

“造波機の理論に関する覚書”

別 所 正 利

内 容 目 次

1. 序論及び記号等
2. 速度ポテンシャルと無限遠方の波
3. 水深が有限な場合
4. 応用例

1. 序論及び記号等

造波機の理論として筆者の知っている資料は僅か*なものであるが、実際にそれを利用している例は入手の容易な刊行物では殆ど見られない様であるので、以下簡単な要約を記し、現在見られる各種造波機に応用して、その大体の特性を求めて概念的理解の用に供するものである。

従って詳しい計算は行わず、造波機を充分離れた所の波についてのみ考える事とし、直接造波機に働く力等については考えない。

此の様な問題については一部計算例*はあるが、他の型式については未だ解かれておらず、今後の興味をさそう次第である。

記号等；

$\sigma = 2\pi/T$, T は波の周期

$\nu = \sigma^2/g$ ；水深無限ならば $\nu = 2\pi/\lambda$, λ は波長

V ；波速, 水深無限ならば $V = \sqrt{g\lambda/2\pi}$,

h_w ；波の振巾（半波高）

h_p ；圧力水頭

p ；圧力, $h_p = p/\rho g$, ρ は水密度, g は重力の常数

ϕ ；速度ポテンシャル

x, y ；垂直上方に y 軸をとり原点を水面においた座標

η ；水面変位

$P \equiv (x, y)$, $Q \equiv (x', y')$

$r_1 = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-x')^2 + (y+y')^2}$, $r_s = \sqrt{(x-x')^2 + (y+y'+2D)^2}$

D ；水路深さ

B ；水路巾

C ；物体境界線左から右に長さを測る。

* T. H. Havelock ; Phil. Mag. (1929)
田才福造；造協論文集105号（昭和34年7月）

n ; C の法線で、水中に向けてとる。
 μ ; レーリーの仮想摩擦係数、運算の後零とおく。
 a ; ストローク

2. 速度ポテンシャルと無限遠方の波^{*}

ベルヌーイの式から自乗の項を省略して

$$p/\rho = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - g y = 0 \quad \text{for } y = 0, \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

同様に表面の連続性から

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \text{for } y = 0, \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

よって

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \text{for } y = 0, \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

今すべての量は T なる周期で振動して定常状態に達しているとすれば

$$\varphi = \text{Re} \{ \Phi e^{i\sigma t} \} \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

$$\eta = \text{Re} \{ H e^{i\sigma t} \} \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

$$p/\rho = \text{Re} \{ P e^{i\sigma t} \} \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

の様に書き、 Φ , H , P 等を複素数として取扱かえば正弦、余弦項の式を一つにまとめてとける。

先ず (2.3) は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \nu \Phi = 0, \quad \text{for } y = 0, \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

さて単位吹出しが Q 点にある時 (2.7) 式を満足する P 点のポテンシャルは、

$$S(P, Q) = \log \left(\frac{r_1}{r_2} \right) - 2 \int_0^\infty e^{K(y+y')} \frac{\cos K(x-x')}{K - \nu + \mu i} dK, \quad \dots\dots (2.8)$$

で与えられる。

そこでグリーンの定理を使って、一般に

$$\Phi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_c \left\{ \frac{\partial \Phi(Q)}{\partial n'} S(P, Q) - \Phi(Q) \frac{\partial}{\partial n'} S(P, Q) \right\} ds', \quad (2.9)$$

但し、 n' は Q 点に関する法線とする。

特に $\nu |x - x'|$ が充分大きいとすると (2.8) 式中の波の部分、

$$S(P, Q) \rightarrow -2\pi i e^{\nu(y+y') - i\nu|x-x'|}, \quad \dots\dots (2.10)$$

$$\nu|x-x'| \gg 1$$

* T. H. Havelock ; 前出, F. Ursell ; Proc. Roy. Soc. vol. 220 (1953)
 佐野静雄 “応用数学” 156頁

従って (2.9) 式も $\nu|x|$ が充分大きければ,

$$\phi(P) \xrightarrow{\nu|x| \gg 1} -i \int_c \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial}{\partial n'} \right\} e^{\nu|y+y'| - i\nu|x-x'|} ds', \dots \quad (2.11)$$

