

翼理論における非線形可逆定理

別所 正 利

概 要

翼理論におけるFlaxの変分原理は線形理論に立脚しているので所謂非線形問題には役立たない。本報はその非線形への拡張定理について述べその応用例を示す。

なお粘性を含む一般の誘導法は今秋の造船学会にて講演予定であるのでこゝでは粘性はないが渦のある流れについての別証を記す。

1. 定理の誘導

擾乱速度を $\mathbf{1} + \mathbf{u} = (1 + u, v, w)$, 渦度を $\vec{\omega} = (\xi, \eta, \zeta)$, 全圧を ρG とすると運動方程式は

$$\Delta G = (\mathbf{1} + \mathbf{u}) \times \vec{\omega} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1+u & v & w \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}, \quad (1)$$

$$G = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} [(1+u)^2 + v^2 + w^2], \quad (2)$$

$$\xi = w_y - u_z, \quad \eta = u_z - w_x, \quad \zeta = v_x - u_y, \quad (3)$$

後流渦面を除けば速度ポテンシャルは存在する。

今逆流れのそれを $\tilde{\phi}$ としよう。

$$\nabla \tilde{\phi} = \tilde{\mathbf{u}}, \quad \nabla \phi = \mathbf{u}, \quad (4)$$

以下()印を逆流れ量を示すものとする。

これを(1)式にかけて翼及び後流渦面の外側の領域 D で積分すると

$$\int_D \nabla \tilde{\phi} \cdot \nabla G \, d\tau = J - I, \quad d\tau = dx \, dy \, dz, \quad (5)$$

$$I = \int_D (\zeta \tilde{v} - \eta \tilde{w}) \, d\tau, \quad (6)$$

$$J = \int_D (\mathbf{u} \times \vec{\omega}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \, d\tau, \quad (7)$$

となるが(5)式左辺の積分において全圧 G は今は粘性による散逸はないとしているので一定であるからこれは0である。

それ故

$$I = J, \quad (8)$$

同様にして

$$\tilde{I} = \int_D (\tilde{\zeta}_v - \tilde{\eta}_w) d\tau, \quad (9)$$

$$\tilde{J} = \int_D (\tilde{u} \times \tilde{w})_u d\tau, \quad (10)$$

とおくと

$$\tilde{I} = \tilde{J}, \quad (11)$$

が成立つが、一方

$$\begin{aligned} I + \tilde{I} &= \int_D (\zeta \tilde{v} - \eta \tilde{w} + \tilde{\zeta}_v - \tilde{\eta}_w) d\tau \\ &= \int_D [(-u\tilde{u} + v\tilde{v} + w\tilde{w})_x - (u\tilde{v} + \tilde{u}v)_y - (u\tilde{w} + \tilde{u}w)_z] d\tau \\ &= \int_{S+W} \left(u \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} + \tilde{u} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \nabla \phi \cdot \nabla \tilde{\phi} x_n \right) dS, \end{aligned} \quad (12)$$

それ故(8)と(11)を辺に加え合せて次の定理をうる。

$$\int_{S+W} \left(u \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial n} + \tilde{u} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \nabla \phi \cdot \nabla \tilde{\phi} x_n \right) dS = I + \tilde{J}, \quad (13)$$

薄翼では左辺第3項は右辺と同じく高次の量であるから無視すると

$$\int_{S+W} (u \tilde{\phi}_n + \tilde{u} \phi_n) dS = 0, \quad (14)$$

となり、Flaxの定理となる。

それに対して(13)はその拡張となり線形仮定は入っていないので非線形性が見積りが出来る事になる。

2. 薄翼の揚力

図のように矩形揚力面を考え、後流渦面では

$$\eta = \zeta = 0, \quad \int \xi dy dz = d\tau(y, z), \quad (15)$$

となるから対称性を考えに入れると(13)は近似的

$$\begin{aligned} 2 \int_S (p\tilde{w} + \tilde{p}w) dx dy &= 2\rho \int_W r_y(y, z) [w\tilde{v} - v\tilde{w}] dx dy, \\ \text{但し } p &= -\rho u, \quad \tilde{p} = -\rho \tilde{u} \end{aligned} \quad (16)$$

