。つまり集中前、あるいは集中後はスペクトルの絶対値はあまり変らないことを示していると言えよう。

これは略々竹沢の観察を説明しているように見える。

これが正しいとするとスペクトル変化（時間的）は集中点の険しい大きい波が出来る時に起こるものと言える。

結 言

このようにして 2 次元的船体運動についてその運動の平均位置からの変位が微少である時は自動制御理論における線型応答の方法を適用し、またハスキントの関係式を利用することにより、船を平衡位置から少しずらして離すことによつて、波浪中の応答を求めることが出来ることがわかった。この関係はまた 3 次元運動に適用するのに何等障害はないので、容易に拡張出来る。

またハミルトンの原理が波のある場合にも適用出来ることが示されたので、運動の近似計算を変分法を用いて解くことが出来ることになった。

最後に transient wave について若干の知見を得、減衰に関する定性的な計算を行って集中時の近傍でそれが起こると言うことを確かめた。

参 照 文 献

- 1) W. E. Cummins: Schiffstechnik, Bd 9 (1962).
- 2) F. Ursell: J. F. M. Vol. 19 (1964), Vol. 44 (1970).
- 3) Proc. of 5th O. N. R. Symp. (1964).
- 4) 竹沢: 造船学会論文集 3 篇 (1968, 70).
- 5) 造船学会耐航性シンポジウム Text (1969).
- 6) 水の波の分散に関する討論集 P. R. S. A. Vol. 299 (1967).
- 7) 別所: 防大理工学研究報告 Vol. 3, No. 1, 3 (1965~6).

Impulse Responses of Motions of a Ship and Its Radiating Wave

(Dedicated to the late Professor T. Tamai)

By Masatoshi BESSHO

(Received Feb. 28, 1973)

Abstract

Arbitrary motions of a ship can be predicted if we know its frequency responses and that a frequency response can be computed from an impulse response. This is well known in general but it is a recent progress that this theory is reckoned by experiments and a theory of water waves.

This paper deals with this problem with regard to the theory of water waves, especially its radiating wave by impulsive motions of a ship. Its conclusion shows that the radiating wave has an information about wave-exciting force so that the impulse response of a motion and radiating wave may give a whole information of a ship motion whose displacement from the equilibrium position is very small.

In addition, Hamilton's principle in this virtually non conservative case and the transmission of an impulsive wave of a finite amplitude are dealt with.

船体剛性を考慮した波浪中船体運動の理論

(前進速度のない場合)

(故玉井教授に捧ぐ)

別 所 正 利*

(昭和48年2月28日受付)

序 論

船が巨大になるにつれてその剛性は相対的に低下している。そのような船が波の中を航行している時は船体は波と共に撓むであろう。

本文においては船が弾性的に撓むことを考えた場合の船の運動および船体の撓みの計算法について考察を試みた。

簡単のために前進速度がない場合でかつ縦波中の運動についてのみ議論を進めたが、他の場合に拡張するのに大きい困難はないであろう。

この場合ストリップ法を使えば容易に運動方程式が得られるけれども得られる方程式が非線型(準線型)であってその解法は必ずしも容易ではない。

今回はハミルトンの原理から直接運動方程式を導く方法を試みた。この方法によれば変分法によって解けるので近似計算に便利であろう。

またハスキントの関係を利用して発散波のイムパルス応答から規則波中の船体応答を求める式を導いて見た。

前進速度のある場合はこの式は少々問題があるので後報にゆずるが原理的には同様な式が得られるはずである。

1. 速度ポテンシャルとフーリエ変換^{1,2,7)}

右図のような座標系をとろう。

線型近似によって圧力は

$$\frac{1}{\rho} p(x, y, z, t) = \phi_t(x, y, z, t) + gz \quad (1)$$

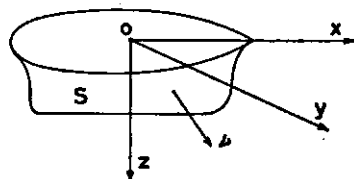
水面条件は

$$\phi_t|_{z=0} = -g\zeta(x, y) \quad (2)$$

$$\zeta_t = -\phi_z|_{z=0} \quad (3)$$

よって

$$\phi_{tt} - g\phi_z = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (4)$$



第1図 座標系

* 防衛大学校 機械工学教室 教授

ここに ϕ は速度ポテンシャル, ζ は水面変位とする。

物体の表面条件は ν を外向き法線として

$$\phi_\nu = - \sum_{j=1}^3 u_j(x, y, z, t) x_{j\nu}, \quad \text{on } S \quad (5)$$

但し $x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z, u_j$ は各方向の S 上の成分速度とする。

今はストリップ法的に考えて船の各断面は形を変えないで上下動のみを考えると境界条件として次式をとる。

$$\phi_\nu = -\dot{\zeta}(x, t) z_\nu, \quad (5')$$

ここに $\dot{\zeta}(x, t)$ は船の中性軸の上下動の速度とする。

一般的に考えて $t=0$ まで $\phi=\phi_t=0$ であるとしてそれらのフーリエ変換を求めておこう。

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}\phi &= \int_0^\infty \phi(x, y, z, t) e^{-i\omega t} dt = \Phi(x, y, z, \omega) = \bar{\Phi}(x, y, z, -\omega) \\ \text{逆変換は} \\ \mathcal{L}^{-1}\Phi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \Phi e^{i\omega t} d\omega = \phi(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

のように定義しておく

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}\phi_t &= i\omega\Phi \\ \mathcal{L}\phi_{tt} &= -\omega^2\Phi \\ \mathcal{L}p &= \rho\mathcal{L}\phi_t = \rho i\omega\Phi \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

但しこの p は静圧を除く動圧のみとする。

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}\zeta &= Z(x, \omega) \\ \mathcal{L}\dot{\zeta} &= -\zeta(x, 0) + i\omega Z(x, \omega) \\ \mathcal{L}\ddot{\zeta} &= -i\omega\dot{\zeta}(x, 0) - \omega^2 Z \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

但し $\dot{\zeta}(x, 0)=0$ とする

水面条件は

$$\frac{\omega^2}{g} \Phi(x, y, 0, \omega) + \Phi(x, y, 0, \omega) = 0 \quad (8)$$

今

$$\mathcal{L}u_j = U_j(x, y, z, \omega) \quad (9)$$

とおくと

$$\phi_\nu|_{\text{ons}} = \mathcal{L}\phi_\nu = - \sum_{j=1}^3 U_j x_{j\nu} \quad (10)$$

となるが (5') を採用するので次のように簡単になる。

$$\phi_\nu|_{\text{ons}} = -\dot{Z}(x, \omega) z_\nu \quad (10')$$

ここに $\hat{Z} = \mathcal{L}\hat{\zeta}$ を意味するものとする。

この周波数領域におけるポテンシャルはノイマン函数 N を使って次のように表示出来る。

$$\phi(P) = - \iint_S \phi_v(Q) N(P, Q) ds(Q) \quad (11)$$

但し

$$P \equiv (x, y, z), \quad Q \equiv (x', y', z')$$

N は遠方で次の漸近値をもっている。

$$N(P, Q) \xrightarrow{P \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{k}{2\pi\rho i}} e^{-kz - ik\rho} \phi_D(Q, \varphi) \quad (12)$$

ここに

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

$$\phi_D(Q, \varphi) = \phi_s(Q, \varphi) + \phi_d(Q, \varphi) \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_s(Q, \varphi) &= \exp[-kz' + ik(x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)] \\ \phi_{Dv}|_{s=0}, \quad k &= \omega^2/g \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

また $\phi(-\omega) = \overline{\phi(\omega)}$ である。

(14) 式の ϕ_s は右図のように x 軸と φ なる角をなして打寄せて来る入射波である。

また (12) 式は原点から出て行く円筒波である。

(12) 式を (11) 式に代入すると

$$\phi(P) \xrightarrow{P \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{k}{2\pi\rho i}} e^{-kz - ik\rho} D(k, \varphi) \quad (15)$$

$$D(k, \varphi) = - \iint_S \phi_D(Q, \varphi) \phi_v(Q) ds(Q) \quad (16)$$

この D を使えば波高 Z_w は

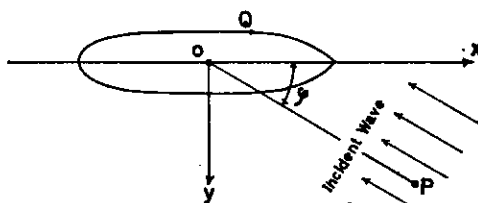
$$Z_w = \frac{\omega}{g i} \phi|_{z=0} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega^2}{ig\sqrt{2\pi\rho g i}} e^{-ik\rho} D(k, \varphi) \quad (17)$$

物理面では

$$\begin{aligned} \zeta_w(P, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty Z_w e^{i\omega t} d\omega = \frac{\mathcal{R}}{\pi} \int_0^\infty Z_w e^{i\omega t} d\omega \\ &= \mathcal{R} \frac{1}{\pi g i \sqrt{2\pi\rho g i}} \int_0^\infty e^{-ik\rho + i\omega t} D(k, \varphi) \omega^2 d\omega, \end{aligned} \quad (18)$$

これは近似的にフレネル積分で表示出来るから定常点法で次のように漸近値が求まる。

$$\zeta_w(P, \varphi) \xrightarrow{(gt^2/4\rho) \gg 1} \mathcal{R} \left[\frac{gt^2}{8\pi\rho^2 i^{3/2}} e^{i(gt^2/4\rho)} D\left(\frac{gt^2}{4\rho^2}, \varphi\right) \right], \quad (19)$$



第2図 入射波

2. ストリップ法と力および相反定理^{7,1,2)}

各断面 (変形しないとし) に働く下向きの水の力は静水圧を除いて

$$f(x, t) = - \int_0 p z_v ds(x) = - \rho \int_0 \phi_t z_v ds \quad (1)$$

$$\mathcal{L}f = F(x, \omega) = - \rho i \omega \int_0 \phi z_v ds \quad (2)$$

ストリップ法では

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = 0 \quad (3)$$

として 2 次元問題の解を利用するので 1 節 (10') と相反定理によって

$$\begin{aligned} F(x) &= \rho i \omega \int_0 \phi_T \phi_v ds = - \rho i \omega \dot{Z} \int_0 \phi_T z_v ds \\ &= - \rho i \omega \dot{Z}(x) C_0(x) \end{aligned} \quad (4)$$

$$C_0(x) = \int_0 \phi_{T_0} z_v ds \quad (5)$$

ここに下添字 T は 2 次元ポテンシャルを意味し

$$\phi_{T_0v} = -z_v$$

とする。

波の力については入射波の波高を次のようにおくと

$$\left. \begin{aligned} \zeta_I(x, y, \alpha, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{ik\varpi(\alpha) + i\omega t} d\omega \\ \tilde{\omega}(\alpha) &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad k = \omega|\omega|/g \\ \bar{A}(\omega) &= A(-\omega) \\ \mathcal{L}\zeta_I &= Z_I(x, y, \alpha, \omega) = A(\omega) e^{ik\varpi(\alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

この速度ポテンシャルは

$$\left. \begin{aligned} \phi_I &= \frac{ig}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-[k|z + ik\varpi(\alpha) + i\omega t]} \frac{d\omega}{\omega} \\ \mathcal{L}\phi_I &= \phi_I = \frac{ig}{\omega} A(\omega) \phi_*(x, y, \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ϕ_* は 1 節 (14) で与えられる。

つまりこれは α の方向から来る平面波の集まりである。

この入射に対する船の反射波のポテンシャルを ϕ_d とすると合せてポテンシャルは次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_w &= \frac{ig}{\omega} \phi_D(x, y, \alpha) \\ \phi_D &= \phi_* + \phi_d \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

波の力は (以下 z 方向の力のみを考える)

$$\left. \begin{aligned} f_w(x, t) &= -\rho \int_C \phi_{wt} z_\nu ds \\ F_w(x, \omega) &= -\rho i \omega \int_C \phi_w z_\nu ds \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(8) によって

$$\begin{aligned} F_w &= \rho g A(\omega) \int_C \Phi_D(x, y, \alpha) z_\nu ds \\ &= \rho g A(\omega) D(x, \alpha) \end{aligned} \quad (10)$$

ここに

$$\begin{aligned} D(x, \alpha) &= \int_C \Phi_D(x, y, \alpha) z_\nu ds \\ &= - \int_C \Phi_D \Phi_{0\nu} ds, \end{aligned} \quad (11)$$

但し $\Phi_{0\nu} = -z_\nu$

以下この D の k の小さい所における近似値を strip 法で求めて見よう。

(11) 式中 Φ_D の内の Φ_e については明らかに (3) 式が成立たない。

しかし Φ_e については strip 法で求めても不自然ではなからう。

そうすると

$$\begin{aligned} \int_C \Phi_e \Phi_{0\nu} ds &\doteq \int_C \Phi_{Te} \Phi_{T0\nu} ds = \int_C \Phi_{T0} \Phi_{Te\nu} ds \\ &\doteq - \int_C \Phi_{T0} \Phi_{e\nu} ds \\ \Phi_{e\nu} &= -\Phi_{e\nu} \doteq -\Phi_e(x, y, \alpha) [-|k|z_\nu + ik y_\nu \sin \alpha + \dots] \\ &\quad \begin{matrix} k \rightarrow 0 \\ x_\nu \rightarrow 0 \end{matrix} \end{aligned} \quad (12)$$

であるから

$$\begin{aligned} D(x, \alpha) &\doteq \int_C (\Phi_e z_\nu + \Phi_{T0} \Phi_{e\nu}) ds \\ &\doteq \int_C [z_\nu - \Phi_{T0} |k| z_\nu] \Phi_e ds \end{aligned} \quad (13)$$

がえられる。

この右辺第2項は渡辺理論では

$$\int_C \Phi_{T0} z_\nu \Phi_e ds = r_w C_0(x) e^{ikx \cos \alpha} \quad (14)$$

と近似しており、 k の小さい所では Φ_e を展開して

$$r_w = \int_C \Phi_{T0} z_\nu (1 - |k|z) ds$$

となるから

$$\gamma_w = 1 - \frac{|k|}{C_0(x)} \int_0^{\infty} \phi_{T_0} z z_s ds \quad (15)$$

となる。

この γ_w を仮に渡辺の修正係数を呼んでおこう。

(13) 右辺第 1 項はフルード・クリロフの力であって (14) 式にならってスミス修正 γ_s を使って

$$\int_0^{\infty} z_s \phi_s ds = \gamma_s B(x) e^{ikx \cos \alpha} \quad (16)$$

B は船の幅とする。

と表わせるからやはり k の小さい限りでは

$$\gamma_s \doteq 1 - |k| \frac{A(x)}{B(x)}, \quad (17)$$

$A(x)$ は横切面積とする。

(14) と (16) を合せて (13) は次のように書ける。

$$D(x, \alpha) \doteq \gamma_m B(x) e^{ikx \cos \alpha} \quad (18)$$

但し

$$\begin{aligned} \gamma_m &= \gamma_s - |k| \gamma_w \frac{C_0(x)}{B(x)} \\ &\doteq_{k \rightarrow 0} 1 - |k| \left[\frac{A(x) + \gamma_w C_0(x)}{B(x)} \right], \end{aligned} \quad (19)$$

となる。この係数を元良の考察³⁾に因んで元良の修正係数と呼ぶことにしよう。

以上は近似理論であるがもし 3 次元のポテンシャルが求まったとすると次のような議論になる。

まず相反定理は

$$\iint_S \phi_i \phi_{j\nu} ds = \iint_S \phi_j \phi_{i\nu} ds \quad (20)$$

である。境界条件は次のように与えられるものとしよう。

$$\phi_{j\nu} = -Z_j(\xi) z_\nu \quad (21)$$

(簡単のためにやはり横断面は変形せず z 方向にのみ変位をおこすものと仮定する)

この時力は船が変形しない場合のように単純ではないので次のように一般化したものを考えねばならない。

つまり

$$F_j = \int F(\xi) Z_j(\xi) d\xi \quad (22)$$

各断面に働く力 F ((2) 式で与えられるような) を Z_j なる重味をつけた加重平均を考える。従って特に $Z_j=1$ は z 方向の力であり $Z_i=\xi$ はモーメントとなる。

さて (20), (21) を使えば

$$F_j = -\rho i \omega \int_S \phi Z_j z_\nu ds = \rho i \omega \iint_S \phi_j \phi_i ds = -\rho i \omega \sum_k C_{jk}, \quad (23)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} C_{jk} &= C_{kj} = \iint_s \phi_j Z_k z_\nu ds \\ \phi_\nu|_s &= - \sum_k Z_k z_\nu \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

また波による力についても同様に (22) の定義による力は

$$\begin{aligned} F_{wj} &= \rho g A(\omega) \iint_s \phi_D Z_j z_\nu ds \\ &= \rho g A(\omega) D_j(\alpha) \end{aligned} \quad (25)$$

但し

$$\begin{aligned} D_j(\alpha) &= - \iint_s \phi_D(\alpha) \phi_{j\nu} ds \\ &= \iint_s (\phi_j \phi_{\nu\nu} - \phi_\nu \phi_{j\nu}) ds \end{aligned} \quad (26)$$

1 節 (17) により ϕ_j によって出来る波は

$$Z_{wj} \rightarrow \frac{k}{i\sqrt{2\pi\rho g i}} e^{-ikz} D_j(\alpha), \quad (27)$$

これが Haskind の関係²⁾である。

3. 運動方程式¹⁾

ハミルトンの変分原理によれば運動は次のように表わされる。

$$\delta \int_0^t (T - V - S) dt = \delta \int_0^t W dt \quad (1)$$

ここに

T : 全系の運動エネルギー

V : 全系の位置エネルギー

S : 歪エネルギー

W : 外力のなす仕事

今の場合縦運動のみ考えて船の上下の位置 $\zeta(x, t)$ とし

$w(x)$: 重量分布

$B(x)$: 水線幅

$A(x)$: 横切面積

とすると船体については

$$T_B = \frac{1}{2g} \int w(x) \zeta^2(x, t) dx \quad (2)$$

$$V_B = - \int w(x) \zeta(x, t) dx \quad (3)$$

$$S = \frac{1}{2} \int EI(x) \zeta_{xx}^2(x, t) dx \quad (4)$$

E は船体材料のヤング率, $I(x)$ は断面 2 次モーメントとする。

この他に水の Lagrangean L_w を加えねばならない。

$$T - V = T_B - V_B + L_w \quad (5)$$

とおくと

$$L_w = \iiint p dx dy dz = \rho \iiint \left(\phi_t - \frac{1}{2} q^2 + gz \right) dx dy dz \quad (6)$$

で与えられる。

先ず静水圧に関する部分は, 船体 S の平衡位置を $z_0(x, y)$ とおくと, そのオフセットは

$$z(x, y) = z_0(x, y) + \zeta(x, t)$$

であるから

$$\begin{aligned} \rho g \iiint z dx dy dz &= -\frac{\rho g}{2} \iint_S z^2 dx dy - \frac{\rho g}{2} \iint_F \zeta^2 dx dy \\ &= -\frac{\rho g}{2} \iint_S (z_0^2 + 2z_0\zeta + \zeta^2) dx dy - \frac{\rho g}{2} \iint_F \zeta^2 dx dy \\ &= -\frac{\rho g}{2} \iint_{\bar{F}} z_0^2 dx dy - \rho g \int A(x) \zeta(x, t) dx \\ &\quad - \frac{\rho g}{2} \int B(x) \zeta^2(x, t) dx - \frac{\rho g}{2} \iint_F \zeta^2 dx dy, \end{aligned} \quad (7)$$

ここに F は自由表面とし $\bar{F}$ は船の水線面とする。

また

$$\iiint \phi_t dx dy dz = \frac{d}{dt} \iiint \phi dx dy dz - \iint_S \phi \phi_s ds - \iint_F \phi \phi_s dx dy,$$

であるから, 今

$$V_S = \rho g \int A(x) \zeta(x, t) dx + \frac{\rho g}{2} \int B(x) \zeta^2(x, t) dx \quad (8)$$

とおき (7) の右辺の定数項は関係ないので除いて考えることにすると (ϕ の水面条件を使って)

$$\begin{aligned} L_{wD} = L_w + V_S &= \rho \frac{d}{dt} \iiint \phi dx dy dz - \frac{\rho}{2} \iint_S \phi \phi_s ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \iint_F \phi \phi_s dx dy \end{aligned} \quad (9)$$

が得られる。

従って運動の始めと終りに $\phi = \phi_t = 0$ となるとすれば

$$\int_0^t L_{wD} dt = -\frac{\rho}{2} \int_0^t dt \iint_S \phi \phi_s ds \quad (10)$$

となって S 上の積分のみで決まる。

外力 $q(x)$ のなす仕事 W は

$$W = \int q(x) \zeta(x, t) dx \quad (11)$$

これらを (1) に代入して ζ について変分をとると運動方程式がえられる訳である。 L_{WD} の変分は少々面倒であるが次のようになる。

まず

$$\int_0^t dt \left[\iint_S \phi \delta \phi ds - \iint_S \phi_s \delta \phi ds \right] = 0$$

であるので ϕ の境界条件 1 節 (5') から

$$\begin{aligned} \delta \int L_{WD} dt &= -\rho \int dt \iint_S \phi \delta \phi ds = \rho \int dt \iint_S \phi \delta \zeta_z ds \\ &= -\rho \int dt \iint_S \phi_s \delta \zeta_z ds = \int dt \int f(x, t) \delta \zeta(x, t) dx \end{aligned}$$

ここに f は 2 節 (1) による断面に働く力である。

他の変分は容易に求まって次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{w(x)}{g} \ddot{\zeta}(x, t) + m_{zz}(x, t) + \gamma B(x) \zeta(x, t) + f(x, t) \\ = \gamma A(x) - w(x) + q(x, t), \end{aligned} \quad (12)$$

ここに $\gamma = \rho g$ でまた

$$m(x, t) = EI(x) \zeta_{zz}(x, t)$$

で曲げモーメントであり両端で $m = (d/dx)m = 0$ とする。

上式において $\gamma A, w$ は時間に関係ないから以後

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) &= \zeta_D(x, t) + \zeta_S(x, 0), \\ [EI(x) \zeta_{Szz}(x)]_{zz} + \gamma B(x) \zeta_S(x) &= \gamma A(x) - w(x) \end{aligned} \quad (13)$$

のような静的な撓み ζ_S を差引いて ζ_D のみを考えることにする。

つまり (12) を

$$\frac{w(x)}{g} \ddot{\zeta}(x, t) + m_{zz}(x, t) + \gamma B(x) \zeta(x, t) + f(x, t) = q(x, t) \quad (14)$$

と簡略化した方程式で考える訳である。

これをフーリエ変換すると

$$\frac{w(x)}{g} \ddot{Z}(x, \omega) + M_{zz}(x, \omega) + \gamma B(x) Z(x, \omega) - \rho i \omega C_0(x, \omega) \dot{Z}(x, \omega) = Q(x, \omega) \quad (15)$$

特に初期条件が 0 ならば

$$\left[-\omega^2 \left\{ \frac{w(x)}{g} + \rho C_0(x) \right\} + \gamma B(x) \right] Z(x, \omega) + M_{zz}(x, \omega) = Q(x, \omega) \quad (16)$$

となりストリップ法的に考えたのと全く同じ結果が得られる。

簡単のために上式を

$$LZ(x, \omega) = Q(x, \omega)$$

と書くことにしよう。

$$L \equiv -\frac{\omega^2}{g} \{w(x) + \rho g C_0(x)\} + \gamma B(x) + \frac{d^2}{dx^2} \left\{ EI(x) \frac{d^2}{dx^2} \right\} \quad (17)$$

規則波中の応答については 2 節 (10) により

$$LZ(x, \omega) = \rho g A(\omega) D(x, \alpha) \quad (18)$$

となる。

また、イムパルス外力に対しては

$$\left. \begin{aligned} q(x, t) &= \delta(t) \delta(x - \xi) \\ Q(x, \omega) &= \delta(x - \xi) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

であるから

$$LZ(x, \omega) = \delta(x - \xi) \quad (20)$$

最後に $t=0$ で船体にある力をかけて $\zeta(x, 0)$ だけ変形させておいてそれを急に離す場合を考えると (15) 式において

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= i\omega Z - \zeta(x, 0) \\ \ddot{Z} &= -\omega^2 Z = i\omega \zeta(x, 0) \\ q &= 0 \end{aligned}$$

であるから

$$LZ(x, \omega) = i\omega \left\{ \frac{w(x)}{g} + \rho C_0(x) \right\} \zeta(x, 0) \quad (21)$$

等々の運動方程式が得られる。

これらの方程式は一般に準線型であるので常係数の場合のように簡単には解けないし、また梁の強制振動の問題であって複雑であり、変分法を用いた近似解法の方が実用的であろう⁹⁾。

従って例えば

$$\left. \begin{aligned} \zeta(x, t) &= \sum_j a_j(t) Z_j(x) \\ Z(x, \omega) &= \sum_j A_j(\omega) Z_j(x) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

のように展開して元の変分原理によって A_j を決めることになる。

このような問題では普通周波数応答が必要なものであり上述のままの変分原理は不便である。

周波数領域では変分原理は次のように簡単になる。

$$I = \int \left[\left[-\frac{\omega^2}{2} \left\{ \frac{w(x)}{g} + \rho C_0(x, \omega) \right\} + \frac{\gamma}{2} B(x) \right] Z^2(x, \omega) + \frac{M^2(x, \omega)}{2EI(x)} \right] dx \quad (23)$$

$$W = \int Q(x, \omega) Z(x, \omega) dx \quad (24)$$

から

$$\delta I = \delta W \quad (25)$$

とすればよい。これから (16) 式がえられることは明らかであろう。

なお (16) 式の両辺に $\bar{Z}$ をかけて x について積分し、その虚部を較べると

$$-\rho\omega^2 \int C_0(x, \omega) |Z(x, \omega)|^2 dx = \int Q(x, \omega) \bar{Z}(x, \omega) dx \quad (26)$$

となるがこれは外力のなす仕事が船体の動きによって生ずる波のエネルギーとなって消費されることを示している。

4. グリーン関数による解の表示⁴⁾

3 節 (20) の解をグリーン関数 G と呼ぶことにしよう。

すなわち

$$LG(x, \xi) = \delta(x - \xi) \quad (1)$$

また

$$lg(x, \xi) = \delta(x - \xi) \quad (2)$$

$$l \equiv rB(x) + \frac{d^2}{dx^2} \left\{ EI(x) \frac{d^2}{dx^2} \right\} \quad (3)$$

の解 $g(x, \xi)$ は静的単位荷重による Influence function つまりグリーン関数である。

L も l も自己随伴形式であるから次の相反性がある。

$$g(x, \xi) = g(\xi, x), \quad G(x, \xi) = G(\xi, x) \quad (4)$$

また

$$\left. \begin{aligned} \int \left[\zeta(\xi) lg(x, \xi) - g(x, \xi) l\zeta(\xi) \right] d\xi &= 0 \\ \int \left[Z(\xi) LG(x, \xi) - G(x, \xi) LZ(\xi) \right] d\xi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4')$$

これらの関数を使えば前節の解は次のように表わせる。

3 節 (13) の解は

$$\zeta_*(x) = -r \int \left\{ \frac{w(\xi)}{g} - A(\xi) \right\} g(x, \xi) d\xi \quad (5)$$

3 節 (18) の解を Z^w と記すと

$$Z^w(x) = \rho g A(\omega) \int D(\xi, \alpha) G(x, \xi) d\xi \quad (6)$$

3 節 (21) の解を Z^s と記すと

$$Z^s(x) = i\omega \int \left\{ \frac{w(\xi)}{g} + \rho C_0(\xi) \right\} \zeta(\xi, 0) G(x, \xi) d\xi \quad (7)$$

所で特に $\zeta(\xi, 0)$ が ξ 点における単位荷重によるものとすれば

$$L\zeta(\xi, 0) = \delta(\xi - \xi'), \quad \zeta(\xi, 0) = g(\xi, \xi') \quad (8)$$

また

$$L-l \equiv -\omega^2 \left\{ \frac{w(\xi)}{g} + \rho C_0(\xi) \right\} \quad (9)$$

であるから (7) は

$$Z^b(x) = \frac{1}{i\omega} \int [G(x, \xi) L\zeta(\xi, 0) - G(x, \xi) l\zeta(\xi, 0)] d\xi$$

となるが

$$\int G(x, \xi) L\zeta(\xi, 0) d\xi = \int \zeta(\xi, 0) LG d\xi = \zeta(x, 0) = g(x, \xi'), \quad \int Gl\zeta d\xi = G(x, \xi')$$

なる故

$$\left. \begin{aligned} Z^b(x) &= \frac{1}{i\omega} [g(x, \xi') - G(x, \xi')] \\ Z^i(x) &= i\omega Z^b - \zeta(x, 0) = -G(x, \xi') \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

よって

また ξ' の近くでモーメント m をかけて離すとすると上式で

$$Z^m(x) = mG_{\xi'\xi'}(x, \xi'), \quad (11)$$

(10), (11) の Kotchin 関数は

$$\left. \begin{aligned} D^b(\alpha) &= - \iint_s \phi_D(x, \alpha) z_\nu G(x, \xi') ds(x) \\ D^m(\alpha) &= m \iint_s \phi_D(x, \alpha) z_\nu G_{\xi'\xi'}(x, \xi') ds(x) \end{aligned} \right\}$$

2 節 (11) によってこれは

$$\left. \begin{aligned} D^b(\alpha) &= - \int D(x, \alpha) G(x, \xi') dx \\ D^m(\alpha) &= m \int D(x, \alpha) G_{\xi'\xi'}(x, \xi') dx \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

と書けるから (6) 式と較べて

$$\left. \begin{aligned} D^b(\alpha) &= - \frac{Z^w(\xi')}{\rho g A(\omega)} \\ D^m(\alpha) &= \frac{m}{\rho g A(\omega)} Z_{\xi'\xi'}^w(\xi') \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

これを 1 節 (17) と較べるとこの場合 α 方向へ出て行く波の波高は α 方向から来た波による周波数応答に比例していることがわかる¹⁾。

5. 相似則⁹⁾と逐次近似解法

規則波中の運動方程式について相似則を調べよう。3 節 (18) を書き下すと

$$\begin{aligned} -\omega^2 \left\{ \frac{w(x)}{g} + \rho C_0(x) \right\} Z(x) + \frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2}{dx^2} Z \right] - \gamma B(x) Z(x) \\ = \rho g A(\omega) D(x, \alpha), \end{aligned} \quad (1)$$

であるから、普通に行なわれているように相似模型について船長 L と波長 λ の比

$$kL = L \frac{\omega^2}{g} = 2\pi L / \lambda \quad (2)$$

を等しくし、また λ と波高 $[Ad\omega]$ の比を等しくして試験を行なうとして、 Z が相似になるためには (1) を次のように書きかえて

$$\begin{aligned} \left[-kL \left\{ \frac{W(L\xi) + \rho g C_0(L\xi)}{W/L} \right\} \frac{EI_0}{WL^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \left(\frac{EI(\xi)}{EI_0} \right) \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{\gamma B(L\xi)}{W} L^2 \right] Z(L\xi) \\ = \frac{\gamma A(\omega) L^2}{W} D(L\xi, \alpha), \end{aligned} \quad (3)$$

ここに W は排水量、 I_0 は $x=0$ の $I(x)$ 、
となるから、今

$$\frac{WL^2}{EI_0} = \varepsilon \quad (4)$$

が同じならば運動はすべて相似になる。

(1) はまた運動の如何に拘らず梁としての船の変位の平衡方程式でもあるから ε が等しければ 3 節 (13) により

$$\zeta_s \propto \varepsilon L \quad (5)$$

であり、また上下撓み振動数を f とすると

$$f \propto \omega \propto \sqrt{\frac{gEI_0}{WL^3}} = \sqrt{\frac{g}{\varepsilon L}}, \quad (6)$$

あるいは

$$\frac{f^2 L}{g} \propto \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad (6')$$

となって従強度、振動の上でも相似になっている。

普通は船体の撓みの影響は小さいと考えられるので (1) 式を解くに当り

$$Z(x) = Z_0 + \theta x + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n Z_n(x) \quad (7)$$

のように ε なるパラメーターで展開出来るとしよう。

これを (1) 式に代入して ε の同じ order の項を等置すると

$$\varepsilon \frac{d^2}{dx^2} EI(x) \frac{d^2}{dx^2} Z_1 = \left[\omega^2 \left\{ \frac{w}{g} + \rho C_0 \right\} - \gamma B \right] \{ Z_0 + \theta x \} + \gamma AD(x, \alpha) \quad (8)$$

$$\varepsilon \frac{d^2}{dx^2} EI(x) \frac{d^2}{dx^2} Z_{n+1} = \left[\omega^2 \left\{ \frac{w}{g} + \rho C_0 \right\} - \gamma B \right] Z_n, \text{ for } n \geq 1 \quad (9)$$

が得られる。 $Z_n (n \geq 1)$ はすべて船首尾端で梁としての自由端の条件を満たすものとする。

そうすると (8) 式に 1 あるいは x をかけて積分すると左辺は消えて

$$\int \left[-\omega^2 \left\{ \frac{w}{g} + \rho C_0 \right\} + \gamma B \right] (Z_0 + \theta x) \left[\frac{1}{x} \right] dx = \gamma A \int D(x, \alpha) \left[\frac{1}{x} \right] dx, \quad (10)$$

となるがこれは撓みを考えない時の運動方程式そのものである。従ってこの解を代入して (8) の右辺を 2 回積分したものが従来計算している波浪中の曲げモーメントである。

これをさらに 2 回積分して (9) 式に代入しもう 2 回積分すれば第 2 近似の曲げモーメントが出て来る。

結 言

船体の弾性を考慮に入れた場合従来のストリップ法で運動方程式を求めるのは容易であるし、また梁としての船体の曲げの方程式も元々ストリップ法であるのでそれで充分であると思われる。

しかし得られる方程式は一般に常係数でない 4 階準線型の微分方程式 (一般には微積分方程式) であるので実際上は数値解法によらざるをえない。最近の計算機によればこれは困難な問題ではないけれども、ここでは弾性学で使う変分法との連繫を示す意味でハミルトンの変分原理から運動方程式を誘導した。この方法によれば種々の近似解法を安心して使用出来るし、またもっと正確な理論や複雑な例えば横断面も変形するような問題を組立てることも容易になる。

またこの方法では初期値問題を考えるのも容易で特に興味のあるのはハスキントの関係を利用すれば静水中において船の動きに従って出来る波を解析すれば規則波中の応答がわかることで最近の船の過渡応答の研究の一助ともなるであろう。

なお実船についての計算例では現在の所剛性の影響は極めて小さい⁹⁾。

最後に今回の試験は真能教授との討論に端を発するもので、同教授に心から謝意を表す。

参 照 文 献

- 1) 別所正利: “船体運動のインパルス応答とその発散波について” 昭和 48 年防大理工学研究報告 (予定)
- 2) 別所正利: Mem. of the Defense Academy, Vol. 8, No. 1, 1968.
- 3) 元良, 小山: 造船論文集 117 号, 昭和 40 年.
- 4) S. チモシェンコ: “工業振動学” 東京図書, 1954.
- 5) 林, 村, 共著: “変分法” コロナ社, 昭和 43 年 8 版.
- 6) 庄子義正: “波浪によっておきる振動について” 防大研究科卒業論文, 昭和 46 年 3 月.
- 7) 日本造船学会: 耐航性シムポジウムテキスト (1969).
- 8) 末次一誠: 関西造船論文集, 昭和 29 年 10 月講演.
- 9) 別所正利: 造船研究協会研究資料 No. 163, 第 131 部会報告, 昭和 47 年 3 月.

Theory of the Motion among Waves of a Ship which is Considered as not Rigid but Flexible

(Dedicated to the late Professor Y. Tamai)

By Masatoshi BESSHO*

(Received Feb. 28, 1973)

Abstract

When we treat with a ship motion among waves it is usual to consider a ship as rigid, but may be necessary to consider her as flexible today when her size is growing bigger and bigger and her rigidity is lowering relatively.

This is a theory of the longitudinal motion among waves of a ship in such case.

The equation of motion is deduced from Hamiltonian principle, formulae for frequency and impulse response are deduced and the dimensional similarity and solving method are added shortly.

* Professor; Dept. of Mechanical Engineering, the Defense Academy.

On the Fundamental Singularity in the Theory of Ship Motions in a Seaway

(Dedicated to Professor Koya Makiyama)

By Masatoshi BESSHO*

(Received April 26, 1977)

Abstract

The fundamental singularity which is a velocity potential of water motion by a pulsating singularity in a uniform stream with free surface must be evaluated to study the theory of ship motions in a sea way.

It is represented by a double Fourier integral in usual, but may be reduced to a single integral form which is an aim of the present paper, so that its analytical property may be facilitated to discuss or compute its numerical value.

1. Introduction

It is necessary to study the theory of oscillation of ships in a sea-way to compute a fundamental singularity which is usually represented by double integral.

This is only inconvenient for numerical computations but difficult to estimate its analytical properties in various cases.

The present paper aims to convert this double integral into a single integral so that such study may become easy.

The method is similar to the one used in the case of steady and non-oscillating problem²⁾ and somewhat sophisticated one but it is justified by the differentiation after obtaining the result and agrees with the latter in its limit.

2. Derivation and Definition

The velocity potential at $P(x, y, z)$ of water motion by a unit source pulsating with circular frequency ω situated at $Q(x', y', z')$ in a uniform stream with unit velocity is a harmonic function and satisfies at the free surface the condition;

$$\left[\left(i\omega - \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + g \frac{\partial}{\partial z} \right] G(P, Q)|_{z=0} = 0, \quad (2.1)$$

where the co-ordinate system are taken as in Fig. 1 and g stands for gravity constant,

* Professor; Department of Mechanical Engineering.

and, as well known, is represented except time factor $\exp i\omega t$, as follows:

$$G(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + gT(x-x', y-y', z+z'), \quad (2.2)$$

where

$$T(x, y, z) = -\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp[kz + ik\tilde{\omega}(\theta)] k dk d\theta}{A(k, \theta)}, \quad z < 0, \quad (2.3)$$

$$A(k, \theta) = (k \cos \theta - \omega)^2 - gk + i\epsilon(k \cos \theta - \omega), \quad (2.4)$$

$\tilde{\omega}(\theta) = x \cos \theta + y \sin \theta$, $r_1 = \overline{PQ}$ and $r_2 = \overline{P\bar{Q}}$ where $\bar{Q}$ is an image point of Q with regard to the free surface.

Hence, it is sufficient to consider the function T and additionally its following derivatives.

$$\left(i\omega - \frac{\partial}{\partial x} \right) T(x, y, z) = S(x, y, z), \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} T(x, y, z) = -S_z(x, y, z), \quad (2.6)$$

In another point of view, the function S is a velocity potential of a point pressure on water surface and S_z the surface elevation¹⁾.

The function T satisfies the following differential equation throughout the water.

$$\left[\left(i\omega - \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + g \frac{\partial}{\partial z} \right] T(x, y, z) = -\frac{z}{2\pi r^3}, \quad (2.7)$$

where $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, because we have an integral representation:

$$\frac{z}{r^3} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \exp[kz + ik\tilde{\omega}(\theta)] k dk d\theta, \quad z < 0.$$

These functions are all even with regard to y , that is,

$$\left. \begin{aligned} T(x, -y, z) &= T(x, y, z), \\ S(x, -y, z) &= S(x, y, z), \\ S_z(x, -y, z) &= S_z(x, y, z), \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Therefore, it is sufficient to consider only for positive y .

On the contrary, for negative x they have radiating terms and if we define the following function as:

$$T_w(x, y, z) = \bar{T}(x, y, z) - T(-x, y, z), \quad (2.9)$$

where the bar over the letter stands for complex conjugate to be taken, we may calculate

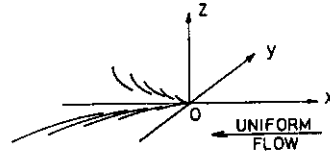


Fig. 1. Co-ordinate system.

the function T for negative x as,

$$T(-x, y, z) = \bar{T}(x, y, z) - T_w(x, y, z), \quad (2.10)$$

so that it may sufficient to consider only for positive x in the following.

Now, by its definition (2.9), T_w can be written as,

$$T_w(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \exp[kz - ik\tilde{\omega}(\theta)] \left[\frac{1}{A(k, \theta)} - \frac{1}{\bar{A}(k, \theta)} \right] k dk, \quad (2.11)$$

and since A can be decomposed as

$$\left. \begin{aligned} A(k, \theta) &= \cos^2 \theta \{k - \kappa(\theta)\} \{k - \kappa'(\theta)\}, \\ \kappa(\theta) &= \left[\left(\omega - \frac{ig}{2} \right) \cos \theta + \frac{g}{2} \left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{4\omega}{g} \cos \theta} \right) \right] \sec^2 \theta, \\ \kappa'(\theta) & \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

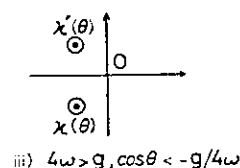
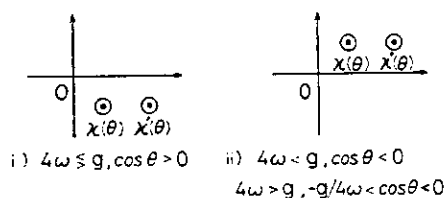


Fig. 2. Poles in k -plane.

the integration in k of (2.11) becomes only the ones around its poles in the k -plane as shown in Fig. 2.

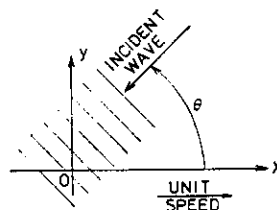


Fig. 3. Direction of incident wave.

Calculating residues, we have

$$T_w(x, y, z) = \frac{i}{2\pi g} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\bar{\phi}_0(x, y, z; \kappa(\theta), \theta) \kappa(\theta) - \bar{\phi}_0(x, y, z; \kappa'(\theta), \theta) \kappa'(\theta) \operatorname{sgn}(\cos \theta) \right] \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \frac{4\omega}{g} \cos \theta}}, \quad (2.13)$$

where

$$\phi_0(x, y, z; k, \theta) = \exp[kz + ik(x \cos \theta + y \sin \theta)], \quad (2.14)$$

In the latter integral of the right hand side, the range where $\cos u > g/4\omega$, if exists, must be excluded.

To obtain more clear image of these trailing or radiating waves, let us consider an incident wave coming from the direction θ with the encounter circular frequency ω and wave number k as in Fig. 3.

$$\exp[ik\tilde{\omega}(\theta) + i\omega t], \quad (2.15)$$

where t means time.

The relation between the encounter frequency and the one of the wave in fixed co-ordinate is

$$\omega_0 = \omega - k \cos \theta, \quad (2.16)$$

and since $\omega_0 = \sqrt{gk}$, this gives the relation:

$$\frac{\omega_0}{\sqrt{g}} = \sqrt{k} = -\frac{\sqrt{g}}{2 \cos \theta} \left[1 \mp \sqrt{1 + \frac{4\omega}{g} \cos \theta} \right], \quad (2.17)$$

Comparing this with (2.12), it is easy to see that

$$\omega_0 = \sqrt{g\kappa(\theta)}, \quad \omega_0' = \sqrt{g\kappa'(\theta)}, \quad (2.18)$$

where ω_0' is the other root of (2.15).

Therefore, all the waves of (2.13) are the waves having the encounter circular frequency ω .

3. Integral Representation

In the integral representation of T (2.3), we may also write it by the substitution of integration variables:

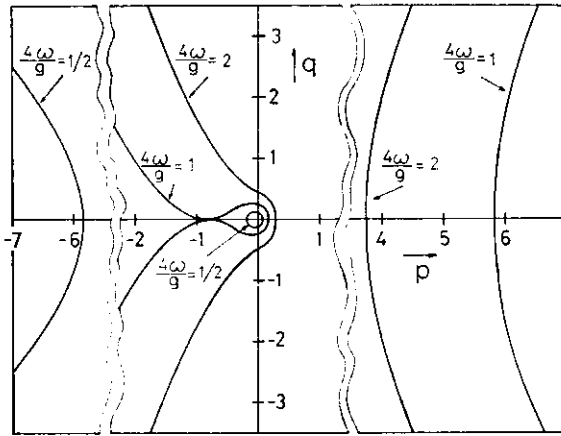


Fig. 4. Curves of singularity in p - q plane.

$$k \cos \theta = p, \quad k \sin \theta = q, \quad k dk d\theta = dp dq, \quad (3.1)$$

like as

$$T(x, y, z) = - \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{4\pi^2} \times \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[z \sqrt{p^2 + q^2} + i(px + qy)] dp dq}{(p - \omega)^2 - g \sqrt{p^2 + q^2} + i\epsilon(p - \omega)}, \quad (3.2)$$

Then, their poles lie on lines in p - q plane like as in Fig. 4.

Moreover, substituting q to

$$q = |p| \sinh v, \quad (3.3)$$

we may write (3.2), as follows:

$$T(x, y, z) = - \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[|p|(z \cosh v + i y \sinh v) + i p x] |p| \cosh v dv dp}{(p - \omega)^2 - g |p| \cosh v + i\epsilon(p - \omega)}, \quad (3.4)$$

abbreviating the letters to take the limit.

Putting

$$\left. \begin{aligned} z &= -\rho \sin \delta, & y &= \rho \cos \delta, \\ z \cosh v + iy \sinh v &= i\rho \sinh(v + i\delta), \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

and since the poles in the complex v -plane are given by

$$\cosh v = \frac{(p-\omega)^2}{g|p|} + is \frac{(p-\omega)}{|p|}, \quad (3.6)$$

and lie as in Fig. 6, referring to Fig. 5, we may shift the path of integration in v to the horizontal line $(-i\delta)$ or $(\pi-i\delta)$ according to p positive or negative in the complex v -plane with residue at poles in this domain surrounded by both lines, and we have,

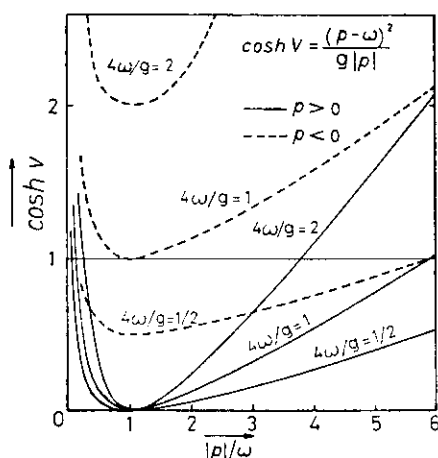


Fig. 5. Relation Between v and p .

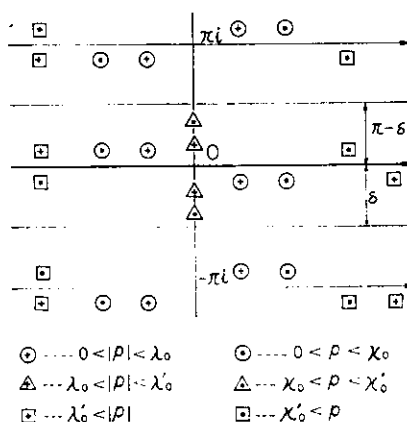


Fig. 6. Poles in v -plane.

$$T = T_s + T_R, \quad (3.7)$$

$$T_s = -\frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[(x + \rho \sinh u)] p \cosh(u - i\delta) dp du}{(\rho - \omega)^2 - gp \cosh(u - i\delta)}, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} T_R = & \frac{1}{2\pi ig} \left\{ \int_{-\infty}^{-\lambda_0'} + \int_{-\lambda_0}^0 \right\} \frac{\exp[ipx + (z/g)(p-\omega)^2 - (iy/g)\sqrt{(p-\omega)^4 - g^2 p^2}](p-\omega)^2 dp}{\sqrt{(p-\omega)^4 - g^2 p^2}} \\ & - \frac{1}{2\pi g} \int_{-\lambda_0}^{\lambda_0} \frac{\exp[ipx + (z/g)(p-\omega)^2 + (iy/g)\sqrt{g^2 p^2 - (p-\omega)^4}](p-\omega)^2 dp}{\sqrt{g^2 p^2 - (p-\omega)^4}} \\ & + \frac{1}{2\pi ig} \left\{ \int_0^{\lambda_0'} - \int_{\lambda_0'}^{\infty} \right\} \frac{\exp[ipx + (z/g)(p-\omega)^2 + (iy/g)\sqrt{(p-\omega)^4 - g^2 p^2}](p-\omega)^2 dp}{\sqrt{(p-\omega)^4 - g^2 p^2}} \\ & + \frac{1}{2\pi g} \int_{\lambda_0}^{\lambda_0'} \frac{\exp[ipx + (z/g)(p-\omega)^2 - (iy/g)\sqrt{g^2 p^2 - (p-\omega)^4}](p-\omega)^2 dp}{\sqrt{g^2 p^2 - (p-\omega)^4}}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

where

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} \kappa_0 \\ \kappa_0' \end{aligned} \right\} &= \omega + \frac{g}{2} \left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{4\omega}{g}} \right), \\ \left. \begin{aligned} \lambda_0 \\ \lambda_0' \end{aligned} \right\} &= -\omega + \frac{g}{2} \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4\omega}{g}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

The last integral can be written also, changing the variables, like as

$$(p - \omega)^4 = g^2 p^2 \cosh t, \quad (3.11)$$

or

$$\left. \begin{aligned} p = \left\{ \begin{aligned} \nu'(t) \\ \nu(t) \end{aligned} \right\} &= -\omega + \frac{g}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\omega}{g} \operatorname{cosech} t} \right) \cosh t, \quad \text{for } p \leq -\omega' \text{ or } -\omega < p < 0, \\ p = \left\{ \begin{aligned} \mu(t) \\ \mu'(t) \end{aligned} \right\} &= \omega + \frac{g}{2} \left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{4\omega}{g} \operatorname{cosech} t} \right) \cosh t, \quad \text{for } 0 < p < \omega \text{ or } \omega < p. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dt} \quad \text{or} \quad \frac{1}{\nu'} \frac{d\nu'}{dt} &= \mp \frac{\sinh t}{\sqrt{1 - \frac{4\omega}{g} \operatorname{cosech} t}}, \\ \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt} \quad \text{or} \quad \frac{1}{\mu'} \frac{d\mu'}{dt} &= \mp \frac{\sinh t}{\sqrt{1 + \frac{4\omega}{g} \operatorname{cosech} t}}, \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

we have

$$\begin{aligned} T_R &= \frac{1}{2\pi i g} \int_{-i\delta}^{\infty} \frac{\exp[i\mu\{x + \rho \sinh(t + i\delta)\}]\mu(t)dt}{\sqrt{1 + \frac{4\omega}{g} \operatorname{cosech} t}} \\ &+ \frac{i}{2\pi g} \int_{i\delta}^{\infty} \frac{\exp[i\mu'\{x + \rho \sinh(t - i\delta)\}]\mu'(t)dt}{\sqrt{1 + \frac{4\omega}{g} \operatorname{cosech} t}} \\ &+ \frac{1}{2\pi i g} \int_{-\cosh^{-1}(4\omega/g)}^{\infty} [\exp[i\nu\{x - \rho \sinh(t - i\delta)\}]\nu(t) + \exp[-i\nu'\{x - \rho \sinh(t - i\delta)\}]\nu'(t)] \\ &\times \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{4\omega}{g} \operatorname{cosech} t}}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

On the other hand, since the poles of the integrand of (3.8) lie like as in Fig. 7, the integration in p gives

$$\begin{aligned} T_S &= \frac{i}{2\pi g} \left\{ \int_{-i\delta}^{\infty - i\delta} - \int_{-\infty - i\delta}^{-u_0 - i\delta} \right\} \frac{\exp[i\mu\{x + \rho \sinh(v + i\delta)\}]\mu(v)dv}{\sqrt{1 + \frac{4\omega}{g} \operatorname{cosech} v}} \\ &+ \frac{1}{2\pi i g} \int_{-u_0 - i\delta}^{-i\delta} \frac{\exp[i\mu'\{x + \rho \sinh h(v + i\delta)\}]\mu'(v)dv}{\sqrt{1 + \frac{4\omega}{g} \operatorname{cosech} v}}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

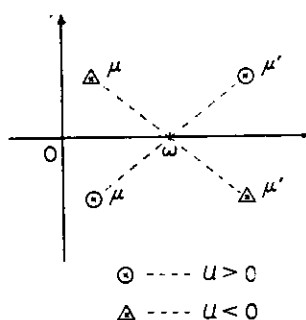


Fig. 7. Poles in p -plane.

where $u_0 = \sinh^{-1} x/\rho$, deforming the path of integration appropriately to a semi-circle of infinite radius according to $(x + \rho \sinh u)$ is positive or negative.