従って (2.1), (2.5) 式から

$$H(x) \xrightarrow{\nu|x| \gg 1} \frac{\sigma}{g} \int_c \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi \frac{\partial}{\partial n'} \right\} e^{\nu y' - i\nu|x-x'|} ds', \dots \quad (2.12)$$

以上は一般式であるから、普通の場合は与えられた境界条件から問題を解かねばならないが、

i) 水面上の圧力分布が与えられる場合

ii) $x=0$ の線に関し左右対称で且つ c がこの線である場合

には簡単な解が既に求められており、次の通りである。

$$H(x) \rightarrow \frac{\nu}{gi} e^{-i\nu x} \int_c p(x') e^{i\nu x'} dx', \quad \text{for } x > x', \quad \dots \quad (2.13)$$

$$H(x) \rightarrow -\frac{2\sigma}{g} e^{-i\nu x} \int_c u(y) e^{\nu y'} dy', \quad \text{for } x > 0, \quad \dots \quad (2.14)$$

ここに $u(y)$ は c 上の x 方向の速度の振巾である。

3. 水路深さが有限の場合

この場合 (2.1) ~ (2.3) の条件の他に更に、

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad \text{for } y = -D, \quad \dots \quad (3.1)$$

でなければならない。

この場合単位吹出しの速度ポテンシャルは、

$$S_D(P, Q) = \log \tau_1 + \log \tau_2 + \int_0^\infty \left\{ e^{\frac{Ky'}{2}} + e^{-\frac{Ky'}{2}} \right\} \frac{\cosh K(y+D)}{\cosh KD} \cos K(x-x') \left\{ \frac{K+\nu}{K \tanh KD - \nu + \mu i} \right\} \frac{dK}{K}, \quad \dots \quad (3.2)$$

この式の右辺の積分は $K=0$ で $1/K$ のオーダーになるから確定的意味を有しないので少し変形しなければならない。

先ず、

$$S_D(P, Q) = I + J \quad \dots \quad (3.3)$$

$$I = \log r_1 + \log r_3 - \int_0^\infty \left\{ e^{\frac{Ky'}{e} - K(y'+2D)} \right\} \frac{\cosh K(y+D)}{\cosh KD} \cos K(x-x') \frac{dK}{K}, \quad (3.4)$$

$$J = \int_0^\infty \left\{ e^{\frac{Ky'}{e} - K(y'+2D)} \right\} \frac{\cosh K(y+D)}{\cosh KD} \cos K(x-x') \left(\frac{1 + \tanh KD}{K \tanh KD - \nu + \mu i} \right) dK, \quad (3.5)$$

とおけば、 J は確定する。(3.4)の積分は、

$$\frac{1}{\cosh KD} = 2e^{-KD} (1 - e^{-2KD} + e^{-4KD} - \dots),$$

の様に展開して項別積分すれば未定の常数を除いて、

$$I = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \log \{ (x-x')^2 + (y-y'-2nD)^2 \} \{ (x-x')^2 + (y+y'-2nD)^2 \},$$

となる。

一方、

$$\frac{\sinh \frac{\pi x}{D}}{\cosh \frac{\pi x}{D} - \cos \frac{\pi y}{D}} = \frac{2D}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + (y+2nD)^2},$$

なる公式を利用すれば、やはり常数を別として、

$$I = \frac{1}{2} \log \left\{ \cosh \frac{\pi(x-x')}{D} - \cos \frac{\pi(y-y')}{D} \right\} \left\{ \cosh \frac{\pi(x-x')}{D} - \cos \frac{\pi(y-y')}{D} \right\}, \dots (3.6)$$