仰角を α とし細表翼を考えると

$$r(y) = \alpha \sqrt{\frac{B^2}{3} - y^2} \quad (17)$$

$$C_{L0} = \frac{\pi}{2} \alpha \lambda, \quad \lambda = B/L$$

この時

$$v - i\omega = i\alpha \left[1 - \frac{y + iz}{\sqrt{(y + iz)^2 - \frac{B^2}{4}}} \right] ,$$

であるから近似的に

$$v \doteq - \frac{\alpha y}{\sqrt{z^2 + \frac{B^2}{4}}} , \quad w \doteq \frac{\alpha z}{\sqrt{z^2 + \frac{B^2}{4}}} , \quad (18)$$

となるのでこれらを(13)に代入すると

$$C_L = \frac{\pi\lambda}{2} \alpha \left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{\lambda^2}{4}}} \right) , \quad (19)$$

同じ事を図(b)の揚力線模型で計算してみると

$$C_L = \frac{\pi\lambda\alpha}{1 + \frac{\lambda}{2}} \left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \lambda^2}} \right) , \quad (20)$$

この式で $\lambda \gg \alpha$ とすると

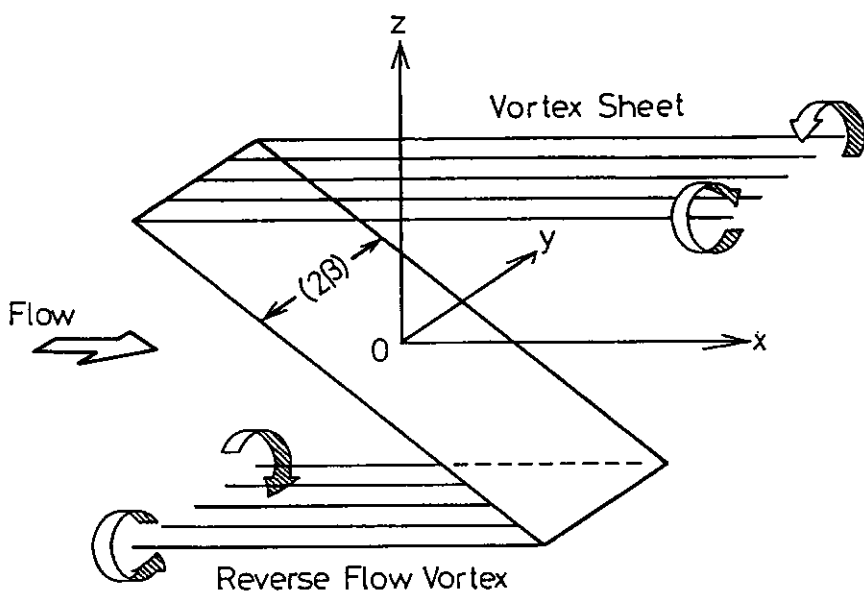
$$C_L = \pi\lambda\alpha , \quad (21)$$

となり、元良の与えた近似式に一致する。

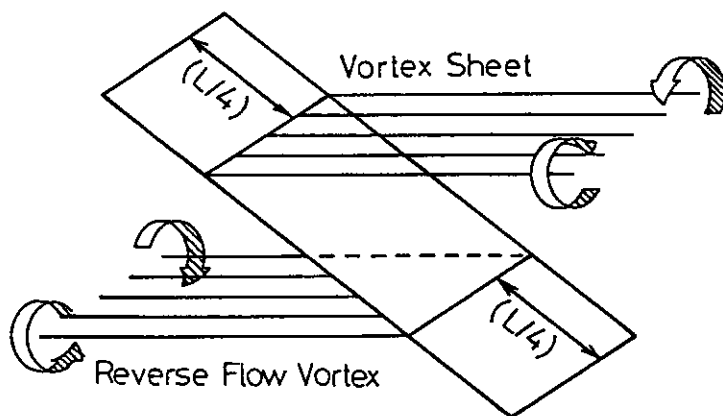
また(19)は井上の式によく似た形をしており、又数値的にも殆ど等しく、菅井、浜本の計算値ともよく一致する。

また不破の実験値、洞爺丸の実験値等と較べると(19)も捨て難いものがあり、特に回転槽円体ではその右辺第1項を無視したものの方が良いようにも見える。

以 上



(a) Slender Wing Theory



(b) Lifting Line Theory

Flat Plate Wing