Thence, shifting the paths of integration of (3.15) and summing up (3.14) and (3.15), we have finally

$$\begin{aligned}
 T(x, y, z) = & \frac{1}{2\pi ig} \int_{-\infty}^{-u_0 - i\delta} \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{4\omega}{g} \operatorname{cosech} t}} \\
 & \times [\exp[i\mu\{x + \rho \sinh(t + i\delta)\}]\mu(t) - \exp[i\mu'\{x + \rho \sinh(t + i\delta)\}]\mu'(t)] \\
 & + \frac{1}{2\pi ig} \int_{-\infty}^{-\cosh^{-1}(4\omega/g)} \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{4\omega}{g} \operatorname{cosech} t}} \\
 & \times [\exp[-i\nu\{x - \rho \sinh(t + i\delta)\}]\nu(t) + \exp[-i\nu'\{x - \rho \sinh(t + i\delta)\}]\nu'(t)], \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Differentiating this, we have by the definition

$$\begin{aligned}
 S(x, y, z) = & \frac{1}{2\pi} \left(\frac{xz}{r\rho^2} + \frac{y}{\rho^2} \right) \\
 & + \frac{1}{2\pi g} \int_{-\infty}^{-u_0 - i\delta} \frac{dt}{\sqrt{t}} \{ \exp[i\mu]\mu(\omega - \mu) - \exp[i\mu']\mu'(\omega - \mu') \} \\
 & + \frac{1}{2\pi g} \int_{-\infty}^{-\cosh^{-1}(4\omega/g)} \frac{dt}{\sqrt{t}} \{ \exp[-i\nu]\nu(\omega + \nu) + \exp[-i\nu']\nu'(\omega + \nu') \}, \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_2(x, y, z) = & \frac{1}{2\pi r\rho^4} (ry - ixz)^2 \\
 & + \frac{i}{2\pi g} \int_{-\infty}^{-u_0 - i\delta} \frac{\cosh t dt}{\sqrt{t}} \{ \exp[i\mu]\mu^2 - \exp[i\mu']\mu'^2 \} \\
 & + \frac{i}{2\pi g} \int_{-\infty}^{-\cosh^{-1}(4\omega/g)} \frac{\cosh t dt}{\sqrt{t}} \{ \exp[-i\nu]\nu^2 + \exp[-i\nu']\nu'^2 \} \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

where the exponential terms and the root terms in the integrands are the same as the expression (3.16) but abbreviated.

Differentiating once more and summing up them like the differential equation (2.7), we

can verify that the obtained representation (3.16) satisfies it. This result justifies the preceding deformation of the integral.

Lastly, to compare the representation (3.16) with the wave term (2.13), changing the integration variable t to θ like as $\cos ht = \sec \theta$, we have

$$T(x, y, z) = \frac{1}{2\pi i g} \int_{a-\pi}^{\varphi-\pi/2-i\epsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \frac{4\omega}{g} \cos \theta}} \times [\phi_0(x, y, z; \kappa(\theta), \theta) \kappa(\theta) - \phi_0(x, y, z; \kappa'(\theta), \theta) \kappa'(\theta) \operatorname{sgn}(\cos \theta)], \quad (3.19)$$

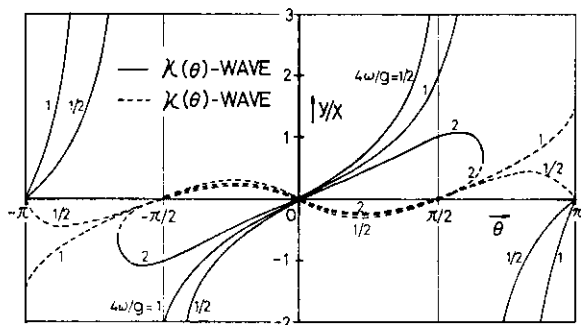


Fig. 8. Points of stationary phase.

where $\varphi = \tan^{-1}(y/x)$, $\epsilon = \sin h^{-1}(|z|/\sqrt{x^2 + y^2})$ and $\alpha = \cos^{-1}(g/4\omega)$.

4. Asymptotic Property in Far Field

It is well known that these function have four wave systems far from the origin, which are dominant terms.

Referring to the literature¹⁾ with respect to their real form, we reproduce here only points of stationary phase of integrands of (2.13) and (3.19) in Fig. 8, that is, points

$$\left. \begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1 + \frac{4\omega}{g} \cos \theta - \sin^2 \theta}}, & \text{for } \kappa\text{-wave}, \\ \frac{y}{x} &= \frac{-\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1 + \frac{4\omega}{g} \cos \theta + \sin^2 \theta}}, & \text{for } \kappa'\text{-wave}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

corresponding to, when $z=0$,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\begin{matrix} \kappa(\theta) \\ \kappa'(\theta) \end{matrix} \right] \{x \cos \theta + y \sin \theta\} = 0, \quad (4.2)$$

Hence, as is well known, the function T (3.19) has no wave up-stream side when $4\omega > g$, because there exists no stationary point, but the integral between $(-\pi/2)$ and $(\varphi - \pi/2 - i\epsilon)$ has a contribution and

$$T(x, y, z) \doteq \frac{1}{2\pi g r}, \quad \text{for } x, y \gg 1. \quad (4.3)$$

For negative x , by the formula (2.10), we have

$$T(x, y, z) \doteq \frac{1}{2\pi g r} - T_w(-x, y, z), \quad (4.4)$$

and T_w of (2.13) may be evaluated by the method of stationary phase.

5. Special Value

There is no difficulty to put x and z to zero in expressions (3.16), (3.19), for example, we have from (3.16),

$$T(0, y, 0) = \frac{1}{2\pi ig} \int_{-\infty}^0 \{ \exp[i\mu y \sinh t] \mu(t) - \exp[i\mu' y \sinh t] \mu'(t) \} \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{4\omega}{g} \operatorname{cosech} t}} \\ + \frac{1}{2\pi ig} \int_{-\infty}^{\cosh^{-1}(4\omega/g)} \{ \exp[i\nu y \sinh t] \nu(t) + \exp[i\nu' y \sinh t] \nu'(t) \} \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{4\omega}{g} \operatorname{cosech} t}}, \quad (5.1)$$

Of course, there is no jump along the y -axis and the wave term becomes the imaginary part of T by (2.9):

$$T_w(0, y, 0) = \bar{T}(0, y, 0) - T(0, y, 0), \quad (5.2)$$

and from (2.13)

$$T_w(0, y, 0) = \frac{i}{2\pi g} \int_{-\pi}^{\pi} [\exp[-i\kappa y \sin \theta] \kappa(\theta) - \exp[-i\kappa' y \sin \theta] \kappa'(\theta) \operatorname{sgn}(\cos \theta)] \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \frac{4\omega}{g} \cos \theta}}, \quad (5.3)$$

On the other hand, if we put y and z to zero, in the expression (3.16), first integral tends to the negative infinity because $u_0 = \sinh^{-1} x/\rho$ tends infinity and its limiting value becomes indeterminate.

Therefore, we may put z to 0, that is $\delta=0$ at first and then take the limiting value for $y=0$.

Since $\mu(t)$ tends to zero for greater t and

$$\lim_{x \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{-u_0} \frac{\exp[i\mu'(t)(x + y \sinh t)] \mu'(t) dt}{\sqrt{1 + \frac{4\omega}{g} \operatorname{cosech} t}} = \frac{1}{ix}, \quad (5.4)$$

we have

$$T(x, 0, 0) = \frac{1}{2\pi g x} \\ + \frac{1}{2\pi ig} \int_{-\infty}^{-\cosh^{-1}(4\omega/g)} \{ \exp[-i\mu x] \nu(t) + \exp[-i\nu' x] \nu'(t) \} \frac{dt}{\sqrt{1 - \frac{4\omega}{g} \operatorname{cosech} t}}. \quad (5.5)$$

For the wave term T_w , there is no difficulty for this limiting process.

Lastly, other expressions (3.17) and (3.19) will be discussed in the same manner as the above, but it may be easier to obtain by the differentiation of the above expression by definitions (2.5) and (2.7) like as

$$\left. \begin{aligned} S(x, 0, 0) &= \left(i\omega - \frac{\partial}{\partial x} \right) T(x, 0, 0) , \\ S_z(x, 0, 0) &= \frac{1}{g} \left(i\omega - \frac{\partial}{\partial x} \right) S(x, 0, 0) , \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

6. The Function for Steady Case

When ω tends to zero, we have the case of steady and non-oscillating problem.

Then, we see from (2.12) and (3.12)

$$\left. \begin{aligned} \kappa(\theta) &\doteq 0 , & \kappa'(\theta) &\doteq g \sec^2 \theta - \frac{is}{2} \sec \theta , \\ \mu(t) &\doteq \nu(t) \doteq 0 , & \mu' &\doteq \nu' \doteq g \cosh t . \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Therefore, we have at first from the definition (2.3)

$$T(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp[kz + ik\tilde{\omega}(\theta)] dk d\theta}{k \cos^2 \theta - g + is \cos \theta} , \quad (6.2)$$

and from the expression (3.16)

$$\begin{aligned} T &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{-u_0 - is} \exp[ig(x + y \sinh t - iz \cosh t) \cosh t] \cosh t dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\pi/2 - it} \exp[ig(-x + y \sinh t - iz \cosh t) \cosh t] \cosh t dt . \end{aligned} \quad (6.3)$$

The last expression agrees with the one obtained in the former paper of the author²⁾, who defined like as

$$T(x, y, z) = \frac{1}{\pi} O_{-2}^{(1)}(gx, gy, -gz) . \quad (6.4)$$

7. The Function for the Case without Advance Speed

When the advance speed becomes zero, it means that g tends infinity but ω^2/g , say K , stays at some finite value, we have from (2.12),

$$\kappa(\theta) \doteq \frac{\omega^2}{g} = K , \quad \kappa'(\theta) \doteq g \sec^2 \theta \doteq \infty . \quad (7.1)$$

Putting these values in the expression (3.20), we see the second term of the right hand side has no contribution and we have

$$[gT(x, y, z)]_{g=\infty} = \frac{K}{2\pi i} \int_{-\pi - i\infty}^{\pi - \pi/2 - it} \exp[ikR \cos(\theta - \varphi) + kz] d\theta , \quad (7.2)$$

where $R = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Deforming the path of integration in the complex θ -plane, we may integrate it respectively as the following portions,

$$\int_{-\pi-i\infty}^{\varphi-\pi/2-i\epsilon} = \int_{-\pi+\varphi-i\infty}^{-\pi+\varphi} + \int_{\varphi-\pi}^{\varphi-\pi/2} + \int_{\varphi-\pi/2}^{\varphi-\pi/2-i\epsilon}, \quad (7.3)$$

and we have

$$\begin{aligned} [gT]_{\varphi=\infty} = & \frac{K}{2i} e^{Kz} H_0^{(2)}(KR) - \frac{K}{4} e^{Kz} \{H_0(KR) - Y_0(KR)\} \\ & + \frac{K}{2\pi i} e^{Kz} \int_0^{-s \sinh^{-1} z/R} \exp[-KR \sinh v] dx. \end{aligned} \quad (7.4)$$

This agrees with the well known expression in this case³⁾.

8. Conclusion

As we see in the precedings, the fundamental singularity, which appears in the theory of ship motions in a sea way can be represented by a single integral, otherwise it is done by a double integral.

This is based on a simple reason. Namely, all such functions are harmonic so that they must be represented by a double Fourier integral like as

$$f(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[z \sqrt{p^2 + q^2} + ipx + iquy] F(p, q) dp dq, \quad (8.1)$$

but they must satisfy also the free surface condition (2.7), so that p and q must satisfy the relation:

$$(p - \omega)^2 = g \sqrt{p^2 + q^2}. \quad (8.2)$$

Therefore, the above double integral means substantially a simple integral, or we can say that all such functions can be represented by the summation of the elementary solution

$$\exp[z \sqrt{p^2 + q^2} + ipx + iquy], \quad (8.3)$$

in which p and q satisfies (8.2).

References

- 1) T. Hanaoka: On the Velocity Potential in Michell's System and the Configuration of the Wave-Ridges due to a Moving Ship, Journal of Zosen Kyokai, Vol. 93, 1953.
- 2) M. Bessho: On the Fundamental Function in the Theory of the Wave-Making Resistance of Ships. Mem. of Defense Academy, Vol. 4, 1964.
- 3) M. Bessho: On the Theory of Motions Among Waves of a Ship having no Advance Speed, Scientific and Engineering Rep. of Defense Academy (Japanese), Vol. 3, 1965.

浅い水面に浮んで動揺する平板に働く 流体力について

(牧山幸彌教授に捧ぐ)

別 所 正 利*

(昭和52年4月26日受理)

1. 序 論

近年洋上に浮んでいる型の構造物の需要が増えそれに伴ってその波浪中動揺性能の研究も大変盛んになってきた。

この研究では水上で動揺するときに物体に働く力また波から受ける力を先ず求めなければならない。

一般に浮遊構造物は水深のあまり深くないところに設置されると考えられるのでこれらの力を正確に求めるためには水深は有限としてその影響を加味する必要がある²⁾が、その影響はかなり複雑となるので今までのところは水深を無限と仮定した理論の方が多く見受けられる。

一方もう一つの極限として水深が十分浅くてできる波がいわゆる浅海波となる場合が考えられるがこの場合についての流体力の理論に関してまとまった記述はあまり見受けられない。

本報はこの点に着目して水深が十分浅い海面に平板が浮んでいる場合を考えそれが動揺する場合に水から受ける力や波から受ける力についての理論を展開しようとするものである。

先ず3次元的問題の定式化を行い具体的に円板についての解を求め、さらに長方形板の近似解について述べ最後に2次元問題について述べることにする。この最後の問題の解はJ.J. Stokerの本¹⁾に出ているがここではそれを付加質量とか波の強制力とかの形に整理しておいた。

2. 問題の定式化¹⁾

十分浅い水深 h の水面に境界曲線 C で囲まれた平板 S が浮んでいるとしよう。

図1のように座標系をとってその運動による速度ポテンシャルを ϕ 、水面上昇を ζ とする。

水面における速度は近似的に

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi = \frac{\partial}{\partial t} \zeta, \quad (2-1)$$

* 機械工学教室 教授

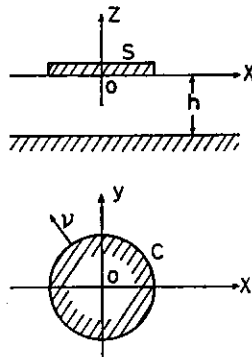


Fig. 1. Co-ordinate system

であるが浅水近似では速度ポテンシャルは z 方向に一様であると見なすのでこの式は陽に表れず連続の条件から次のような形に表される。

$$\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial t} \zeta(x, y, t) = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi(x, y, t), \quad (2-2)$$

また水面にかかる圧力が P であるとするベルヌーイの定理により近似的に

$$\frac{1}{\rho} P(x, y, t) = - \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, y, t) + g \zeta(x, y, t), \quad (2-3)$$

ここに ρ は水の密度, g は重力の定数である。

それゆえ, 水面の圧力がなければ (2-2) と (2-3) 式から ζ を消去して Φ は S の外側で

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi(x, y, t) = \frac{1}{gh} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(x, y, t), \quad (2-4)$$

なる偏微分方程式を満たさねばならない。

一方 S の中では ζ は与えられるので (2-2) 式なるポアソンの方程式を満たさねばならないことになる。

しかしこれらは同じ水の運動を表現するものであるから境界 C 上で不連続となつてはならない。

すなわち

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \Phi, \Phi: C \text{ Continuous on } C, \quad (2-5)$$

これらの条件の他に波は外側に出ていくという条件を付加すれば解は一義的に定まることになる。

さて運動はすべて円周波数 ω で周期的に起こっているものとした線型的に論じているのであるからそれは運動の振幅 X に比例しているのだから次のように複素表示しかつ正規化しておこう。

浅い水面に浮んで動揺する平板に働く流体力について

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \operatorname{Re}[-i\omega X\phi(x, y)e^{i\omega t}], \\ \zeta &= \operatorname{Re}[XZ(x, y)e^{i\omega t}], \\ P &= \operatorname{Re}[Xp(x, y)e^{i\omega t}], \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

そうすると (2-4) 式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + K^2\right)\phi(x, y) = 0, \quad K = \omega/\sqrt{gh} \quad (2-7)$$

また (2-2) 式は

$$h\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi(x, y) = Z(x, y), \quad (2-8)$$

となる。

さて C の外側で ϕ は (2-7) を満たさねばならないがその一般解はよく知られているように

$$\phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(2)}(Kr) \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix}, \quad (2-9)$$

ここに $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とし, $H_n^{(2)}$ はハンケル関数である。

あるいはまたグリーンズの定理によって次のように表現することもできる。

$$\phi(x, y) = \frac{i}{4} \int_C \left\{ \phi(x', y') \frac{\partial}{\partial \nu} H_0^{(2)}(KR) - \frac{\partial \phi}{\partial \nu} H_0^{(2)}(KR) \right\} ds(x', y'), \quad (2-10)$$

ただし $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ 。

この式を用いると十分遠方のポテンシャルの近似値が計算できる。

すなわちハンケル関数の漸近展開を使って直ちに

$$\phi(x, y) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi Kr}} H(K, \theta) e^{-i(Kr + (\pi/4)\epsilon)}, \quad (2-11)$$

ここに

$$H(K, \theta) = \frac{i}{4} \int_C \left\{ \phi(x, y) \frac{\partial}{\partial \nu} - \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right\} \exp(iK\tilde{\omega}(\theta)) ds, \quad (2-12)$$

ここに $\tilde{\omega}(\theta) = x \cos \theta + y \sin \theta$ 。

それゆえ C 上の ϕ とその法線微分が分かれば遠方の速度ポテンシャルが求められるがこの値はまた (2-5) 式によって C 内部の値に連続しているので S 上の ϕ の値によっても表現できるはずである。

すなわち (2-12) 式の右辺をグリーンズの定理によって S 上の積分にかえ (2-8) 式を代入すれば

$$H(K, \theta) = \frac{1}{4i} \iint_S \left[K^2 \phi(x, y) + \frac{1}{h} Z(x, y) \right] \exp(iK\tilde{\omega}) dS, \quad (2-13)$$

を得る。

それゆえこの H 関数に限っていえば S 上の ϕ が分かれば計算できるわけである。

ところで C の内側 S 上での ϕ は (2-8) を満たすので一般に次のように書くことができる。

$$\phi(x, y) = \frac{1}{h} [f_0(x, y) + f(x, y)], \quad (2-14)$$

ここにラブラシアンを Δ とすると

$$\left. \begin{aligned} \Delta f_0(x, y) &= Z(x, y), \\ \Delta f(x, y) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2-15)$$

のようになる。すなわち f_0 はポアッソンの方程式の一つの特解とし、 f は任意の調和関数とする。

この f_0 の積分表示はよく知られているしまた後出のような例では大変簡単で視察によって見つかるのでここには記さない。

いづれにしても f_0 が求まれば (2-8) つまり境界条件は満たされたことになるので後は (2-5) つまり外側のポテンシャルに滑らかにつながるように f を決めればよいことになるので問題は結局調和関数 f の境界値問題に帰着する。

これを少し具体的に考える為に外側で ϕ が (2.9) のように表され、 f_0 が分かっているとすると C の内側では f は

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix}, \quad (2-16)$$

のように表されるだろうから C 上で (2-5) の条件を方程式とすれば未定係数 A_n, B_n は定まることになる。

この操作は見掛けよりはずっと簡単で後出の例に見るとおりである。

最後に具体的にでてくる C 上の境界条件を記しておく。

$$\left. \begin{aligned} Z(x, y) &= 1 \quad \text{for Heaving Osc.} \\ &= x \quad \text{for Pitching Osc.} \\ &= y \quad \text{for Rolling Osc.} \end{aligned} \right\} \quad (2-17)$$

振幅 a で α 方向からの入射波の速度ポテンシャルは

$$\Phi_0 = \frac{ga}{i\omega} \phi_0(x, y; \alpha) e^{i\omega t}, \quad (2-18)$$

$$\text{ここに} \quad \phi_0(x, y; \alpha) = \exp[iK(x \cos \alpha + y \sin \alpha)], \quad (2-19)$$

となるので散乱ポテンシャルも

$$\Phi_a = \frac{ga}{i\omega} \phi_a(x, y; \alpha) e^{i\omega t}, \quad (2-20)$$

と規格化しておくと C 上の境界条件は

$$Z(x, y) = 0,$$

つまり

$$\Delta \phi_a(x, y; \alpha) = -\Delta \phi_0 = K^2 \phi_0(x, y; \alpha), \quad (2-21)$$

となる。

3. 力とモーメントおよび積分定理

運動 j によって物体が水から受ける垂直方向の力 F_j およびモーメントは静水圧を除いて次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} F_j &= \iint_S P_j dx dy = -\rho \iint_S \frac{\partial}{\partial t} \phi_j dx dy = -\rho \omega^2 X_j f_{j3}, \\ \left. \begin{aligned} M_y \\ M_x \end{aligned} \right\} &= \iint_S P_j \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dx dy = -\rho \omega^2 X_j \begin{pmatrix} f_{j4} \\ f_{j5} \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

ここに

$$f_{j4} = \iint_S \phi_j Z_4 dx dy, \quad (3-2)$$

ここに

$$Z_3 = 1, \quad Z_4 = x, \quad Z_5 = y, \quad (3-3)$$

なお以下 $j=3$ は上下動, $j=4$ は縦ゆれ, $j=5$ は横ゆれを意味するものとし下添字で夫々の運動を示す事とする。又境界条件は (2-17) によって与えられるものとする。

また波による上下方向の力および横ゆれ, 縦ゆれモーメントは入射波散乱波を (2-18), (2-20) 式のようにとると

$$\left. \begin{aligned} F_{w3} &= -\rho g a e_3, \\ M_{wy} &= -\rho g a e_4, \\ M_{wx} &= -\rho g a e_5, \end{aligned} \right\} \quad (3-4)$$

ここに

$$e_j = \iint_S (\phi_0 + \phi_d) Z_j dx dy, \quad (3-5)$$

と書ける。

さて C の外側で (2-7) 式を満たし (2-9) または (2-10) 式のような表現をもつ二つのポテンシャルを考えて次のような線積分を考えるとグリーンの定理により任意の曲線上

$$\int_C \left[\phi_i \frac{\partial}{\partial \nu} \phi_j - \phi_j \frac{\partial}{\partial \nu} \phi_i \right] ds$$

の積分に変えることができるのでそれを半径無限大の円周上にとると 0 になることが分かる。

それゆえ次の相反性が成り立つ。

$$\int_C \phi_i \frac{\partial}{\partial \nu} \phi_j ds = \int_C \phi_j \frac{\partial}{\partial \nu} \phi_i ds \quad (3-6)$$

一方 C の内側については (2-8) 式を使ってグリーンの定理を利用しかつ上式が成り立つことを考慮すれば

$$\iint_S \phi_j Z_i dx dy = \iint_S \phi_i Z_j dx dy, \quad (3-7)$$

なる相反定理が成り立つことが分かる。

この定理を (3-2) 式に適用すれば力およびモーメントの対称性が分かり

$$f_{ij} = f_{ji}, \quad (3-8)$$

また (3.5) 式に適用すれば

$$\iint_S \phi_a Z_j dx dy = h \iint_S \phi_j d\phi_a dx dy = K^2 h \iint_S \phi_j \phi_0 dx dy,$$

となるのでこれを (3-5) 式に代入し (2-13) 式で定義した関数を使うと

$$e_j = 4ihH_j(K, \alpha), \quad (3-9)$$

を得るがこれはよく知られた Haskind-花岡の関係であって 発散波高と波の強制力が比例していることを示している⁴⁾。

最後に同じくグリーンの定理により無限遠方で (2-11) 式のような展開を持つポテンシャルについて

$$\iint_S [\phi_i \bar{Z}_j - \bar{\phi}_j Z_i] dx dy = \frac{2h^2}{\pi K} \int_0^{2\pi} H_i(\theta) \bar{H}_j(\theta) d\theta, \quad (3-10)$$

となることが証明できる。ここに上棒は複素共役値をとることを意味するものとする。

この式の左辺は仕事積分に比例するのでこの式は物体または水のなす仕事が発散波の波高の積となることを示している。

4. 円板の解

2 節で定式化した境界値問題は円板、楕円板では解析的に解けるが後者ではマシウ関数を使わねばならず少し複雑になるので別の機会に譲ることとする。

本報では最も簡単な円板について逐次その解をあげることにしよう。以下円板の半径は 1 とする。

i) 上下動

$$\text{すなわち} \quad Z(x, y) = 1 \quad \text{for } r < 1, \quad (4-1)$$

速度ポテンシャルは (2.9), (2.14) 式を参照して直ちに

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{4h} (C + r^2), \quad \text{for } r \leq 1, \quad (4-2)$$

$$= AH_0^{(2)}(Kr), \quad \text{for } r > 1, \quad (4-3)$$

ここに A, C は定数でこれらの表現が $r=1$ で滑らかにつながる条件 (2-5) 式によって決められる。

すなわち

$$\left. \begin{aligned} 1 + C &= 4hAH_0^{(2)}(K), \\ 1 &= -2KhAH_1^{(2)}(K), \end{aligned} \right\} \quad (4-4)$$

これから直ちに次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} A &= -1/[2KhH_1^{(2)}(K)], \\ C &= -1 - 2H_0^{(2)}(K)/[KH_1^{(2)}(K)] \end{aligned} \right\} \quad (4-5)$$

これで速度ポテンシャルは求まったのでそれを (3-2), (2-12) 式に代入して f_{ij}, H_j を求めれば (3-1), (3-4), (3-9) 式によって流体力が分かる。

浅い水面に浮んで動揺する平板に働く流体力について

計算の結果は

$$f_{ss} = \frac{-\pi}{8h} \left[1 + \frac{4H_0^{(2)}(K)}{KH_1^{(2)}(K)} \right], \quad (4-6)$$

$$H_1(K, \alpha) = 1/[2iKhH_1^{(2)}(K)], \quad (4-7)$$

となる²⁾。

(4-7) 式からわかるように当然のことながら波の強制上下力は波がどの方向からきても同じである。

ii) 縦ゆれ (今の場合は横ゆれも同じになる)

同様にして

$$Z(r, \theta) = r \cos \theta, \quad \text{for } r \leq 1, \quad (4-8)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi(r, \theta) &= \frac{1}{8h} (C + r^2) r \cos \theta, \quad \text{for } r \leq 1, \\ \phi(r, \theta) &= AH_1^{(2)}(Kr) \cos \theta, \quad \text{for } r > 1, \end{aligned} \right\} \quad (4-9)$$

滑らかに接続されるためには A, C は次のようにならなければならない。

$$\left. \begin{aligned} A &= -1/[4KhH_2^{(2)}(K)], \\ C &= -1 - 2H_1^{(2)}(K)/[KH_2^{(2)}(K)], \end{aligned} \right\} \quad (4-10)$$

これより流体力は

$$f_{4,4} = \frac{-\pi}{32h} \left[\frac{1}{3} + \frac{2H_1^{(2)}(K)}{KH_2^{(2)}(K)} \right], \quad (4-11)$$

$$H_1(K, \alpha) = i \cos \alpha / [4KhH_2^{(2)}(K)], \quad (4-12)$$

iii) 散乱

波の強制力は (3-9) により発散波の波高から求められるのでその目的からは散乱ポテンシャルを特に求める必要はないけれど解の形を知るために一応求めておこう。

また対称性から入射波はどの方向からきても同じである故 $\alpha=0$ としよう。

そうするとまず (2-21) から

$$Z(r, \theta) = \frac{\omega^2}{g} \exp(iKr \cos \theta), \quad \text{for } r \leq 1, \quad (4-13)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi(r, \theta) &= -\exp(iKr \cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n C_n r^n \cos n\theta, \quad \text{for } r \leq 1, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n A_n H_n^{(2)}(Kr) \cos n\theta, \quad \text{for } r \geq 1, \end{aligned} \right\} \quad (4-14)$$

ここに $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_n=2$ for $n \geq 1$ 。

とおいて係数 A_n, C_n を決めると

$$A_n = -i^n J_{n+1}(K) / H_{n+1}^{(2)}(K), \quad (4-15)$$

$$C_n = 2i^{n+1} / [\pi K H_{n+1}^{(2)}(K)], \quad (4-16)$$

を得る。

この解から例えば (3.5), (3.9) 式が同一であることを確かめることができる。

5. 2 次元問題

2 次元問題つまり十分長い長方形板が横から波を受ける場合も簡単に解ける場合の一つであり文献に示されたとおりである¹⁾ が以下少くし系統的に整理して記述しておく。

さて水面に長さ 2 の平板があるものとし規格化などは (2-6) 式のようにとるものとする。

平板の外側で速度ポテンシャルの満たすべき方程式は (2.7) 式の代わりに

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + K^2\right)\phi(x) = 0, \quad (5-1)$$

物理的に許容し得る解は (2-9) 式の代わりに

$$\phi(x) = A^\pm e^{\mp iKx}, \quad \text{for } x \leq 0, \quad (5-2)$$

となり, 平板の内側では

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x) = \frac{1}{h} Z(x), \quad (5-3)$$

となり Z は境界条件として与えられるものであるが (2-14), (2-15) 式のように表されることは同様である。

しかし今度は偏微分方程式ではないのでずっと簡単であり, 例えば (2-14) 式の f は

$$f(x) = Cx + D, \quad (5-4)$$

のように決ってしまう。

境界条件としては $|x| < 1$ に対して

$$Z(x) = \begin{cases} 1: \text{Heaving osc.} \\ x: \text{Pitching osc.} \end{cases} \quad (5-5)$$

となりまた x の正方向からの入射波を (2-18) のように正規化しておく (2-19) 式の代わりに

$$\phi_0^+(x) = \exp(iKx), \quad (5-6)$$

で同じく (2-20) 式のように正規化された散乱ポテンシャルの境界条件は次のようになる。

$$Z_a^+(x) = h \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_a^+(x) = K^2 h e^{iKx}, \quad (5-7)$$

力およびモーメントも (3-1), (3-4) 式のように正規化しておく (3-2), (3-5) 式の各係数は

$$f_{ij} = \int_{-1}^1 \phi_j Z_i dx, \quad (5-8)$$

$$e_j = \int_{-1}^1 (\phi_0^+ + \phi_a^+) Z_j dx, \quad (5-9)$$

と与えられ相反定理 (3-8) が先ず成立, また波の力については (3-9) 式を導いたのと同様にして外側のポテンシャルを (5-2) のようにとると

$$e_j = -2iKhA_j^+, \quad (5-10)$$

を得る。

また (3-10) 式の関係は部分積分によって次のようになる。

$$\int_{-1}^1 (\phi_i \bar{Z}_i - \bar{\phi}_i Z_i) dx = 2iKh[A_i^+ \bar{A}_i^+ + A_i^- \bar{A}_i^-], \quad (5-11)$$

以下具体的に解を並べていこう。

i) 斉次解

まず最初に (5-3) 式の右辺 Z が 0 のときにも解があることに注目しよう。以下この解を斉次解と呼ぶ。

このとき明らかに (5-4) 式と同じく

$$\phi(x) = Cx + D, \quad \text{for } |x| < 1, \quad (5-12)$$

となり、外側では (5-2) となるので滑らかに接続するためには

$$\left. \begin{aligned} C &= 0, \\ D &= -iKhA^+ e^{-iK}, \\ A^+ &= -A^-, \end{aligned} \right\} \quad (5-13)$$

でなければならない。

これは $Z=0$ に対する解であるから Z が 0 でない他のすべての解はこの解の任意定数倍だけ不定である。

一方、物理的に考えてみると $Z=0$ は底の平らな平板が左右ゆれをする場合に当たると考えられ、実際上述の解は左右反対称となっている。

しかしながら浅水近似では水深方向に x 方向の速度は一定とするので板の下面の水はあたかも固体であるかのように左右に動いていることになっている。

それに反して平板の喫水は水深に比し小さいと考えられるので実際の左右ゆれでは水はほとんど動かされないと予想される。

それゆえ以下ではこの解の部分は考えないことにする。

ii) 上下動

$Z=1$ であるから

$$\phi(x) = \frac{1}{h} \left(\frac{x^2}{2} + C \right), \quad \text{for } |x| < 1, \quad (5-14)$$

となり外側では同じく (5-2) 式とすると同様にして

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{i}{K} - \frac{1}{2}, \\ A^+ &= A^- = i e^{iK} / Kh, \end{aligned} \right\} \quad (5-15)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{s,s} &= \frac{1}{h} \left(\frac{2i}{K} - \frac{2}{3} \right), \\ e_s &= 2 e^{iK}, \end{aligned} \right\} \quad (5-16)$$

iii) 縦ゆれ

$Z=x$ と置くと

$$\phi(x) = \frac{1}{h} \left(\frac{x^3}{6} + Cx \right), \quad (5-17)$$

となり同様にして

$$\left. \begin{aligned} C &= -\frac{1}{6} - \frac{1}{3(1+iK)}, \\ A^+ &= -A^- = -e^{iK} / [(1+iK)3h], \end{aligned} \right\} \quad (5-18)$$

$$\left. \begin{aligned} f_{44} &= \frac{-2}{9h} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{1+iK} \right), \\ e_4 &= \frac{2iK}{3(1+iK)} e^{iK}, \end{aligned} \right\} \quad (5-19)$$

iv) 散乱

Z は (5-7) 式によって与えられるので

$$\phi(x) = -e^{iKx} + C + Dx, \quad \text{for } |x| < 1, \quad (5-20)$$

と置くと

$$\left. \begin{aligned} C &= e^{iK}, \\ D &= \frac{iK}{1+iK} e^{iK}, \\ A^+ &= \frac{iK}{1+iK} e^{2iK}, \\ A^- &= \frac{e^{2iK}}{1+iK} - 1, \end{aligned} \right\} \quad (5-21)$$

を得る。

v) 反射波と透過波

これらの結果を使うと x の正方向からの単位波高の入射波に対し反射波高 (半波高) A_R と透過波のそれ A_T は次のように計算できる。

$$\left. \begin{aligned} A_R &= A_d^+ + K^2 h (Z A_s^+ + \theta A_4^+), \\ A_T &= (1 + A_d^-) + K^2 h (Z A_s^- + \theta A_4^-), \end{aligned} \right\} \quad (5-23)$$

あるいは辺々相加減して

$$\left. \begin{aligned} A_R + A_T &= -(1 + A_d^+ + A_d^-) + 2K^2 h Z A_s^+, \\ A_R - A_T &= -(1 + A_d^- - A_d^+) + 2K^2 h \theta A_4^+, \end{aligned} \right\} \quad (5-23)$$

となる。

ここに $A_d^\pm$ は (5-21) 式 $A_s^\pm$ は (5-15) 式 $A_4^\pm$ は (5-18) 式により与えられるものとし, Z, θ はそれぞれ上下, 縦ゆれの振幅とする。

それゆえ例えば

$$A_R = A_T = 0, \quad (5-24)$$

つまり反射波も透過波も消えるためにはそれぞれの式により次のように上下, 縦ゆれさせればよい。

$$\left. \begin{aligned} Z &= \frac{i}{2K} e^{iK}, \\ \theta &= \frac{(iK-1)}{6K^2} e^{iK}, \end{aligned} \right\} \quad (5-25)$$

6. 2次元弾性平板

前節で取り扱った平板が弾性的に折れ曲がる場合もすでに教科書に解がのっている¹⁾が前節同様の趣旨で取り扱ってみよう。

平板の材料は均質で重量分布も一様であるとし、 x の正方向からの単位振幅の入射波によって運動しているとする、その運動方程式は次のように書ける。

$$\frac{EI}{\rho g} \frac{d^4}{dx^4} Z(x) - \frac{\omega^2 w}{\rho g^2} Z(x) + Z(x) + \frac{\omega^2}{g} \phi(x) = -\{\phi_0^+(x) + \phi_0^-(x)\}, \quad (6-1)$$

ここに E はヤング率、 I は単位幅当たりの断面 2 次モーメント、 w は単位幅当たり、単位長さ当たりの平板の重量とし、 Z は平板の上下変位、 ϕ は速度ポテンシャルで Z との間に (5-3) 式の関係があるものとする。

前節の例のように平板の変形がない場合と異なる点は Z がこのような複雑な形で与えられる点である。

しかし今の場合 (5-3) 式の関係があるので上式は解析的に解けることは文献のとおりである¹⁾。

しかしここでは有限又は無限水深の場合にも適用できる解法として次のように考えよう。

今正規直交関数系 $u_n(x)$ を考えて、つまり

$$\int_{-1}^1 u_n(x) u_m(x) dx = \delta(n, m), \quad (6-2)$$

次のように展開できるとしよう。

$$Z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n u_n(x), \quad (6-3)$$

この $u_n(x)$ を (5-3) 式の右边に代入して得られる速度ポテンシャルを $\phi_n(x)$ とすると次のように展開できる。

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \phi_n(x), \quad (6-4)$$

この直交関数系としては問題の性質から両端自由梁の固有関数系が適当と考えられるのでそれに上下、縦ゆれも加えて次のように定義しよう。

$$u_0(x) = 1/\sqrt{2}, \quad u_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x, \quad (6-5)$$

$$u_n(x) = \left(\frac{1}{\mu_n}\right)^4 \frac{d^4}{dx^4} u_n(x), \quad n \geq 2, \quad (6-6)$$

とし μ_n は上式の逐次の固有値とする (付録参照)。

(6-5) 式の解は前節で得てあるが添字が違っているので必要な量を記すと、定義式はやはり (5-8), (5-9) 式として

$$\left. \begin{aligned} f_{00} &= \frac{1}{h} \left(\frac{i}{K} - \frac{1}{3} \right), \\ f_{1,1} &= -\frac{1}{3h} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{1+iK} \right), \end{aligned} \right\} \quad (6-7)$$

$$\left. \begin{aligned} e_0 &= \sqrt{2} e^{iK}, \\ e_1 &= \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \frac{iK}{1+iK} e^{iK}, \end{aligned} \right\} \quad (6-8)$$

となる。

$n \geq 2$ に対しては前節同様にして解くと

$$\left. \begin{aligned} \phi_n(x) &= \frac{1}{h} \left(\frac{1}{\mu_n}\right)^4 \frac{d^2}{dx^2} u_n(x), \quad \text{for } |x| < 1, \\ &= 0, \quad \text{for } |x| > 1, \end{aligned} \right\} \quad (6-9)$$

となって、大変興味深いことに発散波がなくなる。

つまり

$$e_n = 0, \quad \text{for } n \geq 2, \quad (6-10)$$

このことから $f_{n,m}$ は n または m が 2 以上では虚部はなくなる (付録参照)。

これらの結果を使って (6.1) の両辺に $u_n(x)$ をかけて積分すると次の連立方程式を得る。

$$\begin{aligned} D_n C_n + \frac{\omega^2}{g} \sum_{\substack{m=0 \\ n \neq m}}^{\infty} C_m f_{n,m} &= -e_0 \delta(0, n) \\ &\quad - e_1 \delta(1, n), \end{aligned} \quad (6-11)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= 1 - \frac{\omega^2}{g} \left(\frac{w}{\rho g} - f_{00} \right), \\ D_1 &= 1 - \frac{\omega^2}{g} \left(\frac{w}{\rho g} - f_{1,1} \right), \\ D_n &= 1 + \frac{\omega_n^2}{g} \times \frac{w}{\rho g} - \frac{\omega^2}{g} \left(\frac{w}{\rho g} - f_{n,n} \right), \end{aligned} \right\} \quad (6-12)$$

でまた

$$\frac{\omega_n^2}{g} = \frac{EI}{wL^4} (2\mu_n)^4, \quad n \geq 2, \quad (6-13)$$

つまり ω_n は空中におけるこの板の撓み振動の円周波数とする。

ここで Stoker¹⁾ のあげている数値をとって 4 次以上の振動を無視して動揺振幅と波の反射係数を計算してみると図 2, 3 のようになる。

$$\begin{aligned} h &= 40 \text{ ft}, \quad w = 85 \text{ pounds/ft}^2, \\ EI/(wL^4) &= 1.6452, \quad L = 50 \text{ ft}. \end{aligned}$$

この剛性値では撓み振動の影響はこの範囲では全く無視し得る。

というのは最低次の撓み振動に対して (6-12) 式の第 3 式の右辺が 0 となる波長は長さ L の 0.288 倍という短波長にくるからである⁵⁾。

そこで剛性がないと仮定すると図中点線のようにかなりの変化が見られるがこれは (6-11) 式において D_2 または D_3 が 0 になる近辺であって図には示さなかったがこの近くで撓み振動の振幅は急激に大きくなり逆に上下ゆれ、縦ゆれは小さくなっている。この

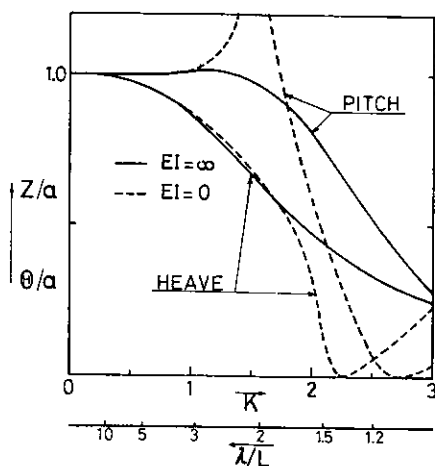


Fig. 2. Heave and pitch response

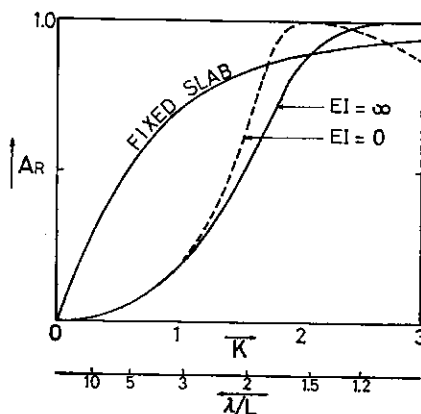


Fig. 3. Reflection coefficient

ことは高次振動を計算に入れても定性的には同じであろう。

波の反射率については固定した剛な平板が最も高く動揺をゆるすと長波長では小さくなってしまいます。しかし剛性がなくなると僅かに大きくなるがこの原因は上述のように動揺振幅が小さくなる点にあるようである。

というのは (6-10) 式で見たように撓み振動によっては波を起こさないで、その振幅の大きさは反射波に影響がなく、間接的に撓み振動が大きくなると平均振幅 C_0 , C_1 が小さくなって結果的に反射が大きくなっているのであるがその効果もあまり大きいものではないようにみえる。

7. 結 論

水深が十分小さくていわゆる浅水近似が適用できるような水面に浮んで波を受けて動揺する平板に働く流体力について系統的な記述を試み次のような結論を得た。

i) 3 次元問題を定式化し力およびモーメントを与える式を求め、それらの間の相反性などを導いた。

それによると発散波高が波の強制力に比例するいわゆるハスキント・花岡の定理がこの場合も成り立つことを確かめた。

ii) 円板については具体的に解を求め流体力を計算し上下方向の力については一色らの結果に一致することを確認した。

iii) 2 次元問題についても同様な記述をし文献の結果に一致することを確認した。

iv) さらに平板が弾性的に撓む場合を採り上げて文献とは別の解法の手順を示し近似値を求めた。

v) その結果によると剛性が動揺や反射波に影響を及ぼすのは一般には波長が平板の長さより短い場合でそれより長い波では剛性がなくなると影響が現れない。またその反射波に及ぼす影響はあまり大きくない。

参 考 文 献

- 1) J. J. Stoker: Water Waves, pp. 414-449, Interscience Publisher, Inc., New York, 1957.

- 2) H. Issiki, H. Maeda and J. H. Hwang: On the Heaving Motion of a Circular Disk in Shallow Water, 日本造船学会論文集第 136 号, 昭和 49 年 12 月.
- 3) 坪井忠二: 振動論, 河出書房, 昭和 17 年.
- 4) 別所正利: 動揺問題における波なし分布について, 日本造船学会論文集第 117 号, 昭和 40 年 6 月.
- 5) 別所正利: 船体剛性を考慮した波浪中船体運動の理論 (前進速度のない場合), 防衛大学校理工学研究報告第 11 巻, 昭和 48 年 9 月.

付録一 様梁の撓み振動の正規関数³⁾

教科書によれば本文 (6-6) 式の固有関数は

$$\left. \begin{aligned} u_{2n}(x) &= A_{2n} \cos \mu_{2n} x + B_{2n} \cosh \mu_{2n} x, \\ u_{2n+1}(x) &= A_{2n+1} \sin \mu_{2n+1} x + B_{2n+1} \sinh \mu_{2n+1} x, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-1})$$

とかけ両端自由の条件は

$$-\frac{d^2}{dx^2} u(\pm 1) = \frac{d^3}{dx^3} u(\pm 1) = 0, \quad (\text{A-2})$$

それゆえ

$$\left. \begin{aligned} \frac{B_{2n}}{A_{2n}} &= \frac{\cos \mu_{2n}}{\cosh \mu_{2n}}, \\ \frac{B_{2n+1}}{A_{2n+1}} &= \frac{\sin \mu_{2n+1}}{\sinh \mu_{2n+1}}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-3})$$

であり固有値方程式は次のようになる。

$$\cos 2\mu_n \cosh 2\mu_n = 1, \quad (\text{A-4})$$

固有値もよく知れていて表のようになり, A_n もすぐ計算できる。なお $n=2$ が最低次の固有振動である。

さて力の係数は (5-8) 式の定義式に (6-9) 式と (5-3) 式の関係を代入して

$$hf_{n,m} = \frac{1}{\mu_n^4} \int_{-1}^1 u_m \frac{d^2}{dx^2} u_n dx, \quad n, m \geq 2, \quad (\text{A-4})$$

となるが (A-1) ~ (A-4) 式を考慮すると最終的に

$$\left. \begin{aligned} hf_{2n,2m} &= \frac{4}{\mu_{2n}^4 - \mu_{2m}^4} \{ \mu_{2n} \tanh \mu_{2n} - \mu_{2m} \tanh \mu_{2m} \}, \\ hf_{2n+1,2m+1} &= \frac{4}{\mu_{2n+1}^4 - \mu_{2m+1}^4} \{ \mu_{2n+1} \coth \mu_{2n+1} - \mu_{2m+1} \coth \mu_{2m+1} \}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-5})$$

となりまた $m=0$ では

$$\left. \begin{aligned} hf_{2n,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\mu_{2n}^4} \int_{-1}^1 \frac{d^2}{dx^2} u_{2n} dx = \frac{2}{\mu_{2n}^4} \tanh \mu_{2n}, \\ hf_{2n,1} &= \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{1}{\mu_{2n+1}^3} \left(\coth \mu_{2n+1} - \frac{1}{\mu_{2n+1}} \right), \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-6})$$

などを得る表参照。

浅い水面に浮んで動揺する平板に働く流体力について

Table Numerical coefficients

n	2	3	4	5
μ_n	2.36502	3.92660	5.49781	7.06859
A_n	.99129	1.00039	.99998	.99999
B_n	.13170	.02789	.00579	.00120

$hf_{n,m}$

n	m		
	0	2	4
2	.06281	— .10993	.01889
4	.00219	.01889	— .02706

$hf_{n,m}$

n	m		
	1	3	5
3	.08538	— .04843	.00556
5	.00561	.00556	— .01718

On Hydrodynamical Forces acting on an Oscillating Flat-Plank Floating on a Shallow Water

(Dedicated to Professor Koya MAKIYAMA)

By Masatoshi BESSHO*

(Received Apr. 26, 1977)

Abstract

The theory of oscillation among waves of a flat plank floating on a shallow water is comparatively simpler than the one in the case of finite or infinite depth of water because of its shallow water approximation.

However it is only usefull for the limit of finite water depth but for the pratical application.

The author describes hydrodynamical forces acting on a plank systematically so that they may be made use of the calculation of its oscillation.

For a circular disc, actual solutions for heaving and pitching oscillation and diffraction of incident wave are given and hydrodynamical forces are calculated.

For a numerical example, the motion of an elastic slab with infinite breadth floating and oscillating on a shallow water are treated and concluded that its stiffness does not affect the mean amplitude of oscillation in usual except the case when it is flexible.

* Professor; Department of Mechanical Engineering, National Defense Academy.