となる。

さて S_D の内の波の成分は、

$$S_D(P, Q) \xrightarrow[\nu|x-x'| \gg 1]{} -2\pi i f(K_0 D, K_0 y) \frac{\cosh K_0(y+D)}{\cosh K_0 D} e^{K_0 y' - i K_0 |x-x'|}, \quad (3.7)$$

$$\text{但し } K_0 \tanh K_0 D = \nu, \quad K_0 = 2\pi/\lambda, \quad \dots\dots\dots (3.8)$$

$$f(K_0 D, K_0 y) = \frac{1}{2} \{ 1 + e^{-2K_0(D+y')} \} \frac{1 + \tanh K_0 D}{\tanh K_0 D + K_0 D \operatorname{sech}^2 K_0 D}, \quad \dots\dots\dots (3.9)$$

となり、これを(2.10)式と比較して、

$$S_D/S = f(K_0 D, K_0 y'), \quad \text{for } y = 0, \quad \dots\dots\dots (3.10)$$

を得る。

従って出来る波の長さは(3.8)式から、振巾は(3.10)から求まる。

普通は波長は深さと同程度の大きさと考えてよい。かつ今 $K_0 D = 2\pi D/\lambda$ を今 1 より大きいとし、深さ無限大のとき得られる波長を $\lambda_0 = 2\pi/\nu$, とおくと (3.8) から、

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \tanh \frac{2\pi D}{\lambda} = 1 - 2e^{-\frac{4\pi D}{\lambda}}, \quad \frac{2\pi D}{\lambda} \gg 1, \quad \dots\dots\dots (3.11)$$

又 (3.9) から $y' = 0$ とおくと、

$$f(K_0 D, 0) \doteq 1 - \left(\frac{8\pi D}{\lambda} - 2\right)e^{-\frac{4\pi D}{\lambda}}, \quad \dots\dots\dots (3.12)$$

$y' = -D$ ならば上式の略々 2 倍となる。

さて、数値例として、 $\lambda = 2D$ とおくと、

$$\lambda/\lambda_0 \doteq .996, \quad f(K_0 D, 0) \doteq .98$$

又、 $\lambda = 4D$ とおくと、

$$\lambda/\lambda_0 \doteq 0.90, \quad f(K_0 D, 0) \doteq 0.80$$

の程度であって、水深の影響は普通の場合あまり大きくはないものと考えられる。

4. 応 用 例

2 節の結果を利用して各種造波機の概略の特性を列記して見よう。

其等の特性として細い事を除いて、大体次の項目が考えられよう。

- a) 波高対ストローク比； s (圧力式の場合はストロークの替りに圧力水頭をとる。) この値が波長とどう云う関係にあるか、又達し得られる最高値はどれ位であるか。
- b) 排除水量比； q 、波の一山の水量と造波機の一揺れの水量との比であって、波を作るのに、大体どれ位の水量を動かさねばならぬかを示す。明らかにこの値は小さい方が望ましい。
- c) 仕事率；波が持つエネルギーは単位長さ当り、 $\frac{1}{4} \rho g h_w^2 B$ であるから単位時間に持ち去るエネルギーは、馬力に直すと、

$$\rho g = 1,000 \text{ (kg/m}^2\text{)}, \quad 1 \text{ HP} = 75 \text{ kg} \cdot \text{m/sec} \text{ として,}$$

$$\frac{10}{3} B h_w^2 V \text{ (HP)}, \quad \text{但し } V = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \quad (\text{m, kg, sec}) \quad \dots\dots\dots (4.1)$$

で与えられる事になる。

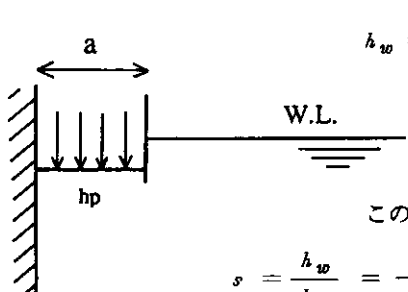
実際の駆動力を求めるには造波機に働く力を計算しなければならないが前述の如く今は考えない。

以下、各種のものについて a), b) を求めよう。

i) 圧力分布型

空気圧式はこの型の典型である。

半波高 h_w は、(2.13) から、



$$h_w = \frac{\nu}{i} \int_{-a}^a \Pi(x') e^{i\nu x'} dx' , \dots\dots\dots (4.2)$$