一様流中における吹流しの抵抗について

(永井四郎教授に捧ぐ)

別 所 正 利*・水 野 俊 明*

(昭和 56 年 7 月 6 日受付)

1. 概 要

旗や吹流しが風にはためく現象は、日常われわれの周辺にいくらかも見受けられる情景であるが、その流体力学的な解析は未だほとんどなされていないといってよい。

旗などの流体抵抗を測定した例はあっても、その結果は抵抗係数または索の張力といった形で表示されている場合が多く、抵抗の成分や抵抗を生じるしくみなどに関する研究は見受けられず、これらの点を解明するには、現段階ではまず実験的観察から出発しなければならない。

そこで、旗や吹流しの抵抗を流体力学的に解析する試みの第一段階として、一様流中における旗や吹流しの運動に関する基礎理論を構成し、次いでアスペクト比が小さく、はためきなどの現象が比較的観察しやすい吹流しを対象としてその抵抗測定を行うと同時にその運動を観察し、両者の間の関連を調べた。

2. 旗、吹流しの理論

2.1 吹流しに関する近似理論

一様風速 V の流れの中に長さ L 、直径 D の円筒状吹流しがあるとする。吹流しが風の中で振動すると、その断面は円形から複雑に折れ曲がると考えられるが、ここでは簡単のために吹流しを提灯のようなものと考え、縦方向（長さ方向）には自由に変形するが第 1 近似として断面形状は円形を保つものとし、また吹流しの各断面に働く張力 T は一定で、吹流し後端は常に流れの方向に引張られているものとする。これは、吹流しでは後端を閉じるとか、開口を狭くするとかして抵抗を持たせている事情にほぼ対応していると考えてよいであろう。

また平衡位置からの吹流しの変位は $x-y$ 平面内に止まると仮定しておく。

さていま変位を $\eta(x, t)$ とすると、 y 方向の力の平衡方程式は

$$T \frac{d^2 \eta}{dx^2} = (m + m') \frac{d^2 \eta}{dt^2} \quad (1)$$

と表わされる。ただし m は吹流

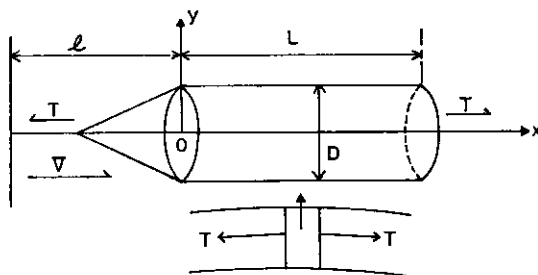


図 1 (説明図)

* 防衛大学校 機械工学教室 教授

しの単位長さ当りの質量, m' は附加質量 ($= (1/4)\rho\pi D^2$), ρ は空気密度である。

また, 吹流しの単位表面積当りの重量を w とすれば

$$\begin{aligned} m + m' &= \pi D \frac{w}{g} + \frac{1}{4} \rho \pi D^2 \\ &= \frac{1}{4} \rho \pi D^2 (1 + K) \end{aligned} \quad (2)$$

$$K = \frac{4w}{\rho g D} = \frac{W}{\rho g A L} \quad (A \text{ は吹流し断面積}) \quad (3)$$

である。

さてここで ω を吹流しの振動の周波数として

$$\bar{\eta}(x, t) = \text{Re}\{\eta(x)e^{i\omega t}\} \quad (4)$$

のように表わすと, 式 (1) は

$$T \frac{d^2 \eta}{dx^2} + \omega^2 (m + m') \eta = 0 \quad (5)$$

となり,

$$C^2 = \frac{T}{(m + m')} \quad (6)$$

とおけば

$$\omega^2 \eta(x) + C^2 \frac{d^2 \eta(x)}{dx^2} = 0 \quad (7)$$

となって典型的な波動方程式が得られる。

ここで, 張力 T が抵抗で与えられるとすれば

$$T = \frac{1}{2} C_{DA} \cdot \rho \left(\frac{\pi}{4} D^2 \right) V^2 \quad (8)$$

従って式 (8) は

$$C^2 = \frac{C_{DA} V^2}{2(1 + K)}, \quad \frac{C}{V} = \sqrt{\frac{C_{DA}}{2(1 + K)}} \quad (9)$$

となる。ただし抵抗係数 C_{DA} は R を抵抗として

$$C_{DA} = \frac{R}{(1/2)\rho A V^2}$$

と定義する。

次に境界条件を考える。原点 0 で吹流しは曳索につながっているとすれば, その傾斜は等しいと考えられるから, 吹流しの曳索の長さを l として

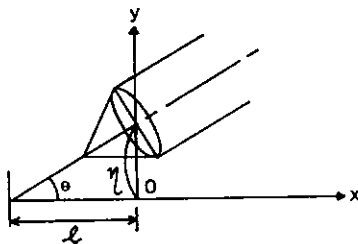


図 2 (説明図)

$$\left. \frac{d\eta}{dx} \right|_{x=0} = \frac{\eta}{l} \Big|_{x=0} \quad (10)$$

また, 吹流し後端 $x=L$ では T が流れの方向に後端を引張っているとすれば

$$\left. \frac{d\eta}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad (11)$$

となる。(後端が固定されていて $\eta(L)=0$ ならば弦の振動に等しく

なる。)

式 (7) の一般解は

$$\left. \begin{aligned} \eta(x) &= A_0 \sin kx + B_0 \cos kx \\ k &= \omega/C \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

であるから、境界条件の式 (10) と式 (11) とから

$$\left. \begin{aligned} kA_0 &= B_0/l \\ A_0 \cos kL &= B_0 \sin kL \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

となるので、固有値方程式

$$\frac{A_0}{B_0} = \tan kL = \frac{1}{kl} \quad (14)$$

を得る。これより可付番無限箇の固有値が容易に求められる。

このような固有値は外的擾乱によって誘起され、その振幅は擾乱がわからなければ定まらない。またそれを正確に定めるには適当な減衰の推定値が必要であるが、例えば同調時のように大振幅となると断面形状が変わらないというような仮定は適当ではなくなるであろうから、そのように細かく考えても無意味である。

また、外乱がないとしても平衡位置は重力のため水平 ($\eta=0$) ではないから、吹流しは常に y 方向の力を受けていることになり、それがはためきの原因となっていることも考えなければならない。

さて、ここで式 (12) を変形して

$$\frac{\eta(x)}{B_0} = \frac{A_0}{B_0} \sin kx + \cos kx$$

と書き、式 (14) を代入すると

$$\frac{\eta(x)}{B_0} = \tan kL \cdot \sin kx + \cos kx$$

$$\frac{\eta(L)}{B_0} = \tan kL \cdot \sin kL + \cos kL$$

従って

$$\frac{\eta(x)}{\eta(L)} = \cos \left\{ kL \left(1 - \frac{x}{L} \right) \right\} \quad (15)$$

を得る。

そこで、後に述べる吹流し模型の l/L に対応する 2 種類の l/L を選んで式 (14) より最低次から 2 番目までの固有値 (k_1L), (k_2L) を求め、それぞれの固有値に対応する吹流しの振動形態を式 (15) から求めて図示すると図 3 のようになる。ここでいま、固有値 (k_1L), (k_2L) に対応する吹流しの振動形態をそれぞれ第 1 次振動形態、第 2 次振動形態と呼ぶこと

MODEL	k_1L	k_2L
L40	1.301	4.007
L30	1.230	3.872

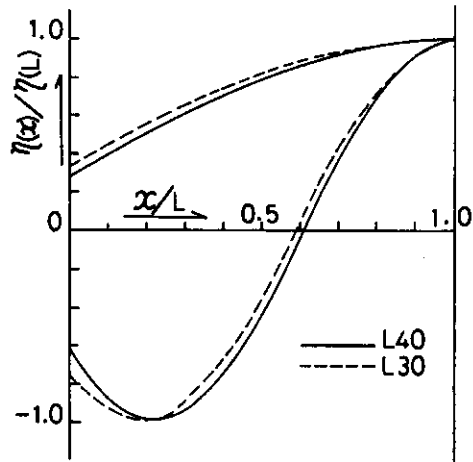


図 3 固有値と振動形態

にする。図 3 からわかるように、第 2 次振動形態は吹流しのはためき運動の状態に酷似していて、この状態では吹流しが折れ曲ったりするため、吹流しの後端が主流の方向に引張られるという仮定は適当ではなくなると考えてよいであろう。

2.2 旗に関する近似理論

通常の旗は信号旗などの規格によれば縦横比 1:1.5 程度のものである。

アスペクト比の極めて大きいものは祭、芝居小屋などに見られる「のぼり」である。またアスペクト比の極めて小さいものは源平の赤旗、白旗のようにむしろ吹流しであり、ストリップ法的に考えれば前項の理論でよいと考えられる。ただそのとき、断面形状は複雑に変化するであろうから付加質量の推定は困難であり、また張力は小さいであろうし、それを決める明らかな根拠もないので、現段階ではまず実験的観察が必要である。

理論としては、簡単のために 2 次元理論を構成したいのであるが、アスペクト比の充分大きい「のぼり」を採り上げても、その変位が幅方向に等しいとは考えられないので、直接の数学的モデル化はむずかしい。

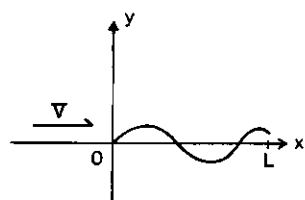


図 4 (説明図)

それ故、以下の理論は、いわば定性的理論であって実験、観察と比較して補ない、現象の本質を把握するよう努めなければならない。

さて、現象は周波数 ω で周期的なものとし、加速度ポテンシャルを $\Phi(x, y)e^{i\omega t}$ と書くと $\Phi(x, y)$ は

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{\pi\rho} \int_0^L \frac{p(\xi)y d\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} \quad (16)$$

$$\Phi(x, y) \Big|_{y=\pm 0} = \frac{p(x)}{\rho}, \quad 0 < x < L \quad (17)$$

で表わされる¹⁾。

一方速度ポテンシャルを $\phi(x, y)e^{i\omega t}$ と置くと、 $\Phi(x, y)$ と $\phi(x, y)$ の間には

$$\Phi(x, y) = \left(i\omega + V \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi(x, y) \quad (18)$$

なる関係が成り立つ。それ故

$$\phi(x, y) = -\frac{1}{\rho V} \int_0^L p(\xi) S(x-\xi, y) d\xi \quad (19)$$

ただし核関数 $S(x-\xi, y)$ は付録 A の定義による。

境界条件は、変位を $\eta(x)$ とすると

$$\left(i\omega + V \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta(x) = \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, 0), \quad 0 < x < L \quad (20)$$

式 (A.12) の核を用いて書けば

$$\eta(x) = -\frac{1}{\rho V^2} \int_0^L p(\xi) K(x-\xi, 0) d\xi \quad (21)$$

逆に式 (A.6) を用いると

$$\left(\frac{d}{dx} + ik\right)^2 \eta(x) = -\frac{1}{\pi \rho V^2} \int_0^L \frac{p(\xi)}{(x-\xi)^2} d\xi \quad (22)$$

となる。ここまでは全く振動翼の理論であり、式 (19) の積分方程式では、与えられた境界条件に対し圧力 p が後端で 0 となる条件つまり Kutta の条件を指定すれば解は一義的に定まる。しかし、変位 η が境界条件として与えられると積分方程式は式 (21) となり、核 K は対数特異性をもつ準正則核なので圧力 p は一意的に決まり流出条件は指定出来ない。これは滑走板の理論における場合と同じ事情で、滑走板の場合は Kutta の条件は除かないで、かわりに浸水長さが変化するとした。

旗の場合は長さ L も変えるわけにはゆかないので、Kutta の条件を放棄するしかないであろう。実際、Kutta の条件が満たされるということは、翼後端においてははじめ速度が無限大になっていて初期渦を生じ、それが翼から離れて行って後縁速度が有限に止まることを意味しているわけであるが、旗の場合は撓み易いので後縁で上下面の圧力が変わればそれに応じて曲がってしまい、固体翼の場合とは事情が大分違うものと考えられる。

さて、いま旗の張力を T 、単位面積当りの重量を w とすると旗の上下面の圧力差 $2p$ との間に

$$2p = \frac{w}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (23)$$

$$2p = -\left(\omega^2 \frac{w}{g} + T \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \eta(x) \quad (24)$$

のような力の平衡関係が成り立つ。

旗の場合、後縁は自由であるから後縁では $T=0$ であり、それより前部における張力 T は摩擦応力と圧力 ($2p$) の x 成分からなるので、

$$T(x) = \int_x^L R_f dx - 2 \int_x^L p \frac{\partial \eta}{\partial x} dx \quad (25)$$

である。また、摩擦応力 R_f は充分小さいと考えられるのでこれを無視すると

$$T(x) = -2 \int_x^L p \frac{\partial \eta}{\partial x} dx \quad (26)$$

となる。これに式 (24) を代入すると

$$T(x) = \int_x^L \left[\frac{w}{g} \omega^2 \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + T(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right] dx \quad (27)$$

$$T(x) + \frac{1}{2} \int_x^L T(x) d\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 = \frac{w}{2g} \omega^2 [\eta^2(L) - \eta^2(x)] \quad (28)$$

あるいは x で微分して

$$\frac{dT(x)}{dx} - \frac{T(x)}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 = -\frac{w}{g} \omega^2 \eta(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (29)$$

を得るが、 $\partial \eta / \partial x$ は一次の微小量であると考えてこれを無視すると式 (28) より

$$T(x) = \frac{w}{2g} \omega^2 [\eta^2(L) - \eta^2(x)] \quad (30)$$

を得る。つまり $T(x)$ は η^2 のオーダーとなるから線型理論的に考えると式 (24) の右辺第 2 項は無視する方が妥当で結局

$$2p = -\frac{w}{g} \omega^2 \eta(x) \quad (31)$$

とすべきであろう (Tuck ら²⁾ は帆のはためきに関して逆に $w=0$ としている)。

もしこの式で Kutta の条件を満足させるならば

$$\eta(L)=0 \quad (32)$$

となるが、旗のはためきを考えるとこれは不合理で、前述の推論からしても Kutta の条件を指定しない、つまり $\eta(L) \neq 0$ とする方が合理的であろう。

さて、式 (31) を式 (21) に代入すると

$$\eta(x) = \frac{\alpha^2 k^2}{2} \int_0^L \eta(\xi) K(x-\xi, 0) d\xi, \quad \alpha^2 = \frac{w}{\rho g} \quad (33)$$

また式 (22) に代入すれば

$$\left(\frac{d}{dx} + ik\right)^2 \eta(x) = \frac{\alpha^2 k^2}{2\pi} \int_0^L \frac{\eta(\xi)}{(x-\xi)^2} d\xi \quad (34)$$

のような固有値方程式を得る。

ここで k が充分小さい所で考えてみよう。式 (33) に式 (A. 20) を代入すると、その虚数部のために固有値 k は複素数になると考えられる。これは $e^{i\omega t}$ における ω が複素数となることであるから、時間的に安定な振動解はないことを意味する。これは近似の過程において張力を無視したこと、つまり復原力を無視したために振動しなくなったもので、当然の結果といえよう。従って圧力 p の表示には、線型理論的には矛盾であるけれども式 (24) の形をとらなければならない。そして T は x の関数であるから方程式は準線型となり問題は一段と複雑になる。

また、最終的には T は実験的に定めなければならないであろうから、今の段階では固有値方程式を解くのは得策ではなく、前節の方程式程度から出発し、実験を経て検討する方が望ましいといえよう。

3. 実 験

吹流しの抵抗測定は防衛大学校蒸気機関実験室の風洞に測定部断面 600 mm × 215 mm の補助枠を取付けて行った。補助枠の中心に、下部をボルトで固定した 0.6 mmφ のスチールワイヤーを垂直に張り、上部は両端をバネで固定し中央で回転自由に支持したアームに取付け、アームは末端でクランクにより歪ゲージに接続してワイヤーにかかる力を取り出すようにした。吹流し模型はワイヤーの中心にフックを介して回転自由な状態で取り着けた。

表 1 模型寸法表

模 型 名 称			L 40	L 30
長	さ	L (cm)	40.0	29.5
直	径	D (cm)	7.0	7.0
全	重	量 W (g)	11.979	9.274
索	水	平長さ l (cm)	8.5	8.5
断	面	積 $A=(\pi/4)D^2$ (cm ²)	0.00385	0.00385
表	面	積 $S=\pi DL$ (cm ²)	0.08797	0.06487
単	位	面積当り重量 w (g/cm ²)	0.1362	0.1430
$K=4w/D\rho g$			6.2425	6.5531
l/L			0.2125	0.2881

模型の背後には目盛板を置き、模型を真横から観察することにより縦方向 (y 方向) 振幅を読みとれるようにした。吹流しの振動周期はストロボスコープを用い、模型が静止した一つの波形を描いて見えるように調節することによって測定した。また実験中の模型の動きは VTR に記録して解析に用いた。

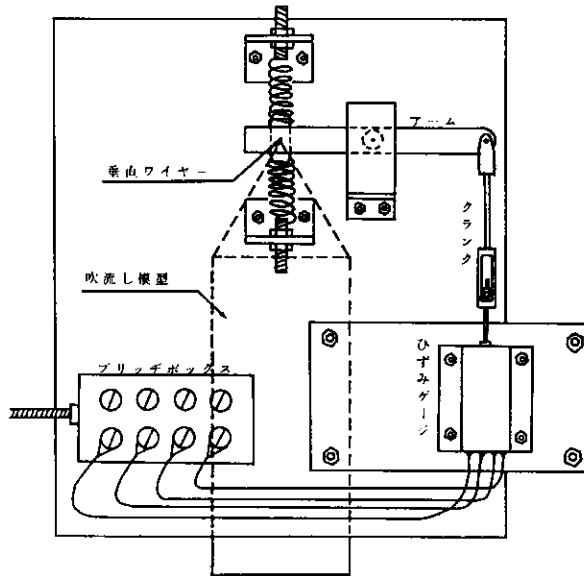


図 5 実験装置 (補助枠上板)

実験に使用した吹流し模型は前後端とも開放した布製円筒型模型で、その寸法等は表 1 に示した通りである。

4. 実験結果と考察

4.1 抵抗係数

横軸にレイノルズ数 $Re_L = L \cdot V / \nu$ 、縦軸に吹流しの全表面積 S を用いた抵抗係数 $C_{Ds} = R / ((1/2) \rho S V^2)$ をとって測定結果を図 6.1~6.2 に示し、平板の摩擦抵抗係数 C_{f0} と比較した。

吹流しの抵抗係数がほぼ一定値をとるようになる流速は、フルード数 $F_n = V / \sqrt{Lg}$ に換算して模型 L40 では $F_n = 7.5$ 、L30 で $F_n = 9.5$ 程度であるが、この流速ははじめ低速で垂れさがっていた吹流し模型がほぼ水平状態を保ち始める流速に対応する。

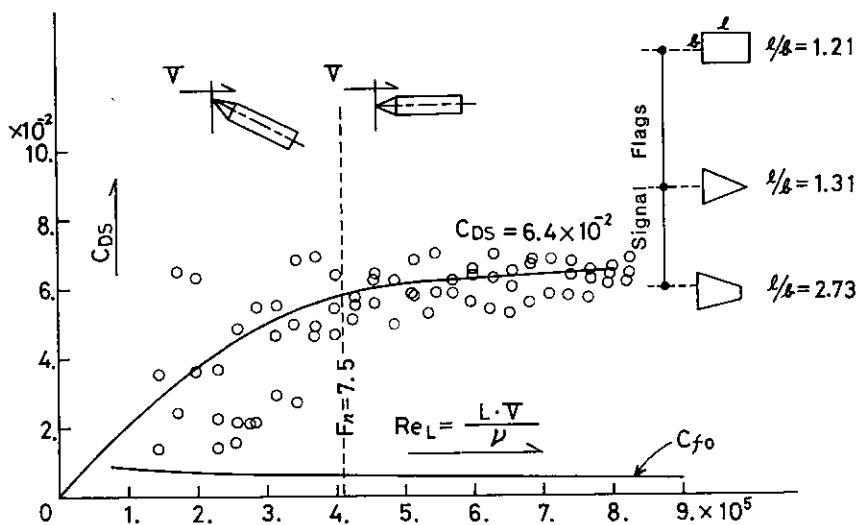
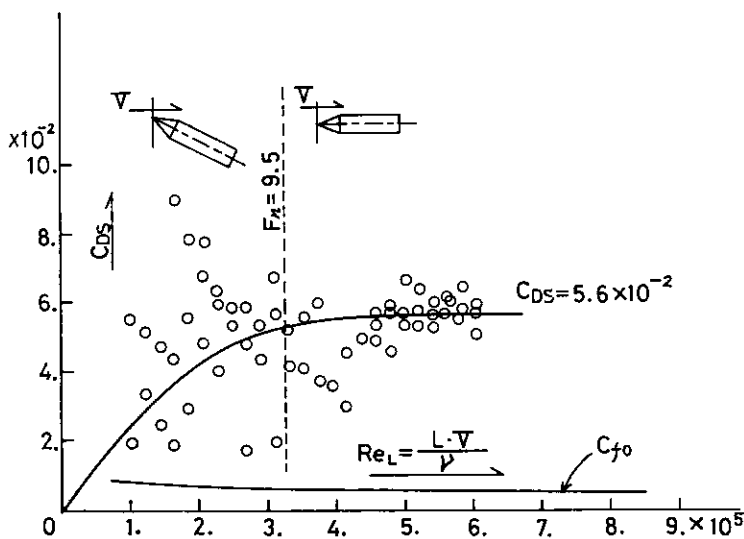
吹流しの全抵抗に対する平板の摩擦抵抗の割合は各模型とも約 8~9% 程度で、吹流しの抵抗の大部分は摩擦以外の原因によることがわかる。なお図 6.1 には比較のため信号旗の抵抗係数の例³⁾を併記した。

次に、横軸にレイノルズ数 $Re_D = D \cdot V / \nu$ 、縦軸に吹流し断面積 A を用いた抵抗係数 $C_{DA} = R / ((1/2) \rho A V^2)$ をとって測定結果を図 7.1~7.2 に示し、水平円筒、垂直円筒の抵抗係数⁴⁾を併記した。

吹流しの抵抗係数は、水平円筒や垂直円筒の抵抗係数と比べるとやや大きすぎるように見えるが、吹流し入口から流入する空気の運動量が吹流しの中で全く失われてしまい、吹流し後端から流出する運動量は 0 になると仮定した時の抵抗係数は $C_{DA} = 2$ となるのでこれと比べれば吹流しの抵抗係数は必ずしも過大であるとはいえないだろう。

4.2 振動に基づく抵抗

吹流しを、振動はするけれども断面形状は変化しない提灯状の物体と仮定すれば、式 (9)


 図 6.1 $C_{DS} \sim Re_L$ (L40)

 図 6.2 $C_{DS} \sim Re_L$ (L30)

と式 (12) とから振動周期 τ について

$$\tau = \frac{2\pi}{k \cdot V \sqrt{C_{DA}/2(1+K)}} \quad (35)$$

のような関係が得られる。これを変形すると吹流しの抵抗，流速，振動周期の間には

$$\left(\frac{V \cdot \tau}{L} \right) \sqrt{\frac{R}{W}} = \frac{2\pi \sqrt{1+1/K}}{kL} F_n \quad (36)$$

のような関係が成り立つことになる。ここに $(V \cdot \tau / L)$ はストローハル数の逆数である。そこでまず $\sqrt{R/W}$ と F_n との関係を調べたのが図 8.1~8.2 である。吹流しが水平な姿

一様流中における吹流しの抵抗について

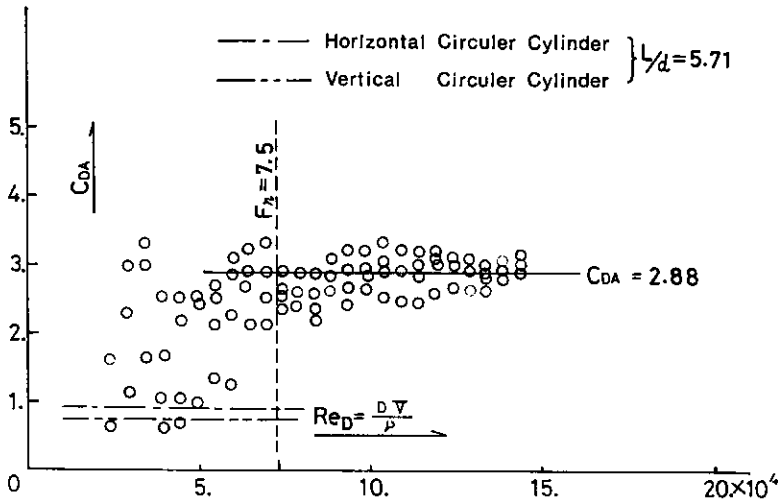


図 7.1 $C_{DA} \sim Re_D$ (L40)

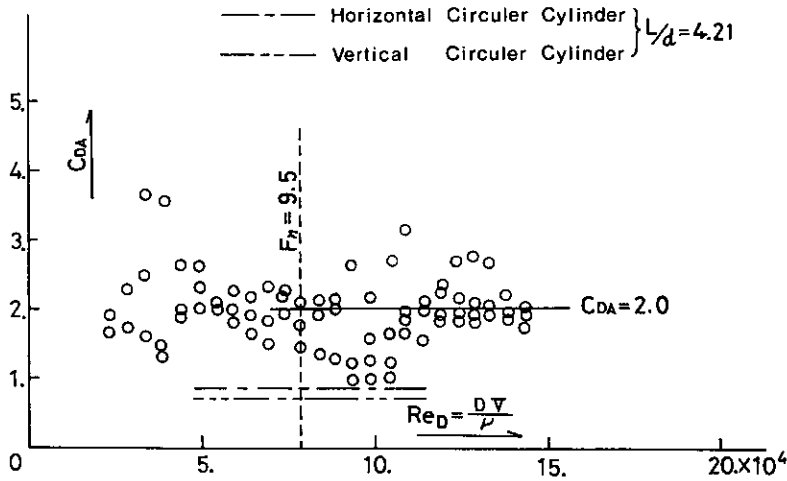


図 7.2 $C_{DA} \sim Re_D$ (L30)

勢を保つようになる流速以上の範囲では、 $\sqrt{R/W}$ は F_n に比例すると見ることが出来る。
この比例定数を β として

$$\sqrt{\frac{R}{W}} = \beta \cdot F_n \quad (37)$$

と書けば式 (36) から

$$\left(\frac{V \cdot \tau}{L} \right) = \frac{2\pi\sqrt{1+1/K}}{kL} \cdot \frac{1}{\beta} \quad (38)$$

となり、 $(V \cdot \tau/L)$ は一つの振動固有値 kL (一つの振動形態) に応じてある一定値をとるであろうことが予想される。図 8.1, 図 8.2 から読みとった比例定数 β の値を式 (38) 右辺に代入して求めた各振動形態に対する $(V \cdot \tau/L)$ の推定値と、計測した流速、振動周

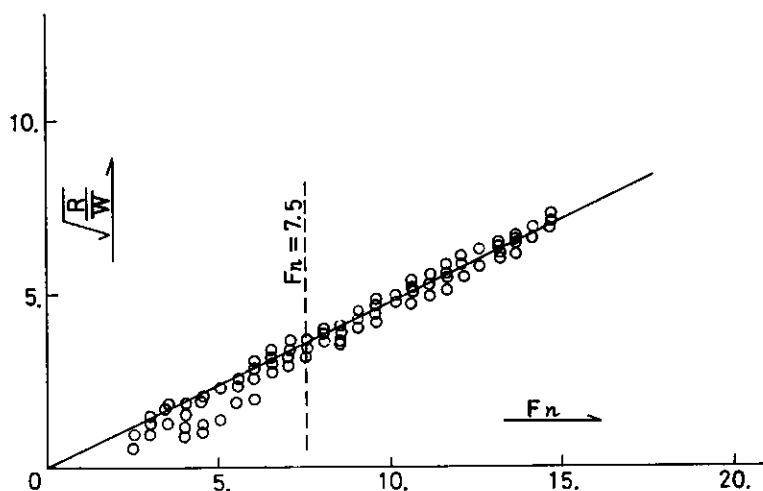


図 8.1 $\sqrt{\frac{R}{W}} \sim F_n$ (L40)

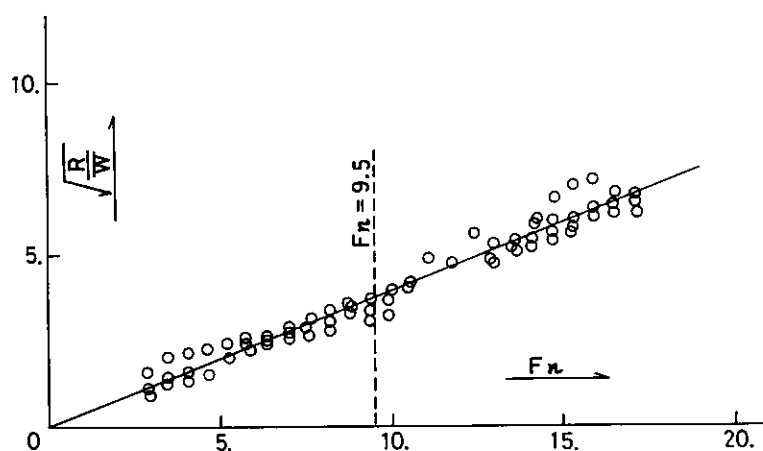


図 8.2 $\sqrt{\frac{R}{W}} \sim F_n$ (L30)

期から求めた $(V \cdot \tau / L)$ の実験値を図 9.1~9.2 に示した。模型 L40, L30 の各場合とも模型が水平状態となる流速以上の範囲で $(V \cdot \tau / L)$ は予想通りほぼ一定値をとり、L40 でフルード数が 12.2 以下、L30 で 15.5 以下の範囲ではその値は振動の第 1 次形態に対応する $(V \cdot \tau / L)$ の推定値と一致することが認められる。

さらに L40 で $F_n > 12.2$, L30 で $F_n > 15.5$ の範囲で $(V \cdot \tau / L)$ の実験値は振動の第 2 次形態に対応する推定値とほぼ一致すると見てよく、これから L40 では $F_n = 12.2$, L30 では $F_n = 15.5$ を境として吹流しの振動形態が第 1 次形態から第 2 次形態に移行したと推定することが出来る。

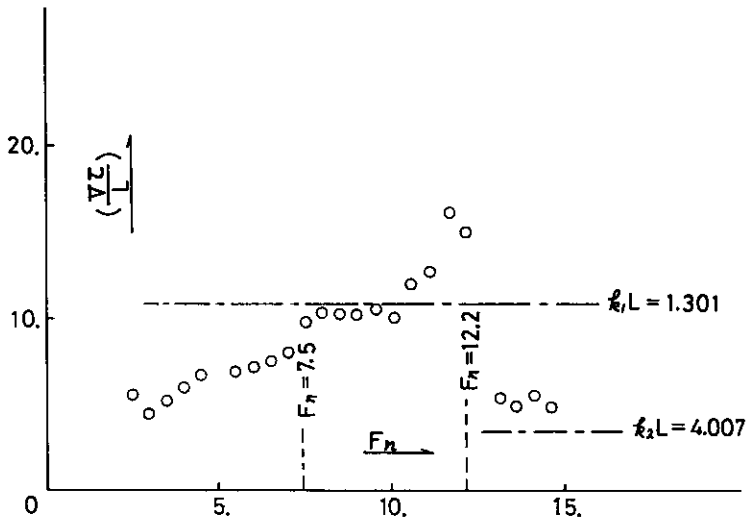


図 9.1 $\left(\frac{V\tau}{L}\right) \sim F_n$ (L40)

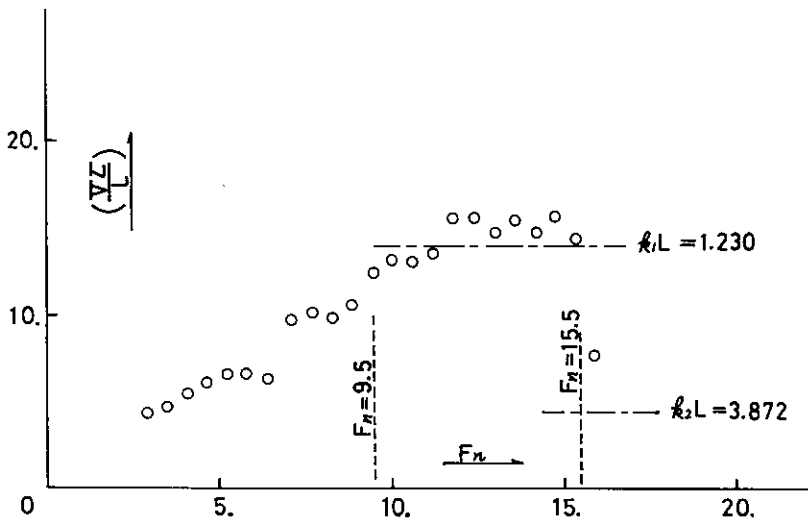


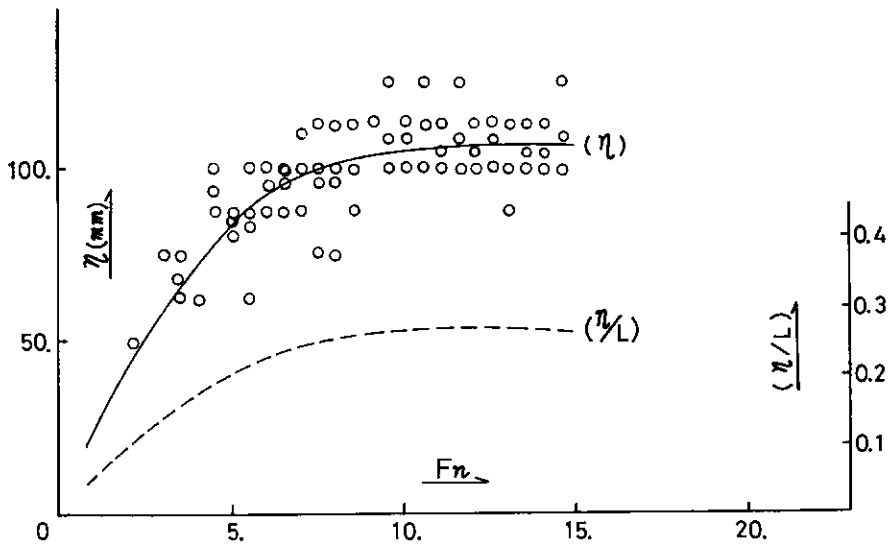
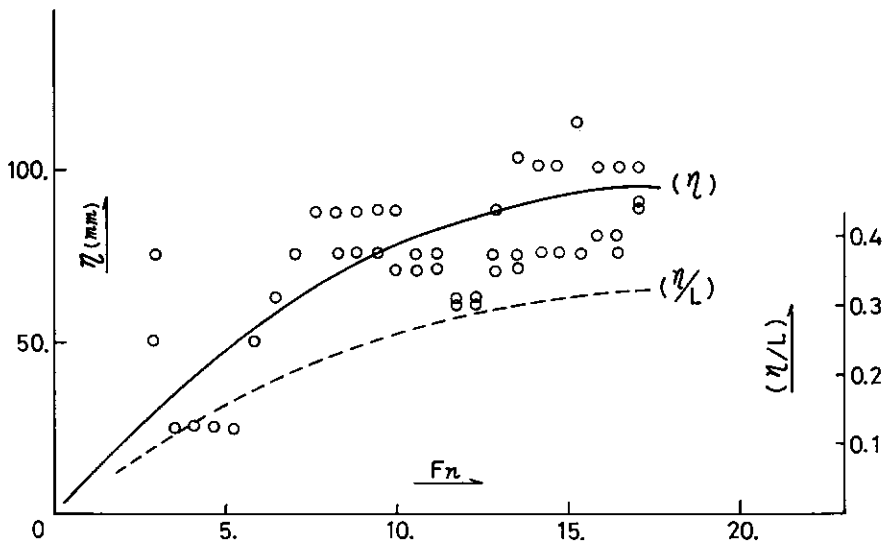
図 9.2 $\left(\frac{V\tau}{L}\right) \sim F_n$ (L30)

4.3 はためき抵抗

吹流しの後端が流れの方向に引かれず旗のように自由端であるとすれば、その時の抵抗 R_{FL} は式 (30) から

$$R_{FL} = \frac{w\pi D}{2g} \omega^2 \left(1 + \frac{1}{K}\right) \eta^2(L) \quad (39)$$

と表わすことが出来、吹流し後端の振幅の自乗に比例することになる。この R_{FL} をはためき抵抗と呼んでおく。


 図 10.1 $\eta \sim F_n$ (L40)

 図 10.2 $\eta \sim F_n$ (L30)

測定した吹流し後端部の振幅は図 10.1~10.2 に示した通りで測定精度は悪いが、図中に実線で記した平均曲線ではほぼ代表出来る。この平均曲線から読みとった振幅ならびに振動周期測定値から式 (39) 右边を計算し、これと測定した吹流しの抵抗とを比較したのが図 11.1~11.2 である。

低速で抵抗が小さい範囲では、はためき抵抗の成分は現れないが、ある抵抗値以上の範囲、すなわちある流速以上の範囲でははためき抵抗の成分が生じていると見ることが出来る。このはためき抵抗が現れはじめる時の流速は、L40 では $F_n \div 12.0$ 、L30 では $F_n \div$

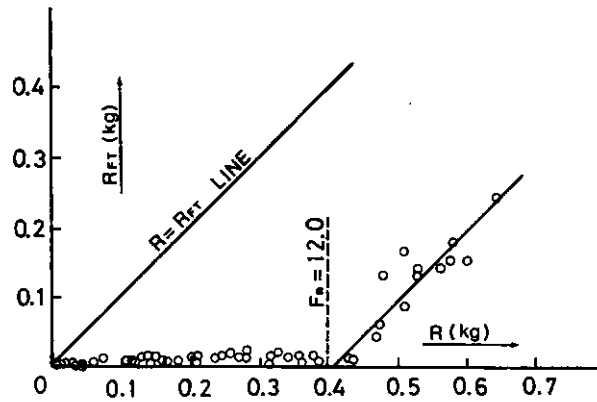


図 11.1 はためき抵抗 R_{FL} (L40)

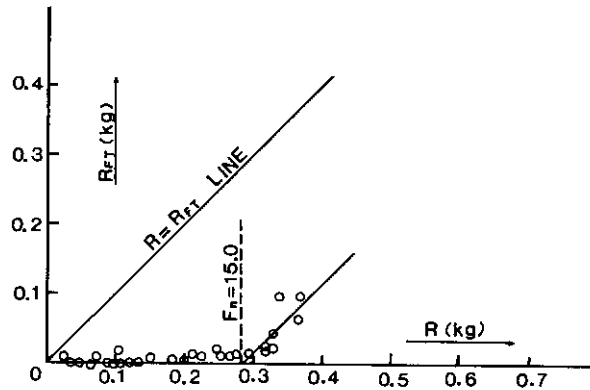


図 11.2 はためき抵抗 R_{FL} (L30)

15.0 程度にあたり、図 9.1～9.2 において振動形態が第 1 次形態から第 2 次形態に移行すると考えられたフルード数とほぼ一致している。

5. 結 論

以上の考察に基づいて次のような結論を得た。

- (1) 吹流しの抵抗中に占める摩擦抵抗の割合は極めて小さく、抵抗の大部分は吹流しの振動に基づく渦抵抗であると考えられる。
- (2) 吹流しの抵抗と吹流し重量の比の平方根はフルード数に比例すると見てよい。
- (3) 吹流しの振動のストローハル数は、吹流しの抵抗および振動の固有値から推定したストローハル数とよく一致し、固有値に応じた一定値をとる。
- (4) 吹流し後端部の振幅の自乗に比例するはためき抵抗が生じるフルード数は、振動の形態が第 1 次形態から第 2 次形態に移行する時のフルード数とよく一致する。

参 考 文 献

- 1) 西山哲男：流体力学 (I)，日刊工業新聞社，(1971)，pp. 127-128.

- 2) E. O. Tuck and M. K. Haselgrove: An Extension of Two-Dimensional Sail Theory, J. Ship Research, Vol. 16, (1972), pp. 148-152.
- 3) 佐藤健一郎: 信号旗抵抗と旗索の張力について, 運研報告 1-7, (1951).
- 4) 例えば, 原田幸夫: 流体の力学, 棋書店, (1975), pp. 221-222.

付録 A. 核 関 数

核関数を次のように定義する。

$$S(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left[\frac{e^{iux}}{u+k-\mu i} - \frac{e^{-iux}}{u-k+\mu i} \right] e^{-uy} du, \quad y > 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + ik \right) S(x, y) = \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)}, \quad k = \omega/V \quad (\text{A.2})$$

$$\left. \begin{aligned} S(x, y) &= \frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-mx} \sin my}{k+im} dm + e^{-ikx-ky}, \quad x, y > 0 \\ S(x, y) &= -\frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{mx} \sin my}{k-im} dm, \quad x < 0, y > 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3})$$

$$\left. \begin{aligned} S(x, y) &\xrightarrow{x \rightarrow 1} e^{-ikx-ky} - \frac{iy}{\pi k(x^2 + y^2)}, \quad y > 0 \\ S(x, y) &\xrightarrow{x \rightarrow -1} -\frac{iy}{\pi k(x^2 + y^2)}, \quad y > 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial S(x, y)}{\partial y} = -\frac{x}{\pi(x^2 + y^2)} + \frac{k}{2\pi i} \int_0^\infty \left[\frac{e^{iux}}{k+u-\mu i} + \frac{e^{-iux}}{u-k+\mu i} \right] e^{-uy} du \quad (\text{A.5})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + ik \right) \frac{\partial S}{\partial y} = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad (\text{A.6})$$

ここであらためて次の関数を定義しておく。

$$T(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left[\frac{e^{iux}}{k+u-\mu i} + \frac{e^{-iux}}{u-k+\mu i} \right] e^{-uy} du \quad (\text{A.7})$$

式 (A.1) とあわせて

$$T + iS = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{iux-uy}}{k+u} du \quad (\text{A.8})$$

$$\left. \begin{aligned} T(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-mx} \cos my}{m-ik} dm - ie^{-ikx-ky}, \quad x > 0 \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{mx} \cos my}{m+ik} dm, \quad x < 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial S(x, y)}{\partial y} = -\frac{x}{\pi(x^2 + y^2)} - ikT(x, y) \quad (\text{A.10})$$

特に $y=0$ では

$$T(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{iux}}{k+u} du + \begin{cases} -ie^{-ikx-ky}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

となり対数積分 (正余弦積分) となる。

ここでさらに

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + ik \right) K(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} S(x, y) \quad (\text{A.12})$$

なる関数 $K(x, y)$ を導入しよう。

一様流中における吹流しの抵抗について

$$\left. \begin{aligned} K(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left[\frac{ue^{iux}}{(u+k-\mu i)^2} + \frac{ue^{-iux}}{(u-k+\mu i)^2} \right] e^{-uy} du \\ K(x, y) &= T(x, y) + \frac{k}{2\pi} \int_0^\infty \left[\frac{e^{iux}}{(u+k)^2} - \frac{e^{-iux}}{(u-k)^2} \right] e^{-uy} du \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.13})$$

この右辺第2項を部分積分すると

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{iux-uy}}{(u+k)^2} du &= -\frac{e^{-i u(x+y)}}{u+k} \Big|_0^\infty + i(x+y) \int_0^\infty \frac{e^{i u(x+y)}}{u+k} du \\ \int_0^\infty \frac{e^{-iux-uy}}{(u-k)^2} du &= -\frac{e^{-i u(x-y)}}{u-k} \Big|_0^\infty + (-ix-y) \int_0^\infty \frac{e^{-i u(x-y)}}{u-k} du \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} K(x, y) &= T(x, y) + \frac{1}{\pi} + \frac{k(ix-y)}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{iux-uy}}{u+k-\mu i} du \\ &\quad + \frac{k(ix+y)}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-iux-uy}}{u-k+\mu i} du \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

である。それ故

$$K(x, 0) = T(x, 0) + \frac{1}{\pi} + ikxT(x, 0) \quad (\text{A.15})$$

$$T(x, 0) \xrightarrow{x \ll -1} \frac{1}{\pi k} \int_0^\infty e^{-i u|x|} du \left[1 - \frac{u}{k} + \dots \right] = \frac{1}{\pi k} \left[\frac{1}{i|x|} + \frac{1}{kx^2} + \dots \right] \quad (\text{A.16})$$

が得られる。したがって

$$K(x, 0) \xrightarrow{x \ll -1} \frac{1}{i\pi k|x|} + \frac{i}{\pi kx} + \dots = \frac{2}{i\pi k|x|} \quad (\text{A.17})$$

となる。 k が小さいときは

$$I(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{iux}}{k+u} du \doteq \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} i - C - \log(kx) \right], \quad x > 0 \quad (\text{A.18})$$

となる。ただし C は Euler 定数である。

故に

$$T(x, 0) = -\frac{i}{2} - \frac{1}{\pi} (C + \log k|x|) \quad (\text{A.19})$$

$$K(x, 0) = -\frac{i}{2} - \frac{1}{\pi} [C + \log k - 1 + \log |x|] \quad (\text{A.20})$$

が得られる。

On the Resistance of a Streamer in the Uniform Flow

(Dedicated to Professor S. NAGAI)

By Masatoshi BESSHO* and Toshiaki MIZUNO*

(Received July 20, 1981)

Abstract

Resistance tests and observation of motion on streamer models are carried out in a wind tunnel.

In this paper, the experimental results are analysed with the aid of a linear theory on both the oscillating streamer and the fluttering flag.

Among the results it is shown that the component of the resistance caused by fluttering motion of the streamer is proportional to the square of displacement of the aft end of the streamer and it appears when its oscillating mode is of 2-nodes.

* Professor; Dept. of Mechanical Engineering, The National Defense Academy.

一様媒質の無限領域における2次元弾性波 の放射散乱について

——山田金雄教授に捧ぐ——

別 所 正 利* 河 辺 寛**

(昭和57年4月28日 受付)

1. 序 論

無限に広い媒質中にある物体または空孔からの弾性波の放射散乱の問題は数値解析上の良い目標であり、従来有限要素法適用の好例として採り上げられ、また特に最近では、いわゆる境界要素法を適用した数値計算法による研究が多く報告されている。

著者等もまた境界要素法に興味を持ち、特に場の表現式および数値積分法について検討してきた。しかし、動的弾性問題の理論に関しては成書も少なく、また、まとまった記述はほとんど見られない。そこで、簡単のためにまず2次元問題について、無限媒質中の物体の振動防止、振動エネルギー吸収への応用に便利な概念および表現式を導入する。

まず物体境界上の応力および変位によって場を表現する式を導入し、境界積分方程式としては従来用いられている式の他に幾つかの表現を導き、境界値問題の種類によっては計算が簡単な式がある事を記す。次に物体を遠く離れた場所では円筒波が発散していく事から、遠場の性質はその振幅によって示される。それは水波理論ではコッチン関数と呼ばれているが、その表現式を導く。また、一方波長が十分長い時は静的弾性問題に一致するはずであるから、それを一般的に定式化して対応を調べる。次に相反定理と変分原理について言及し、その応用として水波理論でよく知られたハスキントの関係について述べる。相反定理およびハスキントの関係は $\tan^{13)}$, $\text{Mei}^{19)}$ 等によって導入されているが、ここに示すようにコッチン関数を導入することによって物体近傍の場との関係がより明確になる。さらに、放射エネルギーの表現式を求め、また変位等の複素共役値との関係(本論は周波数領域で論じているので、ある量の複素共役値は時間を逆にした時の値と考えてもよい)を求める。

以上のような準備の下に、物体または空孔が平面波を受けて振動する問題を解く方針を示し、特に円境界について計算例を示す。そして特に物体または空孔が波を吸収する場合を想定し、アンテナ理論に準拠して波エネルギー吸収能力について考察する。そのためには放射指向性利得を求める必要があるが、それは前出のコッチン関数から導かれる。

これらの検討はアンテナ理論、水波理論とおおむね相似な結論を示すであろう。

* 防衛大学校 機械工学教室 教授

** 防衛大学校 機械工学教室 助手

2. 理 論

2.1 場の方程式と境界条件^{1), 5)}

現象はすべて円周波数で周期的である場合のみを考えることとし、すべての量を時間因子 $e^{i\omega t}$ を省略して複素表示するものとする。

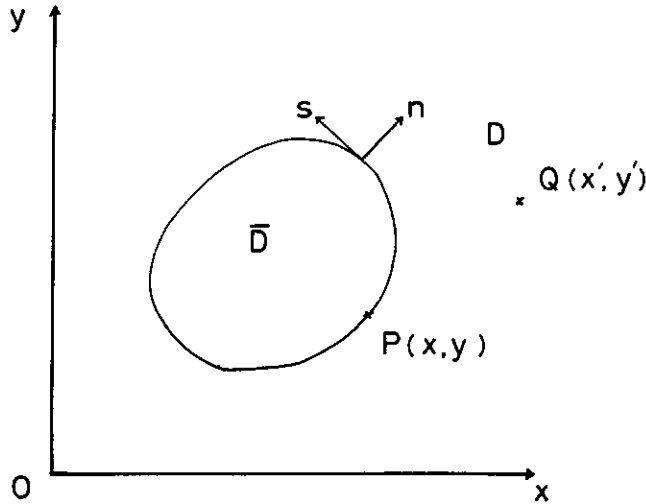


Fig. 1 Co-ordinate system

座標系を Fig. 1 のようにとると、変位 $u_i (i=1, 2)$ の満たすべき微分方程式は Δ をラプラシアンとして、

$$(\Delta + k^2)u_i + \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} = 0, \quad i=1, 2 \quad (1.1)$$

ここに

$$\gamma = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (1.2)$$

$$k^2 = \rho \omega^2 / G, \quad \alpha = \frac{1+\nu}{1-\nu} \quad (1.3)$$

ρ は密度、 G は横弾性係数、 k は横波の波数である。 ν は平面応力問題とした時のポアソン比であるが、今はいわゆる平面歪問題と考えられるので、ポアソン比 σ に対して

$$\nu = \frac{\sigma}{1-\sigma} \quad (1.4)$$

となっている。

さて、回転 ω (円周波数と同じ字を使うが混同の恐れはないであろう)

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \quad (1.5)$$

を導入し、(1.1) に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} (\Delta + K^2)\gamma &= 0 \\ (\Delta + k^2)\omega &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

$$K^2 = \frac{1-\nu}{2} k^2 \quad (1.7)$$

となって、 γ と ω は共にヘルムホルツの方程式を満たしている。 K は縦波の波数である。

いま γ と ω がわかっているとすると、(1.1), (1.2), (1.5) からは変位は

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial y} \\ u_2 &= -\frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

一方、応力成分は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2G \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu} \gamma \right) \\ \sigma_y &= 2G \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\nu}{1-\nu} \gamma \right) \\ \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

であって、境界曲線 C に沿って働く力の (x, y) 成分 (t_1, t_2) は

$$\left. \begin{aligned} \frac{t_1}{G} \equiv \tau_1 &= \frac{1}{G} \left(\sigma_x \frac{\partial y}{\partial s} - \tau_{xy} \frac{\partial x}{\partial s} \right) \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial s} + \alpha \gamma \frac{\partial x}{\partial n} \\ \frac{t_2}{G} \equiv \tau_2 &= \frac{1}{G} \left(\tau_{xy} \frac{\partial y}{\partial s} - \sigma_x \frac{\partial x}{\partial s} \right) \\ &= \frac{\partial u_2}{\partial n} + \frac{\partial u_1}{\partial s} + \alpha \gamma \frac{\partial y}{\partial n} \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

となる。(1.8), (1.10) を法線、切線成分で表わすと、

$$\left. \begin{aligned} u_n &= u_1 \frac{\partial x}{\partial n} + u_2 \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial s} - \frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial n} \\ u_s &= u_1 \frac{\partial x}{\partial s} + u_2 \frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial n} - \frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_n &= \frac{k^2}{K^2} \gamma - 2 \frac{\partial u_s}{\partial s} - \frac{2}{\rho} u_n \\ \tau_s &= \omega + 2 \frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{2}{\rho} u_s \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

となる。ただし、 $\rho = ds/d\theta$ で C の曲率半径とする。(密度と同じ字を使うが混同の恐れはないであろう。)

我々は無限に広い媒質中で境界曲線 C を持つ物体もしくは空孔の入射波による振動を知りたいわけであるが、これを2つに分けて考えることができる。

i) 放射問題 C が与えられた変位 (u_n, u_s) で振動して波を放射する問題である。

ii) 散乱問題 入射波が物体によって散乱させられる問題であるが、これは物体の弾性によって全く解が異ってくる。例えば剛体である場合と空孔である場合は大変様子が違う。この場合 C が変形(ここで言う変形とは剛体運動(rotation, translation)およびい

わゆる変形(deformation)を全て含んでいる。)しないとすると入射波は境界にある力を及ぼすから、物体が固定された剛体でないかぎりその力と平衡するまで物体は変形する。

C の任意の変形によって境界に働く力は放射問題の解と物体の性質から求められるから (空孔の場合は内部の力は 0), この力と C が変形しない時に入射波から受ける力とを等置すればよい。

このように考えてみると, C の変形を求めることはこの物体の運動方程式を解くことであるから, 直接境界値問題には関係ない。それ故境界値問題としては, C が変形しない時の入射波による散乱問題が解けていけばよい。この問題も散乱場については C 上で入射波による変位を打ち消さねばならないから, 境界条件としては i) と同じく C 上で変位の与えられる問題である。空孔の場合は上述のように考えてもよいが, 初めから C 上で境界力が 0 となる条件を与える従来の方法が簡単であるのは言うまでもない。

2.2 変位, 横波, 縦波の表現と境界積分方程式

付録 A の核関数を使ってグリーンの定理を適用すると, 次のような表現を得る。

$$u_j(Q) = \sum_{i=1}^2 \int_C [u_i(P) \tau_{ij}(P, Q) - \tau_i(P) U_{ij}(P, Q)] ds \quad (2.1)$$

ここに P は境界上の点, Q は物体内の点を意味し, $\tau_{ij}(P, Q)$, $U_{ij}(P, Q)$ はそれぞれ境界上の変位, 境界力が Q 点の変位に与える影響関数である。

以下 i に関する総和記号を省略する。

いま C の内部領域で正則な変位 $u_j^{(a)}$ を考えると, Q 点が外部領域にあれば

$$0 = \int_C [u_i^{(a)}(P) \tau_{ij}(P, Q) - \tau_i^{(a)}(P) U_{ij}(P, Q)] ds \quad (2.2)$$

(1.1) と (1.2) を辺々加え合わせると,

$$u_j(Q) = \int_C [\{u_i(P) + u_i^{(a)}(P)\} \tau_{ij}(P, Q) - \{\tau_i(P) + \tau_i^{(a)}(P)\} U_{ij}(P, Q)] ds$$

となるが, 特にもし

$$\tau_i(P) + \tau_i^{(a)}(P) = 0 \quad \text{on } C \quad (2.3)$$

ならば,

$$u_j(Q) = \int_C \{u_i(P) + u_i^{(a)}(P)\} \tau_{ij}(P, Q) ds \quad (2.4)$$

また,

$$u_i(P) + u_i^{(a)}(P) = 0 \quad \text{on } C \quad (2.5)$$

ならば

$$u_j(Q) = - \int_C \{\tau_i(P) + \tau_i^{(a)}(P)\} U_{ij}(P, Q) ds \quad (2.6)$$

となる。

C 内で正則な関数の例としては, 平面波などが考えられる。それ故, (2.4) の表現は空孔の散乱問題の境界積分方程式として適当であり, (2.6) は固定境界の時に適当である。しかし, いずれの場合もこれらの核関数は付録 A に見るように特異性が大変強く, その数値積分には細心の注意が必要である。

一方, (1.6), (1.7) から γ , ω にはよく知られた次の表現がある。

$$\gamma(Q) = \frac{i}{4} \int_C \left[\gamma(P) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(KR) - \frac{\partial \gamma(P)}{\partial n} H_0^{(2)}(KR) \right] ds \quad (2.7)$$

一様媒質の無限領域における 2 次元弾性波の放射散乱について

$$\omega(Q) = \frac{i}{4} \int_C \left[\omega(P) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) - \frac{\partial \omega(P)}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) \right] ds \quad (2.8)$$

ここに $R = \overline{PQ}$, $H_0^{(2)}$ は第 2 種 0 次のハンケル関数。

実際, (1.2), (1.5), (1.8), (1.10) を使って (2.1) を導くことができるが, いまは省略する。

さて, (2.7), (2.8) 右辺第 2 項に (1.11) を代入して, 1 部部分積分すると次の表現を得る。

$$\begin{aligned} \gamma(Q) = & \frac{i}{4} \int_C \left[\gamma(P) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(KR) + \frac{K^2}{k^2} \omega(P) \frac{\partial}{\partial s} H_0^{(2)}(KR) \right] ds \\ & + K^2 \int_C u_n(P) H_0^{(2)}(KR) ds \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \omega(Q) = & \frac{i}{4} \int_C \left[\omega(P) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) - \frac{k^2}{K^2} \gamma(P) \frac{\partial}{\partial s} H_0^{(2)}(kR) \right] ds \\ & + k^2 \int_C u_s(P) H_0^{(2)}(kR) ds \end{aligned} \quad (2.10)$$

C 上で u_n, u_s が与えられる時はこれらはそのまま γ と ω を未知とする境界積分方程式になり, (2.1) に比して格段に特異性が弱く計算上の難点が少ないと考えられる。

入射波のある時はそれを γ_0, ω_0 とすると,

$$\left. \begin{aligned} \int_C \left[\gamma_0(P) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(KR) - \frac{\partial \gamma_0(P)}{\partial n} H_0^{(2)}(KR) \right] ds &= 0 \\ \int_C \left[\omega_0(P) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) - \frac{\partial \omega_0(P)}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) \right] ds &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

であるから, (2.7), (2.8) に加えて,

$$\gamma(Q) = \frac{i}{4} \int_C \left[\{\gamma(P) + \gamma_0(P)\} \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(KR) - \frac{\partial}{\partial n} \{\gamma(P) + \gamma_0(P)\} H_0^{(2)}(KR) \right] ds \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \omega(Q) = & \frac{i}{4} \int_C \left[\{\omega(P) + \omega_0(P)\} \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) - \frac{\partial}{\partial n} \{\omega(P) \right. \\ & \left. + \omega_0(P)\} H_0^{(2)}(kR) \right] ds \end{aligned} \quad (2.13)$$

再び (1.11) を代入すると, $u_n^{(0)}, u_s^{(0)}$ は γ_0, ω_0 による変位として (なお γ_0, ω_0 のどちらか一方のみの時は他方は 0 とおく),

$$\begin{aligned} \gamma(Q) = & \frac{i}{4} \int_C \left[\{\gamma(P) + \gamma_0(P)\} \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(KR) + \frac{K^2}{k^2} \{\omega(P) + \omega_0(P)\} \frac{\partial}{\partial s} H_0^{(2)}(KR) \right. \\ & \left. + K^2 \{u_n(P) + u_n^{(0)}(P)\} H_0^{(2)}(KR) \right] ds \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \omega(Q) = & \frac{i}{4} \int_C \left[\{\omega(P) + \omega_0(P)\} \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) - \frac{k^2}{K^2} \{\gamma(P) + \gamma_0(P)\} \frac{\partial}{\partial s} H_0^{(2)}(kR) \right. \\ & \left. + k^2 \{u_s(P) + u_s^{(0)}(P)\} H_0^{(2)}(kR) \right] ds \end{aligned} \quad (2.15)$$

となる。

固定境界では,

$$\begin{aligned} u_n(P) + u_n^{(0)}(P) &= 0 \\ u_s(P) + u_s^{(0)}(P) &= 0 \end{aligned} \quad \text{on } C \quad (2.16)$$

なので上式に代入し, $r + r_0 = \Gamma$, $\omega + \omega_0 = \Omega$ を未知関数とすると次の境界積分方程式を得る。

$$\Gamma(Q) - r_0(Q) = \frac{i}{4} \int_C \left[\Gamma(P) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(KR) + \frac{K^2}{k^2} \Omega(P) \frac{\partial}{\partial s} H_0^{(2)}(KR) \right] ds \quad (2.17)$$

$$\Omega(Q) - \omega_0(Q) = \frac{i}{4} \int_C \left[\Omega(P) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(2)}(kR) - \frac{k^2}{K^2} \Gamma(P) \frac{\partial}{\partial s} H_0^{(2)}(kR) \right] ds \quad (2.18)$$

空孔の場合は, r_0, ω_0 による力を $\tau_n^{(0)}, \tau_s^{(0)}$ とすると,

$$\begin{aligned} T_n(P) &= \tau_n(P) + \tau_n^{(0)}(P) = 0 \\ T_s(P) &= \tau_s(P) + \tau_s^{(0)}(P) = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

であるから,

$$\begin{aligned} U_n(P) &= u_n(P) + u_n^{(0)}(P) \\ U_s(P) &= u_s(P) + u_s^{(0)}(P) \end{aligned} \quad (2.20)$$

とにおいて, (2.14), (2.15) に (1.12) を代入すると,

$$\begin{aligned} \tau_n(Q) + 2 \frac{\partial u_s(Q)}{\partial s} + \frac{2}{\rho} u_n(Q) \\ = \frac{i}{4} \int_C \left[U_n(P) \left(\frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} + 2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k^2 \right) H_0^{(2)}(KR) \right. \\ \left. + U_s(P) \left(-2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial n} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \right) H_0^{(2)}(KR) \right] ds \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \tau_s(Q) - 2 \frac{\partial u_n(Q)}{\partial s} + \frac{2}{\rho} u_s(Q) \\ = \frac{i}{4} \int_C \left[U_n(P) \left(2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial n} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \right) H_0^{(2)}(kR) \right. \\ \left. + U_s(P) \left(\frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} + 2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k^2 \right) H_0^{(2)}(kR) \right] ds \end{aligned} \quad (2.22)$$

となって, U_n, U_s を未知関数とする境界微積分方程式を得る。

Banaugh 等⁷⁾は (2.17) におおむね等しい式を使って数値計算をしている。我々も (2.4), (2.6) 等による方法と, (2.10)~(2.18) による方法とを試みたが精度上は前者の方がすぐれていた²⁴⁾。なおこの際, 前述のようにこの方法では特異性が強いけれどそれは付録Aのように静的弾性論のものに一致するので, 核関数よりそれぞれに対応する静的弾性の部分を解析的に積分することによって, その特異性を評価する方法によった。

2.3 遠方の性質^{14), 16), 18), 19)}

円筒座標 (r, θ) を導入し, 十分半径の大きい円筒面で変位, 境界力を考えてみると (1.11), (1.12) より

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{1}{k^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \longrightarrow -\frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \\ u_\theta &= -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{1}{K^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \longrightarrow -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

($r \longrightarrow \infty$)

同様にして

$$\left. \begin{aligned} \tau_r &\longrightarrow \frac{k^2}{K^2} \gamma \\ \tau_\theta &\longrightarrow \omega \end{aligned} \right\} \quad (r \longrightarrow \infty) \quad (3.2)$$

となるから十分遠方の変位等は γ, ω のそれがわかればよい。

その γ, ω は十分遠方では

$$\left. \begin{aligned} H_0^{(2)}(kR) &\xrightarrow{r \gg 1} \sqrt{\frac{2}{\pi k r'}} \exp \left\{ -i \left(k r' - \frac{\pi}{4} \right) + i k \tilde{\omega}(\theta') \right\} \\ \tilde{\omega}(\theta) &= x \cos \theta' + y \sin \theta' \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

なる漸近展開があるから、

$$\left. \begin{aligned} G(\theta') &= \int_C \left[\frac{\partial \gamma(P)}{\partial n} - \gamma(P) \frac{\partial}{\partial n} \right] e^{i K \tilde{\omega}(\theta')} ds \\ F(\theta') &= \int_C \left[\frac{\partial \omega(P)}{\partial n} - \omega(P) \frac{\partial}{\partial n} \right] e^{i k \tilde{\omega}(\theta')} ds \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

なる関数（水波理論ではコッチン関数と呼ぶ）を導入すると

$$\left. \begin{aligned} \gamma(Q) &\doteq \frac{e^{-i K r'}}{2 \sqrt{2 \pi i K r'}} G(\theta') \\ \omega(Q) &\doteq \frac{e^{-i k r'}}{2 \sqrt{2 \pi i k r'}} F(\theta') \end{aligned} \right\} \quad \text{for } r' \gg 1 \quad (3.5)$$

それゆえ $G(\theta), F(\theta)$ がわかれば遠方の性質は定まる。(3.4) の表現は C 上で γ, ω が与えられるとは限らないので前節の終りのように少し変形しておいたほうが便利である。

まず (2.9), (2.10) から

$$\left. \begin{aligned} G(\theta') &= - \int_C \left[\gamma(P) \frac{\partial}{\partial n} + \frac{K^2}{k^2} \omega(P) \frac{\partial}{\partial s} + K^2 u_n(P) \right] e^{i K \tilde{\omega}(\theta')} ds \\ F(\theta') &= - \int_C \left[-\omega(P) \frac{\partial}{\partial n} + \frac{k^2}{K^2} \gamma(P) \frac{\partial}{\partial s} - k^2 u_s(P) \right] e^{i k \tilde{\omega}(\theta')} ds \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

散乱問題ではさらに簡単になって、固定境界の時 (2.17), (2.18) に対応して、

$$\left. \begin{aligned} G(\theta') &= - \int_C \left[\Gamma(P) \frac{\partial}{\partial n} + \frac{K^2}{k^2} \Omega(P) \frac{\partial}{\partial s} \right] e^{i K \tilde{\omega}(\theta')} ds \\ F(\theta') &= - \int_C \left[\Omega(P) \frac{\partial}{\partial n} - \frac{k^2}{K^2} \Gamma(P) \frac{\partial}{\partial s} \right] e^{i k \tilde{\omega}(\theta')} ds \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

空孔の (2.21), (2.22) に対応して、

$$\left. \begin{aligned} G(\theta') &= - \int_C \left[U_n(P) \left(\frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} + 2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k^2 \right) e^{i K \tilde{\omega}(\theta')} \right. \\ &\quad \left. + U_s(P) \left(-2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial n} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \right) e^{i K \tilde{\omega}(\theta')} \right] ds \\ F(\theta') &= - \int_C \left[U_n(P) \left(2 \frac{\partial^2}{\partial s \partial n} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial s} \right) e^{i k \tilde{\omega}(\theta')} \right. \\ &\quad \left. + U_s(P) \left(\frac{2}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial n} + 2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k^2 \right) e^{i k \tilde{\omega}(\theta')} \right] ds \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

となる。

なお一般に (3.6) に (1.11), (1.12) を代入し,

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= iK e^{ik\tilde{u}(\theta')} \\ u_n^{(K)} &= -\frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma_0}{\partial n}, \quad u_s^{(K)} = -\frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma_0}{\partial s} \\ \tau_n^{(K)} &= \left(\frac{k^2}{K^2} + \frac{2}{K^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{2}{\rho K^2} \frac{\partial}{\partial n} \right) \gamma_0 \\ \tau_s^{(K)} &= \left(-\frac{2}{K^2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial n} + \frac{2}{\rho K^2} \right) \gamma_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= i k e^{ik\tilde{u}(\theta')} \\ u_n^{(k)} &= \frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega_0}{\partial s}, \quad u_s^{(k)} = -\frac{2}{k^2} \frac{\partial \omega_0}{\partial n} \\ \tau_n^{(k)} &= \frac{2}{k^2} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial s \partial n} - \frac{2}{\rho k^2} \frac{\partial \omega_0}{\partial s} \\ \tau_s^{(k)} &= \omega_0 + \frac{2}{k^2} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial s^2} + \frac{2}{\rho k^2} \frac{\partial \omega_0}{\partial n} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

とおくと,

$$\left. \begin{aligned} G(\theta') &= \frac{K^3}{ik^2} \int_C [\tau_n u_n^{(K)} + \tau_s u_s^{(K)} - u_n \tau_n^{(K)} - u_s \tau_s^{(K)}] ds \\ F(\theta') &= \frac{-k}{i} \int_C [\tau_n u_n^{(k)} + \tau_s u_s^{(k)} - u_n \tau_n^{(k)} - u_s \tau_s^{(k)}] ds \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

また, (2.12), (2.13) の表現をうる時と同様にして

$$\left. \begin{aligned} G(\theta') &= i \frac{K^3}{k^2} \int_C [u_n T_n^{(K)} + u_s T_s^{(K)}] ds \\ F(\theta') &= ik \int_C [u_n T_n^{(k)} + u_s T_s^{(k)}] ds \\ \text{for } U_n^{(k,K)} &= U_s^{(k,K)} = 0 \quad \text{on } C \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

ここに大文字は入射波と散乱波を含む諸量を示す。空孔による散乱波で表わすと,

$$\left. \begin{aligned} G(\theta') &= \frac{K^3}{ik^2} \int_C [\tau_n U_n^{(K)} + \tau_s U_s^{(K)}] ds \\ F(\theta') &= \frac{k}{i} \int_C [\tau_n U_n^{(k)} + \tau_s U_s^{(k)}] ds \\ \text{for } T_n^{(k,K)} &= T_s^{(k,K)} = 0 \quad \text{on } C \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

となる。

2.4 長波近似

物体の寸法に比して波長が十分大きい時は,

$$(k, K \rightarrow 0)$$

$$\left. \begin{aligned} H_0^{(2)}(kR) &\xrightarrow{kR \ll 1} \frac{2}{\pi i} \log \left(\frac{\gamma k R}{2} \right) \\ H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR) &\xrightarrow{kR \ll 1} \frac{i(1+\nu)}{4\pi} k^2 R^2 \log R \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

なる近似式があるので, 核関数に入れて計算すると付録Aのように静力学の式に一致する。

一様媒質の無限領域における 2 次元弾性波の放射散乱について

それ故、波長が十分大きい時は静的弾性論によって得られる境界変位、力を前節の F, G に代入して発散波振幅が近似的に求められる。

さて、 θ 方向から入射する単位振幅の縦波は、

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= iK e^{iK\tilde{\omega}(\theta)} \\ \tilde{\omega}(\theta) &= x \cos \theta + y \sin \theta\end{aligned}$$

であるが原点近傍では、

$$\left. \begin{aligned} u_1^{(0)} &= \cos \theta e^{iK\tilde{\omega}(\theta)} \xrightarrow{k \rightarrow 0} \{1 + iK\tilde{\omega}(\theta)\} \cos \theta \\ u_2^{(0)} &= \sin \theta e^{iK\tilde{\omega}(\theta)} \longrightarrow \{1 + iK\tilde{\omega}(\theta)\} \sin \theta \\ \gamma &\doteq iK, \quad \omega \doteq 0 \\ \tau_1 &\doteq iK \left[\frac{2}{1-\nu} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial y}{\partial n} \sin 2\theta \right] \\ \tau_2 &\doteq iK \left[\frac{\partial x}{\partial n} \sin 2\theta + \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - \cos 2\theta \right) \frac{\partial y}{\partial n} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

横波についても同様に、

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= iK e^{ik\tilde{\omega}(\theta)} \\ u_1^{(0)} &\doteq -[1 + ik\tilde{\omega}(\theta)] \sin \theta \\ u_2^{(0)} &\doteq [1 + ik\tilde{\omega}(\theta)] \cos \theta \\ \gamma &\doteq 0, \quad \omega = ik \\ \tau_1 &\doteq ik \left[\frac{\partial y}{\partial n} \cos \theta - \frac{\partial x}{\partial n} \sin 2\theta \right] \\ \tau_2 &\doteq ik \left[\frac{\partial x}{\partial n} \cos 2\theta + \frac{\partial y}{\partial n} \sin 2\theta \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

となる。

それ故 (3.11) により

$$\left. \begin{aligned} G(\theta) &\doteq \frac{K^3}{ik^2} \int_C [\tau_1 \cos \theta + \tau_2 \sin \theta] ds \\ &\quad + \frac{K^4}{k^2} \int_C \left[\tilde{\omega}(\theta) (\tau_1 \cos \theta + \tau_2 \sin \theta) \right. \\ &\quad \left. - u_1 \left(\frac{2}{1-\nu} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial y}{\partial n} \sin 2\theta \right) \right. \\ &\quad \left. - u_2 \left[\frac{\partial x}{\partial n} \sin 2\theta + \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - \cos 2\theta \right) \frac{\partial y}{\partial n} \right] \right] ds \\ F(\theta) &\doteq \frac{k}{i} \int_C [-\tau_1 \sin \theta + \tau_2 \cos \theta] ds \\ &\quad + k^2 \int_C \left[\tilde{\omega}(\theta) (-\tau_1 \sin \theta + \tau_2 \cos \theta) \right. \\ &\quad \left. - u_1 \left(\frac{\partial y}{\partial n} \cos 2\theta - \frac{\partial x}{\partial n} \sin 2\theta \right) \right. \\ &\quad \left. - u_2 \left(\frac{\partial x}{\partial n} \cos 2\theta + \frac{\partial y}{\partial n} \sin 2\theta \right) \right] ds \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

ここで特に C が x 軸に関して対称で、 τ も u も同じく対称性を持つとし

$$\left. \begin{aligned} \int \tau_2 ds &= \int x \tau_2 ds = \int y \tau_1 ds = 0 \\ \int u_1 \frac{\partial y}{\partial n} ds &= \int u_2 \frac{\partial x}{\partial n} ds = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

となっているとすると、上式は大分簡単になって、

$$\left. \begin{aligned} G(\theta) &\doteq \frac{K^3}{ik^2} \cos \theta \int_C \tau_1 ds \\ &+ \frac{K^4}{k^2} \int_C \left[\tau_1 x \cos^2 \theta + \tau_2 y \sin^2 \theta - \frac{2}{1-\nu} u_1 \frac{\partial x}{\partial n} \right. \\ &\quad \left. - u_2 \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - \cos 2\theta \right) \frac{\partial y}{\partial n} \right] ds \\ F(\theta) &\doteq ik \sin \theta \int_C \tau_1 ds \\ &- k^2 \sin 2\theta \int_C \left[\frac{1}{2} (\tau_2 y - \tau_1 x) + u_1 \frac{\partial x}{\partial n} - u_2 \frac{\partial y}{\partial n} \right] ds \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

それぞれの右辺第2項は第1項に比して (k, K に関し) 高次であるからさらに省略すると、

$$\left. \begin{aligned} G(\theta) &\doteq \frac{K^3}{ik^2} \cos \theta \int_C \tau_1 ds \\ F(\theta) &\doteq ik \sin \theta \int_C \tau_1 ds \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

となり右辺の積分は境界に働く x 方向の力であるからそれがわかれば近似的にコッチン関数が上のように与えられることを示す。

散乱問題では、まず x の正の方向から縦波が来る場合は (4.2) で $\theta=0$ とおけば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &\doteq 2G \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) iK \\ \sigma_y &\doteq 2G \left(\frac{\nu}{1-\nu} \right) iK \\ \tau_{xy} &\doteq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

のような2軸応力問題となり、横波では同じく (4.3) より、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &\doteq \sigma_y \doteq 0 \\ \tau_{xy} &\doteq ikG \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

となって、一様せん断力による静的弾性問題になる。以下縦波の散乱を考えると、もし固定境界ならば (4.2) によって、

$$\int_C \tau_1^{(0)} ds = 0 \quad (4.10)$$

であるから (4.7) はまた次のようにも書ける。

$$\left. \begin{aligned} G(\theta) &\doteq \frac{K^3}{ik^2} \cos \theta \int_C T_1^{(d)} ds \\ F(\theta) &\doteq ik \sin \theta \int_C T_1^{(d)} ds \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

ここに

$$T^{(d)} = \tau^{(0)} + \tau^{(d)}$$

となり、右辺の積分は波強制力の x 成分である。ハスキントの関係によりこれはまた、 C が x 方向に振動する時のコッチン関数で (6.7) のように与えられる。

一方空孔では、 $\tau^{(d)} = -\tau^{(0)}$ で (4.10) により (4.7) の項はすべて消えて、

$$G \equiv F \equiv 0 \quad (4.12)$$

で (4.4) に帰って右辺第項が残るが、この部分は $(\cos \theta, \sin \theta)$ の成分を含まず $(1, \cos 2\theta, \sin 2\theta)$ の成分である。

2.5 相反定理^{13), 18)} と変分原理

領域 D 内で正則な2つの変位場 $u^{(1)}, u^{(2)}$ について次の積分を導入しよう。(Modified Lagrangean とよぶ)

$$L(u_1, u_2) = \frac{G}{2} \iint_D [k^2 u_j^{(1)} u_j^{(2)} - e_{ij}^{(1)} \sigma_{ij}^{(2)}] dx dy \quad (5.1)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} Gk^2 &= \rho\omega^2 \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \sigma_{ij} &= 2e_{ij} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \gamma \delta_{ij} \\ \delta_{ij} &= \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j \\ 1 & \text{for } i = j \end{cases} \\ \gamma &= e_{ii} \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

そうすると、明らかに次の相反性がある。

$$L(u^{(1)}, u^{(2)}) = L(u^{(2)}, u^{(1)}) \quad (5.3)$$

いま $u^{(1)}, u^{(2)}$ が D 内で弾性振動の微分方程式を満たすならば、部分積分により

$$\frac{2}{G} L(u^{(1)}, u^{(2)}) = \int_C u_j^{(1)} \tau_j^{(2)} ds \quad (5.4)$$

ここに

$$\tau_j = \sigma_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial n} \quad (5.5)$$

(5.3) は次の形に表わされる。

$$\int_C u_j^{(1)} \tau_j^{(1)} ds = \int_C u_j^{(2)} \tau_j^{(1)} ds \quad (5.6)$$

これを以下では相反定理と呼ぼう。

この応用については次節に述べる事とし、ここでは境界値問題の変分原理についてのべる。

いま、 u が D 内で正則な弾性振動の方程式を満たす比較関数とし、境界 C 上で与えられた値 v となるような境界値問題は次の汎関数の極値問題と等価である。

$$I = \int_C u_j \tau_j ds - \int_C v_i \tau_i ds \quad (5.7)$$

実際変分をとると、

$$\delta I = \int_C (u_j - v_j) \delta \tau_j ds \quad (5.8)$$

となるから

$$u_j = v_j \quad \text{on } C \quad (5.9)$$

である。

C 上で境界力 τ が与えられても同じである。

2.6 可逆性とハスキントの関係¹⁹⁾

今物体が C_1, C_2 と 2 つあって、それぞれの振動によって $u^{(1)}, u^{(2)}$ なる振動が起るとし、境界条件はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} u_j^{(1)} &: \text{given on } C_1 \\ u_j^{(1)} &= 0 \quad \text{on } C_2 \\ u_j^{(2)} &= 0 \quad \text{on } C_1 \\ u_j^{(2)} &: \text{given on } C_2 \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

とし相反定理を適用すると、

$$\int_{C_1} u_j^{(1)} \tau_j^{(2)} ds = \int_{C_2} u_j^{(2)} \tau_j^{(1)} ds \quad (6.2)$$

となる。これは可逆性を表わしていて、例えば、

$$\left. \begin{aligned} u_1^{(1)} &= 1, \quad u_2^{(1)} = 0 \quad \text{on } C_1 \\ u_1^{(2)} &= 1, \quad u_2^{(2)} = 0 \quad \text{on } C_2 \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

つまり C_1, C_2 ともに x 軸に平行に振動しているとする、(6.2) から、

$$\int_{C_1} \tau_1^{(2)} ds = \int_{C_2} \tau_2^{(1)} ds \quad (6.4)$$

となって、 C_1 の振動によって C_2 に働く x 方向の力は、 C_2 の振動によって C_1 に働く x 方向の力に等しい事を意味する。

この可逆性は基本的な関係で、これから種々の可逆性を導く事ができるが、特に便利なのは散乱問題の場合である。

すなわち C_1 と C_2 が十分離れていればそれぞれ相手の振動は平面波として到着するので散乱問題となる。そこであらためて入射波の変位等を肩符 (0) で表わし、 $u^{(d)}$ を C による散乱場としよう。

境界条件は

$$u_j^{(d)} = -u_j^{(0)} \quad j=1, 2 \quad (6.5)$$

となるものとして、もう 1 つの放射場 u を考え (5.6) を適用すると、

$$\int_C u_j \tau_j^{(d)} ds = \int_C u_j^{(d)} \tau_j ds \quad (6.6)$$

となるが、(6.5) より

$$\int_C u_j \tau_j^{(d)} ds = - \int_C u_j^{(0)} \tau_j ds$$

それゆえ

$$\int_C u_j (\tau_j^{(0)} + \tau_j^{(d)}) ds = \int_C (u_j \tau_j^{(0)} - u_j^{(0)} \tau_j) ds$$

(3.11) によって、

$$\left. \begin{array}{l} \text{縦波ならば} \\ \text{横波ならば} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \int_C u_j(\tau_j^{(0)} + \tau_j^{(d)}) ds = -\frac{ik^2}{K^3} G(\theta) \\ \int_C u_j(\tau_j^{(0)} + \tau_j^{(d)}) ds = -\frac{i}{k} F(\theta) \end{array} \quad (6.7)$$

特に u が C の剛体的運動の場合は左辺は波の強制力となり、水波理論ではハスキントの関係と呼ばれている²⁵⁾。今の場合、振動モードは無限にあり、左辺は一般力と考えられるのでやはり波の強制力は放射問題の G, F つまりコッチン関数によって与えられると言ってよく、この関係から振動振幅 u を決めるためには放射問題を解いておけばよく、散乱問題の解は必要としない。

この関係でも種々の変形が考えられるが、ここでは最後に空孔による散乱の場合を考えておこう。

境界条件は

$$\tau_j^{(d)} = -\tau_j^{(0)} \quad \text{on } C \quad (6.8)$$

(6.6) に代入して前と同様に (3.13) に等しく

$$\left. \begin{array}{l} \text{縦波} \\ \text{横波} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \int_C (u_j^{(0)} + u_j^{(d)}) \tau_j ds = \frac{ik^2}{K^3} G(\theta) \\ \int_C (u_j^{(0)} + u_j^{(d)}) \tau_j ds = \frac{i}{k} F(\theta) \end{array} \quad (6.9)$$

それ故今度は境界 C に τ_j を加えた強制振動の解によって境界の変位が表わされることになる。

2.7 エネルギー定理^{9), 17), 18), 19)}

C の線素を通して法線方向になす単位時間当りの仕事の時間平均は、

$$\frac{\omega G}{4i} [u_j \bar{\tau}_j - \bar{u}_j \tau_j] ds \quad (7.1)$$

上棒は複素共役値とする。

これは電磁波理論で Poynting Vector と呼ばれる。それ故 C の単位時間になす仕事 (以下動力と呼ぶ)

$$W = \frac{\omega G}{4i} \int_C [u_j \bar{\tau}_j - \bar{u}_j \tau_j] ds \quad (7.2)$$

一方 (5.1) をまねて一般に2つの場を肩符 (1), (2) で表わせば、

$$\frac{2}{G} L(u^{(1)}, \bar{u}^{(2)}) = \iint_D [k^2 u_j^{(1)} \bar{u}_j^{(2)} - e_{ij}^{(1)} \bar{\sigma}_{ij}^{(2)}] dx dy \quad (7.3)$$

を導入して部分積分すると境界積分に変形できるが、今度は無限遠方の積分が消えないので今それを半径の充分大きい円周 R にとる事としよう。

そうすると、

$$\int_C [u_j^{(1)} \bar{\tau}_j^{(2)} - \bar{u}_j^{(2)} \tau_j^{(1)}] ds = \int_R [u_j^{(1)} \bar{\tau}_j^{(2)} - \bar{u}_j^{(2)} \tau_j^{(1)}] ds \quad (7.4)$$

R 上の積分は (3.1), (3.2), (3.5) によって

$$\begin{aligned} W_{1,2} &= \frac{\omega G}{4i} \int_C [u_j^{(1)} \bar{\tau}_j^{(2)} - \bar{u}_j^{(2)} \tau_j^{(1)}] ds \\ &= \frac{\rho \omega^3}{16\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{G^{(1)}(\theta) \bar{G}^{(2)}(\theta)}{K^4} + \frac{F^{(1)}(\theta) \bar{F}^{(2)}(\theta)}{k^4} \right] ds \end{aligned} \quad (7.5)$$

を得る。

一方、単位振幅の平面入射波が進行方向に直角な単位面積当りに運ぶ動力は、縦波では

$$\begin{aligned}\gamma &= iK e^{iKz} \\ u &= e^{iKz}, \quad v=0 \\ \tau_z &= i \frac{k^2}{K} e^{iKz}, \quad \tau=0\end{aligned}$$

であるから、

$$\left. \begin{aligned} E_K &= \frac{\rho \omega^3}{2K} = \frac{\omega G}{2K} k^2 \\ E_k &= \frac{\rho \omega^3}{2k} = \frac{\omega G k}{2} \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

同様に横波では

これで (7.5) を割ると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{W}{E_k} &= \frac{k}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{|G(\theta)|^2}{K^4} + \frac{|F(\theta)|^2}{k^4} \right] d\theta \\ \frac{W}{E_K} &= \frac{K}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{|G(\theta)|^2}{K^4} + \frac{|F(\theta)|^2}{k^4} \right] d\theta \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

2.8 逆時間運動¹⁵⁾

いまある放射問題の解 u に対してその複素共役値 $\bar{u}$ を考えると、これは時間を逆にした運動の解と考えてもよいから、それを逆時間運動と呼ぼう。そして C 上で

$$u_j = \bar{u}_j \quad (8.1)$$

のような関係があるとしておこう。

無限遠方では u は発散波を持ち、 $\bar{u}$ は収束波を持っているが、これは各方向からの入射平面波の集まりと考える事ができる。

γ について考えると (3.5) 又は (2.7) を参照して、

$$\gamma(P) \rightarrow \frac{1}{4\pi i} \int_{\theta-\epsilon}^{\theta+\epsilon} e^{-iK(x \cos(\theta-\theta') + y \sin(\theta-\theta'))} G(\theta') d\theta' \quad (\epsilon \ll 1) \quad (8.2)$$

と書くことができるから、単位振幅の θ' 方向から来る入射波

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0(P, \theta') &= iK e^{iK \bar{z}(\theta-\theta')} \\ \omega_0(P, \theta') &= ik e^{ik \bar{z}(\theta-\theta')} \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

の散乱波、 γ_d 、 ω_d と合わせて

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(P, \theta') &= \gamma_0(P, \theta') + \gamma_d(P, \theta') \\ \Omega(P, \theta') &= \omega_0(P, \theta') + \omega_d(P, \theta') \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

とおくと、 Γ, Ω による C 上の変位は 0 となる。

そこで、

$$\left. \begin{aligned} \overline{\gamma(P)} - \gamma(P) + \frac{1}{4\pi K} \int_0^{2\pi} \Gamma(P, \theta') \overline{G(\theta')} d\theta' \\ \overline{\omega(P)} - \omega(P) + \frac{1}{4\pi k} \int_0^{2\pi} \Omega(P, \theta') \overline{F(\theta')} d\theta' \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

を考えると、これらによる C 上の変位は (8.1) と散乱場の定義より 0 である。

一様媒質の無限領域における2次元弾性波の放射散乱について

ここで解の唯一性を考慮すれば、上式は恒等的に0とならねばならないから、

$$\left. \begin{aligned} \gamma(P) - \overline{\gamma(P)} &= \frac{1}{4\pi K} \int_0^{2\pi} \Gamma(P, \theta') \overline{G(\theta')} d\theta' \\ \omega(P) - \overline{\omega(P)} &= \frac{1}{4\pi k} \int_0^{2\pi} \Omega(P, \theta') \overline{F(\theta')} d\theta' \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

となり、これから変位等も計算できる。

すなわち、

$$\begin{aligned} u_j(P) - \overline{u_j(P)} &= \frac{1}{4\pi K} \int_0^{2\pi} U_j^{(K)}(P, \theta') \overline{G(\theta')} d\theta' \\ &+ \frac{1}{4\pi k} \int_0^{2\pi} U_j^{(k)}(P, \theta') \overline{F(\theta')} d\theta' \end{aligned} \quad (8.7)$$

ここに $U^{(K)}, U^{(k)}$ はそれぞれ縦横の単位振幅波による変位とする。

それ故

$$\begin{aligned} \tau_j(P) - \overline{\tau_j(P)} &= \frac{1}{4\pi K} \int_0^{2\pi} T_j^{(K)}(P, \theta') \overline{G(\theta')} d\theta' \\ &+ \frac{1}{4\pi k} \int_0^{2\pi} T_j^{(k)}(P, \theta') \overline{F(\theta')} d\theta' \end{aligned} \quad (8.8)$$

次に散乱ポテンシャルでは (8.1) が成立たないで、

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0(\theta) &= iKe^{iK\omega(\theta)}, & \omega_0(\theta) &= ike^{ik\omega(\theta)} \\ \overline{\gamma_0(\theta+\pi)} &= -\gamma_0(\theta), & \overline{\omega_0(\theta+\pi)} &= -\omega_0(\theta) \\ \overline{u_j^{(0)}(\theta+\pi)} &= -u_j^{(0)}(\theta) \\ \overline{\tau_j^{(0)}(\theta+\pi)} &= -\tau_j^{(0)}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

等の関係があるから、

$$\overline{u_j^{(d)}(\theta)} + u_j^{(d)}(\theta+\pi) = 0 \quad \text{on } C \quad (8.10)$$

となるので、前同様にして

$$\begin{aligned} \overline{\tau_j^{(d)}(P, \theta)} + \tau_j^{(d)}(P, \theta+\pi) &= T_j^{(d)}(P, \theta) + T_j^{(d)}(P, \theta+\pi) \\ &= -\frac{1}{4\pi K} \int_0^{2\pi} T_j^{(K)}(P, \theta') \overline{G^{(d)}(\theta', \theta)} d\theta' \\ &- \frac{1}{4\pi k} \int_0^{2\pi} T_j^{(k)}(P, \theta') \overline{F^{(d)}(\theta', \theta)} d\theta' \end{aligned} \quad (8.11)$$

2.9 運動方程式^{8), 10)}, 指向性利得^{3), 25)}

物体に平面波が当たって境界 C が変形する問題を考えて見よう。

2.1 節の終わりに述べたように、これはまず C が変形しないとして散乱問題を解き波の強制力を求める。それを $GT_j^{(d)}$ とするとこれは実はハスキントの関係 (6.7) により必ずしも散乱問題を解かないまでも、その変形モードの放射問題の入射波方向のコッチン関係がわかればよい。

一方このモードでの放射問題を解くと境界力がわかるからこれを次のように書こう。

$$Gr_j^{(\text{out})} = -Z_{\text{out}}(i\omega u_j) \quad (9.1)$$

この Z_{out} はインピーダンス (外部系の) である。これは一般にはマトリックスである。

同様にして物体を u_j だけ変位させる時の力は

$$Gr_j^{(\text{in})} = -Z_{\text{in}}(i\omega u_j) \quad (9.2)$$

と書くことができよう。

それ故、平衡方程式は

$$G(T_j^{(d)} + \tau_j^{(\text{out})} + \tau_j^{(\text{in})}) = 0$$

すなわち、

$$i\omega(Z_{\text{out}} + Z_{\text{in}})u_j = T_j^{(d)} \quad (9.3)$$

これが変位を定める式である。

これらの関係はかなり複雑であるので、例えば物体自身の固有振動のモードに分解して考えれば簡単になろう。今は簡単のために、ある1つのモードの振動のみがある場合を考えよう。そのモードを u_j とし、振動速度振幅は Iu_j となるものとする。

$$G \int_C \tau_j^{(\text{out})} u_j ds = -i\omega Z^{(\text{out})} \quad (9.4)$$

横波が入射する場合を考えて、

$$\int_C T_j^{(d)} u_j ds = \frac{1}{ik} F(\theta) \quad (9.5)$$

それ故

$$-I(Z^{(\text{out})} + Z^{(\text{in})}) = \frac{G}{ik} F(\theta) \quad (9.6)$$

$$\therefore I = \frac{\frac{iG}{k} F(\theta)}{Z^{(\text{out})} + Z^{(\text{in})}} \quad (9.7)$$

所で (9.4) の定義で u_j を実数値と定義すると、

$$\begin{aligned} R_e[Z^{(\text{out})}] &= R = -\frac{iG}{\omega} \int_C \tau_j u_j ds \\ &= -\frac{iG}{2\omega} \int_C [\tau_j \bar{u}_j - \bar{\tau}_j u_j] ds \end{aligned} \quad (9.8)$$

となる故、(7.5) より

$$R = \frac{\rho\omega}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{|G(\theta)|^2}{K^4} + \frac{|F(\theta)|^2}{k^4} \right] d\theta \quad (9.9)$$

物体が波から受けとる動力は

$$\frac{G}{4k} [I\bar{F}(\bar{\theta}) + \bar{I}F(\theta)] \quad (9.10)$$

で与えられるが、これが最大となるのは (9.7) によって

$$Z^{(\text{out})} = \overline{Z^{(\text{in})}} \quad (9.11)$$

な時であり、この時物体が吸収する動力は、

$$W_a = \frac{G^2 |F(\theta)|^2}{8k^2 R} = \frac{\rho^2 \omega^4}{8k^6} \frac{|F(\theta)|^2}{R} \quad (9.12)$$

したがって、

$$A_{ab} = \frac{W_a}{E_k} = \frac{\rho\omega |F(\theta)|^2}{4k^5 R} = \frac{\frac{|F(\theta)|^2}{k^4}}{\frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{|G(\theta)|^2}{K^4} + \frac{|F(\theta)|^2}{k^4} \right] d\theta} \quad (9.13)$$

なる量を定義すると、 A_{ab} は最大波動力吸収断面積である。

一方 (9.9) は u_j の振動による発散波の持ち去る動力であるから、その放射指向性利得 $G_i(\theta)$ は、

$$G_i(\theta) = G_i^{(K)}(\theta) + G_i^{(k)}(\theta) \quad (9.14)$$

$$\left. \begin{aligned} G_i^{(k)}(\theta) &= \frac{\frac{|F(\theta)|^2}{k^4}}{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{|G(\theta)|^2}{K^4} + \frac{|F(\theta)|^2}{k^4} \right] d\theta} \\ G_i^{(K)}(\theta) &= \frac{\frac{|G(\theta)|^2}{K^4}}{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{|G(\theta)|^2}{K^4} + \frac{|F(\theta)|^2}{k^4} \right] d\theta} \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

となる。これを使うと (9.13) は

$$A_{ab}^{(k)} = \frac{1}{k} G_i^{(k)}(\theta) \quad (9.16)$$

と整理することができる。

同様にして縦波を受ける時は次式となる。

$$A_{ab}^{(K)} = \frac{1}{K} G_i^{(K)}(\theta) \quad (9.17)$$

2.10 散乱断面積^{9), 16), 18), 19)}

入射波を受けて物体が波を散乱させている時、散乱波の持ち去る動力 W_s が入射波のどれだけの断面積が運ぶ動力に相当するかを示す量を散乱断面積 A_s と呼ぶ。

(7.5) によって (和記号を省略して)

$$W_s = \frac{\rho\omega^3}{4ik^2} \int_C [(u + u^{(d)}) (\bar{\tau} + \bar{\tau}^{(d)}) - \overline{(u + u^{(d)})} (\tau + \tau^{(d)})] ds \quad (10.1)$$

(2.7.7) より

$$\left. \begin{aligned} A_s^{(k)} &= \frac{W_s}{E_k} = \frac{k}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{|G(\theta) + G^{(d)}(\theta)|^2}{K^4} + \frac{|F(\theta) + F^{(d)}(\theta)|^2}{k^4} \right] d\theta \\ A_s^{(K)} &= \frac{W_s}{E_K} = \frac{K}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{|G(\theta) + G^{(d)}(\theta)|^2}{K^4} + \frac{|F(\theta) + F^{(d)}(\theta)|^2}{k^4} \right] d\theta \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

特に放射分 u, τ が無い時はまず固定境界では、

$$\left. \begin{aligned} A_{ss}^{(k)} &= \frac{W_{ss}}{E_k} = \frac{1}{2ik} \int_C [u^{(d)} \bar{\tau}^{(d)} - \bar{u}^{(d)} \tau^{(d)}] ds \\ A_{ss}^{(K)} &= \frac{W_{ss}}{E_K} = \frac{K}{2ik^2} \int_C [u^{(d)} \bar{\tau}^{(d)} - \bar{u}^{(d)} \tau^{(d)}] ds \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

となるが、

$$\begin{aligned} \overline{u^{(d)}(\theta)} &= -\bar{u}^{(0)} = u^{(0)}(\theta + \pi) \\ -u^{(0)}(\theta + \pi) \tau^{(0)}(\theta) &= \bar{u}^{(0)}(\theta) \bar{\tau}^{(0)}(\theta + \pi) \\ &= \overline{u^{(0)}(\theta + \pi) \tau^{(0)}(\theta)} \end{aligned}$$

なる故

$$\left. \begin{aligned} A_{ss}^{(k)} &= \frac{1}{2ik} \int_C [\overline{u^{(0)}(\theta+\pi) T^{(d)}(\theta)} - u^{(0)}(\theta+\pi) T^{(d)}(\theta)] ds \\ &= -\frac{1}{2k^2} \{F^{(d)}(\theta: \theta+\pi) + \overline{F^{(d)}(\theta: \theta+\pi)}\} \\ A_{ss}^{(K)} &= -\frac{k^2}{K^4} \{G^{(d)}(\theta: \theta+\pi) + \overline{G^{(d)}(\theta: \theta+\pi)}\} \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

空孔散乱の場合も同様にして符号だけ異なる式を得る。

一般の場合に戻って考えて (10.1), (10.2) を3つの部分に別けて考えよう。

$$\left. \begin{aligned} A_s^{(k)} &= \text{I} + \text{II} + \text{III} \\ \text{III} &= A_{ss}^{(k)} \\ \text{I} &= \frac{1}{2ik} \int_C (u\bar{\tau} - \bar{\tau}u) ds \\ \text{II} &= \frac{1}{2ik} \int_C (u^{(d)}\bar{\tau} + u\bar{\tau}^{(d)} - \bar{u}^{(d)}\tau - \bar{u}\tau^{(d)}) ds \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

運動方程式は波パワの吸収がなければ,

$$\tau = -T^{(d)} \quad (10.6)$$

であるから, I の右辺に代入すると,

$$\text{I} = -\frac{i}{2k} \int_C [u\bar{T}^{(d)} - \bar{u}T^{(d)}] ds$$

となるから, (横波入射を考えているから)

$$F^*(\theta) = ik \int_C \bar{u}T^{(d)} ds \quad (10.7)$$

のようなコッチン関数を導入すれば,

$$\text{I} = -\frac{1}{2k^2} \{F^*(\theta) + \overline{F^*(\theta)}\} \quad (10.8)$$

II については,

$$\begin{aligned} &u^{(d)}\bar{\tau} + u\bar{\tau}^{(d)} - \bar{u}^{(d)}\tau - \bar{u}\tau^{(d)} \\ &= \overline{u^{(0)}(\theta+\pi)\bar{\tau}} + u\cdot\overline{T^{(d)}(\theta)} - \overline{u\tau^{(0)}(\theta)} - u^{(0)}(\theta+\pi)\tau \\ &= \overline{uT^{(d)}(\theta)} - uT^{(d)}(\theta) + \tau\overline{u^{(0)}(\theta+\pi)} - \overline{u\tau^{(0)}(\theta+\pi)} \\ &\quad + u\tau^{(0)}(\theta+\pi) - \tau u^{(0)}(\theta+\pi) \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned} \text{I} + \text{II} &= \frac{1}{2ik} \int_C [\tau u^{(0)}(\theta+\pi) - \tau u^{(0)}(\theta+\pi) - \overline{u\tau^{(0)}(\theta+\pi)} - \overline{\tau u^{(0)}(\theta+\pi)}] ds \\ &= -\frac{1}{2k^2} \{F(\theta+\pi) + \overline{F(\theta+\pi)}\} \end{aligned} \quad (10.9)$$

(10.4) と合わせて,

$$\left. \begin{aligned} A_s^{(k)} &= -\frac{1}{k^2} \text{Re} [F^{(d)}(\theta: \theta+\pi) + F(\theta: \theta+\pi)] \\ A_s^{(K)} &= -\frac{k^2}{K^4} \text{Re} [G^{(d)}(\theta: \theta+\pi) + G(\theta: \theta+\pi)] \end{aligned} \right\} \quad (10.10)$$

となるが, これが (10.6) が成立つ場合, つまり系外にパワーが出て行かない場合である。

物体がパワー W_{ab} を吸収する場合は I の部分が吸収パワーだけ変るから (10.10) の右辺から吸収幅を差し引いておけばよい。

3. 円境界に関する計算例²⁴⁾

縦波または横波を受ける物体が、振動しつつ波のエネルギーを吸収する問題を円境界について数値計算例を次に示す。この場合、さきに述べたように、ある入射波で波動力吸収断面積が最大となるようにするには、境界内部と外部系のインピーダンスが共役整合となる場合であり、そのためには剛体質量と減衰抵抗によって波エネルギーを吸収するようにした。以下、円境界は単位円 (半径1) についての計算例を示す。

i) 円筒剛体の縦波および横波による振動

x 軸の正の方向から単位振幅の縦波または横波が入射する時の剛体の振動モードは、前者については x 軸にそっての振動、後者については y 軸にそっての振動と xy 面に垂直な軸まわりの回転モードとなる。ここでは x 軸、 y 軸にそっての振動モードのみによって入射波のエネルギーを吸収する方法を考えているので、以下回転運動は考えない。

外部系のインピーダンス $Z^{(out)}$ と波強制力 f_x, f_y は、それぞれの振動モードの放射問題の解より付録Bを参照して次式となる。

$$\left. \begin{aligned} Z^{(out)} &= \frac{G}{i\omega} z^{(out)} = -\frac{G\pi}{i\omega} \{z_1^{(1,1)} + z_1^{(2,2)} - 2z_1^{(1,2)}\} \\ f_x &= \frac{k^2}{iK^3} G(0) = \frac{k^2}{iK^3} \frac{4}{d_1} \{K^2 k H_1^{(2)'}(k) - K^2 H_1^{(2)}(k)\} \\ f_y &= \frac{1}{ik} F(0) = \frac{1}{ik} \frac{4}{d_1} \{k^2 H_1^{(2)}(K) - k^2 K H_1^{(2)'}(K)\} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

内部系のインピーダンス $Z^{(in)}$ は剛体質量 M と減衰抵抗 R_e によって次式で与えるものとする。

$$Z^{(in)} = R_e + i\omega M \quad (2)$$

剛体の単位体積質量を ρ_0 とすると、外部系の単位体積質量 ρ との比 $\mu = \rho_0/\rho$ を用いて $Z^{(in)}$ を次のように書き変える。

$$Z^{(in)} = \frac{G}{i\omega} z^{(in)} = \frac{G}{i\omega} (-\mu\pi k^2 + ikR_e') \quad (3)$$

ここに、

$$R_e' = R_e / \sqrt{\rho G}$$

剛体の振動振幅 x_0, y_0 は、振動速度振幅をそれぞれ I_x, I_y とすると、

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= I_x / i\omega = \frac{i \frac{k^2}{K^3} G(0)}{z^{(out)} + z^{(in)}} \\ y_0 &= I_y / i\omega = \frac{i \frac{1}{k} F(0)}{z^{(out)} + z^{(in)}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

となる。物体が受けとる動力は、

$$W_a = \left\{ \frac{k^2}{4K^3} G[I_x \bar{G}(0) + \bar{I}_x G(0)] \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \frac{1}{4k} G[I_Y \bar{F}(0) + \bar{I}_Y F(0)] \right.$$

となり、これより波動力吸収断面積は次式より求まる。

$$A_{ab}^K = \frac{W_a}{E_K}, \quad A_{ab}^k = \frac{W_a}{E_k} \quad (6)$$

入射波のある波数の時に活動力吸収断面積が最大となる条件は、内部と外部のインピーダンスが共役整合となる場合であり、そのためには内部の質量比 μ と減衰抵抗 R_e' の値を次のようにおけばよい。

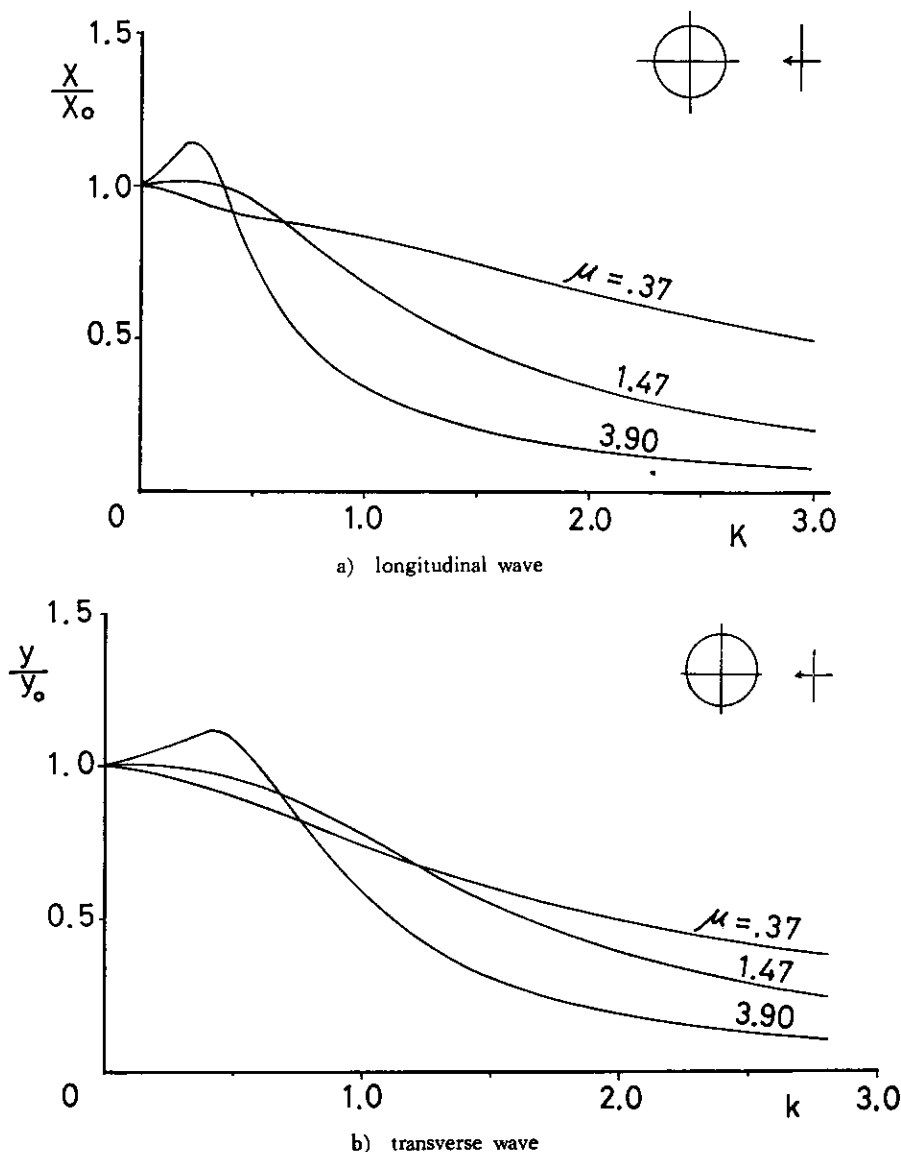


Fig. 2 Response amplitude of a rigid circular cylinder for various mass density ratio ($\mu = \rho_0/\rho$).