但し $\Pi(x) = \frac{p}{\rho g} = h_p , \dots\dots\dots (4.3)$

この場合 h_p は常数と考えてよいだろうから、

$$s = \frac{h_w}{h_p} = -2i \sin\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right) , \dots\dots\dots (4.4)$$

表面変位 η は (2.1) , (2.9) から計算しなければならないが、近似的には (2.1) から

$$\frac{p}{\rho g} \doteq -\eta , \dots\dots\dots (4.5)$$

でオーダーは間違いないだろう。

波の一山の平均水面上の水量は単位巾当り、

$$\frac{2}{\pi} h_w \lambda , \dots\dots\dots (4.6)$$

であるから排除水量比は、

$$q \doteq \frac{2}{\pi} h_w \lambda / h_p a = \frac{2\lambda}{\pi a} s , \dots\dots\dots (4.7)$$

波長の小さい所では上式は明らかに適用すべきではない。

さて (4.4) 式を見れば、

$$a/\lambda = 1/4 , \frac{3}{4} , \frac{5}{4} , \dots\dots\dots (4.8)$$

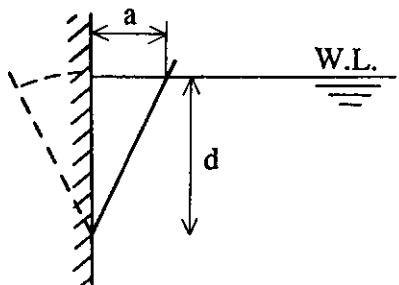
とすれば、 $|s| = 2$ となって s 比は最高となる。

又一方 (4.7) から見れば、 a は小さい程 q が大きく、従って、上式と合せ考えると a は $\frac{1}{4}$ 波長ととるのが最も良い様に思われる。

最後にこの型式即ち水面で波を造る型式は現在空気式以外に殆ど見られない様であるが、(4.5) 式が近似的に成立つとすると、空気圧のかわりに板をおいてもよい訳で、この様な型式は装置が水中に殆ど入らない点で保守その他便利な面が多い様に思われるし、又特性的にもこの節の最後に述べる様に捨て難い利点がある様に思われる。

ii) フラップ型

最もよく用いられる平板フラップ型では右図の記号を用い (2.14) 式から、



$$u(y) = i\sigma \frac{a}{d}(d+y) , 0 > y > -d , \dots\dots (4.9)$$

と考えると、

$$s = \frac{h_w}{a} = \frac{2i}{d} \int_{-d}^0 (d+y) e^{\nu y} dy = 2i \left[1 - \frac{1-e^{-\nu d}}{\nu d} \right] , \dots\dots\dots (4.10)$$

一般には、 $\nu d = 2\pi d/\lambda$ は 1 より大きいと考えられるから

$$s \doteq 2i \left(1 - \frac{\lambda}{2\pi d}\right) \underset{d \gg \lambda}{\doteq} 2i, \quad \dots\dots\dots (4.11)$$

逆に $d \ll \lambda$ ならば,

$$s \xrightarrow{\lambda \gg d} i \frac{2\pi d}{\lambda}, \quad \dots\dots\dots (4.12)$$

次に q は,

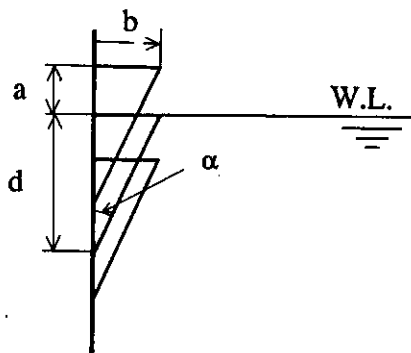
$$q = \frac{\frac{2}{\pi} h_w \lambda}{\frac{a}{2} d} = \frac{4}{\pi} \frac{\lambda}{d} s, \quad \dots\dots\dots (4.13)$$