一様媒質の無限領域における2次元弾性波の放射散乱について

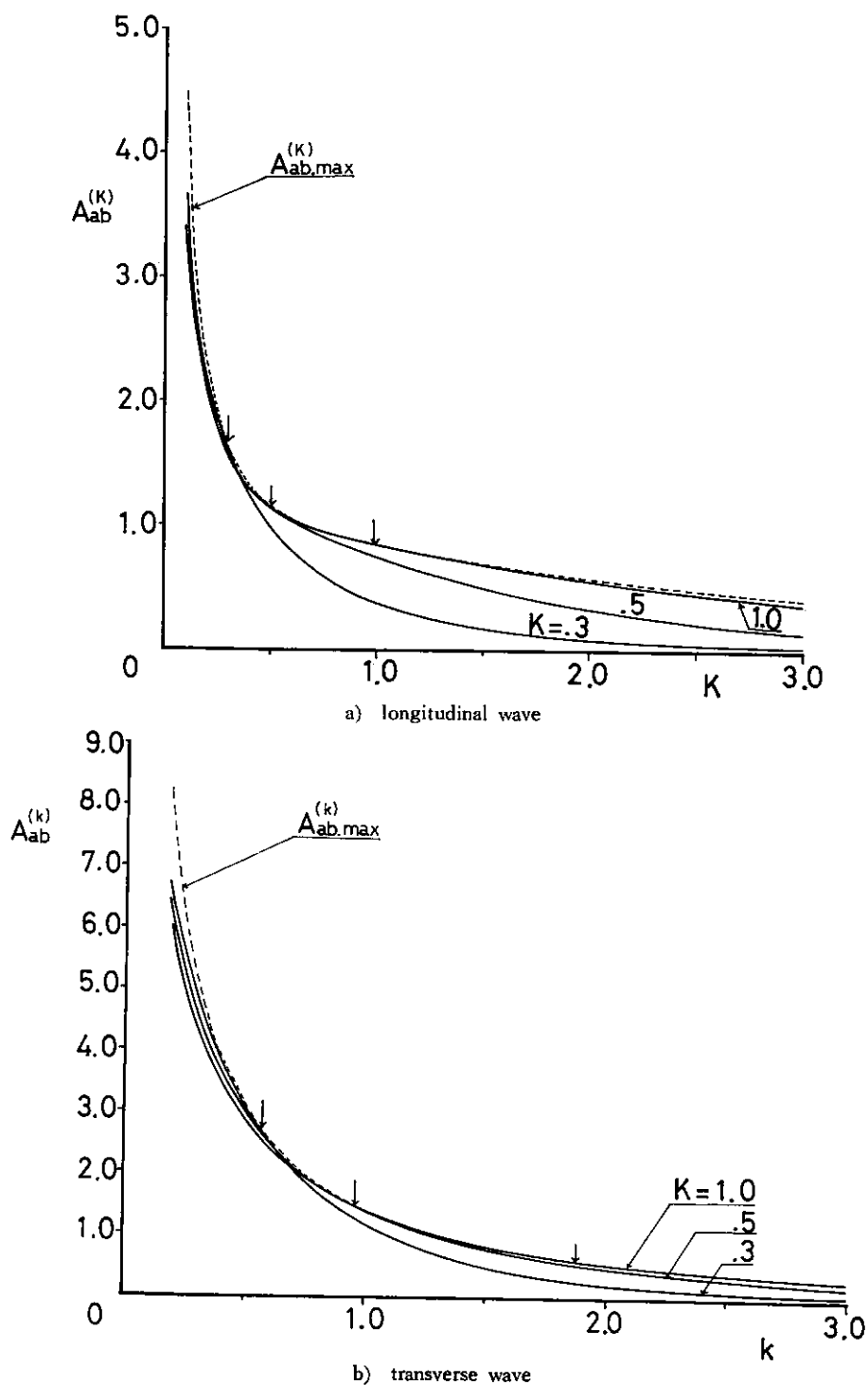


Fig. 3 Cross sectional area absorbing wave power of a rigid circular cylinder for various mass density and damping.

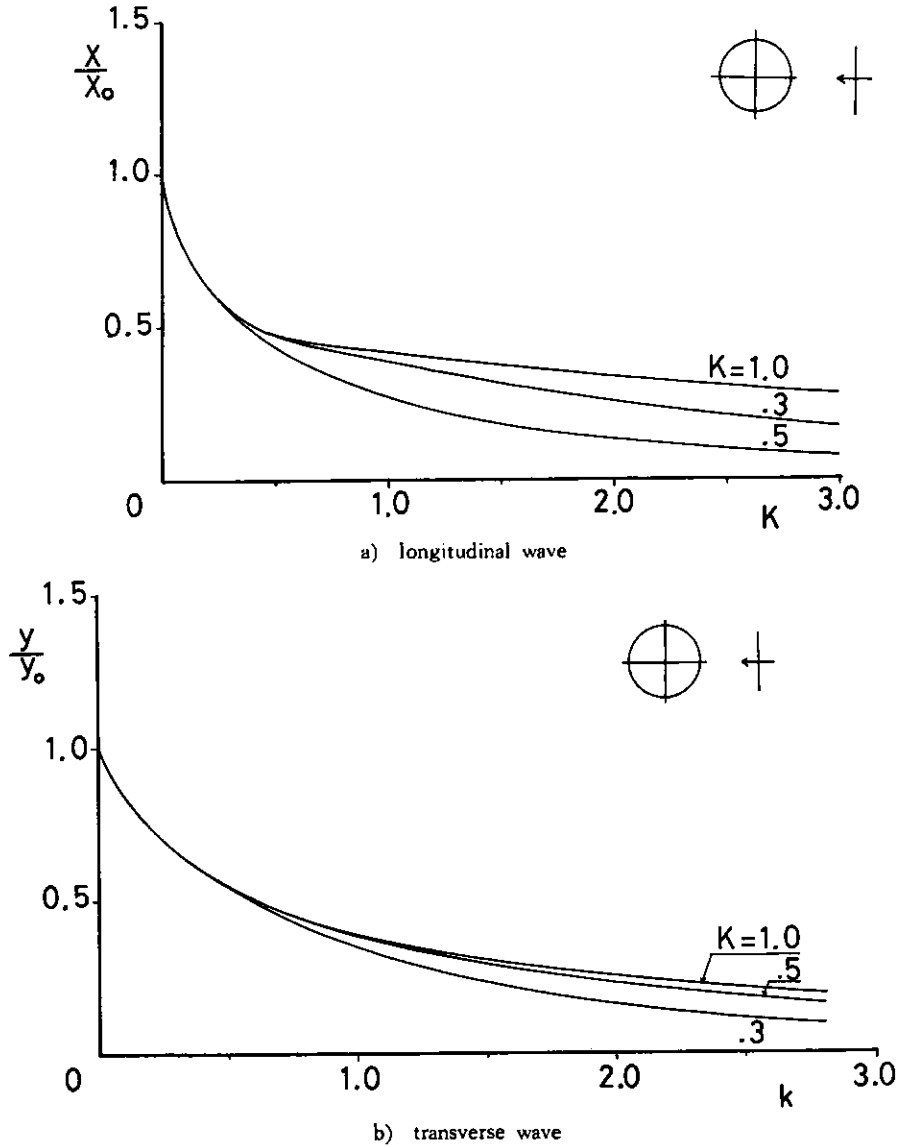


Fig. 4 Response amplitude of a rigid circular cylinder for various mass density and damping.

$$\left. \begin{aligned} \mu &= R_e[z^{(out)}] / \pi k^2 \\ R_e' &= I_m[z^{(out)}] / k \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Fig. 2 に内部系の減衰抵抗がない時、剛体の質量比を種々に変えた場合の振動振幅応答計算例を示す。

入射波数 $K=0.3, 0.5, 1.0$ で波動力吸収断面積が最大となるように (7) によって μ と R_e' を選んだ時の波動力吸収断面積と剛体振動振幅を Fig. 3, 4 に示す。図において破線は (9.16), (9.17) より計算される最大波動力吸収断面積 $A_{ab, \max}^{(K)}$, $A_{ab, \max}^{(k)}$ で

あり、 μ と R_e' を調整することによって与えられた波数で $A_{ab,\max}^{(K)}$ または $A_{ab,\max}^{(k)}$ と接するようになっている。

ii) 空孔のぼう張収縮振動

空孔が縦波をうけ、そのぼう張収縮変形によって波エネルギーを吸収する問題である。

空孔内には流体を満たし、空孔のぼう張収縮によって空孔内の圧力 p は変動するものとする。空孔内に満たす流体は非粘性とする。変形による外部領域の反力を τ_n 、波の強制力を $(\tau_0 + \tau_d)_n$ とすると力の平衡方程式は次式となる。

$$G\{\tau_n + p + (\tau_0 + \tau_d)_n\} = 0 \quad (8)$$

これにぼう張収縮変位 u_n をかけて円孔上で積分すると、次の運動方程式を得る。

$$2\pi(z^{(\text{out})} + z^{(\text{in})})u_n = i\frac{k^2}{K^3}G(0) \quad (9)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} 2\pi z^{(\text{out})} &= \int_0^{2\pi} \tau_n d\theta = 2\pi z_0^{(1,1)} \\ &= 2\pi \left\{ 2 - \frac{k^3 H_0^{(2)}(K) H_0^{(2)'}(k)}{4\Delta_0} \right\} \\ 2\pi z^{(\text{in})} &= \int_0^{2\pi} p d\theta \\ i\frac{k^2}{K^3}G(0) &= - \int_0^{2\pi} (\tau_0 + \tau_d)_n U_n d\theta \\ &= 4 \frac{k^3 H_0^{(2)}(k)}{K \Delta_0} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

内部系のインピーダンスは空孔内の流体に連結された質量と減衰抵抗とを考慮して、次のように表わされるものと仮定する。

$$Z^{(\text{in})} = \frac{G}{i\omega} z^{(\text{in})} = R_e + i\omega M \quad (11)$$

前と同様に、質量比と減衰抵抗の値を(7)を使って調整することにより、入射波数 $K=0.3, 0.5, 1.0$ の時に波動力吸収断面積が最大となるように計算した結果を Fig. 5, 6 に示す。この場合、最大波動力吸収断面積はコッチン関数が無指向性であることより

$$A_{ab,\max}^{(K)} = \frac{1}{K} \quad (12)$$

となっている。

iii) 散乱断面積

円筒剛体に縦波または横波が入射した時の散乱断面積は前の式(10.2)より計算でき、特に放射分がない時は(10.3)または(10.4)より求めることができる。付録に示したコッチン関数を使って $A_{ss}^{(K)}, A_{ss}^{(k)}$ を計算した結果を Fig. 7, 8 に示す。Barrat と Collins は K および k の小さい部分での近似式を与えているが、図に示した結果とよく一致している。また、散乱波の各方面に広がる分布状態を表わす散乱波指向性利得を Fig. 9 に示す。

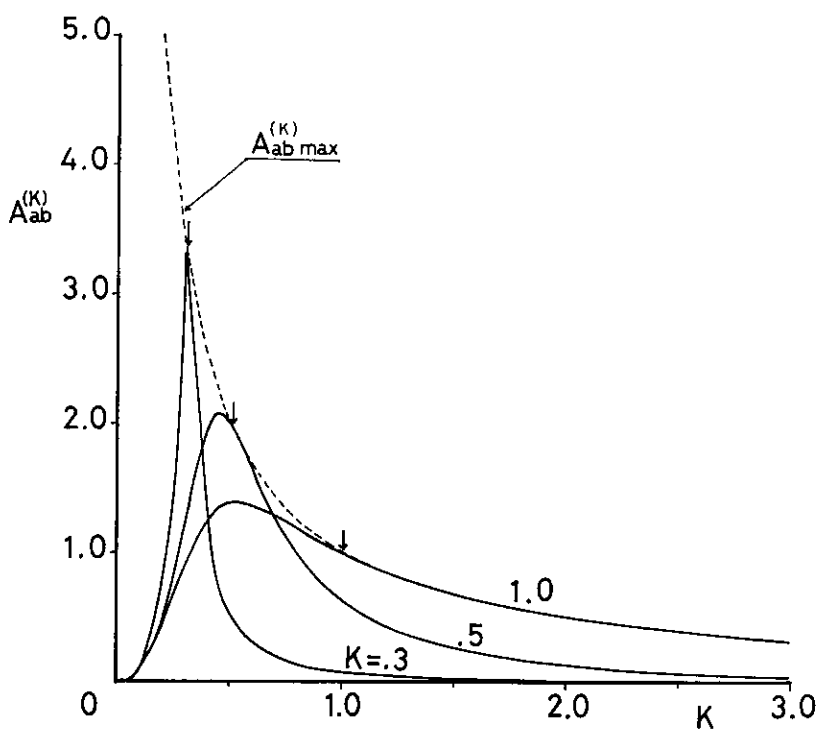


Fig. 5 Cross sectional area absorbing wave power of a circular cavity.

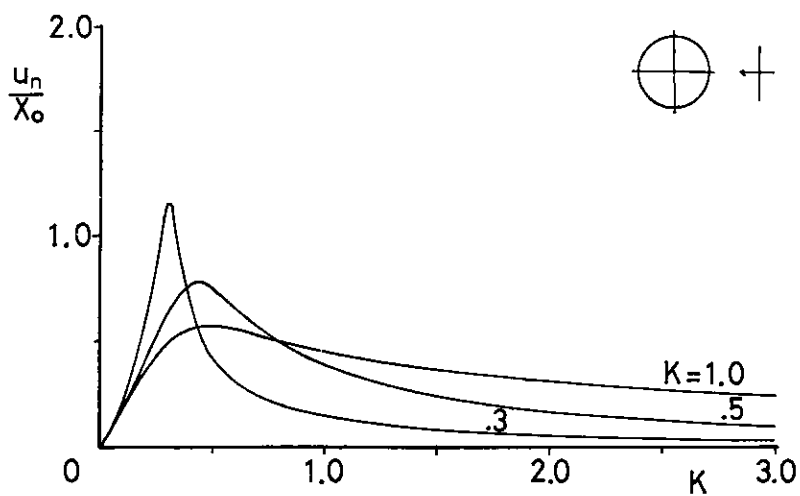


Fig. 6 Response amplitude of a circular cavity

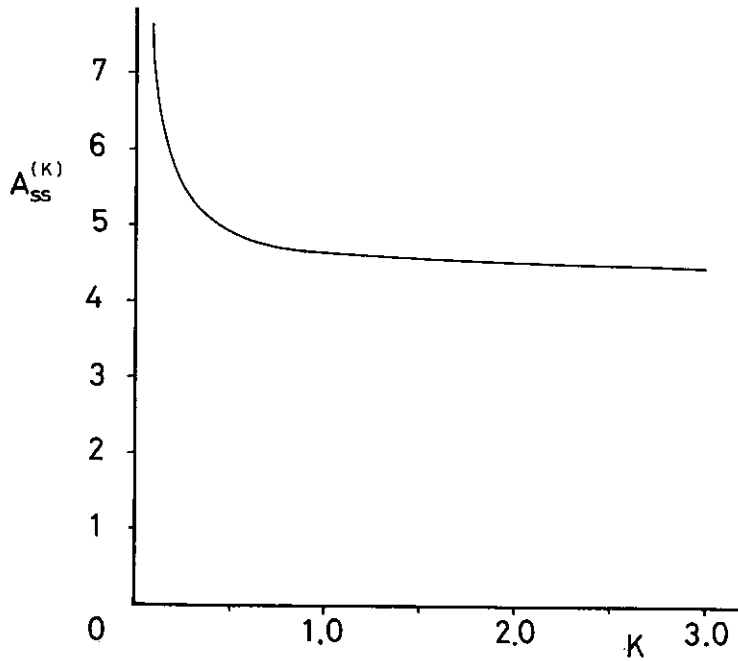


Fig. 7 Scattering cross sectional area of a rigid circular cylinder for longitudinal wave

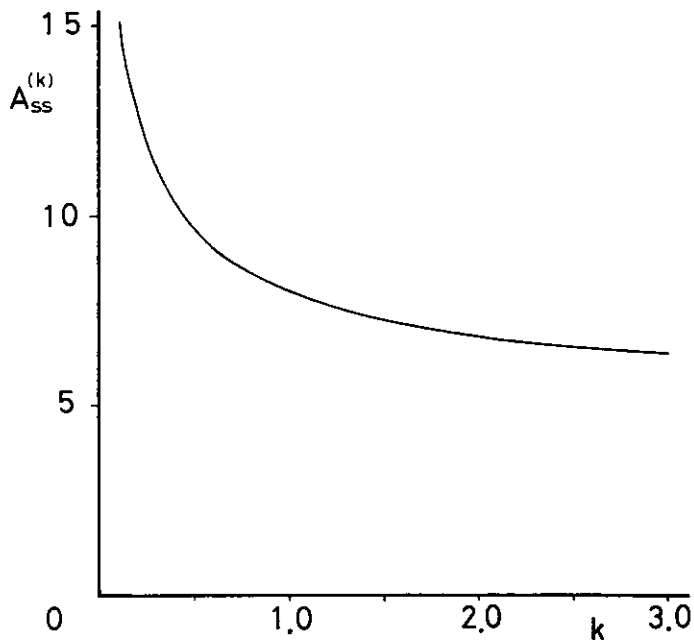


Fig. 8 Scattering cross sectional area of a rigid circular cylinder for transverse wave

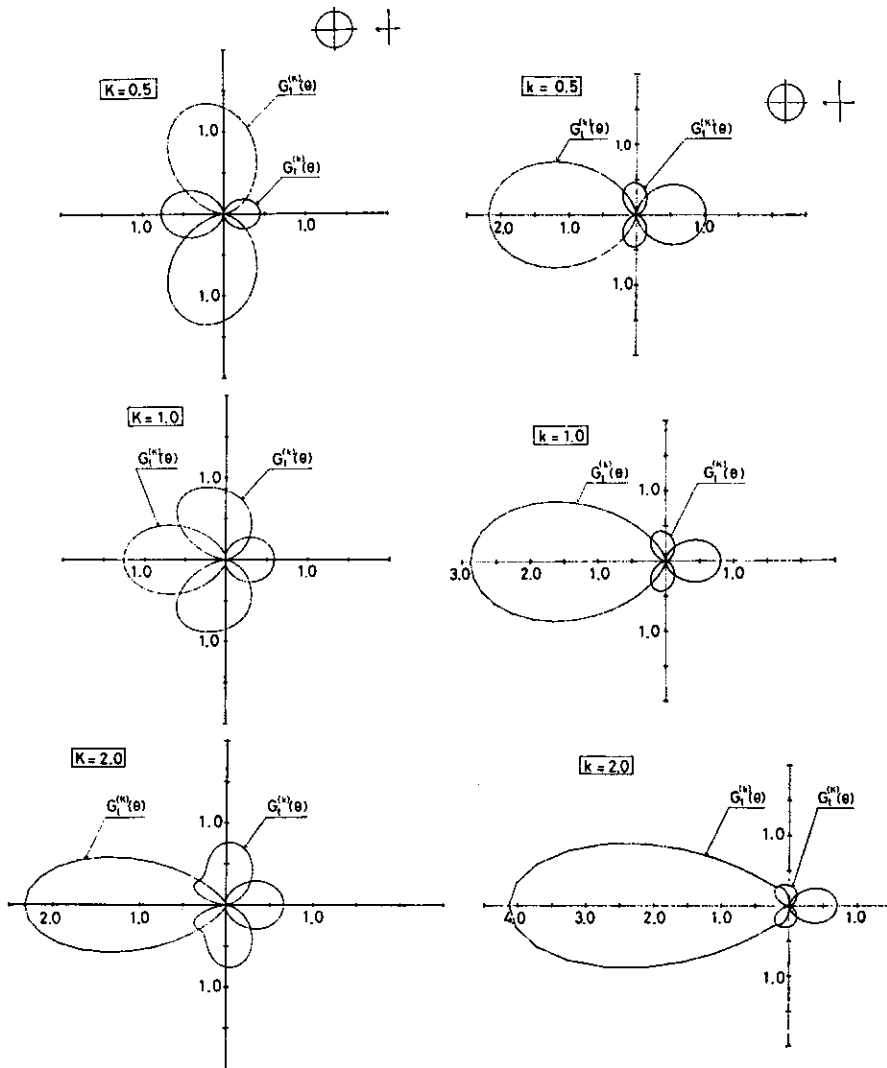


Fig. 9 Directional distribution of scattering wave from a rigid circular cylinder for various wave number

4. 結 論

無限に広がった一様な媒質の中の物体又は空孔が，平面弾性波を受けて振動する問題を2次元問題に限って取扱かい，次のような結論を導いた。

- i) 境界値問題を境界積分方程式によって数値的に解く場合に用いられる表現法を列举し，それぞれの特色について述べた。
- ii) 物体または空孔から発散する波は常に円筒波であるから，その各方向の振幅によって遠場の様子は正しく記述される。

それを水波理論の言葉でコッチン関数と呼ぶ事とし，その表現式を与えた。

- iii) 波長が充分長い時は 静的弾性問題に帰着する事を示し、具体的にその対応性を記した。

また、核関数についていえば、原点の近くでは静的問題のそれに全く一致するので、数値計算にあたってはこれを利用する事により容易に数値積分が実行できる。

- iv) 相反定理を導入し、それから境界値問題の変分原理を誘導した。

また特に水波理論でハスキントの定理として知られている平面入射波による強制力は、その物体が振動して放射する波の振幅つまりコッチン関数に比例するという関係を誘導した。この定理によって入射波の散乱問題を解かなくても、物体または空孔の放射波がわかっていれば入射波による振動は求められる。

- v) 放射波エネルギーをコッチン関数で表わした。また変位等の複素数表現の複素共役値が時間を逆にした時の振動になっている事に留意し、その間の関係式を与えた。

- vi) 最後に平面入射波によって振動する剛体または空孔の運動方程式の解を考え、特にそれらが放射波による減衰以外の減衰によって入射波エネルギーを吸収する問題を考え、それを最大にする条件を求めまた最大波動力吸収断面積を与える式を与えた。

また散乱断面積についても言及した。

これらの事を円境界の場合について数値計算例を示した。

以上、個々の式等それぞれ個別に文献に見られるものであるが、今回はつとめて統一的に記述し後の利用の便に資したいと考えたものである。

なおまた vi) 項については特にアンテナ理論の用語をかりてまとめて見たもので、相互の相似性は著るしいものがあり実用上の有用性が期待される。

参 考 文 献

- 1) Love, A. E. H.: "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", 4th ed., Cambridge, (1959).
- 2) Morse, P. M. and Feshbach, H.: "Methods in Theoretical Physics", McGraw-Hill, (1953).
- 3) 虫明康人: "アンテナ・電波伝搬", コロナ社, (1960).
- 4) Kupradze, V. D.: "Dynamical Problems in Elasticity", Progress in Solid Mechanics, Vol. 3 North-Holland Pub. Comp., Amsterdam, (1963).
- 5) Fung, Y. C.: "Foundations of Solid Mechanics", 大橋義夫, 村上澄男, 神谷紀正訳, "固体の力学/理論", 培風館, 昭和51年.
- 6) Pao, Y. H.: "Dynamical Stress Concentration in Elastic Plate", J. of Applied Mechanics, Vol. 29, No. 2, (1962), 299-305.
- 7) Banaugh, R. P. and Goldsmith, W.: "Diffraction of Steady Elastic Waves by Surface of Arbitrary Shape", J. of Applied Mechanics, Vol. 30, No. 4, (1963), 589-597.
- 8) Pao, Y. H. and Mow, C. C.: "Scattering of Compressional Waves by a Spherical Obstacle", J. of Applied Physics, Vol. 34, No. 3, (1963), 493-499.
- 9) Barratt, P. J. and Collins, W. D.: "The Scattering Cross-Section of an Obstacle in an Elastic Solid for Plane Harmonic Waves", Proc. Camb. Soc., 61, (1965), 969-981.
- 10) Thau, S. A.: "Radiation and Scattering From a Rigid Inclusion in Elastic Medium", J. of Applied Mechanics, Vol. 34, (1967), 509-511.
- 11) Cruse, T. A. and Rizzo, F. J.: "A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem I", J. of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 22, (1968), 244-259.
- 12) 丹羽義次, 小林昭一, 横田和男: "積分方程式による任意形状多数空洞周辺応力の解析", 土木学会論文報告集, 第195号, (1971年11月), 27-35.

- 13) Tan, T. H.: "Scattering of Elastic Waves by Elastically Transparent Obstacles (Integral-Equation Method)", Appl. Sci. Res., 31, (1975), 29-51.
- 14) Tan, T. H.: "Far-Field Radiation Characteristics of Elastic Waves and the Elastodynamic Radiation Condition", Appl. Sci. Res., 31, (1975), 363-375.
- 15) 別所正利: "逆時間ポテンシャルについて", 関西造船協会誌, 第159号, (昭和50年12月), 75-84.
- 16) Tan, T. H.: "Theorem of the Scattering and the Absorption Cross Section for Scattering of Plane, Time-Harmonic, Elastic Waves", J. Acoust. Soc. Am., Vol. 59, No. 6, (1976), 1265-1267.
- 17) Varatharajulu, V. and Pao, Y. H.: "Scattering Matrix for Elastic Waves. 1. Theory", J. Acoust. Soc. Am., Vol. 60, No. 3, (1976), 556-566.
- 18) Varatharajulu, V.: "Reciprocity Relations and Forward Amplitude Theorems for Elastic Waves", J. of Mathematical Physics, Vol. 18, No. 4, (1977), 537-543.
- 19) Mei, C. C.: "Extensions of Some Identities in Elastodynamics with Rigid Inclusions", J. Acoust. Soc. Am., 64 (5), (1978), 1514-1522.
- 20) 丹羽義次, 小林昭一, 北原道弘: "弾性固有値問題の積分方程式による解法", 土木学会論文報告集, 第285号, (1979年5月), 17-28.
- 21) 柴原正雄, 立野重明, 黒柳治: "任意形状弾性不連続による応力波の回折", 日本機械学会論文集A編, 45巻396号, (昭和54年8月), 894-901.
- 22) 別所正利, 河辺寛: "弾性論の境界値問題における特異点法について, 第1報 理論, 第2報 数値計算, 第3報 三次元軸対称問題", 関西造船協会誌, 第177号, (昭和55年6月), 99-106, 第178号, (昭和55年9月), 121-126, 第184号, (昭和57年3月), 105-111.
- 23) 丹羽義次, 小林昭一, 北原道弘: "積分方程式による平板の固有振動問題の解析", 土木学会論文報告集, 第304号, (1980年12月), 1-16.
- 24) 鐘江茂, 水野伸彦: "境界要素法による動的弾性問題の解析", 防衛大学校卒業論文, (昭和57年3月).
- 25) 別所正利: "水波工学入門", 日本造船学会誌, 634号, (昭和57年4月), 9-20.

付録A 核関数とその長波極限值

(1.8), (1.10) の γ, ω を次のようにとると,

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1(P, Q) &= \frac{i}{4} \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(KR) \\ \omega_1(P, Q) &= -\frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(kR) \end{aligned} \right\} \quad (A, 1)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_2(P, Q) &= \frac{i}{4} \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(KR) \\ \omega_2(P, Q) &= \frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(kR) \end{aligned} \right\} \quad (A, 2)$$

$$R = \overline{PQ}, \quad P \equiv (x, y), \quad Q \equiv (x', y')$$

変位は次式となる。

$$U_{ij}(P, Q) = \frac{(-1)^{i+j}}{k^2} \frac{\partial \omega_i(P, Q)}{\partial x_{i+1}} - \frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma_i(P, Q)}{\partial x_j} \quad (A, 3)$$

$$x_1 = x_3 \equiv x, \quad x_2 \equiv y$$

境界力は,

$$\left. \begin{aligned} \tau_{j1}(P, Q) &= -\omega_j(P, Q) \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{k^2}{K^2} \gamma_j(P, Q) \frac{\partial x}{\partial n} \\ &\quad - 2 \frac{\partial}{\partial s} U_{j2}(P, Q) \end{aligned} \right\}$$

一様媒質の無限領域における 2 次元弾性波の放射散乱について

$$\left. \begin{aligned} \tau_{j2}(P, Q) = \omega_j(P, Q) \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{2}{K^2} \gamma_j(P, Q) \frac{\partial y}{\partial n} \\ + 2 \frac{\partial}{\partial s} U_{j1}(P, Q) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A}, 4)$$

これらを書き下すと,

$$\left. \begin{aligned} U_{11}(P, Q) &= \frac{i}{4} H_0^{(2)}(kR) + \frac{i}{4k^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR)] \\ U_{12}(P, Q) &= U_{21}(P, Q) = \frac{i}{4k^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR)] \\ U_{22}(P, Q) &= \frac{i}{4} H_0^{(2)}(kR) + \frac{i}{4k^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR)] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A}, 5)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{11}(P, Q) &= \frac{i}{4} \left[\frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(KR) \right] \\ &\quad - \frac{i}{2k^2} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x \partial y} [H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR)] \\ \tau_{12}(P, Q) &= -\frac{i}{4} \left[\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(KR) \right] \\ &\quad + \frac{i}{4} \frac{\partial}{\partial s} \left[H_0^{(2)}(kR) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR)\} \right] \\ \tau_{21}(P, Q) &= \frac{i}{4} \left[\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(KR) \right] \\ &\quad - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left[H_0^{(2)}(kR) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR)\} \right] \\ \tau_{22}(P, Q) &= \frac{i}{4} \left[\frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(KR) \right] \\ &\quad + \frac{i}{2k^2} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x \partial y} \{H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR)\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A}, 6)$$

これらの式で波長が充分長いとして (4.1) の近似値を代入すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} U_{11}(P, Q) &\doteq \frac{1}{2\pi} \log R - \frac{1+\nu}{16\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (R^2 \log R) \\ U_{12}(P, Q) &= U_{21}(P, Q) \doteq -\frac{1+\nu}{16\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (R^2 \log R) \\ U_{22}(P, Q) &\doteq \frac{1}{2\pi} \log R - \frac{1+\nu}{16\pi} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (R^2 \log R) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A}, 7)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{11}(P, Q) &\doteq \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \log R + \frac{1+\nu}{8\pi} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x \partial y} (R^2 \log R) \\ \tau_{12}(P, Q) &\doteq \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} \log R - \frac{1+\nu}{8\pi} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x^2} (R^2 \log R) \\ \tau_{21}(P, Q) &\doteq -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} \log R + \frac{1+\nu}{8\pi} \frac{\partial^3}{\partial s \partial y^2} (R^2 \log R) \\ \tau_{22}(P, Q) &\doteq \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \log R - \frac{1+\nu}{8\pi} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x \partial y} (R^2 \log R) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A}, 8)$$

なお定数項は省略してある。

これは静的弾性問題の核関数である。

付録 B 円境界の放射散乱問題

半径 1 の円境界の解析解を以下に記し、その数値を Table 1, 2 に示す。

1. 放射問題

a) 円周上で $u_r = \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix}$, $u_\theta = 0$ の振動

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= K^2 A_n H_n^{(2)}(Kr) \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \\ \omega &= k^2 B_n H_n^{(2)}(kr) \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ -\cos n\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 1)$$

とおくと、これによる変位は

$$\begin{aligned} u_r|_{r=1} &= \frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \\ &= \{n B_n H_n^{(2)}(k) - k A_n H_n^{(2)'}(k)\} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \\ u_\theta|_{r=1} &= -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{1}{K^2} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \\ &= \{k B_n H_n^{(2)'}(k) - n A_n H_n^{(2)}(K)\} \begin{pmatrix} -\sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

なる故

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{k H_n^{(2)'}(k)}{\Delta_n} \\ B_n &= \frac{n H_n^{(2)}(K)}{\Delta_n} \\ \Delta_n &= n^2 H_n^{(2)}(k) H_n^{(2)}(K) - k K H_n^{(2)'}(k) H_n^{(2)'}(K) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 2)$$

コッチン関数は

$$\left. \begin{aligned} G_1(\theta) &= 4i^{n-1} K^2 A_n \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} = 4 \frac{i^{n-1} K^2 k H_n^{(2)'}(k)}{\Delta_n} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \\ F_1(\theta) &= 4i^{n-1} k^2 B_n \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ -\cos n\theta \end{pmatrix} = 4 \frac{i^{n-1} n k^2 H_n^{(2)}(K)}{\Delta_n} \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ -\cos n\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 3)$$

境界力

$$\left. \begin{aligned} \tau_r &= \frac{k^2}{K^2} \gamma - 2 \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - 2 u_r = -z_n^{(1,1)} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \\ \tau_\theta &= \omega + 2 \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - 2 u_\theta = -z_n^{(1,2)} \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ -\cos n\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 4)$$

$$\left. \begin{aligned} z_n^{(1,1)} &= 2 - k^2 A_n H_n^{(2)}(K) = 2 - \frac{k^3 H_n^{(2)}(K) H_n^{(2)'}(k)}{\Delta_n} \\ z_n^{(1,2)} &= 2n - k^2 B_n H_n^{(2)}(k) = n \left[2 - \frac{k^2 H_n^{(2)}(k) H_n^{(2)}(K)}{\Delta_n} \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 5)$$

インピーダンスは次のように定義される。

一様媒質の無限領域における2次元弾性波の放射散乱について

$K=0.1$

Table 1 Coefficients $Z_n^{(i,j)}$

n	$z_n^{(1,1)}$		$z_n^{(1,2)} = z_n^{(2,1)}$		$z_n^{(2,2)}$	
	real	imag.	real	imag.	real	imag.
0	1.9164	0.0534	0.0	0.0	1.9392	0.0508
1	2.2376	0.2019	1.7362	-0.2007	2.2545	0.1999
2	3.5039	0.0336	2.4824	-0.0336	3.5138	0.0335
3	5.0922	0.0003	2.8987	-0.0003	5.0987	0.0003
4	6.6556	0.0000	3.3376	0.0000	6.6605	0.0000
5	8.2142		3.7804		8.2181	
6	9.7714		4.2241		9.7746	
7	11.3280		4.6681		11.3310	
8	12.8840		5.1123		12.8870	
9	14.4400		5.5565		14.4430	
10	15.9960		6.0008		15.9980	

$K=0.5$

n	$z_n^{(1,1)}$		$z_n^{(1,2)} = z_n^{(2,1)}$		$z_n^{(2,2)}$	
	real	imag.	real	imag.	real	imag.
0	1.3064	1.0019	0.0	0.0	1.6793	0.7238
1	1.9067	0.8468	1.4422	-0.6523	2.2605	0.6827
2	3.0618	0.5268	2.5782	-0.5026	3.3202	0.4838
3	4.6338	0.1267	3.1313	-0.1233	4.8068	0.1210
4	6.3713	0.0082	3.4560	-0.0081	6.4961	0.0080
5	8.0157	0.0002	3.8471	-0.0002	8.1143	0.0002
6	9.6160	0.0000	4.2700	0.0000	9.6977	0.0000
7	11.1991		4.7030		11.2690	
8	12.7740		5.1403		12.8350	
9	14.3442		5.5799		14.3991	
10	15.9110		6.0208		15.9600	

$K=1.0$

n	$z_n^{(1,1)}$		$z_n^{(1,2)} = z_n^{(2,1)}$		$z_n^{(2,2)}$	
	real	imag.	real	imag.	real	imag.
0	0.8342	2.7716	0.0	0.0	1.5741	1.7146
1	1.1289	2.3338	0.9290	-0.8666	2.0280	1.4261
2	2.1916	1.5296	2.2831	-1.1777	3.1598	1.0891
3	3.6340	0.8473	3.3591	-0.7774	4.3863	0.7204
4	5.4024	0.2657	3.8714	-0.2546	5.9480	0.2440
5	7.3183	0.0351	4.1177	-0.0342	7.7320	0.0334
6	9.1006	0.0022	4.4359	-0.0022	9.4364	0.0022
7	10.7840	0.0001	4.8212	-0.0001	11.0690	0.0001
8	12.42400	0.0000	5.2326	0.0000	12.6710	0.0000
9	14.0390		5.6557		14.2580	
10	15.6410		6.0851		15.8371	

$K=2.0$

n	$z_n^{(1,1)}$		$z_n^{(1,2)} = z_n^{(2,1)}$		$z_n^{(2,2)}$	
	real	imag.	real	imag.	real	imag.
0	0.4844	6.4760	0.0	0.0	1.5236	3.6491
1	0.4485	6.2206	0.3895	-0.6562	1.6989	3.3520
2	0.4697	5.2991	1.0501	-1.5110	2.4262	2.5624
3	1.1983	3.7329	2.4421	-2.1682	3.8353	1.9220
4	2.7336	2.3927	3.9660	-1.9196	5.1707	1.6117
5	4.5257	1.3435	4.9573	-1.1972	6.4794	1.0704
6	6.6041	0.5179	5.3876	-0.4815	8.1456	0.4478
7	8.8131	0.1141	5.5232	-0.1084	10.0580	0.1031
8	10.8600	0.0147	5.7144	-0.0142	11.9090	0.0137
9	12.7320	0.0013	6.0159	-0.0012	13.6450	0.0012
10	14.5072	0.0001	6.3754	-0.0001	15.3173	0.0001

Table 2 Coefficients G and F $K=0.1$

n	G_1		F_1		G_2		G_2	
	real	imag.	real	imag.	real	imag.	real	imag.
0	-0.0619	-0.0005	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.2113	-0.0056
1	-0.0360	0.0418	0.2346	-0.2920	0.0359	-0.0464	-0.2334	0.2815
2	-0.1347	-0.0003	0.1654	0.0037	0.0136	0.0003	-0.1650	-0.0037
3	0.0000	-0.0007	0.0000	0.0159	0.0000	0.0007	0.0000	-0.0159
4	0.0000	0.0000	-0.0008	0.0000		0.0000	0.0007	0.0000
5								

 $K=0.5$

n	G_1		F_1		G_2		F_2	
	real	imag.	real	imag.	real	imag.	real	imag.
0	-1.3233	-0.2179	0.0	0.0	0.0	0.0	-3.5707	-1.7799
1	-0.6288	-0.1760	3.5514	-0.8880	0.5627	-0.3406	-3.1018	-0.3046
2	-0.2224	-0.1119	3.0366	1.2667	0.2980	0.1072	-2.8175	-1.2137
3	0.0034	-0.0716	-0.0744	1.6418	-0.0034	0.0779	0.0730	-1.6064
4	0.0100	0.0000	-0.4228	-0.0008	-0.0104	0.0000	0.4183	0.0008
5	0.0006	0.0009	0.0000	-0.0682	0.0000	-0.0009	0.0000	0.0678
6	-0.0001	0.0000	0.0081	0.0000	0.0001	0.0000	-0.0081	0.0000
7	0.0000		0.0000	0.0008			0.0000	-0.0008
8			-0.0001				0.0001	0.0000
9			0.0000				0.0000	

 $K=1.0$

n	G_1		F_1		G_2		F_2	
	real	imag.	real	imag.	real	imag.	real	imag.
0	-3.8869	-2.1895	0.0	0.0	0.0	0.0	-3.6581	-11.7230
1	-2.0468	-2.4273	8.4059	3.3366	1.6324	-0.6473	-2.9638	-8.8816
2	-5.8655	-1.0632	5.5470	9.4819	1.1265	0.8938	-3.0872	-7.8063
3	0.1674	-0.3202	-3.0958	7.9589	-0.1544	0.5179	2.8530	-7.1871
4	0.1168	0.0091	-4.8053	-0.3338	-0.1418	-0.0088	4.5951	0.3199
5	-0.0002	0.0233	0.0109	-1.7555	0.0002	-0.0258	-0.0106	1.7107
6	-0.0032	0.0000	0.4436	0.0001	0.0034	0.0000	-0.4361	-0.0001
7	0.0000	-0.0003	0.0000	0.0866	0.0000	0.0003	0.0000	-0.0855
8		0.0000	-0.0139	0.0000		0.0000	0.0137	0.0000
9			0.0000	-0.0019			0.0000	0.0019
10			0.0002	0.0000			-0.0002	0.0000

 $K=2.0$

n	G_1		F_1		G_2		F_2	
	real	imag.	real	imag.	real	imag.	real	imag.
0	-2.4886	-13.4100	0.0	0.0	0.0	0.0	35.6940	-3.1446
1	0.7605	-12.4680	-4.9068	15.9150	3.3185	0.6845	32.2300	0.0553
2	6.3608	-6.1739	-21.1430	21.3290	2.9112	4.4607	23.2980	3.3501
3	3.6423	1.2288	-33.6291	1.2432	-2.5757	3.3110	20.9272	4.7723
4	0.9090	0.9922	-19.1260	-21.5170	-1.6568	-0.8135	14.7751	17.5234
5	-0.1547	0.2904	7.2802	-20.4550	0.1381	-0.5799	-6.4959	18.1680
6	-0.1122	-0.0126	13.4370	1.2229	0.1611	0.0117	-12.4880	-1.1372
7	0.0005	-0.0287	-0.0930	6.3337	-0.0005	0.0357	0.0885	-6.0210
8	0.0055	0.0000	-2.2774	-0.0035	-0.0063	0.0000	2.1941	0.0033
9	0.0000	0.0008	0.0001	-0.6667	0.0000	-0.0009	-0.0001	0.6479
10	-0.0001	0.0000	0.1663	0.0000	0.0005	0.0000	-0.1625	0.0000

一様媒質の無限領域における 2 次元弾性波の放射散乱について

$$\left. \begin{aligned} G\tau_r &= -i\omega Z_n^{(1,1)} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \\ G\tau_\theta &= -i\omega Z_n^{(1,2)} \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ -\cos n\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 6)$$

それ故

$$\left. \begin{aligned} Z_n^{(1,1)} &= G \frac{z_n^{(1,1)}}{i\omega} \\ Z_n^{(1,2)} &= G \frac{z_n^{(1,2)}}{i\omega} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 7)$$

b) 円周上で

$$u_r = 0, \quad u_\theta = \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix}$$

の振動

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= K^2 C_n H_n^{(2)}(Kr) \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{pmatrix} \\ \omega &= k^2 D_n H_n^{(2)}(kr) \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 8)$$

とおくと、これによる変位は

$$\left. \begin{aligned} u_r|_{r=1} &= \{-nD_n H_n^{(2)}(k) + KC_n H_n^{(2)'}(K)\} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{pmatrix} \\ u_\theta|_{r=1} &= \{-kD_n H_n^{(2)'}(k) + nC_n H_n^{(2)}(K)\} \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 9)$$

なる故

$$\left. \begin{aligned} C_n &= \frac{nH_n^{(2)}(k)}{\Delta_n} \\ D_n &= \frac{KH_n^{(2)'}(K)}{\Delta_n} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 10)$$

コッチン関数

$$\left. \begin{aligned} G_2(\theta) &= 4i^{n-1} \frac{nK^2 H_n^{(2)}(k)}{\Delta_n} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ -\sin n\theta \end{pmatrix} \\ F_2(\theta) &= 4i^{n-1} \frac{k^2 KH_n^{(2)'}(K)}{\Delta_n} \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 11)$$

境界力

$$\left. \begin{aligned} \tau_r &= -z_n^{(2,1)} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \\ \tau_\theta &= -z_n^{(2,2)} \begin{pmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 12)$$

$$\left. \begin{aligned} z_n^{(2,1)} &= z_n^{(1,2)} \\ z_n^{(2,2)} &= 2 - \frac{k^2 KH_n^{(2)}(k) H_n^{(2)'}(K)}{\Delta_n} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 13)$$

c) 円が剛体で x 軸にそって振動する場合

$$u_r = \cos \theta, \quad u_\theta = -\sin \theta \quad (\text{B}, 14)$$

となるから、境界力は

$$\left. \begin{aligned} \tau_r &= -(z_1^{(1,1)} - z_1^{(2,1)}) \cos \theta \\ \tau_\theta &= -(z_1^{(1,2)} - z_1^{(2,2)}) \sin \theta \\ \frac{X}{G} \int_0^{2\pi} (\tau_r \cos \theta - \tau_\theta \sin \theta) d\theta &= -\pi [z_1^{(1,1)} + z_1^{(2,2)} - 2z_1^{(1,2)}] \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 15)$$

コッチン関数

$$\left. \begin{aligned} G(\theta) &= \frac{4}{A_1} \{K^2 k H_1^{(2)'}(k) - K^2 H_1^{(2)}(k)\} \cos \theta \\ F(\theta) &= \frac{4}{A_1} \{k^2 H_1^{(2)}(K) - k^2 K H_1^{(2)'}(K)\} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 16)$$

2. 散乱問題

a) 固定境界による縦波の散乱

単位振幅の縦波では x の正の方向から来るものを考えれば充分であるから、

$$\gamma_0 = iK e^{iKx} = iK \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n J_n(Kr) \cos n\theta \quad (\text{B}, 17)$$

ここに

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = 2 \quad \text{for } n \geq 1$$

これによると C 上の変位、境界力は

$$\left. \begin{aligned} u_r^{(0)} &= -i \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n J_n'(K) \cos n\theta \\ u_\theta^{(0)} &= \frac{i}{K} \sum_{n=0}^{\infty} n i^n \varepsilon_n J_n(K) \sin n\theta \\ \tau_r^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \left[\frac{k^2}{K} J_n(K) + 2J_n'(K) - \frac{2n^2}{K} J_n(K) \right] \cos n\theta \\ \tau_\theta^{(0)} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \left[nJ_n'(K) - \frac{n}{K} J_n(K) \right] \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 18)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_r^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \left[\frac{k^2}{K} J_n(K) + 2J_n'(K) - \frac{2n^2}{K} J_n(K) \right] \cos n\theta \\ \tau_\theta^{(0)} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \left[nJ_n'(K) - \frac{n}{K} J_n(K) \right] \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 19)$$

境界条件は、

$$u_r = -u_r^{(0)}, \quad u_\theta = -u_\theta^{(0)} \quad \text{on } C \quad (\text{B}, 20)$$

であるから、前項の結果を適用して直ちに解は求まる。

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= K^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \left[A_n J_n'(K) - \frac{n}{K} J_n(K) C_n \right] H_n^{(2)}(Kr) \cos n\theta \\ &= K^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1} \varepsilon_n}{A_n} \left[k J_n'(K) H_n^{(2)'}(k) - \frac{n^2}{K} J_n(K) H_n^{(2)}(k) \right] \\ &\quad \times H_n^{(2)}(Kr) \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 21)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega &= k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \left[J_n'(K) B_n - \frac{n}{K} J_n(K) D_n \right] H_n^{(2)}(kr) \sin n\theta \\ &= \frac{-2k^2}{\pi K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \varepsilon_n i^n}{A_n} H_n^{(2)}(kr) \sin n\theta \\ \Gamma|_{r=1} &= \gamma^{(0)} + \gamma|_{r=1} \\ &= \frac{2ikK}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \frac{H_n^{(2)'}(k)}{A_n} \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 22)$$

境界力は、

一様媒質の無限領域における2次元弾性波の放射散乱について

$$\left. \begin{aligned} \tau_r &= -\frac{k^2}{K^2} \Gamma|_{r=1} \\ \tau_\theta &= \omega|_{r=1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 23)$$

例えば x 方向の力は

$$\begin{aligned} \frac{X}{G} &= \int_0^{2\pi} (\tau_r \cos \theta - \tau_\theta \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{4k^2}{iK\Delta_1} \{kH_1^{(2)'}(k) - H_1^{(2)}(k)\} \end{aligned} \quad (\text{B}, 24)$$

これは (B. 16) の $G(0)$ に確かに比例している。

コッチン関数

$$\left. \begin{aligned} G(\theta) &= 4K \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n (-1)^n}{\Delta_n} [kJ_n' H_n^{(2)'}(k) - n^2 J_n(K) H_n^{(2)}(k)] \cos n\theta \\ F(\theta) &= \frac{8ik^2}{\pi K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\varepsilon_n (-1)^n}{\Delta_n} \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 25)$$

b) 固定境界による横波の散乱

単位振幅の横波とそれによる C 上の変位と境界力

$$\omega_0 = ike^{ikx} = k \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} \varepsilon_n J_n(kr) \cos n\theta \quad (\text{B}, 26)$$

$$\left. \begin{aligned} u_r^{(0)} &= -\frac{1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} n i^{n+1} \varepsilon_n J_n(kr) \sin n\theta \\ u_\theta^{(0)} &= -\sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} \varepsilon_n J_n'(kr) \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 27)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_r^{(0)} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \left[\frac{n}{k} J_n(k) - n J_n'(k) \right] \sin n\theta \\ \tau_\theta^{(0)} &= \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} \varepsilon_n \left[k J_n(k) - \frac{2n^2}{k} J_n(k) + 2 J_n'(k) \right] \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 28)$$

境界条件は

$$u_r = -u_r^{(0)}, \quad u_\theta = -u_\theta^{(0)}$$

であるから、解は

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= K^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \left[A_n J_n(k) \frac{n}{k} - C_n J_n'(k) \right] \sin n\theta \\ &= \frac{2K^2}{\pi k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\varepsilon_n i^n}{\Delta_n} H_n^{(2)}(Kr) \sin n\theta \\ \omega &= k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^{n+1} \left[-\frac{n}{k} B_n J_n(k) + D_n J_n'(k) \right] \cos n\theta \\ &= k^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n i^{n+1}}{\Delta_n} \left[KH_n^{(2)'}(K) J_n'(k) - \frac{n^2}{k^2} H_n^{(2)}(K) J_n(k) \right] \\ &\quad \times H_n^{(2)}(kR) \cos n\theta \\ \Omega &= \omega^{(0)} + \omega|_{r=1} = -\frac{2kK}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n i^n}{\Delta_n} H_n^{(2)'}(K) \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 29)$$

境界力

$$\tau_r = \frac{k^2}{K^2} \gamma|_{r=1}, \quad \tau_\theta = \varrho|_{r=1} \quad (\text{B}, 30)$$

コッチン関数

$$\left. \begin{aligned} G(\theta) &= \frac{8K^2}{\pi k i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \varepsilon_n (-1)^n}{\Delta_n} \sin n\theta \\ F(\theta) &= 4k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n (-1)^n}{\Delta_n} [k H_n^{(2)'}(K) J_n'(k) - n^2 H_n^{(2)}(K) J_n(k)] \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 31)$$

 x 方向および θ 方向力

$$\left. \begin{aligned} \frac{X}{G} &= \int_0^{2\pi} (\tau_r \cos \theta - \tau_\theta \sin \theta) d\theta = 0 \\ \frac{Y}{G} &= \int_0^{2\pi} (\tau_r \sin \theta + \tau_\theta \cos \theta) d\theta \\ &= \frac{4ki}{\Delta_1} [H_1^{(2)}(K) - K H_1^{(2)'}(K)] \\ &= 4kK \frac{H_2^{(2)}(K)}{\Delta_1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 32)$$

c) 空孔による縦波の散乱

境界上の変位が

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n M_n \cos n\theta \\ u_\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n N_n \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 33)$$

とすると, (B.4), (B.12) より

$$\left. \begin{aligned} \tau_r &= - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n [z_n^{(1,1)} M_n + z_n^{(2,1)} N_n] \cos n\theta \\ \tau_\theta &= - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n [z_n^{(1,2)} M_n + z_n^{(2,2)} N_n] \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 34)$$

となる。これらの力が (B.23) による波の力と平衡しなければならないから,

$$\left. \begin{aligned} -\frac{2k^2}{\pi k} A_n &= -\frac{2k^3}{\pi K} \frac{H_n^{(2)'}(k)}{\Delta_n} = z_n^{(1,1)} M_n + z_n^{(2,1)} N_n \\ -\frac{2k^2}{\pi k} C_n &= -\frac{2k^2}{\pi K} \frac{n H_n^{(2)}(k)}{\Delta_n} = z_n^{(1,2)} M_n + z_n^{(2,2)} N_n \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 35)$$

したがって,

$$\left. \begin{aligned} M_n &= \frac{1}{\Delta_n D_n'} \left(\frac{-2k^2}{\pi K} \right) [k H_n^{(2)'}(k) z_n^{(2,2)} - n H_n(k) z_n^{(1,2)}] \\ N_n &= \frac{1}{\Delta_n D_n'} \left(\frac{-2k^2}{\pi K} \right) [n H_n^{(2)}(k) z_n^{(1,1)} - k H_n^{(2)'}(k) z_n^{(1,2)}] \\ D_n' &= z_n^{(1,1)} z_n^{(2,2)} - z_n^{(1,2)} z_n^{(2,1)} \\ M_n &= -\frac{2k^2}{\pi K \Delta_n D_n'} [(k^2 - 2n^2) H_n^{(2)}(k) + 2k H_n^{(2)'}(k)] \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 36)$$

一様媒質の無限領域における2次元弾性波の放射散乱について

$$N_n = -\frac{4nk^2}{\pi K \Delta_n D_n'} [H_n^{(2)}(k) - kH_n^{(2)'}(k)] \quad \Bigg\}$$

そうすると,

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= K^2 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n [A_n M_n + C_n N_n] H_n^{(2)}(Kr) \cos n\theta \\ &= -\frac{2k^2 K}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \varepsilon_n H_n^{(2)}(Kr) \cos n\theta}{\Delta_n^2 D_n'} [kH_n^{(2)'}(k) \{(k^2 - 2n^2) H_n^{(2)}(k) \\ &\quad + 2kH_n^{(2)'}(k)\} + 2n^2 H_n^{(2)}(k) \{H_n^{(2)}(k) - kH_n^{(2)'}(k)\}] \\ \omega &= k^2 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n H_n^{(2)}(kr) \sin \theta [B_n M_n + D_n N_n] \\ &= -\frac{2k^4}{\pi K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \varepsilon_n H_n^{(2)}(kr) \sin \theta}{\Delta_n^2 D_n'} [nH_n^{(2)}(K) \{(k^2 - 2n^2) H_n^{(2)}(k) \\ &\quad + 2kH_n^{(2)'}(k)\} + 2nKH_n^{(2)'}(K) \{H_n^{(2)}(k) - kH_n^{(2)'}(k)\}] \end{aligned} \right\} \quad (\text{B, 37})$$

コッチン関数

$$\left. \begin{aligned} G(\theta) &= \frac{4K^2}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-1)^n [A_n M_n + C_n N_n] \cos n\theta \\ F(\theta) &= \frac{4k^2}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-1)^n [B_n M_n + D_n N_n] \sin n\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B, 38})$$

d) 空孔による横波の散乱

境界上の変位を

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n P_n \sin n\theta \\ u_\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n Q_n \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B, 39})$$

とおくと, これによる境界力は (B. 4), (B. 12) より,

$$\left. \begin{aligned} \tau_r &= -\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n \sin n\theta [P_n z_n^{(1,1)} - Q_n z_n^{(2,1)}] \\ \tau_\theta &= -\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n \cos n\theta [-P_n z_n^{(1,2)} + Q_n z_n^{(2,2)}] \end{aligned} \right\} \quad (\text{B, 40})$$

平衡方程式は (B. 29), (B. 30) より

$$\left. \begin{aligned} \frac{2k}{\pi} B_n &= \frac{2k}{\pi} \frac{nH_n^{(2)}(K)}{\Delta_n} = P_n z_n^{(1,1)} - Q_n z_n^{(2,1)} \\ -\frac{2k}{\pi} D_n &= -\frac{2kK}{\pi} \frac{H_n^{(2)'}(K)}{\Delta_n} = -P_n z_n^{(1,2)} + Q_n z_n^{(2,2)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B, 41})$$

したがって,

$$\left. \begin{aligned} P_n &= \frac{1}{\Delta_n D_n'} \frac{2k}{\pi} [nH_n^{(2)}(K) z_n^{(2,2)} - KH_n^{(2)'}(K) z_n^{(1,1)}] \\ &= \frac{4nk}{\pi \Delta_n D_n'} [H_n^{(2)}(K) - KH_n^{(2)'}(K)] \\ Q_n &= \frac{1}{\pi \Delta_n D_n'} \frac{2k}{\pi} [nH_n^{(2)}(K) z_n^{(1,2)} - KH_n^{(2)'}(K) z_n^{(2,2)}] \\ &= \frac{-2k}{\pi \Delta_n D_n'} [(k^2 - 2n^2) H_n^{(2)}(K) + 2KH_n^{(2)'}(K)] \end{aligned} \right\} \quad (\text{B, 42})$$

これより、境界力とコッチン関数は

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= K^2 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \epsilon_n H_n^{(2)}(Kr) \sin n\theta [A_n P_n - C_n Q_n] \\ \omega &= k^2 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \epsilon_n H_n^{(2)}(kr) \cos n\theta [-B_n P_n + D_n Q_n] \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 43)$$

$$\left. \begin{aligned} G(\theta) &= \frac{4K^2}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-1)^n (A_n P_n - C_n Q_n) \sin n\theta \\ F(\theta) &= \frac{4k^2}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-1)^n (-B_n P_n + D_n Q_n) \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{B}, 44)$$

On the Radiation and Diffraction of the Two Dimensional Elastic Waves in an Infinite Domain of Homogeneous Medium

By Masatoshi BESSHO* and Hiroshi KAWABE**

(Received April 28, 1982)

Abstract

The theory of vibration of a solid body or a cavity in an infinite domain of elastic medium by in-coming plane waves are treated and summarized as follows;

- i) Some formulations of the boundary integral equation to solve its boundary value problem are discussed and proposed.
- ii) The far field property are described introducing so-called Kochin's function, that is, the amplitude of radiating cylindrical wave.
- iii) The long wave approximation are identified to the static problem of elasticity.
- iv) The reciprocity and the variational principle of boundary value problems are described.
- v) The complex conjugate of the displacement or stress in the field are represented as the sum of the ones of the original vibration and the diffraction term.
- vi) Formulating the equation of motion by making use of Haskind's relation which says that the wave-exciting force is proportional to the amplitude of radiating wave, the most favourable condition to absorb wave energy are obtained and its maximum absorbing sectional area of wave power are formulated.
- vii) Various numerical examples are shown for a circular cylindrical boundary.

* Professor Dept. of Mechanical Engineering, The National Defense Academy.

** Research Associate Dept. of Mechanical Engineering, The National Defense Academy.

2次元動揺滑走板の安定性について

別 所 正 利*・鈴木 勝 雄**

(昭和61年9月8日受理)

1. 序 論

高速艇や水上飛行機は高速で航行するとポーポイズングと呼ばれる、縦揺れ、上下揺れの連成した自動動揺をする場合があることが知られており、場合によっては極めて危険な状態になる。

ポーポイズングに関する研究は水上飛行機について始められ、その成果がPerring¹⁾によって初めて高速艇に応用された。図1はその概念図²⁾であるが、図中Aの線が通常の水上演機の領域であり、高速艇の領域はBで表わされる。高速艇ではトリムが大きい場合、またはある高速域でポーポイズングを始めることになる。

Martin³⁾はストリップ法を用いて特性方程式をたて安定判別をしてDay and Haarg⁴⁾の実験値とよく一致する事を報告している。一方Mottard⁵⁾はアスペクト比が大変大きい場合、滑走板が自動動揺を起こす事を報告し考察している。

これについてはOgilvie and Shen⁶⁾及びBessho and Komatsu⁷⁾によって、浸水長の周期的変化により、ある小さいreduced frequency 以下で上下揺れの減衰が負になることが示され、それによってほぼ実験を説明できると述べている。また別所⁸⁾は定常滑走板の速度による浸水長、トリムの変化を調べてある速度以上では準静的に安定な滑走が望めないことを見出し、鈴木、大迫¹⁰⁾の定常滑走板に関する別の解析法でも同様な結果が現われ、実験¹¹⁾でもそのような不安定が観測された。

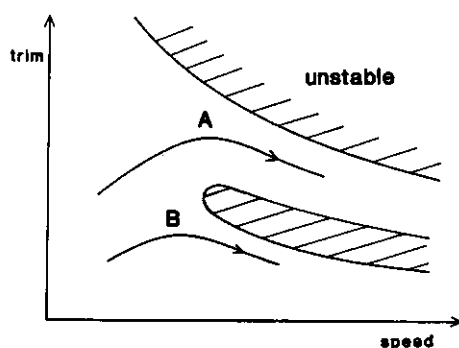


Fig. 1 Zone of porpoising

Mottard⁵⁾はこの前者は滑走板が水をせき止めて、板の前方にたまるのが原因であると云っているが、この後者についても物理的には同じように考えられる。それ故、共にアスペクト比が大きい場合のみ現われる現象と考えてよいように思われる。

これらの事情を確かめるには、重力を考慮に入れた(上記文献6,7は重力を0としている)境界値問題を解いて流体力を求め、特性方程式をたて、安定判別をすれば良い訳であるが、現段階では、そのような3次元問題を解くには時期尚早である。

* 防衛大学校機械工学教室 教授

** 防衛大学校機械工学教室 講師

そこで2次元問題について取扱ってみた。2次元動揺滑走板問題を解析するには、別所の浅吃水船理論⁹⁾を用いることができる。しかしながら、この理論では、Kuttaの流出条件を満たす解は得ることができない。そこで、定常問題で開発された前端に吹き出し特異点を置く方法¹⁰⁾にならって、強さが周期的に振動する吹き出し特異点を前端に置く方法を採用した。この特異点は前端付近に水が盛り上ってたまり、それが又後方に流出するといった現象に対応していると解釈でき、Mottard³⁾のポーボイジング発生の原因と考えた現象を表現していると考えられる。

この考え方の難点はポーボイジングによる浸水長変化の影響を直接表現できない点にある。しかしながら、定常問題では、こうした方法は安全側（低速側）を示すことに留意しておけば十分だろう。上の解析法では、安定判別のための特性方程式は、その各係数が動揺周波数に依存することになるので、従来用いられてきたRouth-Hurwitzの方法は使用出来ず、Nyquistの方法に依らねばならない。

2. 2次元動揺滑走板理論と安定判別

2-1. 動揺滑走板理論

2次元の浅吃水船が動揺しながら航走する場合を考える。この問題は一樣流れの水面に圧力分布が作用する流れで近似できる。この場合、解の重ね合わせが可能であるから、定常な圧力分布は除外して考えて良い。云い換えれば、動揺特性には艇の形状は1次的には影響を与えない（艇の形状は浸水長などを決定するが、浸水長をベースとするフルード数を取れば直接は関連しない）。

従って、周期的な圧力分布が作用する場合のみを考えれば良い。座標系を図2のように取る。滑走板まわりの流れを UL_w で無次元化した複素ポテンシャル $F(z, t)$ で表わす。

$$F(z; t) = -z + f_w(z; t) \quad (1)$$

ここで、 $z = x + iy$,

$$f_w(z; t) = \phi_w(z; t) + i\psi_w(z; t).$$

攪乱が周期的となるため、その円周数を ω_e とすると複素ポテンシャル $f_w(z; t)$ は以下と書ける。

$$f_w(z; t) = \text{Re} \{ j f(z) e^{-j\omega_e t} \} \quad (2)$$

ここで j は虚数単位であるが、 i とは別種のものとし互に干渉し合わないものとする。

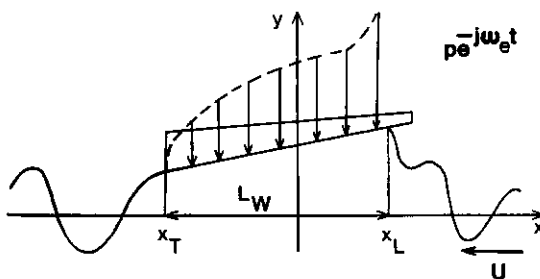


Fig. 2 Problem of oscillating planning plate

2次元動揺滑走板の安定性について

また、以降では、 $e^{\pm j\omega_e t}$ の存在する項では、 j に関する実部のみを取ることとし、 Re_j の記号は省略する。

さて(2)式の $f(z)$ の振動 $e^{-j\omega_e t}$ に関する同位相(in phase)、異位相(out of phase)の成分を、おのこの $f_c(z)$, $f_s(z)$ とおけば(2)式で表わされた複素速度ポテンシャルは、

$$\begin{aligned} f_\omega(z; t) &= [f_c(z) + j f_s(z)] e^{-j\omega_e t}, \\ &= [f_c(z) - j f_s(z)] e^{j\omega_e t}. \end{aligned} \quad (2)'$$

以下の量も同様に表わされるものとする。速度ポテンシャル、流れ関数については

$$\left. \begin{aligned} \phi_\omega(z; t) &= \phi(z) e^{-j\omega_e t}, \\ \Psi_\omega(z; t) &= \Psi(z) e^{-j\omega_e t}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ρU^2 で無次元化した圧力分布、水面形状も同様にして次のようにしておく。

$$p_\omega(z; t) = p(x) e^{-j\omega_e t}, \quad (4)$$

$$\eta_\omega(z; t) = \eta(x) e^{-j\omega_e t}. \quad (5)$$

水面条件については、kinematic な条件は、攪乱が微小であるとして静止水面($y=0$)で展開し、高次の微小量を見捨ると以下となる。

$$\left\{ j\alpha + \frac{\partial}{\partial x} \right\} \eta(x) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(x) = 0, \quad \text{on } y=0, \quad (6)$$

ここで浸水長を L_w としておき reduced frequency α を以下と定義している。

$$\alpha = \omega_e L_w / U. \quad (7)$$

水面上の圧力方程式を前と同様に線形化する。

$$p(x) + \gamma \eta(x) = \left\{ j\alpha + \frac{\partial}{\partial x} \right\} \phi(x), \quad \text{on } y=0, \quad (8)$$

ここで g を重力加速度として

$$\gamma = g L_w / U^2, \quad (9)$$

式(6), (8)より η を消去すると線形自由表面条件が得られる。

$$\left[\left(j\alpha + \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \gamma \frac{\partial}{\partial y} \right] \phi(x) = \left(j\alpha + \frac{\partial}{\partial x} \right) p(x), \quad \text{on } y=0, \quad (10)$$

なお、(8), (10)式における $p(x)$ は $x_T < x < x_L (x_L - x_T = 1)$ 以外においては0とみなすこととする。

また、圧力分布については Kutta の流出条件を満たす必要があり、

$$p(x_T) = 0. \quad (11)$$

滑走板上の境界条件については上下揺れをするときは次のようにおけば良い。

$$\eta_\omega(x) = X_h e^{-j\omega_e t}, \quad (12)$$

即ち

$$\eta(x) = X_h, \quad (12)'$$

ここで X_h は上下揺れの振巾を示す。縦揺れの場合は同様にして次のようにおく。

$$\eta_w(x) = X_p x e^{-j\omega_e t}, \quad (13)$$

即ち

$$\eta(x) = X_p x. \quad (13)'$$

次に線形自由表面条件 (10) 式で $p(x)=0$ とした斉次な条件を満たす基本的な核関数を導入する。点 $\zeta = \xi + i\eta$ に置かれた強さが調和振動する吹き出し特異点、渦特異点の複素ポテンシャルをそれぞれ

$$W_Q(z, \zeta; t) = W_Q^*(z, \zeta) e^{-j\omega_e t}, \quad (14)$$

$$W_I(z, \zeta; t) = W_I^*(z, \zeta) e^{-j\omega_e t}, \quad (15)$$

としておく、具体的な表示等については付録Aに示した。

滑走板のまわりの流れを複素ポテンシャルで表わすとグリーンの公式により

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \phi(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta} W_Q^*(z, \xi) - \frac{\partial \phi}{\partial \eta}(\xi) W_Q^*(z, \xi) \right\} d\xi,$$

$\partial W_Q^*/\partial \eta$ を (A. 12) 式を用いて書き直すと

$$\begin{aligned} 2\pi f(z) = & -\frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi) \left(j\alpha - \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 W_Q^*(z, \xi) d\xi \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}(\xi) W_Q^*(z, \xi) d\xi, \end{aligned}$$

さらに部分積分を行い、(8)式と波高 $\eta(x)$ が滑走板前端で $\Delta\eta = \eta(x_L + \varepsilon) - \eta(x_L - \varepsilon)$ なる不連続 (jump) があるという仮定を置くと次の表示式を得る。

$$\begin{aligned} 2\pi f(z) = & -\frac{1}{\gamma} \int_{x_T}^{x_L} p(\xi) \left(j\alpha - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) W_Q^*(z, \xi) d\xi \\ & - \Delta\eta W_Q^*(z, L). \end{aligned} \quad (16)$$

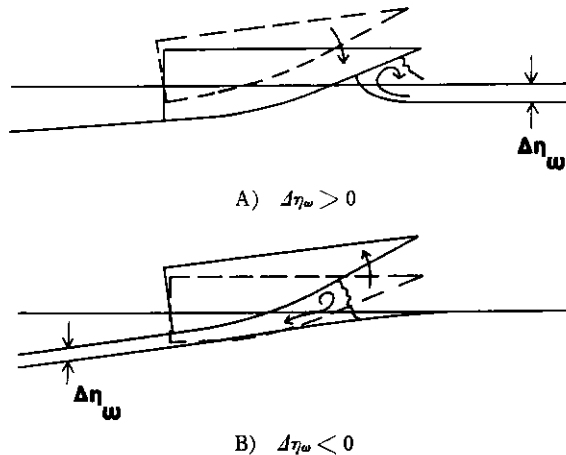


Fig. 3 Jump of wave height at leading edge

なお、この波高の不連続量は、滑走板が動揺するとき、前端付近に水が盛り上ってたまり（図3-A）、それがまた後方に流出する（図3-B）という現象を表現していると解釈できる。

滑走板形状と圧力分布の関係を導くために、(16)式を変形して以下の積分方程式を得る。

$$2\pi\eta(x) = Re_i \frac{1}{\gamma} \int_{x_T}^{x_L} p(\xi) W_{Q\eta}^*(x, \xi) d\xi - Re_i \Delta\eta \left(ja - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) W_{Q^*}(x, x_L). \quad (17)$$

上式を与えられた境界条件 (12), (13) 及び流出条件 (11) の下に解けば、滑走板の動揺を表わす圧力分布 $p(x)$ 及び前端的波高の不連続量 $\Delta\eta$ が求められる。

2-2. 動運方程式と Nyquist の方法による安定判別法

z を上下揺れ、 θ を縦揺れとすると、一般に連成動揺方程式は

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{z} + a_{11}\dot{z} + K_{11}z + a_{21}\dot{\theta} + K_{21}\theta &= 0, \\ I\ddot{\theta} + a_{22}\dot{\theta} + K_{22}\theta + a_{12}\dot{z} + K_{12}z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

と与えられる。先ずこれらの各係数が周波数に依存しない場合について考えておこう。自動制御理論の通常の手法に従い、上式をラプラス変換して次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} (ms^2 + a_{11}s + K_{11})Z + (a_{21}s + K_{21})\Theta &= 0, \\ (a_{21}s + K_{12})Z + (Is^2 + a_{22}s + K_{22})\Theta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここに、 Z, Θ は z, θ のラプラス変換とする。特性方程式は

$$\Delta(s) = As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E, \quad (20)$$

ここで

$$\begin{aligned} A &= mI, B = ma_{22} + Ia_{11}, C = mK_{22} + IK_{11} + a_{11}a_{12} - a_{12}a_{21} \\ D &= a_{11}K_{22} + a_{22}K_{11} - a_{12}K_{21} - a_{21}K_{12}, E = K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}. \end{aligned} \quad (21)$$

この振動が安定であるための条件は先ず、 $A \sim E$ の係数が正であることである。特に $s \rightarrow 0$ とすると

$$\Delta(s) \rightarrow E$$

となるので、 $E > 0$ の条件が必要であり、これが準静的な安定の条件となる。

今の場合について云えば、定常滑走時において、浮上量の変化 ΔZ 、トリムの変化 $\Delta\theta$ としたとき、揚力とモーメントの平衡式は

$$\left. \begin{aligned} \Delta L &= L_z \Delta z + L_\theta \Delta\theta = 0, \\ \Delta M &= M_z \Delta z + M_\theta \Delta\theta = 0, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

となるが¹⁰⁾このとき上の条件は

$$\Delta S_T = L_z M_\theta - L_\theta M_z > 0, \quad (23)$$

となることを意味する。文献 10) では上下揺れ、縦揺れ各々の準静的な安定性の議論から以下の条件を安定の必要条件であるとしていた。

$$L_x > 0, M_\theta > 0. \quad (24)$$

なお文献 10) 中の記号とは $L_x = -W_1$, $M_\theta = -M_X$ の関係がある。

式 (18) の運動方程式を従来使われている形に書き直す。

$$\left. \begin{aligned} (W/g + m_{zz})\ddot{z} + N_{zz}\ddot{z} + \rho g L_w \dot{z} + m_{\theta z}\ddot{\theta} + N_{\theta z}\dot{\theta} &= 0, \\ (I/g + m_{\theta\theta})\ddot{\theta} + N_{\theta\theta}\dot{z} + W \cdot GM_L \theta + m_{z\theta}\dot{z} + N_{z\theta}\dot{z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ここで W は滑走板の重量、 I は回転慣性モーメント、 GM_L は縦メタセンタ高さを示す。その他は各々

m_{zz} : 上下揺れの付加質量, $m_{\theta\theta}$: 縦揺れの付加慣性モーメント

N_{zz} : " 減衰係数, $N_{\theta\theta}$: " 減衰モーメント係数

$m_{z\theta}$: " 連成付加質量, $m_{\theta z}$: " 連成付加質量

$N_{z\theta}$: " 連成減衰係数, $N_{\theta z}$: " 連成減衰係数

を示し、前節で求めた各周波数に対応する圧力分布を積分することにより計算できる。諸量を以下のように無次元化しておく。

$$\left. \begin{aligned} m_{zz}^* &= m_{zz} / \frac{\rho}{4} L_w^2, & m_{\theta\theta}^* &= m_{\theta\theta} / \frac{\rho}{16} L_w^4, \\ N_{zz}^* &= N_{zz} / \frac{\rho}{4} \omega_e L_w^2, & N_{\theta\theta}^* &= N_{\theta\theta} / \frac{\rho}{16} \omega_e L_w^4, \\ m_{z\theta}^* &= m_{z\theta} / \frac{\rho}{8} L_w^3, & m_{\theta z}^* &= m_{\theta z} / \frac{\rho}{8} L_w^3, \\ N_{z\theta}^* &= N_{z\theta} / \frac{\rho}{8} \omega_e L_w^3, & N_{\theta z}^* &= N_{\theta z} / \frac{\rho}{8} \omega_e L_w^3, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

又,

$$W^* = W / \frac{\rho}{4} g L_w^2, \quad I^* = I \frac{\rho}{16} L_w^4 = 4W^*(X/L_w)^2. \quad (27)$$

ただし X は慣性半径で $L_w/4$ に近い。また $W = \rho g L_w d_E (d_E: \text{等価吃水})$ とおくと $W^* \doteq 1/20$, $I^* = d_E/L \cdot R^2$, $X = R L_w/4$, 復原力については

$$\rho g L_w / \frac{\rho}{4} L_w^2 = 4g/L_w, \quad W \cdot GM_L / \frac{\rho}{16} L_w^4 \doteq 4g/3L_w, \quad (28)$$

ここで $GM_L = BM_L$ を用いており、高速艇の場合、少し乱暴だがこうしておく。

このとき運動方程式は以下と変形できる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{4g}{L_w} (Az/L_w + B\theta) &= 0, \\ \frac{4g}{L_w} (Cz/L_w + D\theta) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 + \frac{1}{4} \alpha^2 F n^2 (i N_{zz}^* - W^* - m_{zz}^*), \\ B &= -\frac{1}{2} \alpha^2 F n^2 (-m_{\theta z}^* + i N_{\theta z}^*), \\ C &= -\frac{1}{2} \alpha^2 F n^2 (-m_{z\theta}^* + i N_{z\theta}^*), \\ D &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \alpha^2 F n^2 (i N_{\theta\theta}^* - I^* - m_{\theta\theta}^*), \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

ただし $F n = U / \sqrt{g L_w}$. それ故, 特性方程式は,

$$\Delta = A D - B C \quad (31)$$

上式の値を複素平面上にプロットして Nyquist の判定法を用いるわけである。原点を回る回転数が 0 のとき安定, 0 でないときに不安定と判定できることになる。なお式 W^*, I^* は滑走板の重量分布によって決まる量であるが, 前述のようにまず $X = L_w/4$ としてよからう。 $W^* = 4d_E/L_w$ の値は吃水の大きい場合で 0.2, 小さい場合で 0.1 の程度としてよからう。どちらにしても, $m_{zz}^*, m_{z\theta}^*$ はこれらの値よりずっと大きいと考えられるので, W^*, I^* の変化の影響は小さいであらう。

3. ポーポイジング発生の速度の比較

序論に述べたように, 滑走艇のポーポイジング発生に関する研究は主として, 特定方程式の根の位置を, Routh-Hurwitz の方法で調べることであった³⁾。ところが, 滑走艇の運動に関する周波数応答においては, 特性方程式の各係数が周波数の関数となっていることから, 上の方法は直接利用できない。

他の方法としては, Ogilvie and Shen⁶⁾ 及び Bessho and Komatsu⁷⁾ による浸水長の周期的変化によって, ある小さい reduced frequency 以下 ($\alpha < 0.68$) で上下揺れの減衰が負になることを利用する方法が知られている。或は別所⁸⁾ は定常滑走板の速度による浸水長, トリムの変化を調べて, ある速度以上 ($F n > 3.16, \gamma < 0.413$) では上下揺れについて準静的に安定な滑走が望めないという結果を得ている。また, 鈴木, 大迫¹⁰⁾ による別の解析法では, 縦揺れ, 上下揺れについての同様な結果 ($F n > 0.61, F n > 1.83$) が得られている。

ここでは, 前章に述べたように, 前端に吹き出し特異点を配することにより, 滑走板の動揺問題を解き, Nyquist の方法によって安定判別を行う方法を試みた。計算に用いた滑走板の重量, 慣性モーメントの値は $W^* = 0.2, I^* = 0.05$ としている (なお, 図中では*記号は省略している)。この値の変化により結果は大きく変わらないはずであるが, 細かい検証は行っていない。

まず $\alpha \rightarrow 0$ の極限と考えられる式 (23) の Δ_{ST} による安定判別を行った。図 4 に平板状滑走板についての Δ_{ST} の値が示されている。重心位置が異っても Δ_{ST} 曲線は相似になるはずである。 $\Delta_{ST} = 0$, 即ち不安定が始まるフルード数は 0.61 であり, このフルード数より高速では, 不安定であると判定できる。このフルード数は式 (24) で判定した縦揺れ

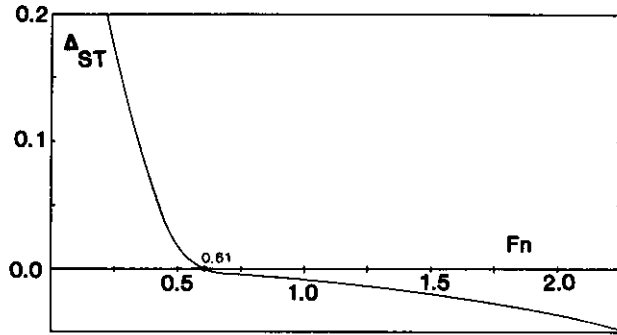


Fig. 4 Quasi-static condition of stability

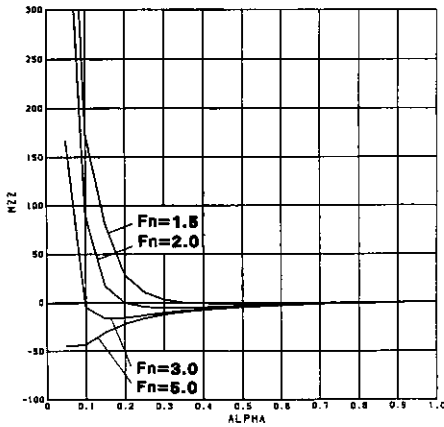


Fig. 5-1 Added mass for heave (with Kutta condition)

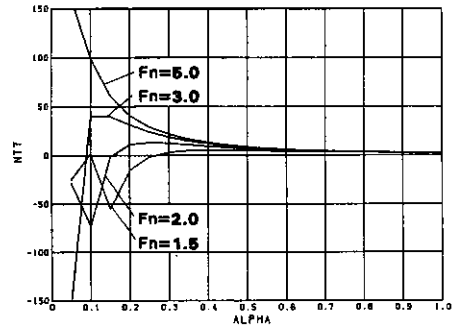


Fig. 5-2 Damping for pitch (with Kutta condition)

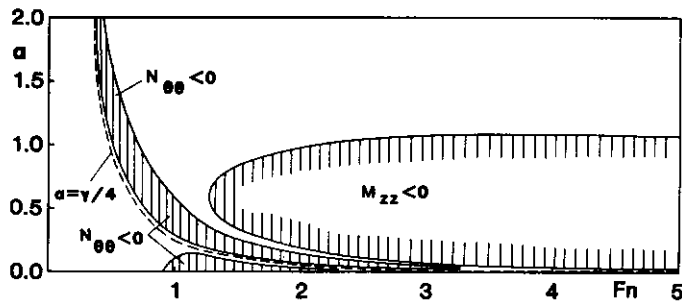


Fig. 6 Region of negative values of added mass and damping coefficients (with Kutta condition)

不安定開始のフルード数と一致している。

次に、滑走板の周波数応答（動揺特性）を求めた。上下揺れの付加質量，縦揺れの減衰係数を図5に示した。なお，図中 M_{ZZ} (M_{zz}), NTT ($N_{\theta\theta}$) は式 (26) の m_{zz}^* , $N_{\theta\theta}^*$ 等を示す。図に見るように，負となる領域が存在する。他の量については省略するが，諸値は $\alpha = \gamma/4$

の周波数付近で大きく変化するが、その点では連続である。各値が負値をとることが、滑走板の運動の不安定要素になると考えられるので、連成運動を除いた付加質量、減衰モーメント係数の負値となる領域を図6に示した。この図によると $\alpha \approx 0$ では、 $Fn > 0.92$ で縦揺れの減衰が負となり、 $Fn > 1.25$ では $\alpha < 1$ で上下揺れの付加質量が負となり、従来の近似計算⁹⁾を裏付けている。

このように現象が周波数に依存しているので、安定性の判別は、Nyquistの方法に依らねばならない。そこで式(31)の Δ の値を、 α を0より ∞ まで変え、計算したものを図7, 8, 9, に示した。横軸、縦軸は Δ の実部、虚部を示す。 α が負値を取る場合は、 Δ の共役数を取れば良い。どのフルード数においても $\alpha = 0$ では実軸上から出発し、左回りにはほぼ一回転して $\alpha = \pi/4$ の点に至る。その点で曲率が不連続となる。その後右回り、左回りの曲線を描きながら、第4象限の無限遠点 ($\alpha = \infty$) に至る。その後は右回りに2回転 ($|\alpha| = -\infty$, $\arg(\alpha) = 0 \sim -\pi/2$) して $\alpha = -\infty$ の点 (第1象限) の点に至る。この様子をschematicに書き直し、見易くしたものを図10, 11に示す。

$Fn=0.6$ 以下の低速では、図10-a)に見るように原点近傍で1回、無限遠で1回、原点を回る閉曲線が存在する。しかし、回転方向は互いに逆であるから、全回転数は $N=0$ 、即ち安定であると判定できる。 $Fn=0.8$ となると、図10-b)に見るように原点近傍の回転

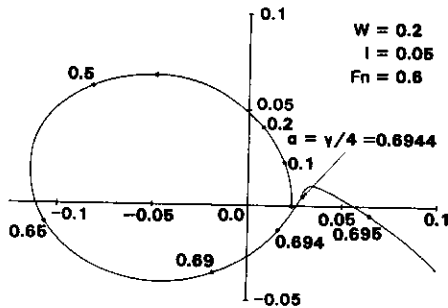


Fig. 7-1 Nyquist's diagram (with Kutta condition)

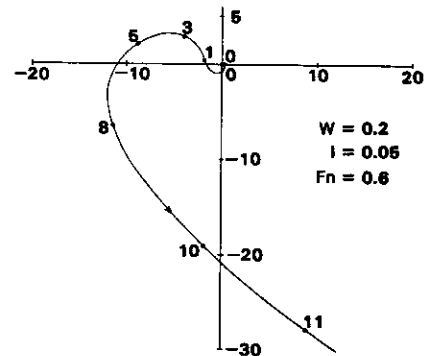


Fig. 7-2 Nyquist's diagram (with Kutta condition)

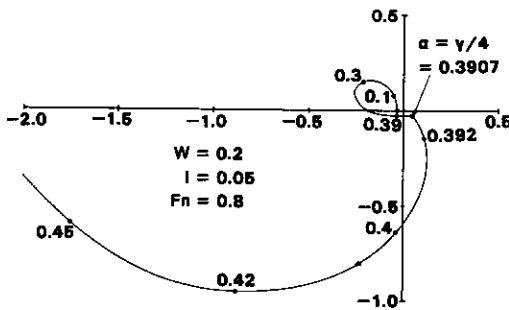


Fig. 8-1 Nyquist's diagram (with Kutta condition)

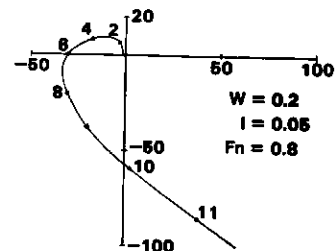


Fig. 8-2 Nyquist's diagram (with Kutta condition)

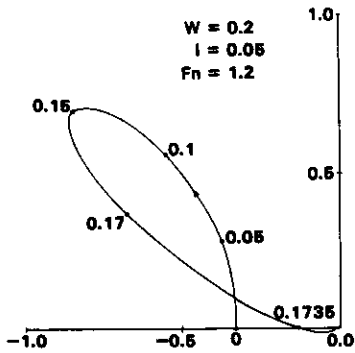


Fig. 9-1 Nyquist's diagram (with Kutta condition)

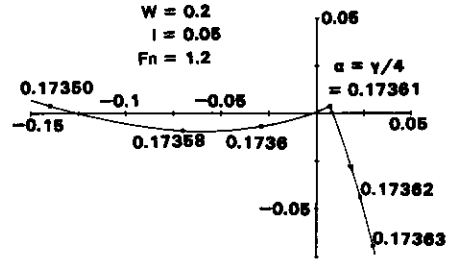


Fig. 9-2 Nyquist's diagram (with Kutta condition)

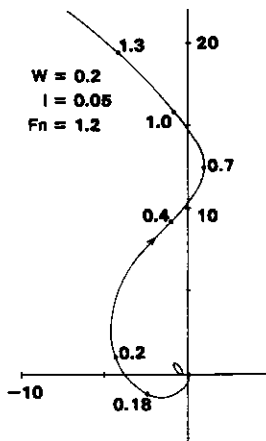


Fig. 9-3 Nyquist's diagram (with Kutta condition)

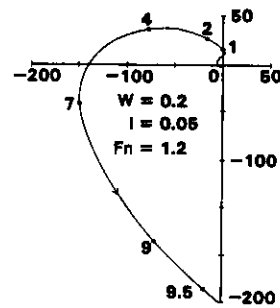


Fig. 9-4 Nyquist's diagram (with Kutta condition)

はなくなり、 $N=1$ 、即ち不安定な状態となる。従ってポーポイジングが発生する臨界フルード数 Fn_c は 0.6 と 0.8 の間にあると推定できる。更に高速になり $Fr=1.0$ 以上になると、図 10-c) に見るように、 $N=3$ となり、不安定な要素に質的な変化が見られる。これは図 6 で見たように上下揺れの付加質量が高速で負値をとることに関連しているように推察される。従って $Fn_c < Fn < 1.0$ では縦揺れのポーポイジングが発生し、 $Fn > 1.0$ では上下揺れのポーポイジングが連成していると見ることができる。

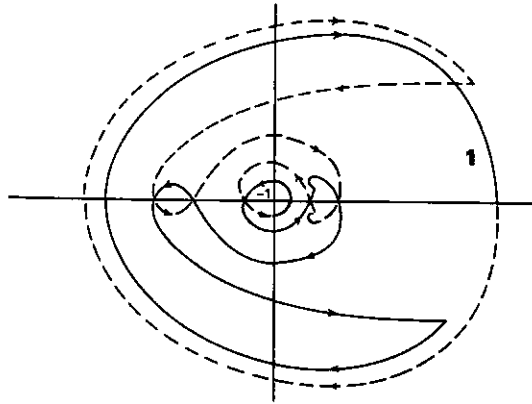
なお、位相余有 (phase margin) から予想される不安定時の動揺周波数は

$$\alpha_c = \gamma/4$$

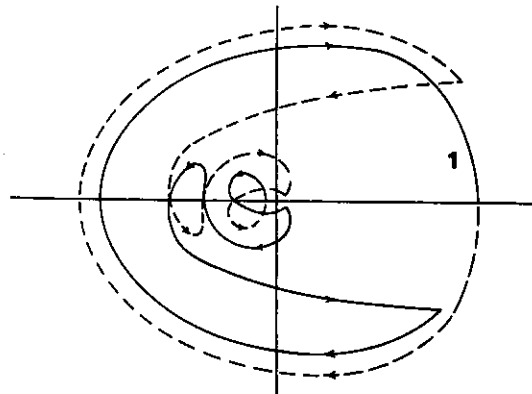
の近くとなっている。これは前方に出ていた波が後方に出るようになる臨界点でもあり首肯できる。

以上得られた結果を他の結果と比較して図 12 に示す。実験¹¹⁾では、 $Fn=0.97$ より滑走を開始し、縦揺れを主成分とするポーポイジングは $Fn=1.53$ より始まる。更に高速では、振巾は発散し沈没に至る。しかし、 $Fn=1.53$ の滑走時においても、人為的に小さな縦揺

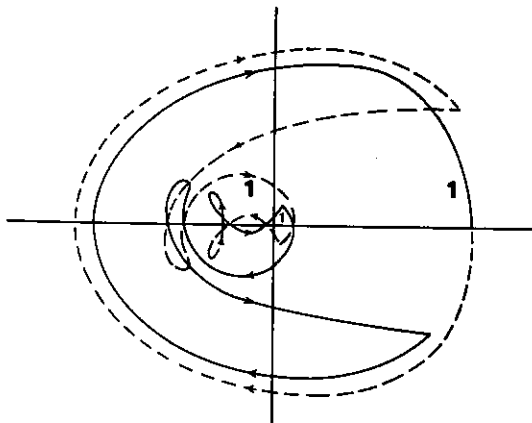
2次元動揺滑走板の安定性について



a) $F_n = 0.6$ ($N = 0$)



b) $F_n = 0.8$ ($N = 1$)



c) $F_n = 1.2$ ($N = 3$)

Fig. 10 Nyquist's diagrams (with Kutta condition)

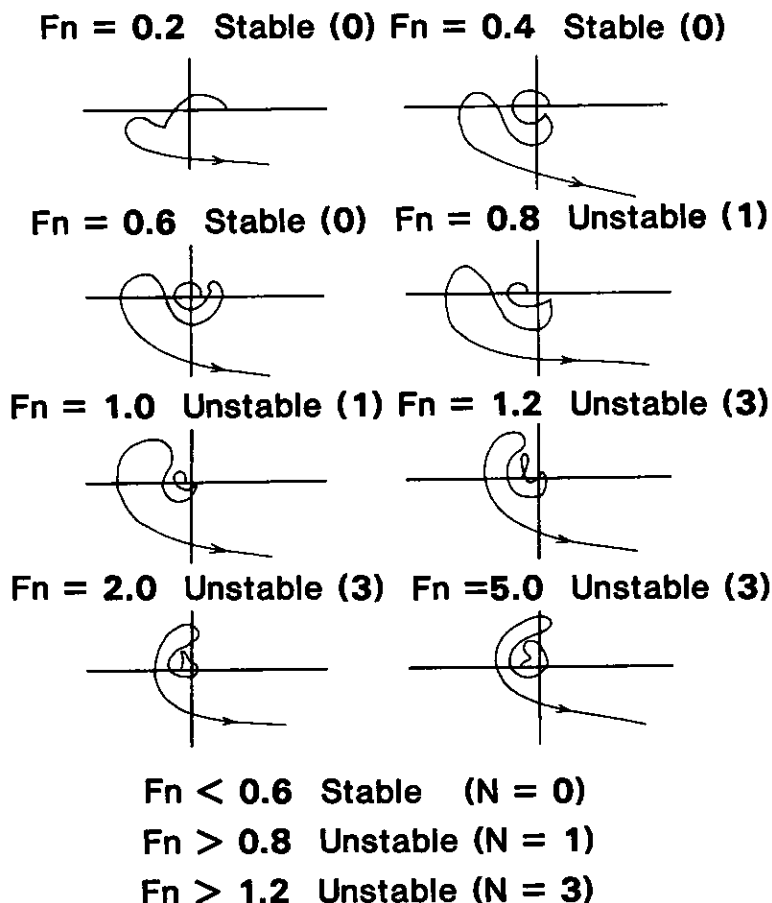


Fig. 11 Summation of Nyquist's diagrams (with Kutta condition)

れモーメントを与えてやれば、定常的なホーボイジングが発生することが観測されていることから、安定限界フルード数は、滑走を開始する滑走フルード数より低いと見ることができる。

浸水長を変化させる解析法では、上下揺れの安定限界速度は、 $F_n=3.16$ である。前端に吹き出し特異点を置いた定常滑走板による解析では、その値は $F_n=1.83$ となっており、本論の解析法は安全側（低速側）にあることが判る。また、縦揺れのみの準静的な安定限界速度は、 $F_n=0.61$ である。(23)式の Δs_T の値から判別される安定限界速度も $F_n=0.61$ となっている。今回行った周波数応答のNyquist線図による解析では、 $F_n=0.6 \sim 0.8$ の間に安定限界が存在することが明らかとなった。

上の3者を比較すると、これはまず同一の値を与えていると見ることができる。周波数応答による方法では結果が判明するまでに多くの手間が掛かることを考えれば定常滑走板に関する準静的な取扱いで代用できる可能性が強いことを示していると考えられる。しかし、一般の3次元滑走艇については、なお確認の必要がある。

以上は、Kuttaの流出条件を満たす解、即ち滑走板についての議論であったが、ページ

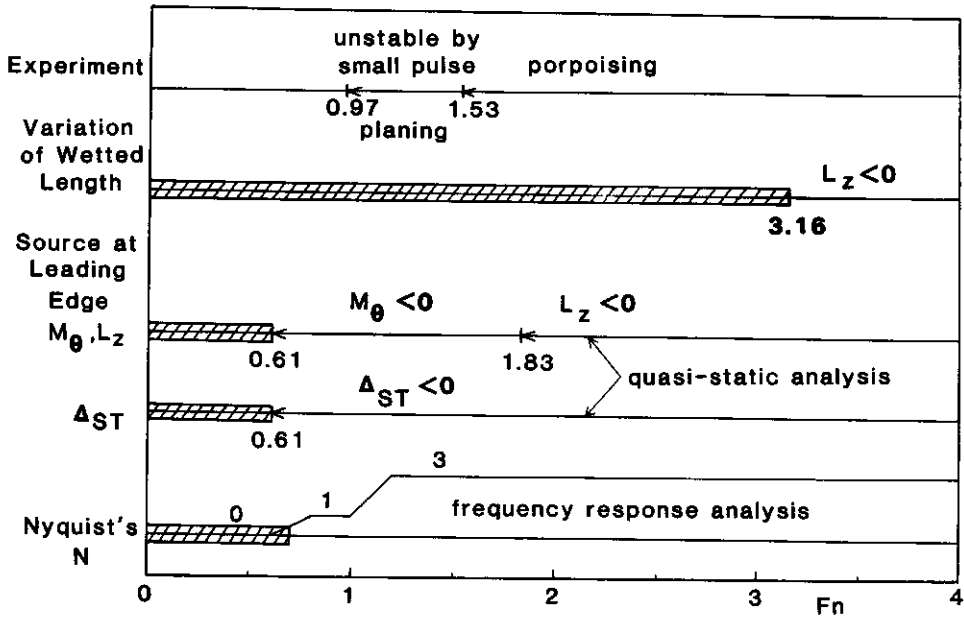


Fig. 12 Comparison of stable Froude numbers range (with Kutta condition)

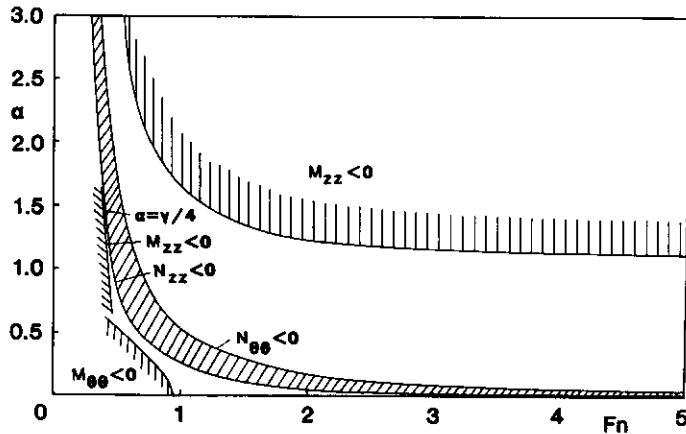


Fig. 13 Region of negative values of added mass and damping coefficients (without Kutta condition)

のように低速で航行し、滑走しない艇については、必ずしも流出条件を満たす解が現象を現わしているとは云えない。そこで流出条件を満たさない解についても計算を行った。図13に上下揺れ、縦揺れの付加質量、減衰係数の負の領域を示してある。ほとんどすべての領域で負の値となっており、安定判別が困難である。前と同様に Nyquist の線図を描いた例を図14に示した ($W^*=0.2, I^*=0.05$)。原点をまわる回転数は、 $Fn < 1.6$ で $N=0$ 、それ以上の速度で $N=2$ である。従ってバージなどの滑走をしない艇については、低速 ($Fn < 1.6$) で安定に航行できることが予想される。

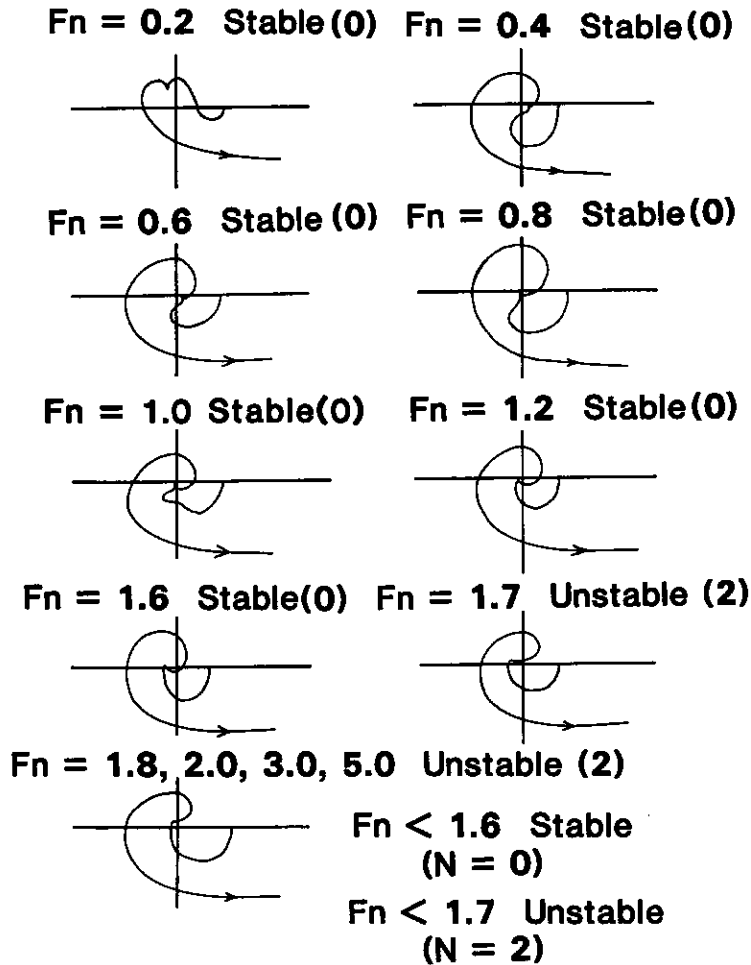


Fig. 14 Summation of Nyquist's diagrams (without Kutta condition)

4. 結 論

2次元滑走板の周波数応答特性を動揺滑走板理論を用いて解析し、Nyquistの方法によって安定性の問題を解析した結果、以下の結論を得た。

1. 滑走板は低速では安定で、浸水長をベースとするフルード数が 0.6~0.8 の間より高速では縦揺れのポーポイジングが発生する。
2. フルード数が1.0と1.2の間より高速では、上下揺れとの連成したポーポイジングが生ずる。
3. 定常滑走板理論による準静的な安定判別では、ポーポイジング発生フルード数はNyquistの判別法による値と良く対応しており、簡易に計算できる利点を有する。
4. 滑走しない艇についてはフルード数1.6以下では姿勢安定である。

以上であるが、詳細な実験との比較、浸水長を変化させる方法との比較検討、重心位置

或はトリム変化により安定性がどう変化するか、3次元問題との関連等の課題が残されている。

謝 辞

本論の計算に用いたプログラムの動揺解析に関する部分は石川島播磨重工の山下誠也博士開発のプログラムを一部手直しして使用させて頂いた。数値計算は研究科山形和明君、本科石原浩二君、松下正美君に負う所が大きい。記して謝意を表したい。

参 考 文 献

- 1) Perring, W. G. A.: The porpoising of high speed motor-boats, Spring Meeting of I. N. A., 1953.
- 2) Murray, A. B.: The hydrodynamics of planning hulls, Meeting of SNAME, 1950.
- 3) Martin, M.: Theoretical determination of porpoising instability of high-speed planning boats, Report 76-0068, D.W.T. NSRDC, 1976.
- 4) Day, Haarg: Planning boat porpoising, Thesis of Webb Inst. of N. A., N. Y., May, 1952.
- 5) Mottard, E. J.: Investigation of self-excited planning vibration of large wetted aspect ratio, DTMB Report 2017, 1965.
- 6) Ogilvie, T. F. and Shen, Y. T.: Flutter oscillation of planning plate, Univ. of Michigan Report No. 146, 1973.
- 7) Bessho, M., Komatsu, M.: Two-dimensional unsteady planning surface, J. S. R., Vol. 28, 1984.
- 8) 別所正利: 定常滑走板の理論に関する一考察, 西部造船会会報第54号, 1977.
- 9) 別所正利: 動揺する2次元滑走板に働く流体力について, 関西造船協会誌第16号, 1977.
- 10) 鈴木勝雄, 大迫義谷: 2次元滑走板の姿勢変化について(その1), 防大理工報 24-3, 1986.
- 11) 同上(その2), 防大理工報 24-4, 1986.