此の型では (4.11) に見る如く s が波長によってあまり変らない点が特徴であろう。

iii) プランジャー型

此の型は前2者に比して理論的解析は複雑で、正確には田才氏(前出)等の方法で問題を解かねばならないと考えられるが、此処では波長はプランジャーの巾(b)に比して充分大きいと考えて (2.14) 式にあてはめて考えて見よう。

a) 左図の如き直線的な形では,



$$u(y) \doteq i \sigma a \sin \alpha, \quad 0 > y > -d, \quad \dots\dots (4.14)$$

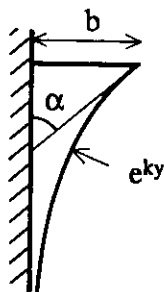
とおくと,

$$s = \frac{h_w}{a} = 2i \sin \alpha \left(1 - e^{-\frac{2\pi d}{\lambda}}\right), \quad (4.15)$$

$$q \doteq \frac{\frac{2}{\pi} h_w \lambda}{a b} = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{b} s, \quad \dots\dots (4.16)$$

となり, (4.15) から s の直線性は前項の型よりもよさそうであるが, 一方 $\sin \alpha$ が掛っているのでストロークは長くなる。

b) 次に形を exponential にすると (K を与えられた値とする。),



$$u(y) \doteq i \sigma a b K e^{Ky}, \quad \text{for } y < 0, \quad \dots\dots (4.17)$$

$$Kb = \tan \alpha, \quad K = \frac{2\pi}{\mu},$$

$$s = \frac{h_w}{a} = \frac{4\pi b i}{\lambda + \mu} = \frac{2i \tan \alpha}{1 + \frac{\mu}{\lambda}}, \quad \dots\dots\dots (4.18)$$

$$q = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{b} s, \quad \dots\dots\dots (4.19)$$

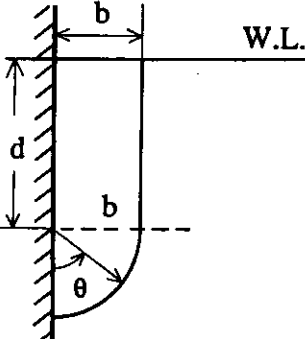
となって、前者と殆ど変らなくなる。

我々の実験室において此の型のものを試作実験して見た結果では、実験範囲も狭い故為もあって殆ど上の直線式の(4.15)が適用出来る様であった。

又實際上 exponential curve とする事は水面附近の形状が急になりすぎて、実行不能の様である。

c) 次にあまり必要はない様に思われるし、又一方簡単には取り扱えない場合であるけれども比較のために簡略化して示そう。

それは左図の如く、直線と4分円弧から成る場合で今 $d \gg b$ とし、
(2.11)式で右边第2項を無視したもので表わされるとすると、



$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = i \sigma a \cos \theta, \quad \dots\dots\dots (4.20)$$

となって、

$$s = \frac{h_w}{a} = 2i\nu b \int_0^{\pi/2} \cos \theta e^{-\nu d - \nu b \cos \theta + i \nu b \sin \theta} d\theta$$

であるが、 $\nu b = 2\pi b/\lambda \ll 1$ とすると、

$$s \div \frac{4\pi b}{\lambda} e^{-\frac{2\pi b}{\lambda}}, \quad \dots\dots\dots (4.21)$$

となって波長が小さくなってくると非常に効率が悪い。

此の型では d の部分を大きくする事は何等意味がない様に思われる。

さて最後に実際の造波機の運動は常に高周波部分を含むと考えられる。今例えば2倍の周波数の成分を考えると、その成分について上述のすべての式で σ を2倍に従って ν は4倍波長 λ は $\frac{1}{4}$ とすれば結論はすべて同じとなり此等の結果を加え合えれば求むる波が得られる。

従って ii), iii) の型では s は波長によってあまり変わらず、むしろ波長が小さいと大きくなるから、此の倍周波分は殆ど其の倍かむしろ僅かに強調されてくるので波形は崩れてくる。

一方、i) の型では σ を仮に $1/4$ 波長にとるとすると倍周波数成分は略々 $1/3$ に減ってくるから、外に出て行く波は前2者に比しきれいになると考えられる。

以 上