付録A. 波核関数(複素ポテンシャル)の表示と関係

齊次な線形自由表面条件を満たし、その基本特異性が吹き出しと渦である波核関数の表示式を示す。各々を

$$W_Q(z, \zeta; t) = W_Q^*(z, \zeta)e^{-j\omega_e t}, \quad (A.1)$$

$$W_I(z, \zeta; t) = W_I^*(z, \zeta)e^{-j\omega_e t}, \quad (A.2)$$

としておくと($z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$)

$$W_Q^*(z, \zeta) = \log(z - \zeta)/(z - \bar{\zeta}) + \gamma \int_0^\infty \left\{ \frac{1 - ij}{A(k)} + \frac{1 + ij}{B(k)} \right\} e^{-ik(z - \bar{\zeta})} dk, \quad (A.3)$$

$$W_I^*(z, \zeta) = -i \log(z - \zeta)(z - \bar{\zeta}) + i\gamma \int_0^\infty \left\{ \frac{1 - ij}{A(k)} + \frac{1 + ij}{B(k)} \right\} e^{-ik(z - \bar{\zeta})} dk, \quad (A.4)$$

と表示できる。ここで

$$\left. \begin{aligned} A(k) &= k^2 - (\gamma + 2\alpha + i\mu)k + \alpha^2 + i\mu\alpha, \\ B(k) &= k^2 - (\gamma - 2\alpha + i\mu)k + \alpha^2 - i\mu\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (A.5)$$

μ は仮想摩擦係数($\mu \rightarrow +0$)である。(A.3, 4)を(A.1, 2)に代入し j に関する実部を取ると以下を得る。

$$\begin{aligned}
 W_Q(z, \zeta; t) = & \log(z - \zeta) / (z - \bar{\zeta}) \cos \omega_e t \\
 & + \gamma \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-i\omega_e t}}{A(k)} + \frac{e^{i\omega_e t}}{B(k)} \right\} e^{-ik(z - \bar{\zeta})} dk,
 \end{aligned} \quad (A.6)$$

$$\begin{aligned}
 W_I(z, \zeta; t) = & -i \log(z - \zeta) (z - \bar{\zeta}) \cos \omega_e t \\
 & + i\gamma \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-i\omega_e t}}{A(k)} + \frac{e^{i\omega_e t}}{B(k)} \right\} e^{-ik(z - \bar{\zeta})} dk,
 \end{aligned} \quad (A.7)$$

次に $A(k) = (k - \alpha_1)(k - \alpha_2)$, $B(k) = (k - \beta_1)(k - \beta_2)$ としておく。

$$\alpha_{1,2} = \gamma + 2\alpha \pm \sqrt{\gamma(\gamma + 4\alpha)}$$

$$\beta_{1,2} = \gamma - 2\alpha \pm \sqrt{\gamma(\gamma - 4\alpha)}$$

ここで根号は複素平面で考える。指数積分

$$E_1(z) = \int_0^\infty e^{-t} / t \, dt,$$

と特異点からの上下流を示す階段状関数

$$S_x = \text{sgn}(x - \xi) = \begin{cases} 1, & \text{for } x > \xi, \\ -1, & \text{for } x < \xi, \end{cases}$$

を用いて次の関数を定義しておく。

$$E^\mp(z, \sigma) = [E_1(-i\sigma z) - \pi i (S_x \mp 1)] e^{-i\sigma z}. \quad (A.8)$$

この関数を用いて (A. 6, 7) 式を書き直すと以下の表示を得、結局、複素数を変数とする指数積分により、各波核関数が計算できることになる。

$$\begin{aligned}
 W_Q(z, \zeta; t) = & \log(z - \zeta) / (z - \bar{\zeta}) \cos \omega_e t \\
 & + \frac{\gamma}{\alpha_1 - \alpha_2} \{ E^-(z - \bar{\zeta}, \alpha_1) - E^-(z - \bar{\zeta}, \alpha_2) e^{-i\omega_e t} \} \\
 & + \frac{\gamma}{\beta_1 - \beta_2} \{ E^-(z - \bar{\zeta}, \beta_1) - E^+(z - \bar{\zeta}, \beta_2) e^{-i\omega_e t} \},
 \end{aligned} \quad (A.9)$$

$$\begin{aligned}
 W_I(z, \zeta; t) = & -i \log(z - \zeta) (z - \bar{\zeta}) \cos \omega_e t \\
 & + \frac{i\gamma}{\alpha_1 - \alpha_2} \{ E^-(z - \bar{\zeta}, \alpha_1) - E^-(z - \bar{\zeta}, \alpha_2) \} e^{-j\omega_e t} \\
 & + \frac{i\gamma}{\beta_1 - \beta_2} \{ E^-(z - \bar{\zeta}, \beta_1) - E^+(z - \bar{\zeta}, \beta_2) \} e^{-i\omega_e t}.
 \end{aligned} \quad (A.10)$$

W_Q^* , W_I^* の間には次の共役の関係があり、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W_Q^*}{\partial \xi}(z, \zeta; t) &= \frac{\partial W_I^*}{\partial \eta}(z, \zeta; t), \\ \frac{\partial W_Q^*}{\partial \xi}(z, \zeta; t) &= -\frac{\partial W_I^*}{\partial \xi}(z, \zeta; t), \end{aligned} \right\} \quad (A.11)$$

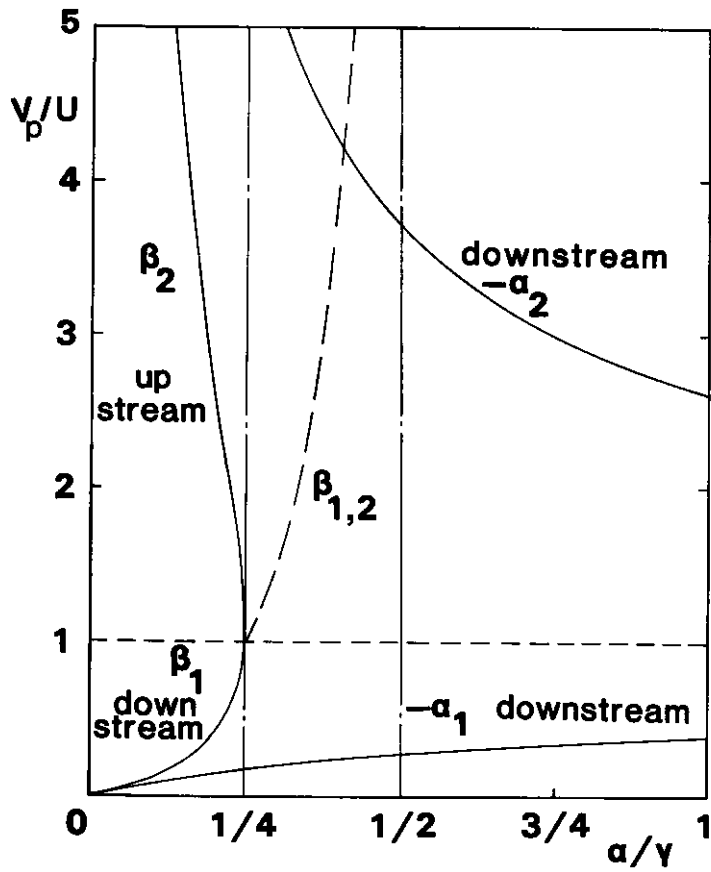


Fig. A-1 Phase velocity of waves

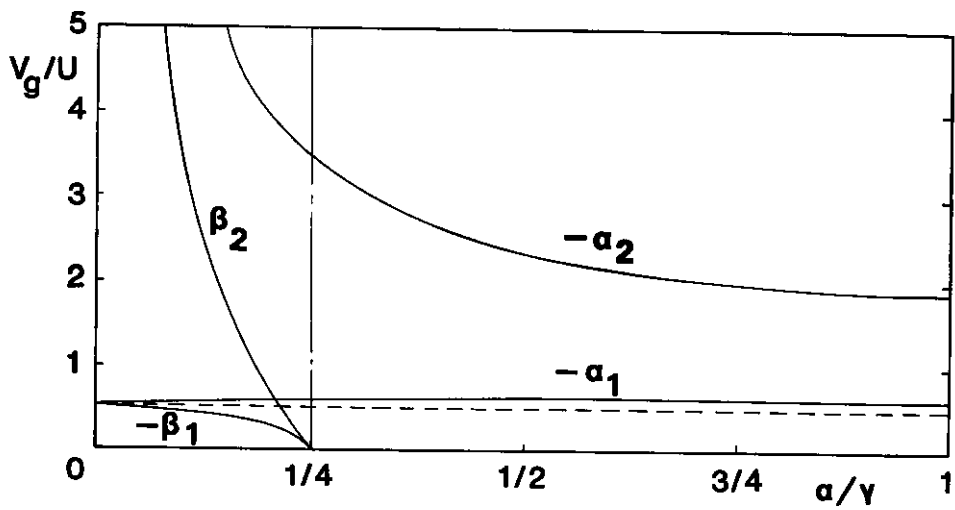


Fig. A-2 Group velocity of waves

又次の関係がある。

$$\left[\left(j\alpha - \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 + \gamma \frac{\partial}{\partial \eta} \right] W_Q^*(z, \zeta; t) = 0, \quad \text{on } \eta = 0. \quad (\text{A. 12})$$

一様流中の強さが周期的に振動する特異点は $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ に対応して4種の進行波を作るが、このあたりの理解の便のために、それらの波の位相速度、群速度を図A. 1, 2に示しておいた。

本文(55)式の右辺を数値計算に便利な形で表示しておく。式(A. 8)の i の代りに $\pm j$ で置き換えた式を $E_{\pm j}^{\pm}$ としておくと右辺第2項は

$$\begin{aligned} & \text{Rei} \left[- \left(j\alpha - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) W_Q^*(x, \xi) \right] \\ &= j \frac{\gamma}{\alpha_1 - \alpha_2} \left\{ (\alpha_1 - \alpha) E_{+j}^-(x - \xi, \alpha_1) - (\alpha_2 - \alpha) E_{+j}^-(x - \xi, \alpha_2) \right\} \\ & - j \frac{\gamma}{\beta_1 - \beta_2} \left\{ (\beta_1 - \alpha) E_{-j}^-(\xi - x, \beta_2) - (\beta_2 - \alpha) E_{-j}^+(\xi - x, \beta_2) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A. 13})$$

右辺第1項は細分された区間で圧力を一定とすると

$$\begin{aligned} \int_{x_T}^{x_L} p(\xi) W_{Q_\eta}^*(x, \xi) d\xi &= \sum_k p_k \int_{d\xi_k} -W_{I_\xi}^*(x, \xi) d\xi, \\ &= \sum_k p_k \left[-W_{I_\xi}^*(x, \xi) \right]_{d\xi_k} \end{aligned} \quad (\text{A. 14})$$

ここで

$$\begin{aligned} \text{Rei} W_{I_\xi}^*(x, \xi) &= j \frac{\gamma}{\alpha_1 - \beta_2} \left[E_{+j}^-(x - \xi, \alpha_1) - E_{+j}^-(x - \xi, \alpha_2) \right] \\ & - j \frac{\gamma}{\beta_1 - \beta_2} \left[E_{-j}^-(x - \xi, \beta_1) - E_{-j}^+(x - \xi, \beta_2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A. 15})$$

Porpoising Instability of Two-Dimensional Oscillating Planning Plate

Masatoshi BESSHO* and Katsuo SUZUKI**

(Received September 8, 1986)

Abstract

Motion of two-dimensional oscillating planing plate is analysed by the linearized theory modified so as to satisfy Kutta condition at the trailing edge by means of adding a wave-source singularity at the leading edge, which implies the phenomena of periodic rise and fall of bow water. Analysis of stability of such a frequency-dependent motion is performed by means of Nyquist's diagram instead of Routh-Hurwitz's. It is found that two-dimensional plate is unstable to oscillating when planning at high speed of the Froude number based on the wetted length greater than the value between 0.6 to 0.8. This value coincides with the critical Froude number predicted from the quasi-static analysis and it agrees with the experimental results.

* Professor, Department of Mechanical Engineering, The National Defense Academy.

** Lecturer, Department of Mechanical Engineering, The National Defense Academy.

浅吃水船の2次元造波抵抗理論について

(木村康之教授に捧ぐ)

別 所 正 利*

(平成3年3月3日受付;平成3年5月10日再受付)

On the Two-Dimensional Theory of Wave Resistance of a Shallow Draft Ship

(Dedicated to Professor Yasuyuki Kimura)

By Masatoshi BESSHO

A shallow draft ship is usually represented by a pressure distribution on a free surface in theory of wave resistance. However, if we give a ship form with her sinkage arbitrarily, we can not obtain a solution satisfying Kutta condition. Hence, we introduce a source singularity so that we may have a unique solution satisfying that condition. This singularity represents the mean surface depression in the down stream. Introducing this singularity, the boundary integral equation, the equation to determine a sinkage and trim and the resistance are dealt with theoretically.

1. 序 論

従来高速で滑走する船型は水面の圧力分布で表わされるとして多くの研究がある。しかし滑走艇を考えると容易にわかるように速度による浸水面の変化が大変大きくて問題の数学的定式化が大変困難である。元来これらの理論は翼理論の手法にならって構成されているので与えられた翼面の垂直速度によって解が一意的に定まる^{1),2),3)}。

しかし滑走板では水面に対する上下位置、3次元では Rise of Floor 等は重要な要素であるけれどもその定式化では考慮する事が出来ない。そこで鈴木等は浸水長さの変化を考えに入れてこれらを満たす逐次解法を提案している⁴⁾。しかし実用の大型高速艇船型では船首部の吃水は深くて水線面積は殆ど変化しないと考えられるが船尾はいわゆる Transom Stern (Destroyer Stern) となって水を切って進む。

しかし浅吃水なので水面の圧力分布で表現出来ると

考えられるが従来このような場合についての研究は見られない。本報はこのような浅吃水船が定速で進む場合の境界値問題の定式化を試み、力とモーメントおよび抵抗についての理論を論ずるものである。その為には従来考慮しなかったポテンシャルを船首部に加える必要があり、それは船が水を堰き止める、つまり上流側水面が下流側のそれより高くなるような性質をもつものである。これはまた従来造波抵抗理論における線積分項と呼ばれているものに対応している⁵⁾。それを導入して境界値問題を定式化し、与えられた排水量と重心をもつ船型の与えられた速度における、トリム等姿勢を求むる方法を示し、抵抗についても新しい成分が入って来る事を示す。

最後に平板(箱船)について高速における近似解を求める事にする。

2. 速度ポテンシャルと境界値問題

トランサム船尾を有し、船首が水線付近で略々垂直

* 防衛大学校 機械工学教室 教授

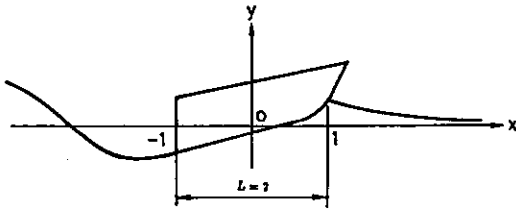


Fig. 1 Co-ordinate System

で速度によって浸水長 $L (= 2)$ が変化しないように船型を考えよう。図1のように一様速度 $V (= 1)$ の流れに浮いているものとし、船の堰き止め効果によって下流側水面は A だけ降下しているものとする。

複素速度ポテンシャルを

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y), \quad \frac{df}{dz} = -u + iv \quad (1)$$

のように定義し、水面における水面上昇を η とする

$$\phi_x(x, 0) - K\phi(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{for } |x| > 1 \\ -p(x) & \text{for } |x| < 1 \end{cases} \quad (2)$$

水面上昇量 η と流れ関数の関係は

$$\phi(x, 0) = -\eta(x) \quad (3)$$

となる。

ここに重力の定数 g はこの単位系では $K (= g/V^2)$ となる。また水の密度 ρ も 1 とする。

さて従来は翼理論にならって速度ポテンシャルは (6) の右辺第 1 項のみとり、与えられた底面形状 $\eta(x)$ に対し

$$\frac{\partial \eta(x)}{\partial x} = -\phi_x(x, 0) = \phi_y(x, 0) \quad (4)$$

なる式を積分方程式として解き、クッタの流出条件を満たす解を得ていた。そしてこの解を用いて水面変化を計算すると始めて船の基準位置からの上昇(下降)量がわかることになる。逆に言うとも最初から船の上下位置を指定するクッタの条件を満たす解は得られない。また自由航走する船では走っている時も排水量と重心位置が静止時のそれに一致しなければならないが従来の方法では浸水長を変化させて力の平衡を保つ以外に方法はない。

従って今考えているような船型では従来のポテンシャルの形ではクッタの条件を満たす解を得る事が出来ないで次のように新しい項を導入する。

さて、速度ポテンシャルと流れ関数は附録 A, B の核関数を使って次のように表わされるものとする。

$$f(z) = \int_{-1}^1 p(\xi) W(z - \xi) d\xi + A W^*(z - 1) \quad (5)$$

$$\phi(x, y) = \int_{-1}^1 p(\xi) S(x - \xi, y) d\xi + A T^*(x - 1, y) \quad (6)$$

$$\psi(x, y) = \int_{-1}^1 p(\xi) T(x - \xi, y) d\xi - A S^*(x - 1, y) \quad (7)$$

これらの式中右辺第 3 項は原点に吹き出しを有するポテンシャルでいわゆる線積分項であり、従来は考えに入れられた事のない項であるが附録 B で示すように下流側水面が押し下げられるようになるポテンシャルなので便宜上堰き止めポテンシャルと呼ぶ事にしよう。点特異性なのでこれがどのように船体に力を及ぼすかはよく判らないが、附録 B で考察する。

充分遠方の水面変位は (7) に (A. 9), (A. 11) を代入して

$$\eta(x) \xrightarrow{x \gg 1} \frac{-1}{\pi(Kx)^2} \int_{-1}^1 p(\xi) d\xi + \frac{A}{\pi K(x-1)} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \eta(x) \xrightarrow{x \ll -1} & \frac{1}{\pi(Kx)^2} \int_{-1}^1 p(\xi) d\xi \\ & + 2 \int_{-1}^1 p(\xi) \sin\{K(x - \xi)\} d\xi \\ & + A\{-1 + 2 \cos\{K(x - 1)\}\} \end{aligned} \quad (9)$$

となるが、今

$$F(k) = \int_{-1}^1 p(x) e^{ikx} dx \quad (10)$$

$$F^*(k) = F(k) - iAe^{ik} \quad (11)$$

とおくと (9) はまた次のように書ける。

$$\eta(x) \xrightarrow{x \ll -1} -A + O\left(\frac{1}{Kx^2}\right) + 2Im[F^*(K)e^{-iKx}] \quad (12)$$

さて、境界条件は静止時の船底のオフセットを $-f(x)$ とおき、トリムを τ 、上昇量を h とすると

$$\phi(x, 0) = -[-f(x) + \tau x + h], \quad |x| < 1 \quad (13)$$

で排水量 V と重心位置 $l_{c.b.}$ は

$$V = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (14)$$

$$Vl_{c.b.} = \int_{-1}^1 f(x)x dx \quad (15)$$

となる。従来は境界積分方程式は (4) 式を採用しているが本報では (13) の形に採る。即ち (7) に (13)

を代入して

$$f(x) - \tau x - h = \int_{-1}^1 p(\xi) T(x - \xi, 0) d\xi - AS^*(x-1, 0) \quad (16)$$

とし、これをクッタの条件

$$p(-1) = 0 \quad (17)$$

の下に解くものとする。上の積分方程式を次のように分解しておこう。

$$\int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} p_f(\xi) \\ p_r(\xi) \\ p_h(\xi) \\ p_0(\xi) \end{Bmatrix} T(x - \xi, 0) d\xi - \begin{Bmatrix} A_f \\ A_r \\ A_h \\ A_0 \end{Bmatrix} S^*(x-1, 0) = \begin{Bmatrix} f(x) \\ -x \\ -1 \\ (1-x^2)/2 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

この3つの方程式を解いて重ね合わせると(16)の解は

$$p(x) = p_f(x) + \tau p_r(x) + h p_h(x) \quad (19)$$

$$A = A_f + \tau A_r + h A_h \quad (20)$$

と表せる。この時の排水量とモーメントは自由航走しているならば静止時の(14)、(15)に一致しなければならないから次式が成り立つ。

$$\rho g V = \int_{-1}^1 p(x) dx = L_f + \tau L_r + h L_h \quad (21)$$

$$\begin{Bmatrix} L_f \\ L_r \\ L_h \end{Bmatrix} = \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} p_f \\ p_r \\ p_h \end{Bmatrix} x dx \quad (22)$$

$$\rho g V l_{o.b.} = \int_{-1}^1 p(x) x dx = M_f + \tau M_r + h M_h \quad (23)$$

$$\begin{Bmatrix} M_f \\ M_r \\ M_h \end{Bmatrix} = \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} p_f \\ p_r \\ p_h \end{Bmatrix} x^2 dx \quad (24)$$

この(21)と(23)から自由航走時のトリムと上昇量が計算出来る。浸水長が変化すると考える場合は鈴木³⁾の提唱するように(20)のAが0となるように繰り返し計算をして姿勢を求めればよい。

3. 抵抗

抵抗は従来考えられて来た圧力のx方向成分と船首端の堰止め抗力(附録B)の和であると考えられるから(B)により

$$D = \int_{-1}^1 p(x) \eta_x(x) dx + KA \{ \eta(1) + A \} \quad (25)$$

ここに η_x は(4)、(7)より

$$\begin{aligned} \eta_x(x) &= - \int_{-1}^1 p(\xi) T_x(x - \xi, 0) d\xi + AS_x^*(x-1, 0) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(\xi)}{\xi - x} d\xi + K \int_{-1}^1 p(\xi) S(x - \xi, 0) d\xi \\ &\quad + KAT(x-1) \end{aligned} \quad (26)$$

さて附録Cにより

$$\int_{-1}^1 p(x) dx \int_{-1}^1 \frac{p(\xi)}{\xi - x} d\xi = \frac{\pi}{4} \sigma^2 \quad (27)$$

$$\sigma = \lim_{x \rightarrow 1} [p(x) \sqrt{1-x^2}] \quad (28)$$

$$\int_{-1}^1 p(x) dx \int_{-1}^1 p(\xi) S(x - \xi, 0) d\xi = |F(K)|^2 \quad (29)$$

最後に

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 p(x) T(x-1, 0) dx \\ &= \int_{-1}^1 p(x) T(1-x, 0) dx \\ &\quad + 2 \int_{-1}^1 p(x) \sin \{ K(1-x) \} dx \\ &= -\eta(1) + \frac{1}{2} A + i [F(K) e^{-iK} - \bar{F}(K) e^{iK}] \end{aligned} \quad (30)$$

これらから(25)は

$$\begin{aligned} D &= D_s + K |F(K)|^2 \\ &\quad + KA \left[\frac{3}{2} A + i \{ F e^{-iK} - \bar{F} e^{iK} \} \right] \end{aligned} \quad (31)$$

となるが(12)を使って整理すると

$$D_s = \frac{\pi}{4} \sigma^2 \quad (32)$$

$$D_w = K |F^*(K)|^2 \quad (33)$$

$$D_B = \frac{K}{2} A^2 \quad (34)$$

$$D = D_S + D_W + D_H \quad (35)$$

となり、抵抗は従来通りの飛沫、造波の 2 成分¹⁾の他に (34) で計算される抵抗が加わる。これは深さ A のダムの壁面に働く力に等しいので仮に水頭抵抗と呼ぶ事にしよう。

4. 可逆定理²⁾

今船体オフセット $\eta(x)$ 、 $\eta'(x)$ に対する圧力分布を $p(x)$ 、 $p'(x)$ としよう。船体傾斜は (26) で与えられるがその x の符号を変えたものを考えて見よう。

$$\begin{aligned} \eta_x(-x) = & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(-\xi)}{x-\xi} d\xi \\ & + K \int_{-1}^1 p(-\xi) S(\xi-x, 0) d\xi \\ & + KAT(-1-x, 0) \end{aligned} \quad (36)$$

この両辺に $p'(x)$ をかけて積分し右辺での積分順序を変更すると圧力がクッタの条件を満たすならば

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 p'(x) \eta_x(-x) dx \\ & = \int_{-1}^1 p(-\xi) [\eta'_x(\xi) - KA'T(\xi-1)] d\xi \\ & \quad + KA \int_{-1}^1 p'(x) T(-1-x) dx \end{aligned} \quad (37)$$

となるが右辺に A の掛かった積分は (7) により

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 p(-\xi) T(\xi-1) d\xi = \int_{-1}^1 p(\xi) T(-1-\xi) d\xi \\ & \quad = -\eta(-1) + AS^*(-2, 0) \\ & \int_{-1}^1 p'(x) T(-1-x) dx = -\eta'(-1) \\ & \quad + A'S^*(-2, 0) \end{aligned} \quad (37^*)$$

となるから結局

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 p'(x) \eta_x(-x) dx + KA\eta'(-1) \\ & = \int_{-1}^1 p(-x) \eta'_x(x) dx + KA'\eta(-1) \end{aligned} \quad (38)$$

を得る。これは翼理論の Munk の定理に対応する可逆定理である。普通逆流れを考えて導くがそれは x の符号を変えたものと同じである。

例えば揚力は $p'(x)$ として (18) の p_r を採るならば

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^1 p(x) p_x \\ &= \int_{-1}^1 p_r(-x) \eta_x(x) dx - K\{A_r \eta(-1) + A\} \end{aligned} \quad (39)$$

モーメントは (18) の p_c を採ると

$$\begin{aligned} M &= \int_{-1}^1 p(x) x dx \\ &= \int_{-1}^1 p_c(-x) \eta_x(x) dx - KA_c \eta(-1) \end{aligned} \quad (40)$$

また $p'(x)$ として (18) の p_h をとると

$$KA = - \int_{-1}^1 p_h(-x) \eta_x(x) dx + KA_h \eta(-1) \quad (41)$$

となって p_h が判っていれば任意の $\eta(x)$ に対して A が求められる。

5. 高速における近似解

境界積分方程式 (18) の核関数は附録 A に示すように正弦、余弦積分で表されるので容易に解ける。ここでは特に大変高速であるとしてそれらの式で O(K) 以上の小さい項を省略して p_r 、 p_h の近似値を求めよう。

$$\left. \begin{aligned} p_h(x) &= a_0^{(h)} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \\ p_r(x) &= a_0^{(r)} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \end{aligned} \right\} \quad x = -\cos \theta \quad (42)$$

と近似して附録 A の近似値を用いると

$$\left. \begin{aligned} a_0^{(h)} &= -\frac{2K}{3\pi} \left(r + \frac{1}{2} + \log \frac{K}{2} \right) \\ A_h &= \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

$$\left. \begin{aligned} a_0^{(r)} &= 1 \\ A_r &= \frac{2}{3} \left(r + \log \frac{K}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

全くの概略値ではあるが定性的には確かである。

例えばトリム τ の平板が $A = 0$ となるのに必要な上昇量 h は (20) より

$$h = \tau \frac{A_r}{A_h} = \tau \left(r + \log \frac{K}{2} \right) \quad (45)$$

となるがこれは $K = 1.12$, $F = 1/\sqrt{2} K = 0.67$ より

高速では正となり、従来の結果に略々等しい。

また (43) より、トリムのない平板 (箱船) の揚力 ($L = \pi a_0^{(h)}$) は $K = 0.68$, $F = 0.86$ 以上の高速では正となる、つまり上昇すればする程揚力が増える事になりこれは航走不安定の限界速度である^{3), 5)}。

従来の理論値は種々あるのでどれに対応するかはよくわからないが不安定の大体の目安にはなろう。最後に抵抗は (11) より

$$F^*(K) \approx L + iA \quad L = \pi a_0 \quad (46)$$

と近似されるから (32~35) により

$$D \approx \frac{L^2}{\pi} + K(L^2 + A^2) + \frac{K}{2} A^2 \\ = \left(\frac{1}{\pi} + K \right) L^2 + \frac{3}{2} K A^2 \quad (47)$$

となる。(43), (44) の解を代入して見ると判るように高速の極限では (32) による飛沫抵抗だけになる。

6. 結 論

略々垂直な船首尾部をもち、船尾ではクッタの流出条件を満たすような船型の造波抵抗の理論模型を構成するために先ず2次元の場合について考察した。

従来浸水長が変化すると考えて通常の圧力分布型を考えた理論はあるが、今の場合に浸水長は変化しないと仮定するので新しく何等かの特異性を導入しなければならない。その為に従来いわゆる線積分項として論じられた吹き出し項を新しく堰止めポテンシャルと名付けて導入する事にした。それは水を上流側に押し戻して、下流側水面を上流側より低下させる役をしている。この導入により、船の上下位置を指定してもクッタの条件を満たす解を求める事が出来る。従ってまた静止時の排水量と重心を持つ船の自由航走時の姿勢を求める事も容易に出来る。最後に抵抗については従来考えられて来た飛沫、造波抵抗の他に水面低下量の自乗に比例する水頭抵抗とでも名付けられる成分が加わる。

参 照 文 献

- 1) 丸尾孟, 水面滑走板の圧力抵抗に関する一考察, 造船協会会報78号, 1947
- 2) M. Bessho and K. Nomura, A Contribution to the Theory of Two-Dimensional Hydro-Planing, Mem. of Defense Academy, vol. 10, 1970
- 3) 別所正利, 定常滑走板の理論に関する一考察, 西部造船協会会報, 54号, 1978
- 4) 鈴木勝雄, 大迫義谷, 2次元滑走板の姿勢変化について,

その1, その2, 防衛大理工学研究報告24巻3号, 1986

5) 別所正利, 鈴木勝雄, 2次元動揺滑走板の安定性について, 防衛大学校理工学研究報告25巻1号, 1987

6) 鈴木勝雄, 2次元 Neuman-Kelvin の問題に関する考察とその応用について, 昭和60年9月 (学位論文)

7) M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover 1970

付 録 A 核関数

$$S(x, y) + iT(x, y) \equiv W(z) \\ = \frac{1}{\pi i} \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_0^\infty \frac{e^{-ikz} dk}{k - K - \mu i}, \quad z = x + iy, y < 0 \quad (A.1)$$

$$\left(\frac{d}{dz} + iK \right) W(z) = \frac{i}{\pi z} \quad (A.2)$$

$$W^*(z) = K \int_z^\infty W(z) dz = T^*(x, y) - iS^*(x, y) \quad (A.3)$$

(A.2) により

$$W^*(z) = -iW(z) - \frac{1}{\pi} \log z \quad (A.4)$$

この右辺の対称項は無限下流で虚部が0となるように選んだものである。この $W^*(z)$ は見られるように原点に吹き出しのあるポテンシャルである。

(A.3) と (A.4) から

$$\left. \begin{aligned} S^*(x, y) &= S(x, y) + \frac{\theta}{\pi}, \quad z = re^{i\theta}, \quad -\pi < \theta < 0 \\ T^*(x, y) &= T(x, y) - \frac{1}{\pi} \log r \end{aligned} \right\} \quad (A.5)$$

特に $y = 0$ のときは S, T は正弦, 余弦積分で表わされ文献 (7) の記号を使えば x が正ならば

$$S(x, 0) + iT(x, 0) = \frac{1}{\pi} [f(Kx) - ig(Kx)], \quad x > 0 \quad (A.6)$$

x が負の時は次のようになる。

$$S + iT = -\frac{1}{\pi} [f(K|x|) + ig(K|x|)] \\ + 2e^{i\pi|x|}, \quad x < 0 \quad (A.7)$$

従って x が小さい時は

$$\left. \begin{aligned} S(x, 0) + iT(x, 0) &\rightarrow \frac{i}{\pi}(\gamma + \log Kx) + \frac{1}{2} & x > 0 \\ S(x, 0) + iT(x, 0) &\rightarrow \frac{i}{\pi}(\gamma + \log K|x|) + \frac{3}{2} & x < 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.8})$$

ここに $\gamma = 0.5772$ でオイラーの定数である。また x が充分大きい時は

$$\left. \begin{aligned} S(x, 0) + iT(x, 0) &\rightarrow \frac{1}{\pi Kx} + \frac{i}{\pi(Kx)^2} + \dots & x \gg 1 \\ &\rightarrow -\frac{1}{\pi K|x|} - \frac{i}{\pi(Kx)^2} & x \ll -1 \\ &\quad + 2e^{-iKx} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.9})$$

それ故 (A.5) より

$$\begin{aligned} S^*(x, 0) + iT^*(x, 0) \\ \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{i}{\pi}(\gamma + \log K) + O(K|x| \log K|x|) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

となって原点で有限連続である。また

$$\left. \begin{aligned} S^*(x, 0) + iT^*(x, 0) &\rightarrow -\frac{i}{\pi} \log x + \frac{1}{\pi Kx} + \dots & x \gg 1 \\ &\rightarrow -\frac{i}{\pi} \log + 2e^{-iKx} - 1 & x \ll -1 \\ &\quad - \frac{1}{\pi K|x|} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.11})$$

付録 B 堰き止めポテンシャル

(A.4) で定義した速度ポテンシャルを堰き止めポテンシャルと呼ぶ事にするがその流れ関数は

$$\psi(x, y) = -S^*(x, y) = K \int_{-\infty}^0 T(x - \xi, y) d\xi \quad (\text{B.1})$$

と書ける。(7) と較べて見ると判るようにこれは K ($= \rho g$) なる一定の圧力が原点から無限下流まで水面に働いている場合の速度ポテンシャルである。

Fig. 2 には水面変位を示すが付録 A により

$$\left. \begin{aligned} \eta(x) &\rightarrow \frac{1}{\pi Kx} & x \gg 1 \\ &\rightarrow 2 \cos Kx - 1 - \frac{1}{\pi K|x|} & x \ll -1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.2})$$

$$\eta(x) \rightarrow \frac{1}{2} + O(K|x| \log |x|) \quad (\text{B.3})$$

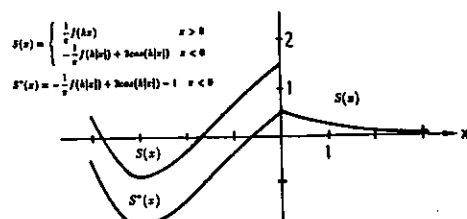


Fig. 2 Surface Elevation

なる近似値がある。また系外に出て行く流量は

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(x, 0) dx = -1 \quad (\text{B.4})$$

負、つまり系外から流量が供給されておりそれが下流側水面降下と平衡している。そこで抵抗としては一定圧力によって後流水面波形を支える力、即ち

$$D = K \int_{-\infty}^0 \eta_x(x) dx = K[\eta(-0) - \eta(-\infty)] = \frac{1}{2} K \quad (\text{B.5})$$

が原点に働いていると考えれば良いであろう。これは (34), (35) により、造波抵抗と水頭抵抗の和である。このような流れは半没垂直平板のまわりの流れのようなものの線型近似と考えられる。もっと一般的には Fig. 3 (b) のような流れとなり船首前方に堰き返し波をもつような流れとなると考えられる。これを滑走型の場合 (a) 図の場合と較べて見よう。(a) 図の場合はよく知られておるように飛沫となって系外に出て行く流量は線型理論では無視され、前方の水面は変位減み点 S を通る分岐流線 AS で近似する。

また線型近似では S 点の圧力は無限大となるが積分可能で抵抗は圧力の進行方向成分として計算出来る。(b) 図の今の場合、減み点 S は船首下端の角 (曲率半径の大変大きい所) にあると考えざるを得ない (さもないと角の所で大きい負圧を生じ結局そこへ減み点が吸い寄せられると考えられる)。船首前面に堰き止められた水は前の場合より大分多いと考えられるけれど線型理論で考える限りはやはり無視する他ないであろう。そして水面変位はやはり分岐流線 AS で近似す

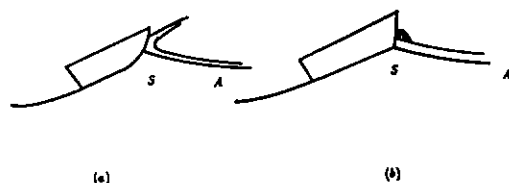


Fig. 3 Flow Pattern near Bow

る事になる。S点付近の速度は x 方向には有限で y 方向には高々対数的無限大に止まる。

付録C 抵抗積分

まずクッタの条件を満たす圧力分布は一般に

$$p(x) = \frac{a_0(1 - \cos \theta)}{\sin \theta} + \sum_{n=1} b_n \sin n\theta \quad (\text{C.1})$$

と表されるが

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(\xi)}{\xi - x} d\xi = a_0 + \sum_{n=1} b_n \cos n\theta \quad (\text{C.2})$$

更に積分すると

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(x) dx \int_{-1}^1 \frac{p(\xi)}{\xi - x} d\xi = \pi a_0^2 \quad (\text{C.3})$$

$$\sigma = \lim [p(x)\sqrt{1-x^2}] = 2a_0 \quad (\text{C.4})$$

$$S(x, 0) = -\frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin kx}{k-x} dk + \cos Kx \quad (\text{C.5})$$

となり、右辺第1項は奇関数である。それ故

$$\begin{aligned} J &= \int_{-1}^1 p(x) dx \int_{-1}^1 p(\xi) S(x-\xi, 0) d\xi \\ &= \int_{-1}^1 p(x) dx \int_{-1}^1 p(\xi) \cos K(x-\xi) d\xi \\ &= |F(K)|^2 \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

浅吃水船の造波抵抗理論について

(木村康之教授に捧ぐ)

別 所 正 利*

(平成 3 年 3 月 3 日受付；平成 3 年 5 月 10 日再受付)

On the Theory of Wave Resistance of a Shallow Draft Ship

(Dedicated to Professor Yasuyuki Kimura)

By Masatoshi BESSHO

It is well known that a shallow draft ship can be represented by a surface pressure distribution in the theory of the wave-making resistance. But this theory can not deal with a ship like a destroyer having a transom stern.

The difficulty lies on a point that a solution of the boundary integral equation has insufficient arbitrariness to satisfy the Kutta condition at the transom stern. To overcome this difficulty, the source singularity is introduced around the periphery of the water plane area. This singularity represents a surface depression in a far downstream and adds a resistance, say a head resistance, to the well known splash and wave-making one.

The procedure to calculate a trim and sinkage is formulated for a given ship in free running. Lastly, a reciprocity is presented and it leads a theorem like Munk's in the theory of wing.

1. 序 論

高速船型は一般には大変吃水が浅いので線形造波抵抗理論では水面の圧力分布として取り扱えると考えられている¹⁾⁴⁾。しかし普通それらの船型は Transom (Destroyer) Stern となっており、船尾で水を切って進む。それ故そこでクッタの流出条件を満たさなければならないが、従来の定式化では一般にそれは不可能である⁵⁾。そこでそれを満たす為に水線面積を変化させる解法が考えられた。しかし大型船では一般に船首部の側壁が垂直に近くて水線面積の変化は小さいのでそれはあまり有望な解法とは考えられない。そこで従来の特異性の他に船首部に沿って吹き出し特異点の線分布を加えてこの点を改良しようとするものである。その特異性は後流側水面に凹みが出るので仮に堰き止めポテンシャルと呼ぶことにする。その 2 次元理論

は別報⁶⁾に示すように従来の理論と継続する事がわかるので、本報ではそれを 3 次元の場合に拡張しようとするものである。

また高速では船体の沈下、トリムが大きいので与えられた速度におけるそれら姿勢を求める定式化を得る事も本報の目的の一つである。

2. 速度ポテンシャルと境界値問題

トランサム船尾を有し船首付近舷側が略々垂直で航行によって水線面積 F が変化しないと仮定する。その船が図 1 のように一様速度 V の流れの中にあつて船尾で水を切って進んでいるものとする。

速度ポテンシャルを ϕ 、水面上昇を ζ 、圧力を p とすると線形近似では水面で次式が成立つ。

$$\phi_z(x, y, 0) + K\zeta(x, y) = -p(x, y) \quad (1)$$

* 防衛大学校 機械工学教室 教授

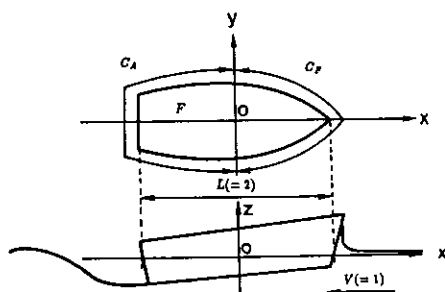


Fig. 1 Co-ordinate System

$$\phi_s(x, y, 0) = \zeta_s(x, y) \quad (2)$$

この解はよく知られているが、本報ではさらに新しく水の堰き止め効果を表す成分を取り込んで次のように表すことにする。

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= - \iint_F p(\xi, \eta) T_x(x - \xi, y - \eta, z) d\xi d\eta \\ &\quad - K \int_{C_F} A(\eta_F) T(x - \xi_F, y - \eta_F, 0) d\eta_F \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) &= - \iint_F p(\xi, \eta) T_x(x - \xi, y - \eta, 0) d\xi d\eta \\ &\quad + \int_{C_F} A(\eta_F) S^*(x - \xi_F, y - \eta_F, 0) d\eta_F \quad (4) \end{aligned}$$

ここに F は水線面、 C_F , C_A は F の周辺で最大幅から前部、後部を示すものとする。また (x_F, y_F) は C_F の座標とする。核関数 T などは付録 A, B に示し、 $A(y)$ は新しく導入した特異性の強さで (B. 6) に示すようにこれだけ後流側で水が凹んでいる。

クッタの条件は

$$p(x, y) = 0, \quad \text{on } C_A \quad (5)$$

となる。無限後流では

$$\begin{aligned} \phi(x, y, 0) &\rightarrow \frac{K}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(K(x \cos \theta + y \sin \theta) \sec^2 \theta)} \\ &\quad \cdot H^*(K \sec^2 \theta, \theta) |\sec^2 \theta| d\theta \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) &\rightarrow \frac{K}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(K(x \cos \theta + y \sin \theta) \sec^2 \theta)} \\ &\quad \cdot H^*(K \sec^2 \theta, \theta) |\sec^2 \theta| \frac{d\theta}{\cos \theta} \quad (7) \end{aligned}$$

$$H(k, \theta) = \iint_F p(x, y) e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy \quad (8)$$

$$\begin{aligned} H^*(k, \theta) &= H(k, \theta) \\ &\quad + i \cos \theta \int_{C_F} A(y_F) e^{ik(x_F \cos \theta + y_F \sin \theta)} dy_F \quad (9) \end{aligned}$$

さて船体底面の境界条件は静止時のそのオフセットを $f(x, y)$ 、トリムを τ 、上昇量を h とすると

$$\zeta(x, y) = -f(x, y) + \tau x + h \quad (10)$$

これを (4) 式の左辺においてクッタの条件 (5) の下に積分方程式を解けば良いことになる。

この時堰き止めポテンシャルを導入しなければ (5) を満足出来ないなどの事は別報に述べる通りであるが、一方では上式が舷側でも成り立つべきであるとする。舷側波形を予め指定するということになり、舷側後半部では当然であるが前半部では少し無理があるように見える。しかし前半部には特異性があるので舷側波形は上式では与えられずこの理論では決まらない。

さて線形理論であるから境界条件 (10) の解は別々に解いて加え合わせる事が出来る。そこでそれらの解を例えば次のように記す事にしよう。

Table 1 Basic Solution

$p(x, y)$	$\zeta(x, y)$ on F	$A(y)$ on C_F
$p_f(x, y)$	$-f(x, y)$	$A_f(y)$
$p_h(x, y)$	1	$A_h(y)$
$p_\tau(x, y)$	x	$A_\tau(y)$
$p_c(x, y)$	$\frac{1}{2}(x^2 - 1)$	$A_c(y)$

そうすると (10) の解は

$$p(x, y) = p_f(x, y) + \tau p_\tau(x, y) + h p_h(x, y) \quad (11)$$

$$A = A_f + \tau A_\tau + h A_h \quad (12)$$

と表される。

さて静止時排水量は

$$V = \iint_F f(x, y) dx dy \quad (13)$$

で浮心位置

$$V I_{O.B.} = \iint_F f(x, y) x dx dy \quad (14)$$

であるが、航走時それが保たれるとすると

$$V = \iint_F p(x, y) dx dy = L_f + \tau L_r + h L_h \quad (15)$$

$$Fl_{c.B.} = \iint_F p(x, y) x dx dy = M_f + \tau M_r + h M_h \quad (16)$$

ここに

$$\iint_F p_i dx dy = L_i, \quad \iint_F p_i x dx dy = M_i \quad (17)$$

なる2式が成り立たねばならないから、これから τ と h が求まり自由航走時の姿勢が定まる。

そして $A(y)$ は (12) から定まる。2次元問題では A が0となるように浸水長を変える事が出来たが今はそれは不可能に見える。

翼理論的に考えれば境界条件は船底の垂直速度で与えられ (2), (4) から、クッタの条件を満たす解 p^* は

$$\zeta_x(x, y) = - \iint_F p^*(\xi, \eta) T_{xx}(x - \xi, y - \eta, 0) d\xi d\eta \quad (18)$$

によって与えられる。この解を (4) に代入して ξ を計算すると

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) + h(y) \\ = - \iint_F p^*(\xi, \eta) T_x(x - \xi, y - \eta, 0) d\xi d\eta \\ + \int_{CF} A(\eta_F) S^*(x - \xi_F, y - \eta_F, 0) d\eta_F \end{aligned} \quad (19)$$

となって $h(y)$ だけ (4) の解 $p(x)$ のそれと異なって来ると考えられる。

上式から (4) を辺々相引くと

$$\begin{aligned} h(y) = - \iint_F [p^*(\xi, \eta) - p(\xi, \eta)] T_x(x - \xi, y - \eta, 0) p \xi d\eta \\ + \int_{CF} A(\eta_F) S^*(x - \xi_F, y - \eta_F, 0) d\eta_F \end{aligned} \quad (20)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \delta(y - y') \\ = - \iint_F p_A(\xi, \eta; y') T_x(x - \xi, y - \eta, 0) d\xi d\eta \\ + \int_{CF} A_A(\eta_F; y') S^*(x - \xi_F, y - \eta_F, 0) d\eta_F \end{aligned} \quad (21)$$

ただし

$$\int \delta(y - y') dy' = 1$$

なる積分方程式の解 p_A を導入すると、(20) の解は唯一であるから次の関係が成り立たねばならない。

$$\begin{aligned} p^*(x, y) - p(x, y) + \int_{CF} h(y') p_A(x, y; y') dy' \\ = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$A(y_F) + \int_{CF} A_A(y_F; y') h(y') dy' = 0 \quad (23)$$

3. 抵抗

抵抗は船底圧力による部分と付録Bで考察した堰き止め抵抗を加えて

$$\begin{aligned} D = \iint_F p(x, y) \zeta_x(x, y) dx dy \\ + K \int_{CF} A(\eta_F) [\zeta(\xi_F, \eta_F) + A(\eta_F)] d\eta_F \end{aligned} \quad (24)$$

のように与えられる¹⁾。(A. 8), (A. 12), (A. 13), (4) 等から

$$\begin{aligned} \zeta_x(x, y) = \frac{K^2}{\pi} \iint_F p(\xi, \eta) [Q_{-5}(K(x - \xi), K(y - \eta), 0) \\ + P_{-5}(K(x - \xi), K(y - \eta), 0)] d\xi d\eta \\ + \frac{1}{2\pi} \iint_F p(\xi, \eta) \frac{(x - \xi) d\xi d\eta}{(y - \eta)^2 \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \\ + K \int_{CF} A(\eta_F) T_x(x - \xi_F, y - \eta_F, 0) d\eta_F \end{aligned} \quad (25)$$

と書けるのでそれに p をかけて積分すると Q_{-5} は奇関数なので消えて

$$\iint_F p(x, y) \zeta_x(x, y) dx dy = I_1 + I_2 + I_3 \quad (26)$$

$$\begin{aligned} I_1 = \frac{1}{2\pi} \iint_F p(x, y) dx dy \\ \cdot \iint_F \frac{p(\xi, \eta)(x - \xi) d\xi d\eta}{(y - \eta)^2 \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} I_2 = \frac{K^2}{\pi} \iint_F p(x, y) dx dy \\ \cdot \iint_F p(\xi, \eta) P_{-5}(K(x - \xi), K(y - \eta), 0) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} I_3 = K \iint_F p(x, y) dx dy \\ \cdot \int_{CF} A(\eta_F) T_x(x - \xi_F, y - \eta_F, 0) d\eta_F \end{aligned} \quad (29)$$

一方 (4) によって

$$\zeta(\xi_F, \eta_F) = - \iint_F p(x, y) T_x(\xi_F - x, \eta_F - y, 0) dx dy \\ + \int_{CF} A(y_F) S^*(\xi_F - x_F, \eta_F - y_F, 0) dy_F$$

であり、また S^* の対称性を考えると

$$K \int_{CF} A(y_F) d\eta_F \int_{CF} A(\eta_F) S^*(\xi_F - x_F, \eta_F - y_F, 0) dy_F \\ = \frac{K}{2} \int_{CF} A^2(y_F) dy_F - \frac{K^2}{\pi} \int_{CF} A(\eta_F) d\eta_F \\ \cdot \int A(y_F) P_{-3}(K\xi_F - x_F, K\eta_F - y_F, 0) dy_F \quad (30)$$

となるから

$$I_3 = -K \int_{CF} A(\eta_F) \left[\zeta(\xi_F, \eta_F) + \frac{1}{2} A(\eta_F) \right] d\eta_F \\ + \frac{K^2}{\pi} \int_{CF} A(\eta_F) d\eta_F \\ \cdot \int A(y_F) P_{-3}(K\xi_F - x_F, K\eta_F - y_F, 0) dy_F \quad (31)$$

それ故これらを (24) に代入して (A. 18) の関係を使いコッチン関数 (9) を使えば最終的に

$$D = D_S + D_W + D_H \quad (32)$$

$$D_S = \frac{\pi}{4} \int_{CF} \sigma^2(y) dy \quad (33)$$

$$D_W = \frac{K^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |H^*(K \sec^2 \theta, \theta)|^2 \sec^3 \theta d\theta \quad (34)$$

$$D_H = \frac{K}{2} \int_{CF} A^2(y) dy \quad (35)$$

D_S は飛沫抵抗で I_1 を付録 C によって変形したものである。 D_W は造波抵抗であり、 D_H は 2 次元理論で水頭抵抗となすけたものであり、夫々が独立している点は興味深い。

4. 可逆定理

Flax に従って一様流れを逆にした流れを考えてそれを逆流れと呼びその諸量は上に (～) 印をつけて示す事にしよう²⁾。(1), (2) に対応する関数は

$$-\bar{\phi}_x(x, y, 0) + K\bar{\zeta}(x, y) = -\bar{p}(x, y) \quad (36)$$

$$\bar{\phi}_x(x, y, 0) = -\bar{\zeta}_x(x, y) \quad (37)$$

核関数については流れの方向が逆になっただけであ

るから、 x の符号をかえるだけでよいが、 y 方向の対称性も考えると

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}(x, y, z) &= T(-x, -y, z) \\ \bar{T}_x(x, y, z) &= T_x(-x, -y, z) \\ \bar{T}_{xx}(x, y, z) &= T_{xx}(-x, -y, z) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$\bar{S}^*$ については今度は x の正の側で凹むとして

$$\bar{S}^*(x, y, z) = S^*(-x, -y, z) - \frac{z}{\pi \rho^2} \quad (39)$$

と採る事にする。そうすると

$$\bar{\phi}(x, y, z) \\ = \iint_F \bar{p}(\xi, \eta) \bar{T}_x(x - \xi, y - \eta, z) d\xi d\eta \\ + K \int_{CA} \bar{A}(\eta_A) \bar{T}(x - \xi_A, y - \eta_A, z) d\eta_A \quad (40)$$

$$\bar{\zeta}(x, y) = - \iint_F \bar{p}(\xi, \eta) \bar{T}_x(x - \xi, y - \eta, 0) d\xi d\eta \\ + \int_{CF} \bar{A}(\eta_A) \bar{S}^*(x - \xi_A, y - \eta_A, 0) d\eta_A \quad (41)$$

$$\bar{\zeta}_x(x, y) = - \iint_F \bar{p}(\xi, \eta) \bar{T}_{xx}(x - \xi, y - \eta, 0) d\xi d\eta \\ + K \int_{CF} \bar{T}_{xx}(x - \xi_A, y - \eta_A, 0) d\eta_A \quad (42)$$

そうすると花岡の第 1 定理は²⁾

$$\iint p(x, y) \bar{\zeta}_x(x, y) dx dy - \iint_F \bar{p}(x, y) \zeta_x(x, y) dx dy \\ = K \int_{CF} A(\eta_F) \bar{\zeta}(\xi_F, \eta_F) d\eta_F \\ - K \int_{CA} \bar{A}(\eta_A) \zeta(\xi_A, \eta_A) d\eta_A \quad (43)$$

となる。

先ず (21) で定義した解の逆流れ解を上式に代入すると

$$KA(y') = K \int_{CA} \bar{A}_A(\eta_A; y') \zeta(\xi_A, \eta_A) d\eta_A \\ - \iint_F \bar{p}_A(x, y; y') \zeta_x(x, y) dx dy \quad (44)$$

表 1 で定義した p_r の逆流れ解を代入すると

$$L = \iint_F p(x, y) dx dy$$

$$= \iint_F \bar{p}_r \zeta_r(x, y) dx dy + K \int_{CF} A(\eta_F) \xi_F d\eta_F - K \int_{CF} \bar{A}_r(\eta_A) \zeta(\xi_A, \zeta_A) d\eta_A \quad (45)$$

となる。

$\xi(x, y)$ が与えられると $p(x, y)$ を求めなくとも, p_A , p_r がわかっていれば (44) より $A(y)$ がわかり, それを (45) に代入すると揚力がわかることになる。

モーメントについて同じく表 1 の p_c の逆流解があれば同様で翼理論の Munk の定理に相当するものが得られたことになる。

さらに適当な基本解を導入すれば, (33) の σ , (34) のコッチン関数等を船底オフセットから計算出来る式が導かれるが煩雑になるのでここでは記さない。

5. 結 論

船首付近の舷側が切り立っていて船尾はいわゆるトランサム・スターンである高速船型を浅吃水船理論, つまり水面の圧力分布で表現する線形理論を確立した。

従来この種の理論では翼理論同様船底の垂直方向速度を与えて境界値問題を解いていたがそれでは船底の Rise of Floor が表現出来ない。そこで前半の水線面の縁に沿って吸い込み特異性を分布させる試みを記した。この特異性はいわゆる線積分項であるが, ここではそれが後流側で水が凹むと考えて, 堰き止めポテンシャルと呼ぶ事にした。この導入によって境界値問題を定式化し, 幾つかの基本解を計算しておく, 自由航走時における船体の沈下量とトリムを求める式が出来る。また抵抗については従来知られている飛沫抵抗, 造波抵抗の他に水頭抵抗と名付けた成分が加わる。これは前述の堰き止めポテンシャルのみに関係する。最後にこの場合にも可逆定理が成立し, 翼理論の Munk の定理に相当するものが得られる事を示した。

参 照 文 献

- 1) 丸尾孟, 水面滑走体の造波抵抗理論, 造船協会々報81号, 1949
- 2) T. Hanaoka, On the Reverse Flow Theorem Concerning Wave-Making Theory, 9th Japan Nation Congress for Appl. Mech., 1959
- 3) M. Bessho, On the Fundamental Function in the Theory of the Wave-Making Resistance of Ships, Mem. of the Defense Academy vol. 4, No. 2, 1964
- 4) T. Shen, F. Ogilvie, Non-linear hydrodynamic theory of finite-span planing surface, J. of Ship Research, vol. 16, No. 1, 1972
- 5) M. Bessho, Line Integral, Uniqueness and

Diffraction of Wave in the Linearized Theory, Intern. Semi. on Wave Resistance, Tokyo, 1976

6) 別所正利, 浅吃水船の2次元造波抵抗理論について, 防衛大学校理工学研究報告投稿中, 1991

付 録 A 核関係

原点に吸い込みのある速度ポテンシャルを基本特異性として次のように定義する。

$$T(x, y, z) = - \lim_{\mu \rightarrow +0} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{kz + i k(x \cos \theta + y \sin \theta)} dk d\theta}{k \cos^2 \theta - K + \mu i \cos \theta} \quad (A.1)$$

これは著者の前に定義した関数記号を使えば³⁾

$$T(x, y, z) = \frac{1}{\pi} O_2^{\Omega}(Kx, Ky, -Kz) \quad (A.2)$$

となる。

先ず次の微分方程式を満たす。

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + K \frac{\partial}{\partial z} \right) T(x, y, z) &= - \frac{z}{2\pi r^3} \\ r &= \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} \end{aligned} \right\} \quad (A.3)$$

この関数は x が正ならば単調で, x の負の半面にケルビン波系を有すし, x が負の時は

$$T(-x, y, z) = T(x, y, z) - \frac{2}{\pi} P_{-2}(Kx, Ky, -Kz), \quad x > 0 \quad (A.4)$$

となる。ここに

$$\left. \begin{aligned} &P_{-2n}(Kx, Ky, -Kz) \\ &= (-1)^n \int_0^{\pi/2} e^{Kz \sec^2 \theta} \cos(Ky \sec^2 \theta \sin \theta) \\ &\quad \cdot \sin(Kx \sec \theta) \sec^{2n} \theta d\theta \\ &P_{-2n-1}(Kx, Ky, -Kz) \\ &= (-1)^{n+1} \int_0^{\pi/2} e^{Kz \sec^2 \theta} \cos(Ky \sec^2 \theta \sin \theta) \\ &\quad \cdot \cos(Kx \sec \theta) \sec^{2n+1} \theta d\theta \end{aligned} \right\} \quad (A.5)$$

原点の近くでは

$$T(x, y, 0) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \quad (A.6)$$

上流側では

$$T(x, y, z) \xrightarrow{x \gg 1} \frac{1}{2\pi Kr} \quad (\text{A.7})$$

数値計算には次の分解が便利である。

$$\left. \begin{aligned} O_n^{(1)}(Kx, Ky, -Kz) \\ = Q_n(Kx, Ky, -Kz) \\ + P_n(Kx, Ky, -Kz) \\ O_n^{(1)}(-Kx, Ky, -Kz) \\ = (-1)^n [O_n^{(1)}(Kx, Ky, -Kz) \\ - 2P_n(Kx, Ky, Kz)] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.8})$$

特に $z \rightarrow 0$ ではつぎの積分表示が出来る。

$$\left. \begin{aligned} Q_{-2n}(Kx, Ky, 0) \\ = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-Ky \sin u \cos u} \\ \cdot \cos(Kx \sin u) \sin^{2n-1} u \\ + \frac{(-1)^{n-1}}{2} \int_0^{\pi/2-\phi} \sin[Kx \sec \theta \\ - Ky \sec \theta \tan \theta] \sec^{2n} \theta d\theta \\ \tan \phi = \frac{y}{x}, \frac{\pi}{2} > \phi > 0, x > 0 \\ Q_{-2n-1}(Kx, Ky, 0) \\ = \frac{(-1)^n}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-Ky \sin u \cos u} \\ \cdot \sin(Kx \sin u) \sin^{2n} u du \\ + \frac{(-1)^{n-1}}{2} \int_0^{\pi/2-\phi} \cos[Kx \\ - y \tan \theta] \sec \theta] \sec^{2n+1} \theta d\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.9})$$

微分は

$$T_x(x, y, z) = \frac{K}{\pi} [O_{-3}^{(1)}(Kx, Ky, -Kz) + q_{-3}(Kx, Ky, -Kz)] \quad (\text{A.10})$$

$$T_z(x, y, z) = -\frac{K}{\pi} [O_{-4}^{(1)}(Kx, Ky, -Kz) + q_{-4}(Kx, Ky, -Kz)] \quad (\text{A.11})$$

$$T_{xz}(x, y, z) = -\frac{K^2}{\pi} [O_{-5}^{(1)} + q_{-5}] - \frac{K}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} q_{-3} \quad (\text{A.12})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{K}{\pi} q_{-3}(Kx, Ky, -Kz) \\ = \frac{-1}{2\pi} \frac{xz}{r\rho^2}, \quad \rho^2 = x^2 + y^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{K}{\pi} q_{-4}(Kx, Ky, -Kz) \\ = \frac{r^2 y^2 - z^2 x^2}{r\rho^4} \xrightarrow{z=0} \frac{r}{2\pi y^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.13})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{K}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} q_{-3}(Kx, Ky, -Kz) \\ = \frac{-1}{2\pi} \left[\frac{x}{r\rho^2} - \frac{xz^2}{r^3\rho^4} (\rho^2 + 2r^2) \right] \xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{-x}{2\pi r y^3} \\ q_{-3}(Kx, Ky, -Kz) = - \int^x dx \frac{\partial}{\partial z} q_{-4} \xrightarrow{z=0} 0 \end{aligned} \right\}$$

最後に

$$\begin{aligned} S^*(x, y, z) &= K \int_{-\infty}^x T_x(x, y, z) dx \\ &= -\frac{K}{\pi} O_{-3}^{(1)}(Kx, Ky, -Kz) + \frac{z}{2\pi\rho^2} \quad (\text{A.14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^*(-x, y, z) &= \frac{K}{\pi} O_{-3}^{(1)}(Kx, Ky, Kz) \\ &\quad - \frac{2K}{\pi} P_{-3}(Kx, Ky, -Kz) + \frac{z}{2\pi\rho^2} \\ &\xrightarrow{x \gg 1} \frac{z}{\pi\rho^2} - \frac{2K}{\pi} P_{-3}(Kx, Ky, -Kz) \quad (\text{A.15}) \end{aligned}$$

特に

$$S^*(0, y, z) = -\frac{K}{\pi} P_{-3}(0, Ky, -Kz) + \frac{z}{2\pi\rho^2} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} S_z^*(x, y, 0) &= K T_z(x, y, 0) \\ &= K T_z(-x, y, 0) \\ &\quad - \frac{2K^2}{\pi} P_{-4}(Kx, Ky, 0) \quad (\text{A.17}) \end{aligned}$$

無限下流側では次の値に漸近する。

$$\left. \begin{aligned} T_x(x, y, z) &\xrightarrow{x \ll -1} \frac{2K}{\pi} P_{-3}(k|x|, Ky, -Kz) \\ T_z(x, y, z) &\xrightarrow{x \ll -1} \frac{2K}{\pi} P_{-4}(K|x|, Ky, -Kz) \\ T_{xz}(x, y, z) &\xrightarrow{x \ll -1} -\frac{2K^2}{\pi} P_{-5}(K|x|, Ky, -Kz) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.18})$$

なお P_{-n} については次の表現も出来る。

$$\begin{aligned} P_{-n}(Kx, Ky, 0) \\ = \frac{i^{n-1}}{4} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iK(x \cos \theta + y \sin \theta) \sec^2 \theta} |\sec^n \theta| d\theta \quad (\text{A.19}) \end{aligned}$$

付録B 堰き止めポテンシヤル

$$\phi(x, y, z) = -K \int_{0_F} A(y_F) T(x - x_F, y - y_F, z) dy_F \quad (B.1)$$

$$\zeta(x, y) = \int_{0_F} A(y_F) S^*(x - x_F, y - y_F, z) dy_F \quad (B.2)$$

も今、堰き止めポテンシヤルと呼んでおこう。(A. 13) により

$$S^*(x - x_F, y - y_F, z) = -K \int_{-\infty}^{x_F} T_x(x - \xi, y - y_F, z) d\xi \quad (B.3)$$

となるから、これは一定圧力が x_F より無限後流まで続くポテンシヤルと解される。上流側では

$$S^*(x, y, z) \rightarrow \frac{z}{2\pi\rho^2} \left(1 - \frac{x}{r}\right) \rightarrow 0 \quad (B.4)$$

となり、下流側では (A. 14) のように近似されるから上流側では

$$\zeta(x, y) \rightarrow 0 \quad (B.5)$$

下流側では

$$\begin{aligned} \zeta(-x, y) &\rightarrow -A(y) \\ &- \frac{2K}{\pi} \int_{0_F} A(y_F) P_{-1}(Kx - x_F, Ky - y_F, 0) dy_F \end{aligned} \quad (B.6)$$

となって $A(y)$ なる水面の凹みが無限に後流に続いている。自由表面から系外に出て行く流量は

$$\begin{aligned} Q &= - \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_x(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(-\infty, y) dy \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} A(y) dy \end{aligned} \quad (B.7)$$

抗力は

$$\begin{aligned} D &= K \int \int A(y) \zeta_x(x, y) dx dy \\ &= K \int_{0_F} A(y) [\zeta(x_F, y) + A(y)] dy \end{aligned} \quad (B.8)$$

付録C 飛沫積分

積分 (21) の核の $y = \eta$ 付近の特異性は強いから

$$\begin{aligned} D_S &= \frac{1}{2\pi} \iint_F p(x, y) dx dy \\ &\cdot \iint_F \frac{p(\xi, \eta)(x - \xi) d\xi d\eta}{(y - \eta)^2 \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_F p(x, y) dx dy \int_F p(\xi, \eta) I(x - \xi) d\xi \end{aligned} \quad (C.1)$$

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{y^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (C.2)$$

のようになると考えられる。

さて

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{xz}{\rho^2 r} \right) \rightarrow \frac{x}{y^2 r} \quad (C.3)$$

であったから元にかえて調和関数である事を考えると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{xz}{\rho^2 r} \right) &= - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^x \frac{dx}{r} \\ &= - \frac{x}{r^3} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^x \frac{dx}{r} \end{aligned} \quad (C.4)$$

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{xz}{\rho^2 r} \right) dy \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{r} + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^x \frac{dy}{r} \Big|_{y=-\infty}^{y=\infty} \\ &= \left[\frac{-2xy}{(x^2 + z^2)r} - \frac{2xy}{\rho^2 r} \right]_{y=-\infty}^{y=\infty} \\ &\simeq - \frac{2x}{x^2 + z^2} \xrightarrow{z \rightarrow 0} - \frac{2}{x} \end{aligned} \quad (C.5)$$

それ故

$$D_S = \frac{1}{\pi} \int dy \int p(x, y) dx \int \frac{p(\xi, \eta)}{\xi - x} d\xi \quad (C.6)$$

となり、右辺の x, ξ に関する積分を実行すると

$$D_S = \frac{\pi}{4} \int \sigma^2(y) dy \quad (C.7)$$

$$\sigma(y) = \lim_{x \rightarrow x_F} \left[p(x, y) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_F} \right)^2} \right] \quad (C.8)$$

動揺しながら前進する2次元浅吃水船に働く流体力について

別 所 正 利

(平成4年4月17日受付; 平成4年5月15日再受付)

Hydrodynamical Forces Acting on a Oscillating Two-Dimensional Shallow Draft Ship Advancing with a Constant Speed

By Masatoshi BESSHO

The theory of a two-dimensional shallow draft ship represented by a surface pressure distribution advancing and oscillating in a sea way suffers from the difficulty, that is, if the flow satisfies Kutta's condition at her stern her wetted length must vary and contrarily if her wetted length does not vary Kutta's condition cannot be satisfied. To overcome this difficulty and to construct a consistent theory of a shallow-draft ship, who has a vertical stem and transom stern, the source singularity is introduced and formulas to give hydrodynamical forces acting on the ship are given.

Especially for the resistance augmentation in sea way, a new component, say a head resistance, has appear from this singularity.

1. 序 論

動揺しながら前進する船の境界値問題については定常問題と同様いわゆる線積分項が出て来て、その解釈をめぐって議論が多い⁷⁾⁸⁾。

吃水が充分浅いとして近似的に船は水面の圧力分布で表されるとするとこの線積分項は消えてこの問題はなくなるけれども、一方船尾でクッタの条件を満たすものとする船底表面条件を満足させる事が出来なくなる。あるいは逆に船底表面条件を満たすと、クッタの条件は満足させられない⁵⁾⁶⁾。

滑走平板のようなものについて考えればこれは浸水面の変化を考えに入れて両者を満たすようにする事が出来るが、船首部がほぼ垂直で水線面がほぼ変化しない場合はこの考えではうまく行かない。そこで定常問題で導入した手法、水面における吹き出し特異性(線積分項に対応する)を考えてこの難点をさける為の定式化を試みようとするものである⁹⁾。この特異性は現

象的には船首前面で水を堰き止める、もしくは波を堰き返す事に対応していると考えられるので以下それを堰き止めポテンシャルと呼ぶ事にする⁹⁾¹⁰⁾。

筆者は先に同じ問題を考え、また浸水長が変化する場合についても考察したが、普通の船では船尾に浸み点を有する流れは物理的に考え難く、また一方船首が鉛直に近い場合は浸水長はほぼ変化しないので共に現実的でないと考えられる⁵⁾⁶⁾。

本報はそれらの難点を避ける為の試みで浅吃水で船首が垂直で、船尾でタック流出条件を満たすような場合の流体力、抵抗増加等の理論である。

2. 速度ポテンシャルと境界条件¹⁾²⁾⁷⁾

密度 ρ , 前進速度 V , 半船長をそれぞれ単位にとって Fig. 1 のように座標系をとるものとする。

船は前進しつつ、円周波数 ω で動揺するものとし、その速度ポテンシャルを $\phi(x, y)$, 圧力を $p(x)$, 水面変化を $\eta(x)$ とし、慣習に従って複素表示すると、水面ではベルヌーイの定理から

* 防衛大学校 機械工学教室 教授

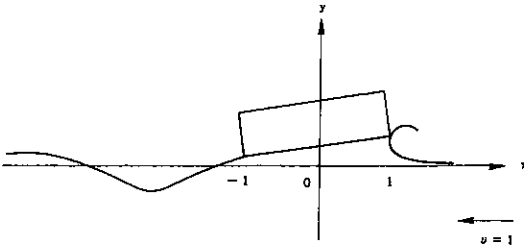


図1 座標系
Fig. 1 Co-Ordinate System

$$\left(i\omega - \frac{\partial}{\partial x}\right)\phi(x, 0) - K\eta(x) = p(x), \quad K = g/U^2 \quad (1)$$

となり、また上向き速度は次のようになる。

$$\phi_y(x, 0) = -\left(i\omega - \frac{\partial}{\partial x}\right)\eta(x) \quad (2)$$

このような条件を満たす速度ポテンシャルはよく知られているが、それに更に前縁に吹き出し特異性を導入して浸水長が変化しなくても後縁の流出条件を満たす事が出来るようにしておく。

このポテンシャルは定常問題では、水を堰き止める効果を表現していると考えられるのでその類推から今の場合も堰き止めポテンシャルと呼ぶ事にする。そうすると付録の核関数を用いて次のように表される。

$$\phi(x, y) = \int_{-1}^1 p(\xi) S(x - \xi, y) d\xi + KAT(x - 1, y) \quad (3)$$

$$\eta(x) = -\int_{-1}^1 p(\xi) T_y(x - \xi, 0) d\xi + AS^*(x - 1, 0) \quad (4)$$

$$\phi_y(x, 0) = \int_{-1}^1 p(\xi) \left[\frac{1}{\pi(\xi - x)} + S'_y(x - \xi, 0) \right] \times d\xi + KAT_y(x - 1, 0) \quad (5)$$

境界条件は(4)式または(5)式で指定されるが翼理論におけるように(5)式で指定すると η は $\exp(i\omega x)$ の定数倍だけ不定になるのでそれを避ける為に堰き止めポテンシャルを導入した訳である。

さて境界条件は船体の曲がりがないとすると上下揺れ、縦揺れ共 $y=0$ で指定されどんな船も平板と同じになる。前後揺れについては船型が関係して来るが通常の仮定に従って今は考えない事にする。そうすると問題を解くに必要な解は次表のようになる。

なお今は η を境界条件として(4)式を解くものと考えている。もし ϕ_y を与えて(5)式から解をうるものとする η は $\exp(i\omega x)$ の定数倍だけ不定となるので注意すべきである。

最後に散乱ポテンシャルについては入射波は

表1 基本解
Table 1 Basic Solution

Mode	Suffix	η	ϕ_y
heave	h	1	$-i\omega$
pitch	τ	ix	$i + \omega x$
stationary	0	$-\exp[i\omega(x-1)]$	0
diffraction	$j(1,2)$	$-\exp(iK_j x)$	$i(\omega - K_j)\exp(iK_j x)$
	$j(3,4)$	$-\exp(-iK_j x)$	$i(\omega + K_j) \times \exp(-iK_j x)$

$$\eta_{in}(x) = e^{iK_j x} \quad (6)$$

とし、 $\omega > \frac{K}{4}$ ならば $j=1, 2$ のみ、

$\omega > \frac{K}{4}$ ならば $j=1 \sim 4$ となる (付録 A 参照)

これらの解はすべて下添字によって区別する事にする。

上表からわかるように上棒で複素共役値を示すものとする次の関係がある。

$$\eta(-x) = \overline{\eta(x)}, \quad \phi_y(-x, 0) = -\overline{\phi_y(x, 0)}, \quad \eta_x(-x) = -\overline{\eta_x(x)} \quad (7)$$

それ故入射波 η_j の中で動揺する場合の解は上下揺れ、縦揺れの振幅を h, τ として

$$\left. \begin{aligned} \phi(x, y) &= h\phi_h(x, y) + \tau\phi_\tau(x, y) + \phi_j(x, y) \\ p(x) &= hp_h(x) + \tau p_\tau(x) + p_j(x) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

のように書ける。

無限遠方では(4)式および(A・24)式により

$$\begin{aligned} \eta(x) \xrightarrow{x \ll -1} & \frac{iK_1}{K_2 - K_1} H(-K_1) e^{iK_1 x} \\ & - \frac{iK_2}{K_2 - K_1} H(-K_2) e^{iK_2 x} \\ & + \frac{iK_4}{K_4 - K_2} H(K_4) e^{-iK_4 x} - A e^{i\omega(x-1)} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\eta(x) \xrightarrow{x \gg 1} -\frac{iK_3}{K_4 - K_3} H(K_3) e^{-iK_3 x} \quad (10)$$

となるが $\omega > \frac{K}{4}$ では K_3, K_4 の項はない。

ここに

$$\left. \begin{aligned} H(\pm K_1) &= \int_{-1}^1 p(x) e^{\pm iK_1 x} dx - i \frac{\omega - K_1}{K_1} A e^{\pm iK_1} \\ H(\pm K_2) &= \int_{-1}^1 p(x) e^{\pm iK_2 x} dx - i \frac{\omega - K_2}{K_2} A e^{\pm iK_2} \\ H(\pm K_3) &= \int_{-1}^1 p(x) e^{\pm iK_3 x} dx - i \frac{\omega + K_3}{K_3} A e^{\pm iK_3} \\ H(\pm K_4) &= \int_{-1}^1 p(x) e^{\pm iK_4 x} dx - i \frac{\omega - K_4}{K_4} A e^{\pm iK_4} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

3. 力, モーメント, 運動方程式

揚力, モーメントは次式で与えられるものとする。

$$\left. \begin{aligned} L &= \int_{-1}^1 p(x) dx \\ M &= \int_{-1}^1 p(x) x dx \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

(8)式の解を代入すると入射波の圧力を考えて

$$\left. \begin{aligned} L &= hL_h + \tau L_\tau + L_j \\ M &= hM_h + \tau M_\tau + M_j \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

となるから, 船の質量を m , 慣性モーメントを J とすると運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} (-\omega^2 m - L_h)h - \tau L_\tau &= L_j \\ -M_h h - (\omega^2 J + M_\tau)\tau &= M_j \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

と与えられる故解は直ちに

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{1}{\Delta} \left[-(\omega^2 J + M_\tau)L_j + L_\tau M_j \right] \\ \tau &= \frac{1}{\Delta} \left[-(\omega^2 m + L_h)M_j + M_h L_j \right] \\ \Delta &= (\omega^2 m + L_h)(\omega^2 J + M_\tau) - L_\tau M_h \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

となる。

4. 可逆定理

可逆定理には花岡の第1, 第2定理があるが今は第2定理は少し複雑であり有用でないようなので第1定理についてのみ述べる²⁾⁵⁾⁶⁾。

その際従来は逆流の概念を導入したけれど, 2次元問題ではそれは x の符号を変えただけの事になるのでここでは単なる為めにそれを導入しないで考えよう。

さて先端特異性は(A・9)式から判るように先端から無限後方まで続く圧力分布と等価であるから花岡の第1定理は ϕ , ϕ' なる2つのポテンシャルについて

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p(x) \phi'(-x) dx + KA \int_{-\infty}^1 e^{i\omega(x-1)} \phi'(-x) dx \\ = \int_{-1}^1 p'(x) \phi(-x) dx + KA' \int_{-\infty}^1 e^{i\omega(x-1)} \phi(-x) dx \end{aligned}$$

となるが水面では(2)が常に成立つので左右両辺の第2項は直ちに積分出来て

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p(x) \phi'(-x) dx - KA \eta'(-1) \\ = \int_{-1}^1 p'(x) \phi(-x) dx - KA' \eta(-1) \end{aligned} \quad (16)$$

なる定理を得る。

ϕ' として Table 1 の解 (クッタの流出条件を満たす) を導入すると次のような等式を得る。

$$KA = \int_{-1}^1 p_0(x) \phi_y(-x) dx - KA_0 \eta(-1) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} i\omega \int_{-1}^1 p(x) dx - KA = \int_{-1}^1 p_h(x) \phi_y(-x) dx \\ - KA_h \eta(-1) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p(x)(i - \omega x) dx + iKA = \int_{-1}^1 p_\tau(x) \phi_y(-x) dx \\ - KA_\tau \eta(-1) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} i(\omega - K_j) \int_{-1}^1 p(x) e^{-iK_j x} dx + KA e^{-iK_j} \\ = i(\omega - K_j) H(-K_j) \\ = \int_{-1}^1 p_j(x) \phi_y(-x) dx - KA_j \eta(-1) \end{aligned} \quad (20)$$

上式は $j=1, 2$ に対するもので $j=3, 4$ については K_j の符号をかえるものとする。

これらの内(18), (19)式は Munk の定理の, (20)式は Haskind の定理の拡張であり, 式中の A は(17)式で与えられる。

さらに境界条件が

$$\phi_y(x) = \frac{1}{\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \right], \quad x = -\cos \theta \quad (21)$$

あるいは

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-1+\varepsilon} \frac{\phi_y(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1, \quad \phi_y(x) = 0 \text{ for } 1 > x > \varepsilon - 1 \quad (21')$$

なる問題の解を p_s とすると

$$\sigma - KA \eta_s(-1) = \int_{-1}^1 p_s(x) \phi_y(-1) dx - KA_s \eta(-1) \quad (22)$$

となるので, この解から飛沫の強さがわかる。

(17)~(20)の式では $\eta(x)$ が与えられた境界条件と考えている。もし $\phi_y(x)$ が与えられたものとする, η は(2)式の微分方程式の解として求められる故 $\exp(i\omega x)$ の定数倍だけ不定であるので注意すべきである。従って(22)式の場合(21)式の境界条件によって(5)式を解いて p_s を求め, それを(4)式に代入して η_s を求める事になる。最後に一応第2定理を記しておく。

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p(x) \eta'(-x) dx + A \left[\phi'(-1, 0) \right. \\ \left. - e^{-i\omega} \int_{-1}^1 p'(x) e^{-i\omega x} dx \right] \\ = \int_{-1}^1 p'(x) \eta(-x) dx + A' \left[\phi(-1, 0) \right. \\ \left. - e^{-i\omega} \int_{-1}^1 p(x) e^{-i\omega x} dx \right] \end{aligned} \quad (23)$$

5. 仕事, 減衰, 波浪中抵抗増加

さて次の積分を考えよう。

$$W(p, p') = \frac{1}{4} \left[\int_{-1}^1 p(x) \overline{\phi'_y(x)} dx + \int_{-1}^1 \overline{p'(x)} \phi_y(x) dx \right] + I(p, p') \quad (24)$$

$$\begin{aligned} I(p, p') &= \frac{KA}{4} \int_{-\infty}^1 e^{i\omega(x-1)} \overline{\phi'_y(x)} dx \\ &\quad + \frac{K\overline{A}}{4} \int_{-\infty}^1 e^{-i\omega(x-1)} \phi_y(x) dx \\ &= \frac{K}{2} A \overline{A'} + \frac{K}{4} [A \overline{\eta'(1)} + \overline{A'} \eta(1)] \end{aligned} \quad (25)$$

$$D(p, p') = \frac{i\omega}{4} \left[\int_{-1}^1 p(x) \overline{\eta'(x)} dx - \int_{-1}^1 \overline{p'(x)} \eta(x) dx \right] + J(p, p') \quad (26)$$

$$\begin{aligned} J(p, p') &= \frac{i\omega K}{4} \left[A \int_{-\infty}^1 e^{i\omega(x-1)} \overline{\eta'(x)} dx - \overline{A'} \int_{-\infty}^1 e^{-i\omega(x-1)} \eta(x) dx \right] \\ &= -\frac{i\omega A}{4} \left[\overline{\phi'(1, 0)} + \int_{-1}^1 \overline{p'(x)} e^{i(\omega-1)x} dx \right] \\ &\quad + \frac{i\omega \overline{A'}}{4} \left[\phi(1, 0) + \int_{-1}^1 p(x) e^{-i(\omega-1)x} dx \right] \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} R(p, p') &= W(p, p') - D(p, p') \\ &= \frac{1}{4} \left[\int_{-1}^1 p(x) \overline{\eta'(x)} dx + \int_{-1}^1 \overline{p'(x)} \eta(x) dx \right] + F(p, p') \end{aligned} \quad (28)$$

$$F(p, p') = \frac{K}{4} \left[A \int_{-\infty}^1 e^{i\omega(x-1)} \overline{\eta'(x)} dx + \overline{A'} \int_{-\infty}^1 e^{-i\omega(x-1)} \eta(x) dx \right] \quad (29)$$

p と p' が等しければ W, D, R はそれぞれ水に与えられるパワー、減衰、抵抗である(前進速度 $U=1$ としてある事に注意)。

先端特異性を考えなければ I, J, F は考えなくて良く従来の式に一致する。

さて ϕ_y, η 等とその複素共役値の間の関係を(A・25)～(A・29)式に代入して上式を整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned} W(p, p') &= \frac{\pi}{8} \sigma \overline{\sigma'} + \frac{K}{4} A \overline{A'} + \frac{1}{4(K_2 - K_1)} \\ &\quad \times [K_1(\omega - K_1)H(-K_1)\overline{H'}(-K_1) \\ &\quad - K_2(\omega - K_2)H(-K_2)\overline{H'}(-K_2)] \\ &\quad + \frac{1}{4(K_4 - K_3)} [K_3(\omega + K_3)H(K_3)\overline{H'}(K_3) \\ &\quad + K_4(\omega + K_4)H(K_4)\overline{H'}(K_4)] \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} D(p, p') &= \frac{\omega}{4(K_2 - K_1)} [K_1 H(-K_1)\overline{H'}(-K_1) \\ &\quad - K_2 H(-K_2)\overline{H'}(-K_2)] \\ &\quad + \frac{\omega}{4(K_4 - K_3)} [K_3 H(K_3)\overline{H'}(K_3) \\ &\quad + K_4 H(K_4)\overline{H'}(K_4)] \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} R(p, p') &= \frac{\pi}{8} \sigma \overline{\sigma'} + \frac{K}{4} A \overline{A'} \\ &\quad + \frac{1}{4(K_2 - K_1)} [K_1^2 H(-K_1)\overline{H'}(-K_1) \\ &\quad + K_2^2 H(-K_2)\overline{H'}(-K_2)] \\ &\quad + \frac{1}{4(K_4 - K_3)} [K_3^2 H(K_3)\overline{H'}(K_3) \\ &\quad + K_4^2 H(K_4)\overline{H'}(K_4)] \end{aligned} \quad (32)$$

なお以上の式で $\omega > \frac{K}{4}$ ならば K_3, K_4 を含む項は消える。

$$\left. \begin{aligned} p' &= p = h p_h + \tau p_\tau + p_j \\ \phi' &= \phi = h \phi_h + \tau \phi_\tau + \phi_j \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

とすると(32)式は単位入射波 η_j があるときの浅吃水船の波浪中の抵抗増加を与える式となる。その第1項は飛沫抵抗、第3項は造波抵抗であり、第2項は定常問題で水頭抵抗と名付けたものである⁹⁾¹⁰⁾。

6. 結 論

近似的に水面の圧力分布で表現されるような浅吃水船についてはそれが滑走する、つまり船尾でクッタの流出条件を満たすならば理論上浸水長が変化しなければならず、またそうでない、つまり後端に濺み点を持つとすれば浸水長が変わらなくても良いが物理的に実現しそうにもない流れになると考えられる。

本報は先端に吹き出し特異点を置いて浸水長は変化しないで船尾の流出条件を満たす解を求め、その場合の流体力、抵抗等の理論式を求めたものである。

この先端吹き出しポテンシャルを今仮に堰き止めポテンシャルと呼ぶが、それは船尾が垂直になっている事に対応していると考えられ、また後流側に定在波を残している。この導入によって波浪中抵抗増加については従来の飛沫抵抗、造波抵抗の他に水頭抵抗と仮に呼ぶ成分が出て来る。

以上の事からこの理論は Transom stern を持ち船首が垂直な船の波浪中動揺に関するものと考えられるが、船尾形状が典型的な Transom 型でない場合も上述のようにそこで濺み点を持つ流れは考え難いのでこの理論はかなり一般性を持つものと考えられる。

またそのような船では定常走航はフルード数0.61以上では不可能である事が理論上わかっており、この速度はまた動揺問題を解いて安定性を調べた結果とも一致している⁷⁾¹⁰⁾。いずれにしてもこの先端吹き出し特異点の導入によって始めて整合性を持った線形理論を構築する事が出来、そこから水頭抵抗と言う新しい成分が出て来ると言うのがもし正しいとすると実際上も大変興味深いと考えられる。

参考文献

- 1) 花岡達郎：非定常造波抵抗理論(その1)，造船協会論文集，89号，昭和26年
- 2) Hanaoka, T.: On the Reverse Flow Theorem Concerning Wave-Making Theory, Proc. 9-th Japan Nat. Congr. for Appl. Mech., 1959
- 3) Haskind, M.D.: Unsteady gliding on an undulating surface of a heavy fluid, Prikl. Math. Mech., vol. 19, 1955
- 4) M. Bessho & K. Nomura, A Contribution to the Theory of Two-Dimensional Hydro-Planing, Mem. of the Defense Academy vol. 10 No. 1, 1970
- 5) 別所正利，動揺する2次元浅吃水船に働く流体力の理論について，関西造船協会誌第165号 昭和52年6月
- 6) 別所正利，動揺する2次元滑走板に働く流体力について，関西造船協会誌第165号，昭和52年6月
- 7) 別所正利，鈴木勝雄，2次元動揺滑走板の安定性について，防衛大学校理工学研究報告 第25巻1号，昭和62年3月
- 8) 柏木正，前進しながら動揺する船の流体力学における2，3の問題点，九州大学応用力学研究所報 第35号，昭和62年12月
- 9) 別所正利，浅吃水船の2次元造波抵抗理論について，防衛大学校理工学研究報告 第29巻1号 平成3年9月
- 10) 別所正利，佐久間俊，2次元浅吃水船の航走姿勢について，関西造船協会 平成4年 春期講演会予稿集

付録 A 核関数⁽⁸⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾

原点に吹き出し特異点のある速度ポテンシャルと流れ関数は次式で与えられる。

$$T(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left[\frac{e^{ikx}}{A(k)} + \frac{e^{-ikx}}{B(k)} \right] e^{ky} dk \quad (A1)$$

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left[\frac{e^{ikx}}{A(k)} + \frac{e^{-ikx}}{B(k)} \right] e^{ky} dk \quad (A2)$$

従って

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} T(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial y} G(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} T(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial x} G(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (A3)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} A(k) &= (k - \omega)^2 - kK = (k - K_1)(k - K_2) \\ B(k) &= (k + \omega)^2 - kK = (k - K_3)(k - K_4) \end{aligned} \right\} K = g \quad (A4)$$

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \omega e^{\mp \alpha}, \tan \alpha = \frac{\sqrt{K^2 + \omega K}}{2\omega + K} \\ K_2 &= \omega e^{\mp \beta}, \tan \beta = \frac{\sqrt{K^2 - 4\omega K}}{K - 2\omega}, f \text{ or } K > 4\omega \end{aligned} \right\} \quad (A5)$$

$$\left. \begin{aligned} K_3 &= \omega e^{\mp \beta}, \tan \beta = \frac{\sqrt{K^2 - 4\omega K}}{K - 2\omega}, f \text{ or } K > 4\omega \\ K_4 &= \omega e^{\mp i\beta'}, \tan \beta' = \frac{\sqrt{4\omega K - K^2}}{K - 2\omega}, f \text{ or } K < 4\omega \end{aligned} \right\} \quad (A6)$$

であるが、これからの根の複素平面上的位置は図2に示す通りである。

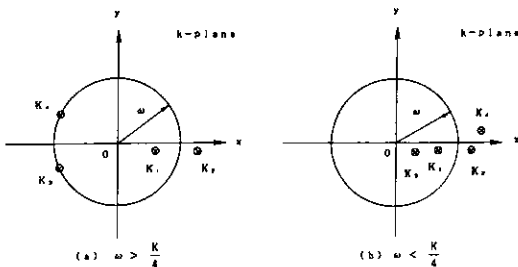


図2 根の位置
Fig. 2 Location of roots

これらの関数は次の微分方程式を満たす。

$$\left[\left(\omega - \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + K \frac{\partial}{\partial y} \right] \begin{Bmatrix} T(x, y) \\ G(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{y}{\pi(x^2 + y^2)} \\ -\frac{x}{\pi(x^2 + y^2)} \end{Bmatrix} \quad (A7)$$

補助的に次の2つの関数を導入する。

$$S(x, y) = \left(i\omega - \frac{\partial}{\partial x} \right) T(x, y) \quad (A8)$$

$$\begin{aligned} S^*(x, y) &= S(x, y) + \frac{e^{i\omega x}}{\pi} \int_x^\infty \frac{ye^{-i\omega \xi}}{\xi^2 + y^2} d\xi \\ &= -K \int_0^\infty e^{i\omega \xi} T_y(x - \xi, y) d\xi \\ &\xrightarrow{y \rightarrow 0} S(x, 0) - \begin{cases} 0 & f \text{ or } x > 0 \\ e^{i\omega x} & f \text{ or } x < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (A9)$$

よく知られているようにこれらの積分はよく知られた指数積分である。以下特に原点近傍の近似値を中心にその値を調べる事にする。

そこで更に

$$\left. \begin{aligned} I_j &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{ikx + ky}}{k - K_j} dk, \quad j = 1, 2 \\ J_j &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{ikx + ky}}{k - K_j} dk, \quad j = 3, 4 \end{aligned} \right\} \quad (A10)$$

なる積分を定義しておくこれらは図2の根の位置を考えて文献(7)によって次のように表される。

$$I_j = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} [g(K_j \bar{z}) - if(K_j \bar{z})], & \bar{z} = x - iy, \\ & f \text{ or } x > 0 \\ \frac{1}{2\pi} [g(K_j \bar{z}) + if(-K_j \bar{z})] - ie^{iK_j x}, & f \text{ or } x < 0 \end{cases} \quad (A11)$$

J_j は ω と K の比により、少し表現が異なり次のようになる。なお簡単の為に $y=0$ の場合を記す事にする。先ず $\omega < K/4$ では (K_3, K_4 は実で)

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{2\pi} [g(K_3|x|) \pm if(K_3|x|)] \\ &+ \begin{cases} -ie^{iK_3 x}, & f \text{ or } x > 0 \\ 0, & f \text{ or } x < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (A12)$$

$$\begin{aligned} J_4 &= \frac{1}{2\pi} [g(K_4|x|) \pm if(K_4|x|)] \\ &+ \begin{cases} 0, & f \text{ or } x > 0 \\ ie^{-iK_4 x}, & f \text{ or } x < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (A13)$$

次に $\frac{K}{2} > \omega > \frac{K}{4}$ では ($\beta' < \frac{\pi}{2}$) (K_3, K_4 は複素数の時)

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{2\pi} [g(\omega|x|e^{-i\beta'}) \pm if(\omega|x|e^{-i\beta'})] \\ &+ \begin{cases} -ie^{-iK_3 x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (A14)$$

$$\begin{aligned} J_4 &= \frac{1}{2\pi} [g(\omega|x|e^{i\beta'}) \pm if(\omega|x|e^{i\beta'})] \\ &+ \begin{cases} 0, & x > 0 \\ ie^{-iK_4 x}, & x < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (A15)$$

最後に $\omega > \frac{K}{4}$ では $(\beta' > \frac{\pi}{2})$

$$\left. \begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{2\pi} \{g(\omega|x|e^{-i\theta}) \mp if(\omega|x|e^{-i\theta})\} \\ J_4 &= \frac{1}{2\pi} [g(\omega|x|e^{i\theta}) \mp if(\omega|x|e^{i\theta})] \end{aligned} \right\} \quad (A16)$$

これらの I_j , J_j 関数によって核関数は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{I_1 - I_2}{K_2 - K_1} + \frac{J_3 - J_4}{K_4 - K_3} \\ G &= i \left(\frac{I_1 - I_2}{K_2 - K_1} - \frac{J_3 - J_4}{K_4 - K_3} \right) \\ S &= i \left[\frac{(\omega - K_1)I_1 - (\omega - K_2)I_2}{K_2 - K_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\omega + K_3)J_3 - (\omega + K_4)J_4}{K_4 - K_3} \right] \\ T_y &= \frac{K_1 I_1 - K_2 I_2}{K_2 - K_1} + \frac{K_3 J_3 - K_4 J_4}{K_4 - K_3} \\ S_y &= -\frac{x}{\pi(x^2 + y^2)} + i \left[\frac{(\omega - K_1)K_1 I_1 - (\omega - K_2)K_2 I_2}{K_2 - K_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\omega + K_3)K_3 J_3 - (\omega + K_4)K_4 J_4}{K_4 - K_3} \right] \end{aligned} \right\} \quad (A17)$$

さて f , g の極限值は次のようになる。

$$f(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{\pi}{2}, \quad g(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} -\log Cz, \quad \log C = .5772 \quad (A18)$$

$$f(z) \xrightarrow{z \gg 1} \frac{1}{z}, \quad g(z) \xrightarrow{z \gg 1} \frac{1}{z^2} \quad (A19)$$

(A・12)～(A・18)を使って以下原点の近くの核関数の近似値を計算する。

まず $\omega < \frac{K}{4}$ では x の正負に応じて

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{\alpha}{2\pi\omega \sinh \alpha} + \frac{\beta - \pi i}{2\pi\omega \sinh \beta} \\ G &= \frac{i\alpha}{2\pi\omega \sinh \alpha} - \frac{i(\beta - \pi i)}{2\pi\omega \sinh \beta} \\ S &= \mp \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{i\alpha(1 - \cosh \alpha)}{2\pi \sinh \alpha} \\ &\quad + \frac{i(\beta - \pi i)(1 + \cosh \beta)}{2\pi \sinh \beta} \\ -T_x &= \mp \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\pi i} \coth \alpha \\ &\quad + \frac{i(\beta - \pi)}{2\pi} \coth \beta \\ T_y &= \frac{1}{\pi} \log |C\omega x| + \frac{i}{2} + \frac{\alpha}{2\pi} \coth \alpha \\ &\quad + \frac{\beta - \pi i}{2\pi} \coth \beta \\ S_y &= -\frac{x}{\pi(x^2 + y^2)} + \frac{\omega}{\pi i} \log |\omega x| + \frac{1}{2}(\omega + K) \\ &\quad \mp \frac{\omega}{2} + \frac{i\alpha(\cosh \alpha - \cosh 2\alpha)}{2\pi \sinh \alpha} \\ &\quad + \frac{i\omega(\beta - \pi i)(\cosh \beta - \cosh 2\beta)}{2\pi \sinh \beta} \end{aligned} \right\} \quad (A20)$$

次に $\frac{K}{2} > \omega > \frac{K}{4}$ では $(\beta' < \frac{\pi}{2})$

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{\alpha}{2\pi\omega \sinh \alpha} + \frac{\beta' - \pi}{2\pi\omega \sin \beta'} \\ G &= \frac{i\alpha}{2\pi\omega \sinh \alpha} - \frac{i(\beta' - \pi)}{2\pi\omega \sin \beta'} \\ S &= \mp \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{i\alpha(1 - \cosh \alpha)}{2\pi \sinh \alpha} \\ &\quad + \frac{i(\beta' - \pi)(1 + \cos \beta')}{2\pi \sin \beta'} \\ -T_x &= \mp \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\pi i} \coth \alpha \\ &\quad + \frac{i(\beta' - \pi)}{2\pi} \cot \beta' \\ T_y &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \log |C\omega x| + \frac{\alpha}{2\pi} \coth \alpha \\ &\quad + \frac{\beta' - \pi}{2\pi} \cot \beta' \\ S_y &= -\frac{x}{\pi(x^2 + y^2)} + \frac{\omega}{\pi i} \log |C\omega x| + \frac{K + \omega}{2} \\ &\quad \mp \frac{K}{2} + \frac{\omega\alpha(\cosh \alpha - \cosh 2\alpha)}{2\pi \sinh \alpha} \\ &\quad + \frac{\omega(\beta' - \pi i)(\cos \beta' - \cos 2\beta')}{2\pi \sin \beta'} \end{aligned} \right\} \quad (A21)$$

最後に $\omega > \frac{K}{2}$ ($\beta' > \frac{\pi}{2}$) について計算して見ると (A・21) に等しくなるので $\omega > \frac{K}{4}$ ならば (A・21) で良い事がわかる。

また S^* については

$$S^*(x, 0) \xrightarrow{x \rightarrow 0} S(x, 0) - \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases} \quad (\text{A22})$$

であるから (A・20), (A・21) より $S^*(x, 0)$ は $x=0$ に於いて連続である。

また

$$S^*(x, y) = S_y(x, y) + \frac{x}{\pi(x^2 + y^2)} \quad (\text{A23})$$

とおいて S_y から右辺の特異性除いたものを定義しておく。最後に充分後流側での近似値を示すが簡単の為に $\omega > \frac{K}{4}$ の場合のみ記す。

$$\left. \begin{aligned} T_x &\approx -\frac{i}{K_2 - K_1}(e^{iK_1x} - e^{iK_2x}) \\ G &\approx \frac{1}{K_2 - K_1}(e^{iK_1x} - e^{iK_2x}) \\ S &\approx \frac{1}{K_2 - K_1}[(\omega - K_1)e^{iK_1x} - (\omega - K_2)e^{iK_2x}] \\ T_y &\approx \frac{i}{K_2 - K_1}[K_1e^{iK_1x} - K_2e^{iK_2x}] \\ S^* &\approx S - e^{i\omega x} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A24})$$

なおそれぞれの複素共役値との間には次の関係がある。

$$\begin{aligned} T(x, 0) - \overline{T(-x, 0)} &= -\frac{i}{K_2 - K_1}(e^{iK_1x} - e^{iK_2x}) \\ &\quad - \frac{i}{K_4 - K_3}(e^{iK_3x} + e^{iK_4x}) \end{aligned} \quad (\text{A25})$$

$$\begin{aligned} T_y(x, 0) - \overline{T_y(-x, 0)} &= -\frac{i}{K_2 - K_1}(K_1e^{iK_1x} - K_2e^{iK_2x}) \\ &\quad - \frac{i}{K_4 - K_3}(K_3e^{-iK_3x} + K_4e^{-iK_4x}) \end{aligned} \quad (\text{A26})$$

$$\begin{aligned} S(x, 0) + \overline{S(-x, 0)} &= \frac{1}{K_2 - K_1}[(\omega - K_1)e^{iK_1x} \\ &\quad - (\omega - K_2)e^{iK_2x}] + \frac{1}{K_4 - K_3} \\ &\quad [(\omega + K_3)e^{-iK_3x} \\ &\quad + (\omega + K_4)e^{-iK_4x}] \end{aligned} \quad (\text{A27})$$

$$S^*(x, 0) + \overline{S^*(-x, 0)} = S(x, 0) + \overline{S(-x, 0)} - e^{i\omega x} \quad (\text{A28})$$

$$\begin{aligned} S_y(x, 0) + \overline{S_y(-x, 0)} &= \frac{1}{K_2 - K_1}[K_1(\omega - K_1)e^{iK_1x} \\ &\quad - K_2(\omega - K_2)e^{iK_2x}] \\ &\quad + \frac{1}{K_4 - K_3}[K_3(\omega + K_3)e^{-iK_3x} \\ &\quad + K_4(\omega + K_4)e^{-iK_4x}] \end{aligned} \quad (\text{A29})$$

付録 B 堰き止めポテンシャル

その速度ポテンシャルは次のように与えられる。

$$\phi(x, y) = KT(x, y) \quad (\text{B1})$$

それによる水面変化は

$$\eta(x) = S^*(x, 0) \quad (\text{B2})$$

速度は

$$u(x, 0) = -KT_x(x, 0) = K[S(x, 0) - i\omega T(x, 0)] \quad (\text{B3})$$

$$v(x, 0) = -\phi_y(x, 0) = (i\omega - \frac{\partial}{\partial x})\eta(x) = -KT_y(x, 0) \quad (\text{B4})$$

一方このポテンシャルは原点の吹き出し特異性によるものであるが、一方原点から後流側無限にのびた圧力分布 ($K\exp(i\omega x)$) によるポテンシャルと等価である。無限後流側水面では進行水波の他に (A・9) 式により $-\exp(i\omega x)$ なる水面変位がある。この水面変位は他の水波と異なり、水と共に一様速度で船と共に進む定常的な変位である。

さて水面からの水の出入りは (B・3), (A・3), (A・20), (A・21) 式により

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} v(x, 0) dx &= -K \int_{-\infty}^{\infty} T_y(x, 0) dx \\ &= K \int_{-\infty}^{\infty} G_x(x, 0) dx \\ &= K[G(\infty, 0) - G(-\infty, 0)] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

となり平均的に水面から水の出入りはない事になる。それ故 (A・20), (A・21) 式より x 方向の速度は原点で有限で1だけジャンプし、 y 方向速度は無限大となる。これからこの特異性は垂直な壁に当たる流れの線形モデルと考えてよいと思われる。

さてこの流れを起こすパワー等を求めるにはこれが原点から後流への半無限の圧力分布と等価である事を利用すれば次のようにもとめられる。

即ち外力のなすパワーは

$$\begin{aligned}
 D &= -\frac{i\omega K}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-i\omega x} \eta(x, 0) - e^{i\omega x} \bar{\eta}(x, 0)] dx \\
 &= -\frac{i\omega K}{4} [T(-0, 0) - \overline{T(-0, 0)}] \\
 &= \begin{cases} \frac{K}{4 \sinh \beta}, & \text{for } \omega < \frac{K}{4} \\ 0, & \text{for } \omega > \frac{K}{4} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{B6}$$

水の受けるパワーは

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{K}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-i\omega x} v(x, 0) + e^{i\omega x} \overline{v(x, 0)}] dx \\
 &= \frac{K}{4} [S^*(x, 0) + \overline{S^*(x, 0)}]_{-\infty}^{\infty} \\
 &= \begin{cases} \frac{K}{2} + \frac{K}{4} \frac{1 + \cosh \beta}{4 \sinh \beta}, & \text{for } \omega < \frac{K}{4} \\ \frac{K}{2}, & \text{for } \omega > \frac{K}{4} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{B7}$$

それ故抵抗は

$$R = \frac{W - D}{U} = \begin{cases} \frac{K}{2} + \frac{K}{4} \tanh \beta, & \text{for } \omega < \frac{K}{4} \\ \frac{K}{2}, & \text{for } \omega > \frac{K}{4} \end{cases} \tag{B8}$$

となる。